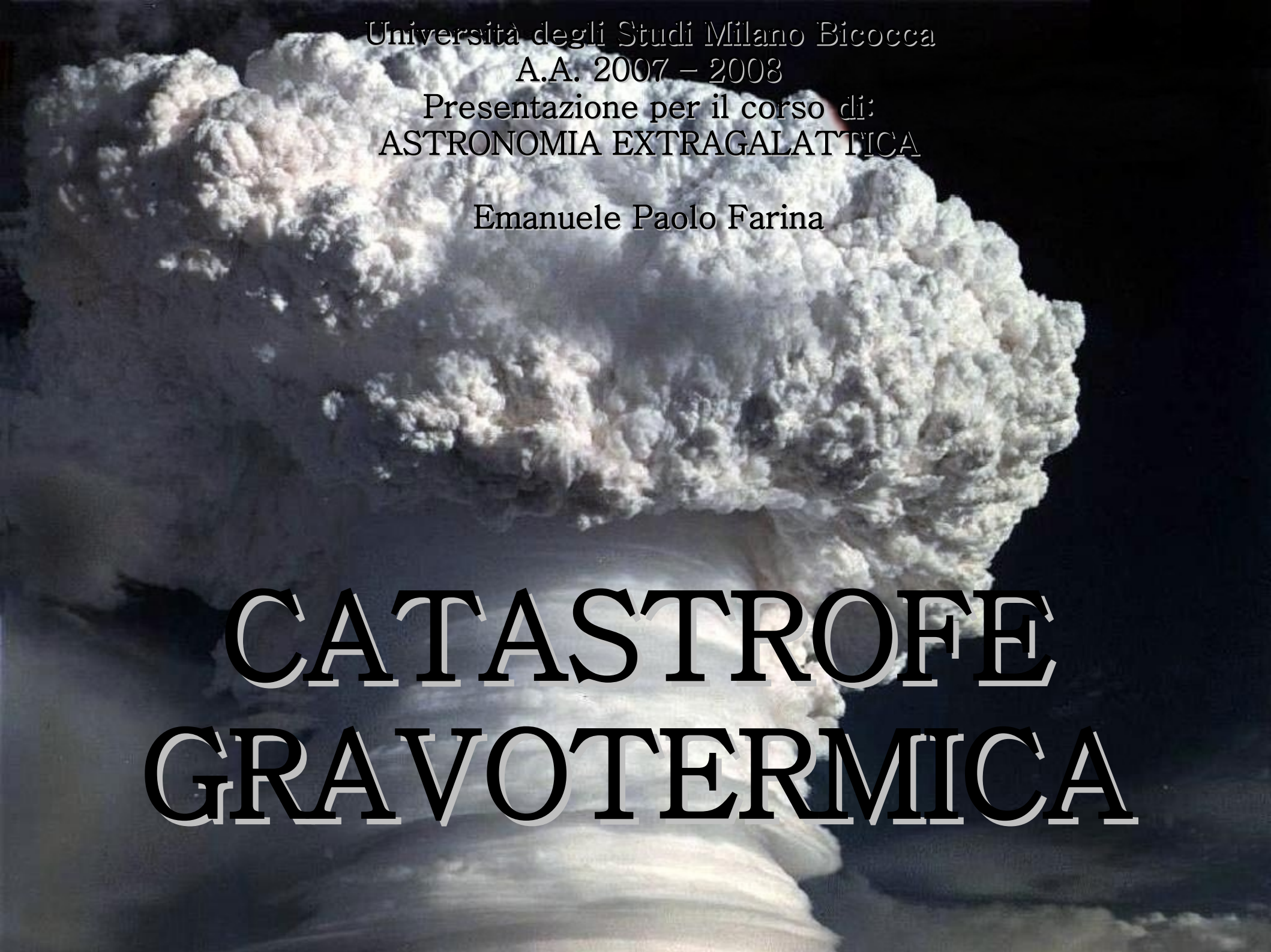




Università degli Studi Milano Bicocca

A.A. 2007 – 2008

Presentazione per il corso di:
ASTRONOMIA EXTRAGALATTICA

Emanuele Paolo Farina

CATASTROFE GRAVOTERMICA

- NOZIONI PRELIMINARI
- AMMASSI GLOBULARI
- SFERA ISOTERMA
- MODELLO DI KING
- CATASTROFE GRAVOTERMA

TEOREMA DEL VIRIALE

$$2\mathbb{K} + \mathbb{V} = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Definisco:

momento d'inerzia

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2$$

viriale

$$G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

Che sono in relazione:

$$G = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt}$$

TEOREMA DEL VIRIALE

$$\frac{1}{m_i} \frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = 2\mathbb{K} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

La grandezza $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$ può essere legata all'energia potenziale V .

Considero l'interazione tra le particelle: $\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$ con $F_{ii} = 0$ dunque:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{dV}{dr} r_{ij}$$

E quindi:

$$\frac{dG}{dt} = 2\mathbb{K} - \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{dV}{dr} r_{ij}$$

TEOREMA DEL VIRIALE

Se ora considero un potenziale di tipo gravitazionale:

$$V(r_{ij}) = \alpha r_{ij}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathbb{K} + \mathbb{V}$$

se il sistema è legato, la media rispetto al tempo:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{dG}{dt} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \rightarrow 0$$

In quanto $G(t)$ non diverge.

In conclusione:

$$\langle 2\mathbb{K} \rangle + \langle \mathbb{V} \rangle = 0$$

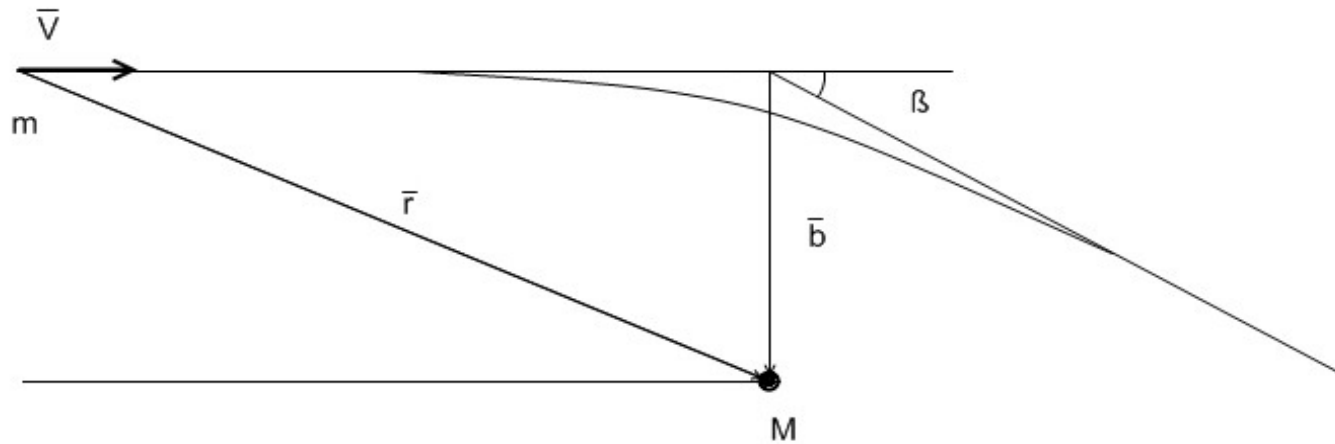
NOTA: si può dimostrare anche a livello più “statistico” considerando

la traccia di: $\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2}$

TEMPO DI RILASSAMENTO

Si vuole determinare la variazione di energia data dagli incontri distanti

1) INCONTRO m vs M



$$\Delta \vec{P} = \int \vec{F} dt \quad \rightsquigarrow \quad \Delta V_{\perp} = 2 \frac{GM}{b^2} \times \frac{b}{V}$$

