

53

CONTRIBUTI
DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE
a cura del Direttore
Prof. FRANCESCO ZAGAR

NUOVA SERIE

N. 235

Edoardo PROVERBIO

SUR LA DÉTERMINATION
DU FACTEUR DE QUALITÉ
DU SYSTÈME BALANCIER-SPIRAL
D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE

(Estratto «Annales Française de Chronométrie», Tome XIX, 3^e trim.-)

1965

SUR LA DÉTERMINATION
DU FACTEUR DE QUALITÉ
DU SYSTÈME BALANCIER-SPIRAL
D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE

Edoardo PROVERBIO

SUR LA DÉTERMINATION DU FACTEUR DE QUALITÉ DU SYSTÈME BALANCIER-SPIRAL D'UN OSCILLATEUR MÉCANIQUE

Edoardo PROVERBIO

Résumé. — L'importance remarquable que revêt le facteur de qualité Q d'un système oscillant dans la chronométrie en général est brièvement rappelée.

On considère ensuite l'oscillateur mécanique constitué par le système balancier-spiral et une relation, valable dans des cas plus généraux, qui permet la détermination de Q en fonction de la vitesse angulaire φ' au point de repos.

On déduit enfin certaines relations qui fournissent, en fonction de Q , les valeurs de φ , φ' et d'autres grandeurs.

* * *

Summary. — Briefly is reminded the remarkable significance that the figure of merit Q assume in general chronometry.

Successively for the mechanical oscillator spring balance is determined a relation allowing to determine Q in terms of the angular speed φ' in the poise point in the most common cases.

Finally some relations are deduced giving φ , φ' and other quantities in terms of Q .

Riassunto. — Viene brevemente ricordata la notevole importanza che il fattore di qualità Q di un sistema oscillante riveste nella cronometria in generale.

In seguito viene considerato l'oscillatore meccanico costituito dal sistema bilanciere-spirale e determinata una relazione, valida nei casi più generali, che permette la determinazione di Q in funzione della velocità angolare φ' nel punto di riposo.

Sono dedotte infine alcune relazioni che forniscono, in funzione di Q , i valori di φ , φ' e di altre grandezze.

I

L'importance que le facteur de qualité Q revêt dans la chronométrie technique et scientifique est connue. La connaissance de cet élément, défini par le rapport

$$Q = 2 \pi \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée par cycle}}$$

permet en effet une classification hautement indicative du rendement d'un oscillateur mécanique quelconque, électrique ou électronique. Il est en outre étroitement lié à la *stabilité** d'un oscillateur ; à ce propos, il a été mis en évidence [1] que le produit des deux quantités suivantes, relatives à plusieurs types d'oscillateurs, peut être représenté par la relation empirique

$$Q \cdot \frac{\Delta f}{f} = 10^{-3}$$

où la valeur du second membre représente seulement un ordre de grandeur.

La confirmation ou la démonstration d'une telle relation pour les diverses classes d'oscillateurs fournirait par conséquent la valeur d'une des deux quantités en fonction de l'autre ; dans ce cas, la connaissance du facteur de qualité permettrait d'obtenir des valeurs suffisamment indicatives de l'une des plus importantes caractéristiques dynamiques d'un oscillateur.

Si nous considérons en particulier un oscillateur mécanique constitué par le système balancier-spiral, le facteur Q peut être exprimé en fonction du décrement de l'énergie W depuis l'instant t à l'instant $t + 1^s$. L'on obtient en effet

$$\frac{W_{t+1}}{W_t} = e^{-\frac{\omega}{Q_t}}$$

Puisque pour le système étudié, si φ est l'amplitude, l'énergie emmagasinée vaut

$$W = \frac{1}{2} C \varphi^2,$$

où C représente le moment élastique du spiral, de la relation précédente on obtient pour le facteur de qualité

$$(1) \quad Q_t = \frac{\omega}{2 \lg \frac{\varphi_t}{\varphi_{t+1}}} = \frac{\pi}{\delta},$$

dans laquelle $\omega = 2\pi f$ (f = fréquence d'oscillation), φ_t et φ_{t+1} , respectivement l'amplitude de l'oscillation à l'instant t et à l'instant $t + 1^s$, alors que

$$\delta = \frac{1}{f} \lg \frac{\varphi_t}{\varphi_{t+1}},$$

représente ce que l'on appelle le « décrement logarithmique ».