$\frac{GM}{b^2}$ forza dell'interazione

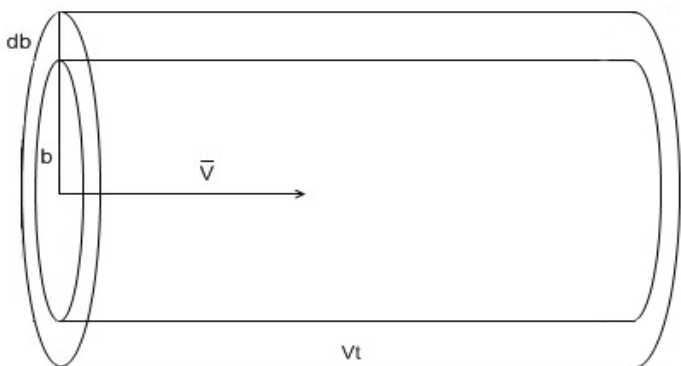
$\frac{b}{V}$ durata dell'interazione

TEMPO DI RILASSAMENTO

2) INTEGRAZIONE SU TUTTI GLI INCONTRI

$$\sum_{inter.} \Delta V_{\perp} \sim 0$$

$$\sum_{inter.} (\Delta V_{\perp})^2 \neq 0$$



$$\sum_{inter.} (V_{\perp})^2 = \int_{b_{min}}^{b_{Max}} d^3b V t n (\Delta V_{\perp})^2$$

Dove n è la densità numerica e $b_{Max} - b_{min}$ impediscono la divergenza dell'integrale:

$$b_{min} = r_{inf} = \frac{2Gm}{V^2}$$

$$b_{Max} = R_{sistema}$$

Battezzo t_{relax} il tempo in cui:

$$\frac{\sum (\Delta V_{\perp})^2}{V^2} \sim 1 \longrightarrow t_{relax} = \frac{V^3}{8\pi G^2 \rho M \ln \Lambda}$$

TEMPO DI RILASSAMENTO

t_{relax} è dunque il tempo in cui avvengono gli scambi energetici nel mio sistema.

- $t_{\text{relax}} \ll t_{\text{life}}$ SISTEMA COLLISIONALE
(e.g. globular cluster)



M2 in acquarius

- $t_{\text{relax}} \gg t_{\text{life}}$ SISTEMA NON COLLISIONALE (e.g. ellittiche)



NGC1132

AMMASSI GLOBULARI (GC)

- Sferici
- Alcuni pc
- Densi (1000 star/pc^3 vs 1 star/pc^3 vicino al sole)
- Collisionali ($t_{\text{relax}} \ll t_{\text{vita}}$)
- Vecchi (diagramma HR)
- Autogravitanti



“STORIA” OSSERVATIVA DEI GC

- 1665 A. Ihle: osservazione con telescopio amatoriale (M22)
- 1764 C. Messier: risolve le stelle di un GC (M4)
- 1782 W. Herschel: survey dei 33 GC conosciuti e introduce il termine “Ammasso Globulare”
- 1914 H. Shapley: dimensioni via lattea + determinazione centro



MODELLI DI GC: EQUILIBRI NON COLLISIONALI IN SIMMETRIA SFERICA

Sfrutto modelli non collisionali come approssimazioni al prim'ordine di ammassi globulari.

Per simmetria sferica:

$$\phi = \phi(r) \qquad \rho = \rho(r) = \int d^3v \, f(\bar{x}, \bar{v})$$

Per non-collisionalità:

$$\mathbb{E} = \frac{v^2}{2} + \phi \qquad L = | \bar{r} \wedge \bar{p} |$$

Dunque:

$$f(\bar{x}, \bar{v}) \longrightarrow f(L, \mathbb{E}) \sim f(\mathbb{E})$$

Equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho$$

permette di legare: $f \leftrightarrow \rho \leftrightarrow \phi$.

Per sistemi legati si introducono:

- relative potential:

$$\Phi = -\phi + \phi_0$$

- relative energy:

$$\varepsilon = -\mathbb{E} + \phi_0 = \Phi - \frac{v^2}{2}$$

con ϕ_0 tale che $f > 0$ se $\varepsilon < 0$ e $f = 0$ se $\varepsilon \geq 0$ (particelle legate)

MODELLI DI GC: LA SFERA ISOTERMA

Si consideri una distribuzione Maxwelliana:

$$f(\varepsilon) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\varepsilon}{\sigma^2}}$$

da questa si può ricavare:

$$\rho(r) = \int d^3v f(\varepsilon(v)) = \rho_1 e^{-\frac{\Phi}{\sigma^2}}$$

Considero ora di risolvere il problema di Poisson:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi = -4\pi G \rho$$

e assumendo che l'andamento di ρ sia: $\rho = C r^b$

si ottiene:

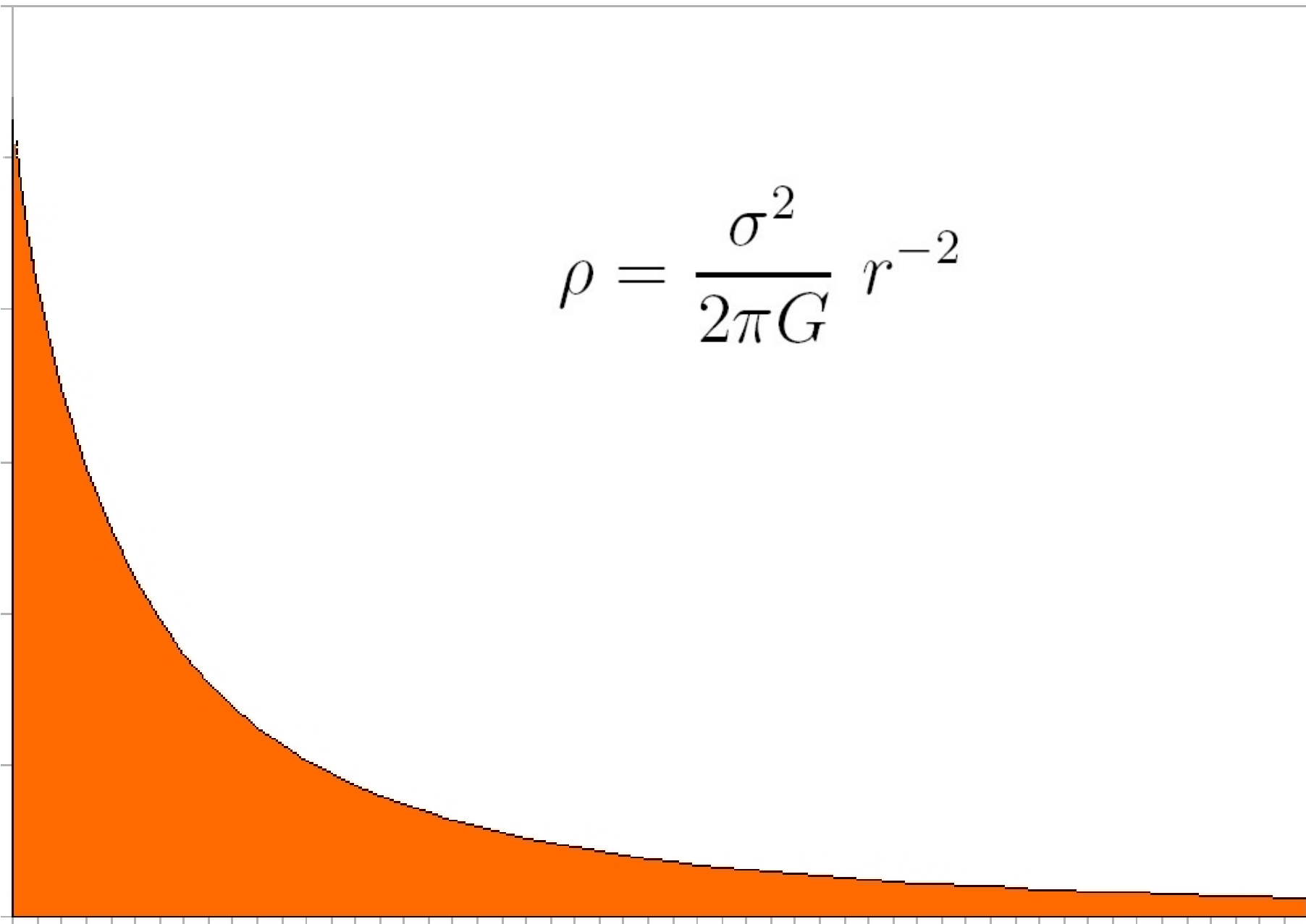
$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G} r^{-2}$$

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G} r^{-2}$$

ρ

1

r



SFERA ISOTERMA VS SFERA DI GAS AUTOGRAVITANTE

Equazione di stato per un gas autogravitante:

$$\frac{d}{dr} P = - \frac{G M (< r)}{r^2} \rho$$

se il gas è isoterma:

$$P = \frac{\rho \mathcal{K} T}{m} \longrightarrow r^2 \frac{d}{dr} \lg \rho = -G \frac{m M (< r)}{\mathcal{K} T}$$

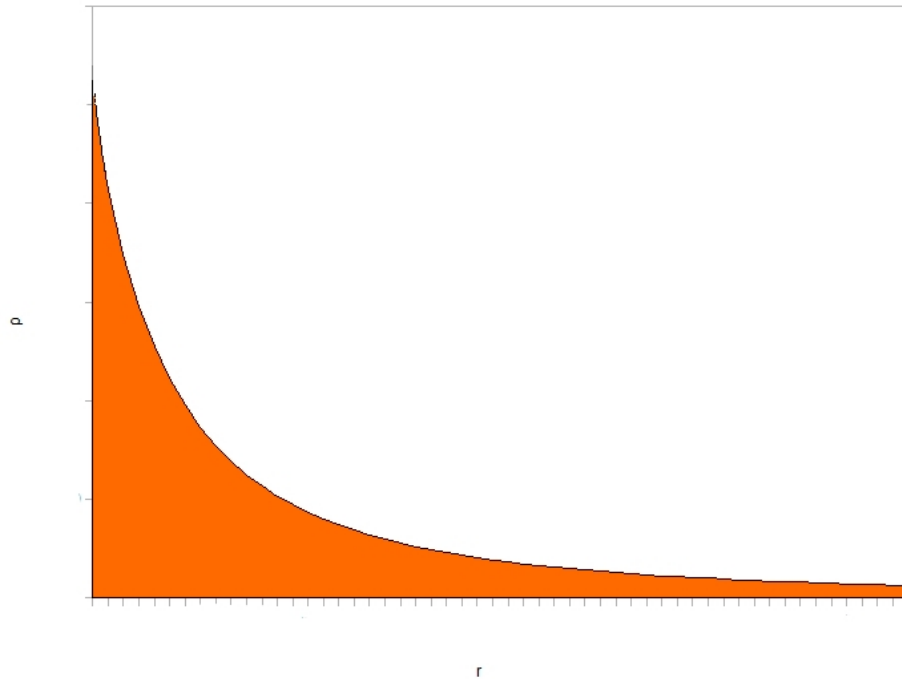
derivando nuovamente per d/dr e poiché: $dM = 4\pi r^2 dr \rho$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \ln \rho = - \frac{4\pi G m}{\mathcal{K} T} r^2 \rho$$

che formalmente è quanto ottenuto per la sfera isoterma:

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \ln \rho = - \frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho \qquad \sigma^2 = \frac{\mathcal{K} T}{m}$$

PROBLEMI DELLA SFERA ISOTERMA



- $r=0$ allora $\rho \rightarrow \infty$ che va contro l'ipotesi di non collisionalità.

- massa infinita:

$$M(< r) = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \rho d\tilde{r} = \frac{2\sigma^2}{G} r$$

- MA descrive gli aloni di materia oscura:

$$\frac{v_c^2}{2} = \frac{G M(< r)}{r} \longrightarrow v_c = 2\sigma$$

ovvero v_c costante

MODELLI DI GC: IL MODELLO DI KING

King risolve i problemi della sfera isoterma imponendo delle condizioni di regolarità e un cut off sulle velocità.