La détermination du facteur Q est conditionnée dans ce cas par la connaissance de l'amplitude φ_t et de son décrement dont la mesure ne peut être effectuée par des méthodes visuelles directes, que dans des cas très particuliers, et requiert l'usage de techniques photographiques spéciales [2] ou électroniques [3]. Il est par consé-

(*) Ce terme est employé comme correspondant au terme anglais *accuracy* et, comme celui encore plus général de précision, ne correspond pas à la définition officielle (UNI) pour les instruments de mesures.

quent intéressant de rechercher la possibilité de déterminer le facteur Q en fonction d'éventuelles autres grandeurs qui peuvent, dans des cas particuliers, être mesurées plus simplement ou représenter un élément valable de contrôle des méthodes basées sur la mesure de l'amplitude.

II

En négligeant pour simplifier le mouvement harmonique idéal, considérons les deux cas les plus communs dans lesquels le système balancier-spiral est soumis : a) à un frottement $\mu = \text{constante}$; b) à un couple de frottement visqueux proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ du balancier.

Dans le premier cas, φ , dans la position d'équilibre, peut être exprimée par la relation [4]

$$(2) \quad \varphi = \frac{C}{I} \varphi_t \varphi'_t$$

où I représente le moment d'inertie du balancier, φ_t et φ'_t représentent respectivement la semi-alternance ascendante et descendante. Le rapport des carrés des vitesses angulaires aux instants t et $t + 1^s$ sera donc

$$\frac{\varphi_t^2}{\varphi_{t+1}^2} = \frac{\varphi_t \cdot \varphi'_t}{\varphi_{t+1} \cdot \varphi'_{t+1}}$$

d'où

$$\lg \frac{\varphi_t}{\varphi_{t+1}} + \lg \frac{\varphi'_t}{\varphi'_{t+1}} = 2 \lg \frac{\dot{\varphi}_t}{\dot{\varphi}_{t+1}}$$

Si nous appelons δ^* le décrement logarithmique du système et puisque l'on peut poser

$$\delta^* = \frac{1}{2} (\delta + \delta'),$$

dans laquelle δ et δ' sont les décrets correspondants aux semi-alternances ascendantes et descendantes, l'on a

$$\delta^* = \frac{1}{f} \lg \frac{\dot{\varphi}_t}{\dot{\varphi}_{t+1}},$$

d'où

$$(3) \quad Q_t = \frac{\omega}{2 \lg \frac{\dot{\varphi}_t}{\dot{\varphi}_{t+1}}}$$

Dans le second cas où $\mu = a\dot{\varphi}$, avec a constante de proportionnalité, la vitesse angulaire résulte

$$\dot{\varphi}_t = \varphi e^{t-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t),$$

c'est pourquoi dans la position d'équilibre ($\varphi = 0$, $t = 0$) l'on a

$$(4) \quad \dot{\varphi}_t = \beta \varphi_t \cdot \left(\beta = \sqrt{\frac{4 IC - a^2}{4 I^2}} \right)$$

Ce cas donne pour le facteur Q une relation identique à la relation (3), qui exprime ce facteur en fonction de la vitesse angulaire au point de repos du système balancier-spiral. De la relation (3) pour les cas considérés, comme de la relation (1), on peut déduire une relation de validité générale qui peut être avantageusement utilisée.

Dans la position d'équilibre du système balancier-spiral, la vitesse angulaire peut encore être exprimée par la relation

$$(5) \quad \dot{\varphi}_t = \frac{ds}{R} \cdot \frac{1}{d\tau_t},$$

où R représente le rayon du balancier et $d\tau_t$ l'intervalle de temps mis par le balancier pour parcourir l'élément d'arcs ds à partir du point de repos.

Avec cette substitution, la relation (3) devient

$$(3') \quad Q_t = \frac{\omega}{2 \lg \frac{d\tau_{t+1}}{d\tau_t}}$$

et elle permet plus simplement le calcul de Q en fonction des intervalles de temps successifs $d\tau_t$.

III

La relation (3') peut être utilisée avec une remarquable convenance pour la détermination du facteur de qualité des horloges électriques avec bobine mobile du type Hamilton ou avec aimant mobile. Dans ces cas, la mesure de l'intervalle $d\tau_t$ se réduit à la mesure de la durée de l'impulsion correspondant au passage du courant dans la bobine au moment où le balancier passe par la position d'équilibre. Cette mesure peut être facilement effectuée au moyen d'un oscilloscope, après avoir calibré la base des temps.

Même dans le cas de mouvements purement mécaniques, la mesure de l'intervalle $d\tau_t$ peut être effectuée en ayant recours à des dispositifs simples tel que celui expérimenté au Centre de Chronométrie de l'Observatoire de Milan, constitué d'un mince pinceau lumineux, périodiquement interrompu par un écran minuscule, solidaire du balancier. L'interruption produit un signal dans un circuit à photo-transistor ou à photo-résistance, dont la durée est directement lue ou photographiée sur l'écran d'un oscilloscope.

Il est par conséquent possible au moyen de l'équation (3') de connaître l'allure de la fonction $Q = Q(\tau)$.

Le calcul de l'amplitude φ_t correspondant à une certaine valeur de Q peut au contraire être obtenu par la relation de récurrence

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t e^{-\frac{\omega}{2Q_t}}$$

qui permet le calcul de la fonction inverse $\varphi = \varphi(Q)$ connaissant la valeur de l'amplitude φ_t à l'instant $t = 0$, correspondant au début des opérations ($\varphi_0 = \text{maximum}$ de l'amplitude).

Une formule de récurrence analogue à la précédente peut être écrite pour la vitesse angulaire à l'entour de la position d'équilibre du balancier

$$\dot{\varphi}_{t+1} = \dot{\varphi}_t e^{-\frac{\omega}{2Q_t}}$$

Cette dernière, aussitôt que la valeur de $\dot{\varphi}_t$ à l'instant initial $t = 0$ a été calculée par la relation

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{ds}{R} \cdot \frac{1}{d\tau_0},$$

permet à son tour de déterminer l'allure de la fonction $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(Q)$.

La connaissance de $\varphi(Q)$ et de $\dot{\varphi}(Q)$ peut enfin fournir par la relation (2), si l'on pose avec une approximation suffisante $\varphi_t = \varphi'_t$ pour chaque instant t la valeur du rapport

$$\frac{C}{I} = \frac{\dot{\varphi}_t^2}{\varphi_t^2}.$$

D'une façon analogue, par la relation (4), une série des valeurs de la quantité β peut être déterminée.

* *

Les résultats de cette analyse sont utilisés au Centre de Chronométrie de l'Observatoire de Brera pour l'étude des fonctions $Q = Q(\tau)$ et $\varphi = \varphi(\tau)$ de nombreux types de mouvements électriques et électroniques.

* *

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGER F. — *Fréquences étalons*, Neuchâtel.
- [2] ATTINGER C. — *J. Suisse d'Horlog. et de Bijout.*, 11-12, 1951.
- [3] COLETTE G., MAEDER C. — *Mesures et Contr. industr.*, 312, 1963.
- [4] DEFOSSEZ L. — *Théorie générale de l'horlogerie*, La Chaux-de-Fonds, 1952.