Si vuole cioè risolvere il problema di Poisson:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} \rho$$

con la condizione di regolarità:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

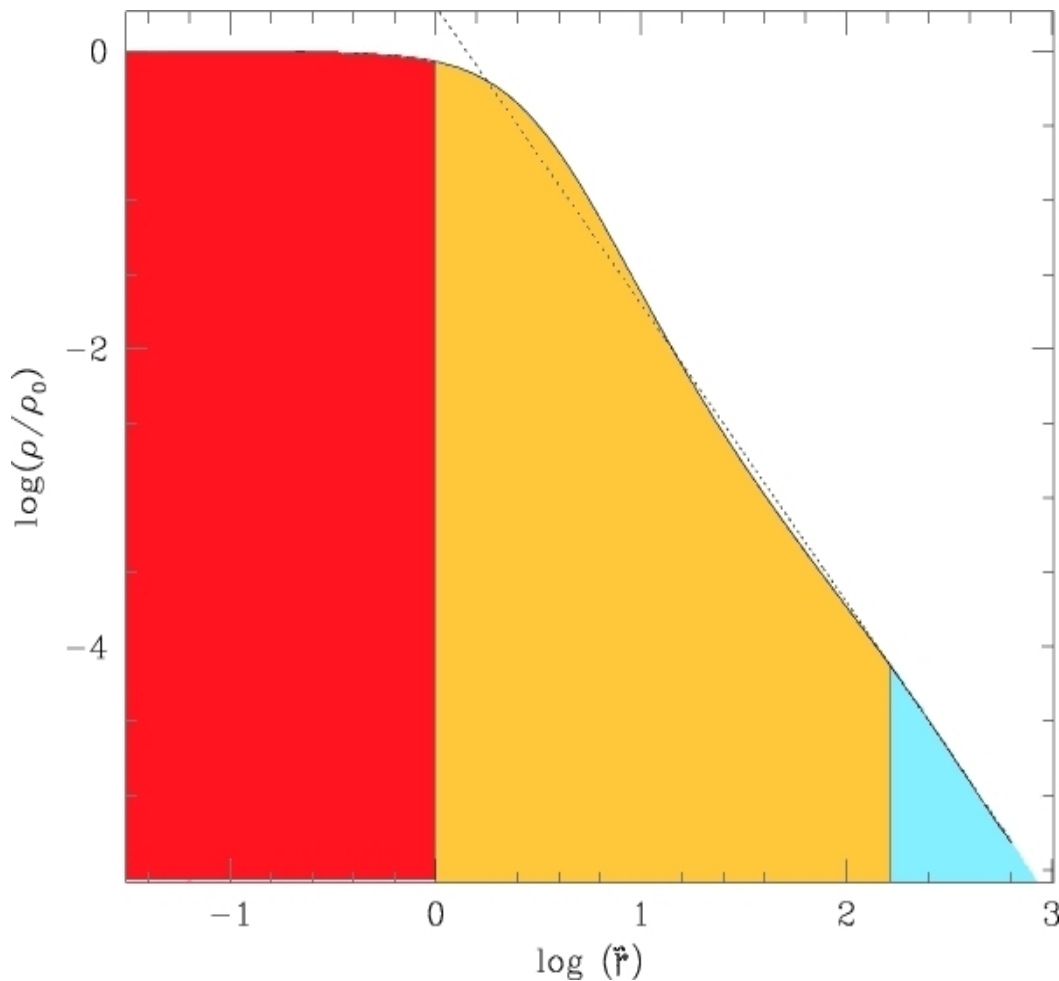
dove: $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ con ρ_0 densità centrale.

Si introduce il raggio di King r_0 : $r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}$ e: $\tilde{r} = \frac{r}{r_0}$

l'equazione di Poisson diviene:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \ln \tilde{\rho} = -9\tilde{\rho} \tilde{r}^2$$

che può essere risolta numericamente:



- core dato dalle condizioni di regolarità
- fit analitico di Hubble:

$$\tilde{\rho} = (1 + \tilde{r}^2)^{-\frac{3}{2}}$$

- andamento simile alla sfera isoterma:

$$\tilde{\rho} \propto \tilde{r}^{-2}$$

King elimina il problema della divergenza dell'integrale imponendo un cut off sulle velocità:

$$\begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[e^{-\frac{\varepsilon}{\sigma^2}} - 1 \right] & \varepsilon \geq 0 \\ 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

questo cut off a $\varepsilon=0$ fa si che:

$$\varepsilon = \Phi - \frac{v^2}{2} = 0 \Rightarrow v_{cut\ off} = \sqrt{2\Phi}$$

dunque ho un certo raggio (r_{tidal}) per cui $\rho(r_t)=0$

e dunque la massa totale non potrà divergere.

NOTA la $v_{\text{cut off}}$ non corrisponde alla velocità di fuga, ma alla velocità che una particella deve avere in ogni punto per “superare” il bordo.

ALTRI MODELLI

- Plummer

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r_P^3} \frac{1}{(1 + r^2/r_P^2)^{5/2}}$$

- γ -model

$$\rho(r) = \frac{(3 - \gamma)M}{4\pi} \frac{r_c}{r^\gamma (r + r_c)^{4-\gamma}}$$

- β -model

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r^2/r_c^2)^{\beta/2}}$$

- Henon

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r_H} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2/r_H^2}}$$

CATASTROFE GRAVOTERMICA

Instabilità dinamica dovuta al fatto che un sistema autogravitante con un determinato contrasto di densità tra “centro” e “periferia” risulta essere in uno stato di minima entropia.

Visto in modo semplice:

$$\mathbb{K} = \frac{3}{2} \mathcal{N} \mathcal{K} \langle T \rangle$$

per il viriale:

$$\mathbb{E} = -\mathbb{K} = -\frac{3}{2} \mathcal{N} \mathcal{K} \langle T \rangle$$

e dunque la capacità termica risulta:

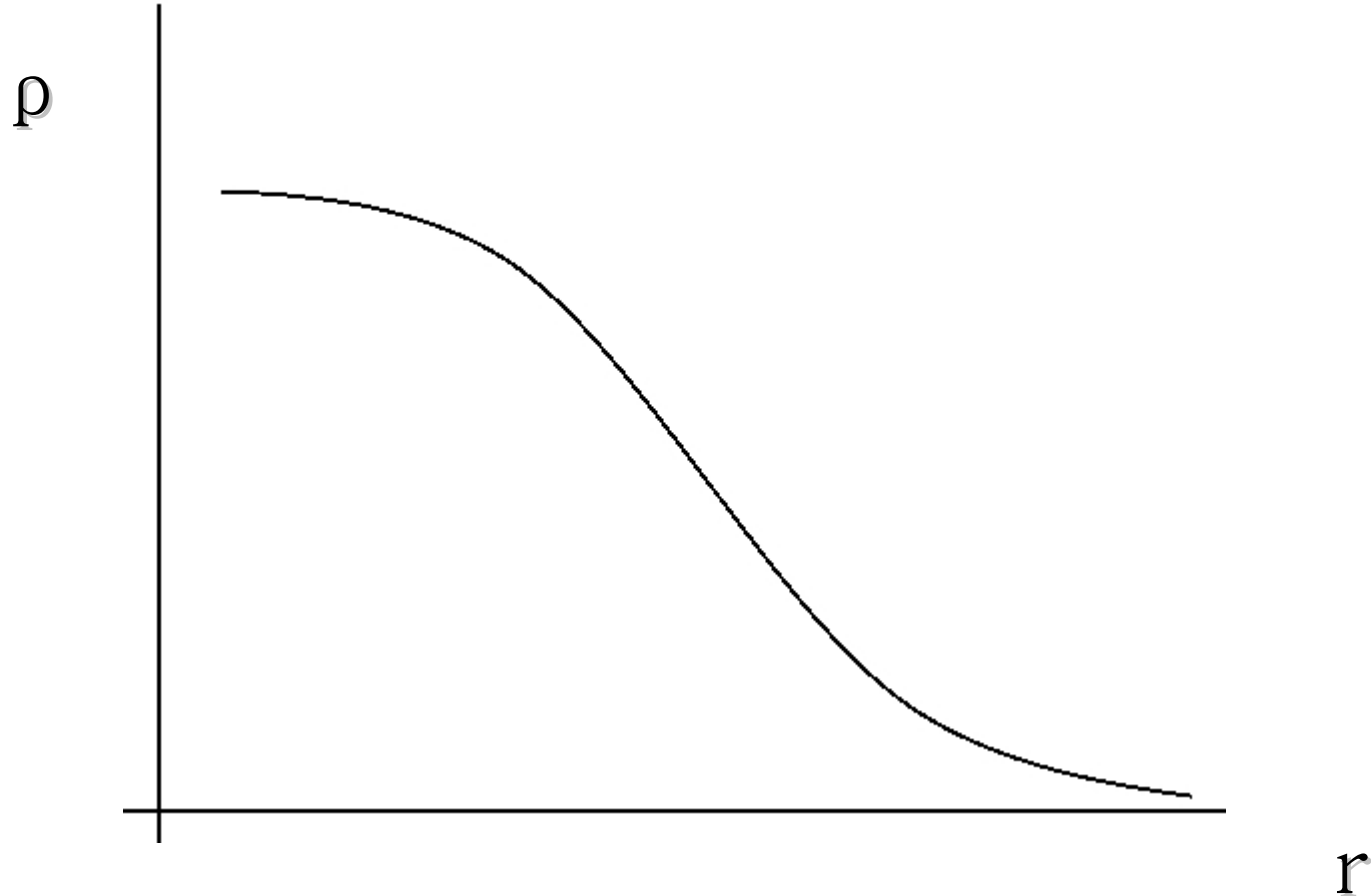
$$\mathcal{C} = \frac{d\mathbb{E}}{d\langle T \rangle} = -\frac{3}{2} \mathcal{N} \mathcal{K}$$

negativa! Ovvero più perde energia più diventa caldo.

Considero un gas autogravitante ideale confinato in un volume sferico di raggio r_b ($\sim$ stelle), con:

$$f(\varepsilon) \propto e^{-\frac{\varepsilon}{\sigma^2}}$$

e opportune condizioni di regolarità che mi portano a:



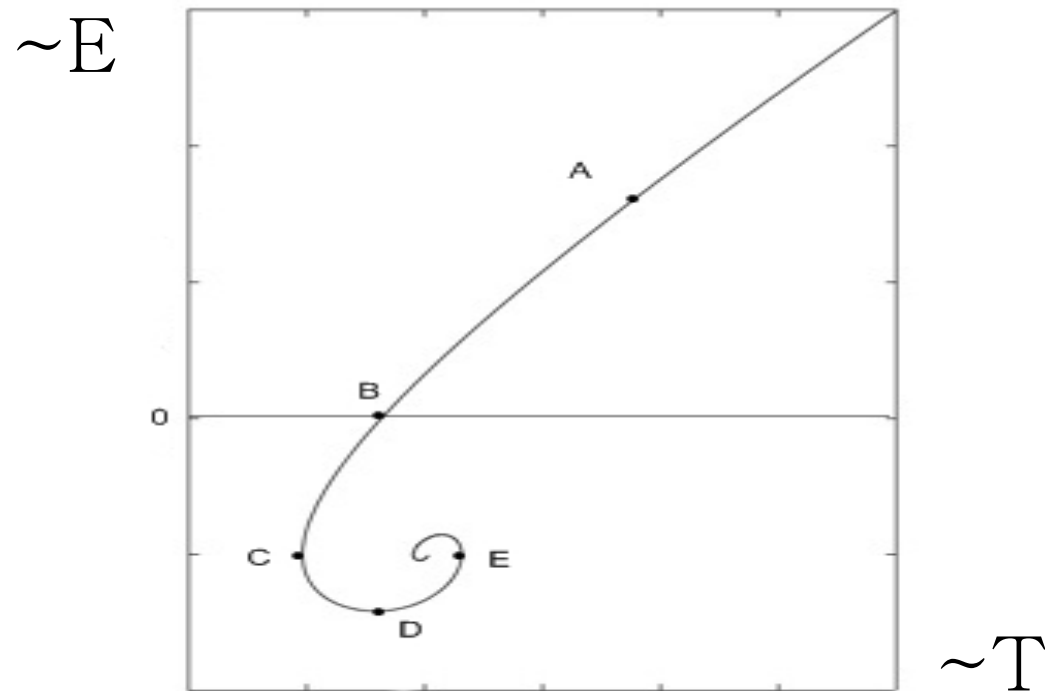
Considerando che l'energia è data da: $\mathbb{E} = \mathbb{K} + \mathbb{V}$
 e sapendo che:

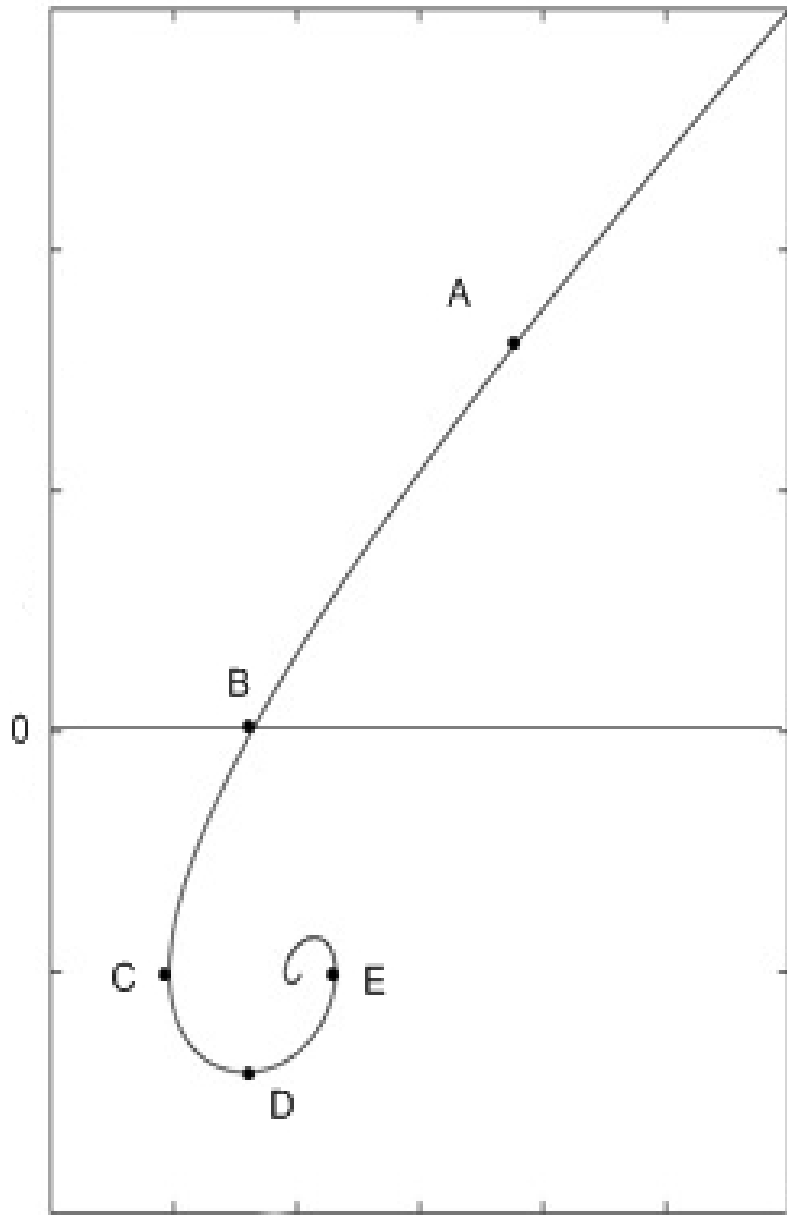
$$\mathbb{K} = \frac{3}{2} \mathcal{N} \mathcal{K} T \qquad \mathbb{V} = \frac{1}{2} \int_0^{r_b} 4\pi r^2 \rho(r) \phi(r) dr$$

si ottiene, procedendo nei conti:

$$\mathbb{E} = \frac{4\pi r_b^3 \rho(r_b)}{\beta} - \frac{3 M_{tot}}{2\beta} \qquad \beta = \frac{m}{\mathcal{K} T}$$

a meno di costanti si ha dunque:





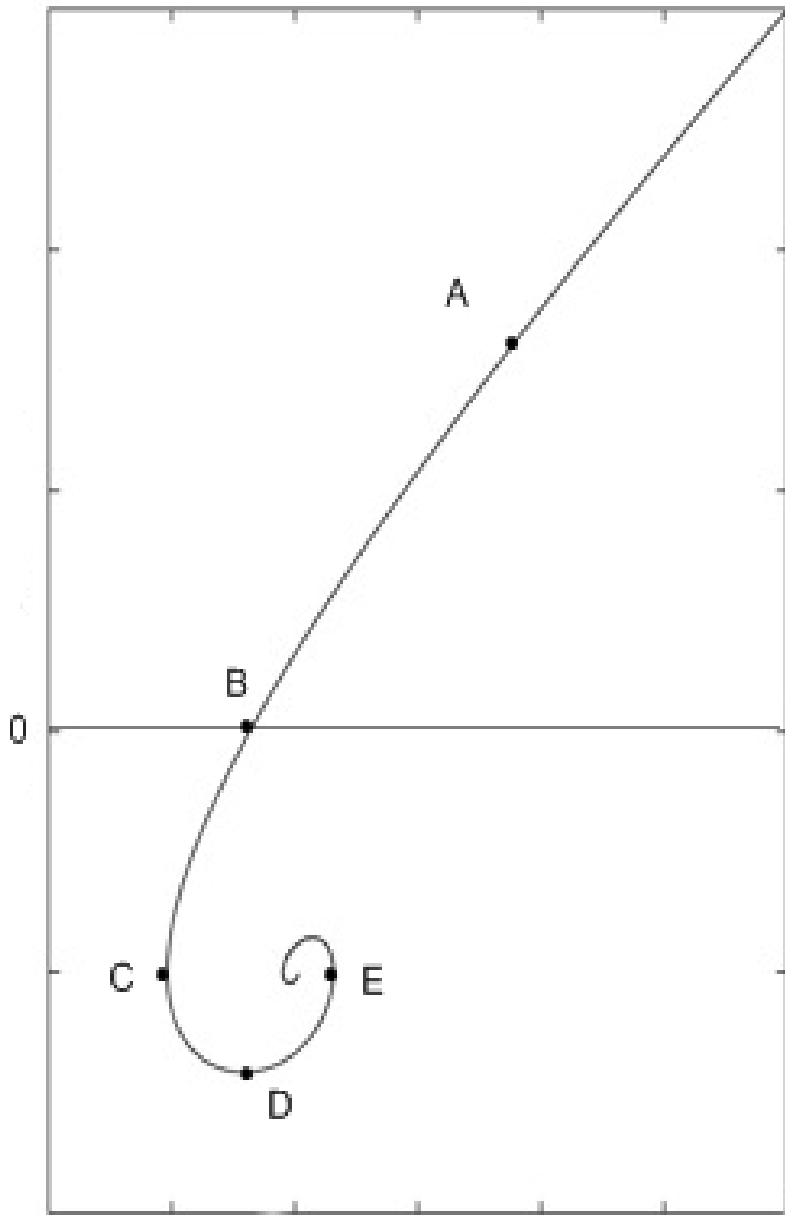
Supponiamo che il recipiente
sia circondato da un bagno
termico a T molto alta.

Sotto queste condizioni il gas
è assimilabile ad un gas
ideale (V trascurabile),
quindi:

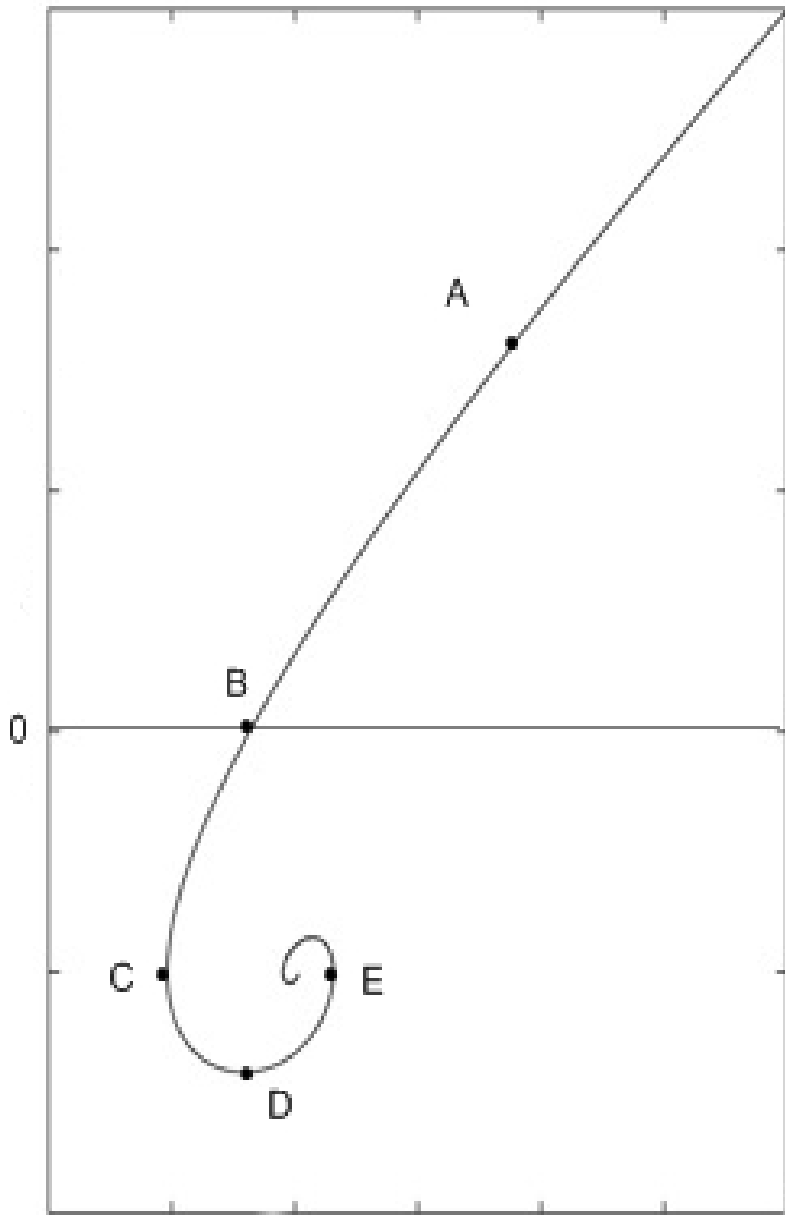
$$\mathbb{E} \simeq \frac{3}{2} \mathcal{N} K T \quad \mathcal{C} \simeq \frac{3}{2} \mathcal{N} K$$

Il sistema si troverà quindi
nello stato A.

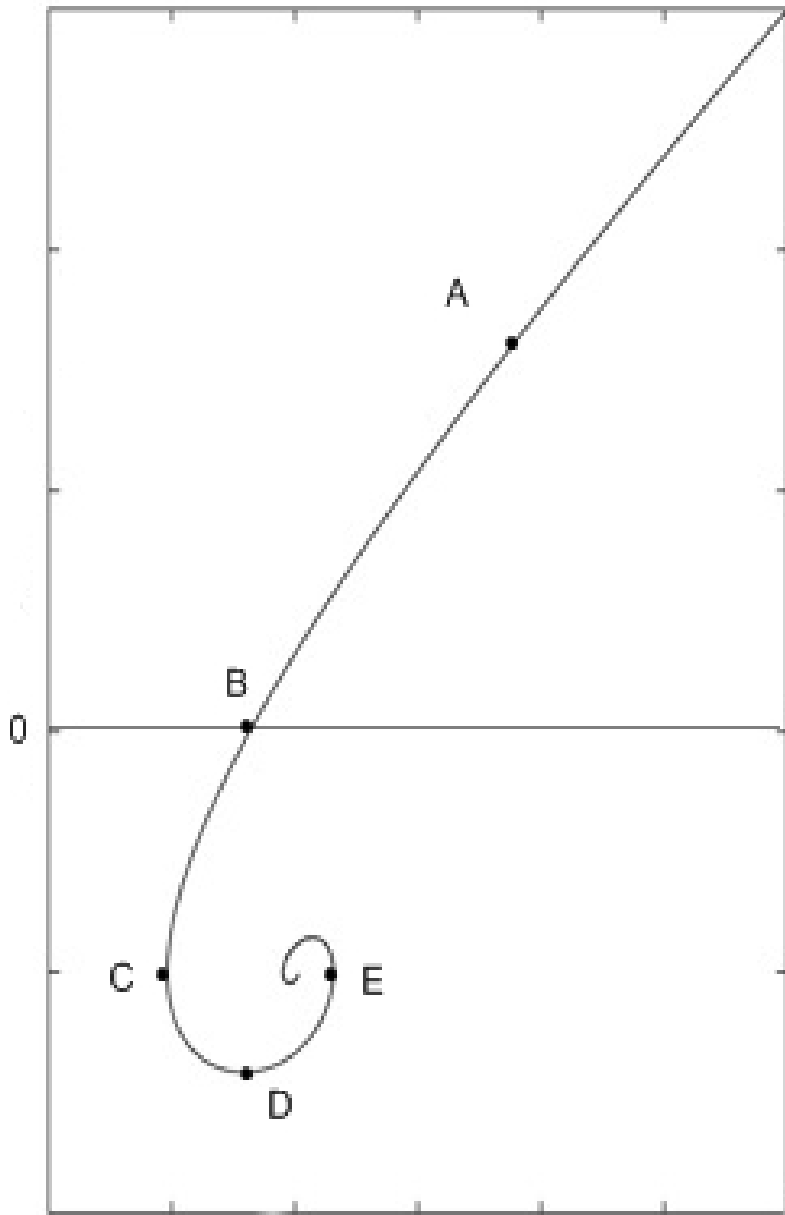
Se si riduce la temperatura del bagno termico, l'energia fluisce dal mio sistema al bagno fino al punto B dove diventa negativa.

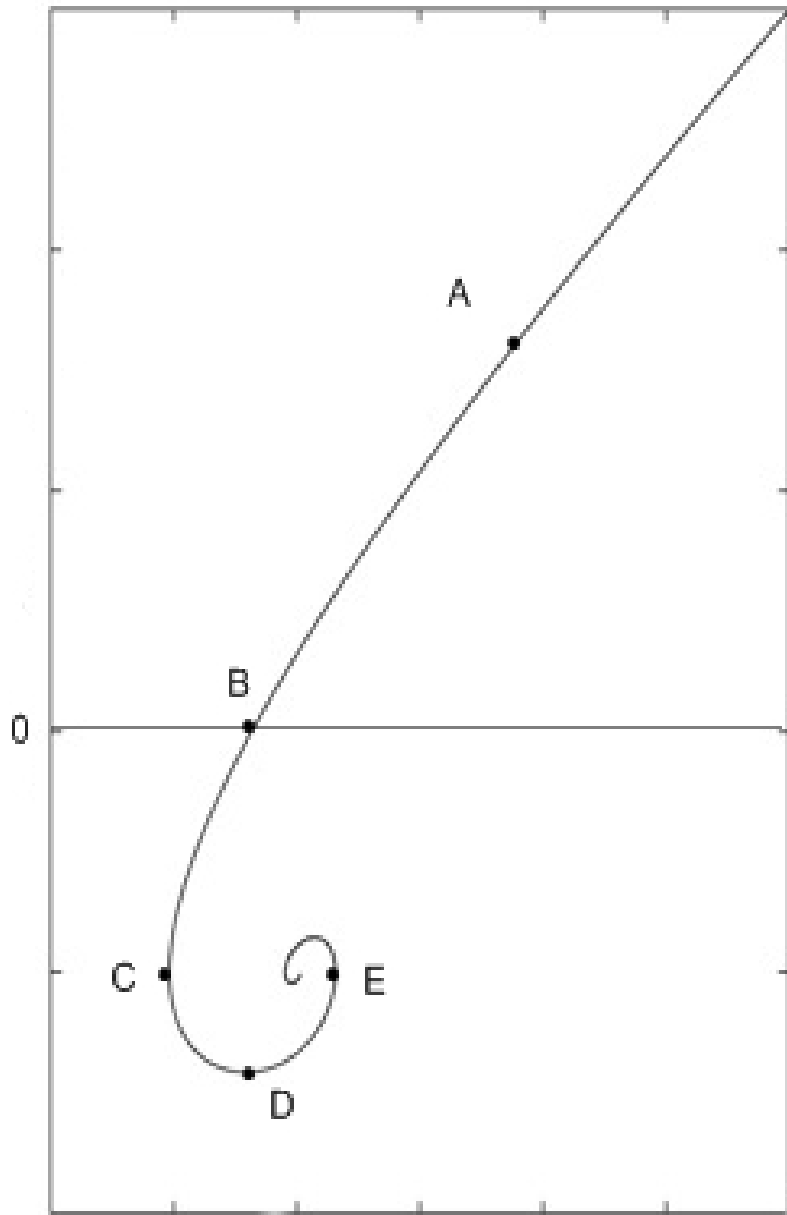


Continuando a diminuire la temperatura del bagno, la capacità termica del mio sistema diventerà sempre più grande fino a diventare infinita in C.

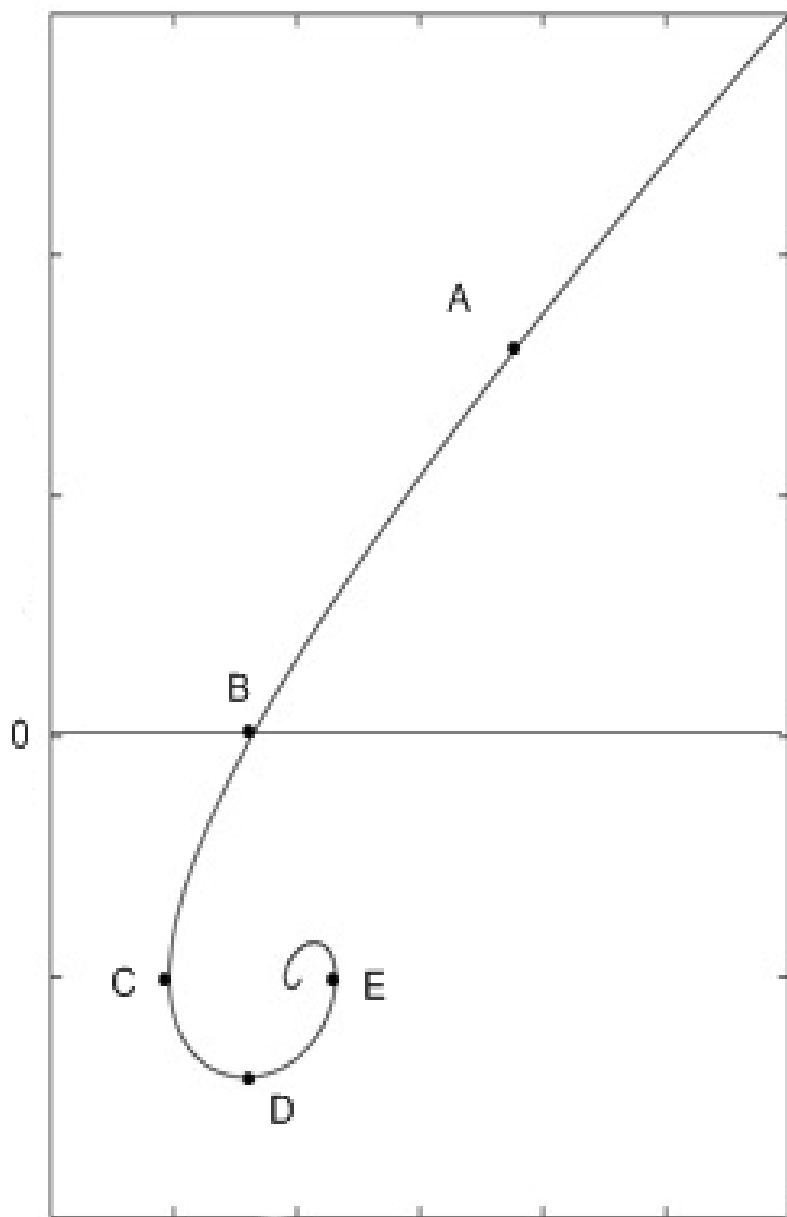


Da C a D il sistema avrà una capacità termica negativa e dunque risulta completamente instabile.





Tra i punti D e E la capacità termica del sistema tornerà ad essere positiva ma un'analisi più dettagliata (Horwitz&Katz, 1978) mostra che il sistema è ancora instabile.



Si può dunque affermare
che qualunque sistema
superi il punto C risulta
essere dinamicamente
instabile.

Si può associare al punto C
una grandezza più “fisica”
ovvero il contrasto di
densità:

$$R = \frac{\rho_0}{\rho(r_b)}$$

che in C vale $R_c = 32,1$

Si può dimostrare (Lynden-Bell & Wood, 1978) che questa instabilità avviene poiché il gas autogravitante (per E , M e r_b fissati) raggiunge un minimo locale di entropia.

Da qui dunque il sistema tende a fuggire verso stati ad entropia maggiore.

EFFETTI FISICI

Alone: “poca” gravità, $Ch > 0$

Core: confinato da autogravità, $Cc < 0$

Se T_c diventa momentaneamente maggiore di T_h , il calore fluisce dal core all'alone e entrambe le temperature aumentano:

- $Ch < |Cc|$ T_h aumenta più di T_c e il flusso di calore si spegne
- $Ch > |Cc|$ l'alone non riesce a scaldarsi velocemente quanto il core e aumenta ΔT .
Si ha dunque la catastrofe gravotermica.

La catastrofe gravotermica in un gas si manifesta attraverso la conduzione di calore dunque il tempo scala in cui avviene è $t_{\text{diffusione}}$.

L'analogo di $t_{\text{diffusione}}$ in un sistema stellare è t_{relax} e dunque in un sistema stellare la catastrofe gravotermica avviene in questo tempo scala.

REFERENZE

- Binney, J. Tremaine, S. – Galactic dynamics – 1994
- Ciotti, L. – Appunti di dinamica stellare – 2006
- King, I. – Astronomical journal, vol. 71 n°1 – 1966
- <http://it.wikipedia.org/wiki/Wiki>
- <http://hubblesite.org/>