CONTRIBUTI DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE

NUOVA SERIE

- » 150 - E. PROVERBIO, *La détermination théorique et expérimentale des retards dans la comparaison des signaux horaires.*
- » 151 - A. MASANI, *The early evolutionary phases of stars of small masses.*
- » 152 - M. HACK, *The spectrum of Upsilon Sagittarii.*
- » 153 - E. PROVERBIO, *Determinazioni di ascensioni rette e semidiametri del pianeta Marte.*
- » 154 - E. PROVERBIO, *Il servizio dell'ora all'Osservatorio Astronomico di Brera - Milano.*
- » 155 - P. BROGLIA, *Curve di luce in due colori ed elementi fotometrici della binaria ad eclisse SU Bootis.*
- » 156 - F. ZAGAR, *Nuove prospettive nello studio del sistema solare.*
- » 157 - M. HACK, *Macro e microturbolenza nell'atmosfera di ϵ Aur.*
- » 158 - E. PROVERBIO, *Nuovo studio di un apparecchio esaminatore di livelli.*
- » 159 - M. HACK, *Ricerche sulle stelle A peculiari: Analisi di γ Equulei.*
- » 160 - E. PROVERBIO, *Osservazioni di occultazioni da parte della Luna.*
- » 161 - F. ZAGAR, *Giovanni Schiaparelli nel cinquantenario della morte.*
- » 162 - E. PROVERBIO, *Les signaux de temps et leur utilisation ecc.*
- » 163 - J. O. FLECKENSTEIN, *Il problema della cattura nella cosmogonia delle binarie.*
- » 164 - A. MASANI, *La politropica d'indice 3 e possibili applicazioni ecc.*
- » 165 - P. BROGLIA, *Variazioni delle curve di luce e degli elementi della variabile ad eclisse BZ Comae.*
- » 166 - M. HACK, *Sulla natura del compagno di ϵ Aurigae.*
- » 167 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo presente la legge delle aree.*
- » 168 - T. TAMBURINI e G. THIESSEN, *On the origin of the slowly variable soft X-ray radiation ecc.*
- » 169 - A. MASOTTI, *Sull'estensione della formula di Lambert al moto apparente delle stelle doppie.*
- » 170 - E. PROVERBIO, *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti esterni.*
- » 171 - E. PROVERBIO, *I micrometri e le livelle dello strumento Ap 100 dell'Osservatorio di Brera.*
- » 172 - T. TAMBURINI e T. THIESSEN, *On the existence of a new polarisation effect in stellar spectral lines.*
- » 173 - M. HACK e M. FRACASSINI, *Studio sulla polarizzazione della corona solare.*
- » 174 - E. L. PASINETTI, *Sulla possibilità dell'impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare.*
- » 175 - P. BROGLIA, *Sui periodi di alcune variabili di tipo RR Lyrae.*
- » 176 - F. GULISANO e E. PROVERBIO, *Riduzione delle posizioni apparenti stellari per mezzo di un calcolatore IBM 650.*
- » 177 - P. BROGLIA, *Osservazioni fotoelettriche di due variabili a eclisse.*
- » 178 - E. PROVERBIO, *La misura dei ritardi alla ricezione di segnali orari utilizzati nella determinazione di tempo e di longitudine.*
- » 179 - E. PROVERBIO, *Comparaisons entre étalons atomiques de fréquence.*
- » 180 - F. ZAGAR, *L'attività di R. G. Boscovich a Milano.*
- » 181 - E. PROVERBIO, *Sulla riduzione teorica dei diametri dei pianeti esterni.*
- » 182 - L. E. PASINETTI, *Confronto quantitativo di tre coppie di stelle a righe forti e a righe deboli.*
- » 183 - F. ZAGAR e L. GRATTON, *Emilio Bianchi nel ventennio della morte.*
- » 184 - J. O. FLECKENSTEIN, *Variazioni della latitudine e costante della aberrazione annua 1951/52 nel sistema FK3.*
- » 185 - M. HACK, *A new explanation of the binary system ϵ Aurigae.*
- » 186 - F. ZAGAR, *L'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 187 - F. ZAGAR, *Sulle perturbazioni orbitali di un satellite terrestre artificiale.*
- » 188 - A. PASINETTI e L. E. PASINETTI, *Aspetti astrofisici e radiobiologici del volo umano.*
- » 189 - M. HACK, *Radio emission at 21 cm in a region close to h and χ Persei Clusters.*
- » 190 - P. BROGLIA, *Curve di luce in tre colori ed elementi di SW Lacertae.*

(Continua in 4^a pagina)

- » 191 - M. FRACASSINI, M. HACK, L. PASINETTI, *Project for a system for the automation ecc.*
- » 192 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo rigoroso delle posizioni apparenti delle stelle.*
- » 193 - A. MASANI e G. OCCHINI, *The propagation of perturbations and shock waves in the inside of stars I.*
- » 194 - P. BOTTO e M. HACK, *A two dimensional classification of stars of class O.*
- » 195 - E. PROVERBIO - *Latitudine e longitudine astronomica provvisorie della stazione di M.te Conero durante l'eclisse totale di Sole del 15-2-1961.*
- » 196 - A. GÖKGÖZ, M. HACK, I. KENDIR - *Study of the spectrum and radial velocities of Tauri in 1958 and 1959.*
- » 197 - M. FRACASSINI, M. HACK - *Intensities, polarization and electron density of the solar corona from photographs taken during the total solar eclipse of 1961, february 15.*
- » 198 - E. PROVERBIO - *Recherches dans le champs de la métrologie du temps.*
- » 199 - R. FARAGGIANA, M. HACK - *Peculiar A stars studies of 73 Draconis.*
- » 200 - G. DE MOTTONI - *Nuovi specchi telescopici metallici.*
- » 201 - F. ZAGAR - *L'Osservatorio di Milano nella storia.*
- » 202 - M. HACK - *Absolute Magnitude of O-type stars.*
- » 203 - G. DE MOTTONI - *Il nuovo riflettore di 1,37 m dell'Osservatorio di Merate.*
- » 204 - M. FRACASSINI - *The solution of the van de Hulst's integral equations for computing electron density of the solar corona.*
- » 205 - M. HACK - *The shell spectrum of W Serpentis.*
- » 206 - A. GÖKGÖZ, M. HACK, I. KENDIR - *Study of the spectrum of ζ Tauri in 1960.*
- » 207 - J. O. FLECKENSTEIN - *Boscovich als Mitbegründer der Sphärischen Trigonometrie.*
- » 208 - A. MASANI - *The propagation of shock waves in the inside of stars II.*
- » 209 - F. ZAGAR - *Galileo Astronomo.*
- » 210 - E. PROVERBIO - *Condizioni per la determinazione della costante micrometrica ecc.*
- » 211 - A. MASOTTI - *Sopra alcuni cimeli bibliografici della Specola braidense.*
- » 212 - M. FRACASSINI - *The solution of the van de Hulst's integral equations ecc.*
- » 213 - E. PROVERBIO - *Determinazione fotografica di precisi istanti dei contatti durante la eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 214 - G. DE MOTTONI, *Considerazioni sulla Collaborazione internazionale nello studio fotografico del Pianeta Marte.*
- » 215 - M. HACK e L. PASINETTI - *Quantitative analysis of the Hydrogen-poor star ν Sagittarii.*
- » 216 - A. MASANI - *Sui recenti sviluppi della teoria delle stelle variabili.*
- » 217 - M. FRACASSINI e M. HACK - *Intensities, polarization and electron density of the solar corona during the total solar eclipse of 1961, february 15: (final results) paper II.*
- » 218 - R. FARAGGIANA e M. HACK - *The magnetic star γ Equulei.*
- » 219 - E. PROVERBIO - *La variazione della latitudine di Milano (Brera) nel periodo 1960.1-1961.3.*
- » 220 - E. PROVERBIO - *Sul problema della determinazione dell'azimut strumentale meridiano.*
- » 221 - R. FARAGGIANA e M. HACK - *Results obtained from the 1961-62 eclipse of 31 Cygni.*
- » 222 - P. BROGLIA - *The ultrashort period variable SZ Lyncis.*
- » 223 - A. PASINETTI e L. E. PASINETTI - *The problem of ionising radiations in space flight.*
- » 224 - E. PROVERBIO - *Possibilità della misura di distanze nel campo topografico con metodi ottici.*
- » 225 - T. TAMBURINI - *Studio spettrofotometrico di 56 Arietis.*
- » 226 - P. BROGLIA - *Light curve variations and elements of CW Cassiopeiae.*
- » 227 - A. MASANI, G. SILVESTRO - *Energy Spectrum of Neutrinos....*
- » 228 - M. FRACASSINI, L. E. PASINETTI - *Study of ϵ Del; Reduction and Elaboration of the observations by the electronic computer IBM 1620.*
- » 229 - E. PROVERBIO - *Riduzione degli errori sistematici nelle osservazioni meridiane di tempo e di longitudine.*
- » 230 - E. PROVERBIO - *Sulla determinazione di differenze di longitudine per scopi geodetici.*
- » 231 - E. PROVERBIO - *Osservazioni sulla propagazione di segnalatori....*
- » 232 - R. FARAGGIANA - *Quantitative analysis of γ Capricorni.*
- » 233 - A. MASANI - *La produzione di neutrini dei plasmii ad altissima temperatura.*
- » 234 - E. PROVERBIO - *Ricerche sulla marcia e sulla deriva di campioni di frequenza a quarzo.*