

59

52

CONTRIBUTI  
DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE  
a cura del Direttore  
Prof. FRANCESCO ZAGAR

NUOVA SERIE

N. 234

EDOARDO PROVERBIO

RICERCHE SULLA MARCIA E SULLA DERIVA  
DI CAMPIONI DI FREQUENZA A QUARZO

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo - Accademia di Scienze e Lettere  
Classe di Scienze (A) - Vol. 98 - 1964

PAVIA  
Tipografia Successori Fusi



1964

CONTRIBUTI  
DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MILANO-MERATE  
a cura del Direttore  
Prof. FRANCESCO ZAGAR

NUOVA SERIE

N. 234

---

EDOARDO PROVERBIO

RICERCHE SULLA MARCIA E SULLA DERIVA  
DI CAMPIONI DI FREQUENZA A QUARZO

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo - Accademia di Scienze e Lettere  
Classe di Scienze (A) - Vol. 98 - 1964

PAVIA  
Tipografia Successori Fusi



1964

## RICERCHE SULLA MARCIA E SULLA DERIVA DI CAMPIONI DI FREQUENZA A QUARZO

Nota (\*) di EDOARDO PROVERBIO

Presentata dal m. e. Francesco Zagar  
(Adunanza del 12 novembre 1964)

---

**Summary.** — The purpose of this research is to study the running of the drift (acceleration) for the frequency standard P1, P2 and Q2 of the Brera-Milan Observatory, as regards to the atomic time scale of the Neuchâtel Observatory. These quartz oscillators are utilised in the time service and other astrometric researches.

The obtained results put forward:

- a) an apparently aperiodic variation of about  $1.10^{-12}$  (mean value) of the frequency drift on short and mean period;
- b) a secular variation of  $1.10^{-12} \div 1.10^{-13}$ , that reduce exponentially the same acceleration;
- c) a mean drift of the order of  $1.10^{-10}$  for the quartz oscillators P1 and Q2.

1. - E' noto dalla teoria degli oscillatori a quarzo che la frequenza caratteristica di un oscillatore, determinata principalmente dalle dimensioni e dal taglio del cristallo di quarzo, può essere regolata e risulta funzione da una parte della induttanza o capacità in serie al cristallo quando si utilizza la frequenza di risonanza serie o in parallelo quando se ne utilizza la frequenza di risonanza in parallelo, dall'altra della temperatura alla quale lavora il quarzo.

Lo studio del comportamento di oscillatori a quarzo utilizzati come campioni di tempo o di frequenza ha messo inoltre in evidenza che oltre a questi parametri fisici e di natura circuitale esistono altri parametri esterni, quali la tensione di alimentazione, la temperatura esterna al-

---

(\*) Osservatorio Astronomico di Brera.

coefficienti fisici e parametrici. In tal modo sarà possibile determinare la marcia e la deriva indipendentemente dalle perturbazioni dovute ai parametri  $p_k$ .

Dalla (1) si avrà infatti per la marcia media non perturbata relativa all'intervallo  $t - t_0$ ,

$$(2') \quad m_t = \frac{C - C_0}{t - t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i (t - t_0)^{i-1}}{i!}.$$

La marcia istantanea all'epoca  $t$  nell'ipotesi che i coefficienti dei parametri fisici  $a_i$  si modifichino col tempo sarà invece data da,

$$(2) \quad m' = \frac{dC}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i}{i!} (t - t_0)^{i-1} a_i + \frac{(t - t_0)^i}{i!} \frac{da_i}{dt} \right],$$

in cui, essendo nella (1),

$$a_i = \frac{d^i C}{dt^i},$$

sarà

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{d^{i+1} C}{dt^{i+1}} = a_{i+1}.$$

Analogamente per l'accelerazione istantanea all'epoca  $t$  dalle (2) si ottiene facilmente,

$$(3) \quad a' = \frac{d^2 C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i(i-1)}{i!} (t - t_0)^{i-2} a_i + \right. \\ \left. + 2 \frac{i}{i!} (t - t_0)^{i-1} a_{i+1} + \frac{(t - t_0)^i}{i!} a_{i+2} \right],$$

mentre per l'accelerazione media nell'intervallo  $t - t_0$  si ha:

$$(3') \quad a'_t = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)!} a_{i+1} (t - t_0)^{i-1}.$$

Dalla (2') e dalla (2) è poi possibile ricavare il valore medio della marcia media ed il valore medio della marcia istantanea nell'intervallo  $t - t_0$ , che risultano rispettivamente:

$$\bar{m}_t = \frac{1}{t - t_0} \int_0^{t-t_0} m_t dt, \quad \bar{m}' = \frac{1}{t - t_0} \int_0^{t-t_0} m' dt.$$

3. - Se invece dello stato  $C$  in funzione del tempo fosse conosciuta la marcia  $m$  assoluta rispetto ad un riferimento uniforme o relativa ad un altro oscillatore quest'ultima potrebbe essere espressa analogamente allo stato  $C$  mediante una funzione del tipo,

$$(4) \quad m = m_0 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{(t - t_0)^i}{i!} + \varphi(p_k).$$

Risolvendo un sistema di equazioni di questo tipo e determinando i valori dei coefficienti,

$$b_i = \frac{d^i m}{dt^i},$$

sarà possibile successivamente mettere in evidenza il comportamento della deriva istantanea non perturbata dell'oscillatore, rappresentata dalla relazione:

$$(5) \quad a = \frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i}{i!} (t - t_0)^{i-1} b_i + \frac{(t - t_0)^i}{i!} b_{i+1} \right],$$

dove

$$b_{i+1} = \frac{db_i}{dt}.$$

L'accelerazione media  $a_t$  nell'intervallo  $t - t_0$  sarà invece data dalla relazione,

$$(5') \quad a_t = \sum_{i=1}^n b_i \frac{(t - t_0)^{i-1}}{i!}.$$

4. - Nelle relazioni (2), (3), e (5) i termini in  $a_{i+1}$ ,  $a_{i+2}$  e  $b_{i+1}$  rappresentano il contributo, per l'eventuale variazione dei coefficienti  $a_i$  e  $b_i$ , che queste variazioni stesse portano nella determinazione della marcia e dell'accelerazione. I coefficienti  $a_{i+2}$ ,  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$  risultano tutti intrinsecamente di ordine superiore rispetto ai coefficienti  $a_i$  ed anche i termini corrispondenti saranno tali per valori di  $t - t_0$  sufficientemente piccoli; per i valori  $t - t_0$  elevati invece è evidente che l'apporto di questi termini si farà sempre più imponente.

D'altra parte il calcolo dei coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  a partire dalla (1) e dalla (4) permette di considerare questi coefficienti costanti entro l'in-

tervallo  $t - t_0$  a disposizione o prescelto per il calcolo, ed entro questo intervallo le relazioni (2), (3) e (5) devono quindi considerarsi limitate ai termini in  $a_i$  e  $b_i$ . Ne consegue che i termini in  $a_{i+1}$ ,  $a_{i+2}$  e  $b_{i+1}$  delle precedenti relazioni rappresentano unicamente un mezzo per determinare i valori delle grandezze in gioco per intervalli  $t - t_0$  esterni a quelli utilizzati per il calcolo dei coefficienti  $a_i$ , e solo nell'ipotesi che le variazioni dei coefficienti stessi all'esterno di questo intervallo soddisfino la relazione formale,

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}. \quad (x = a, b)$$

5. - Con lo scopo di studiare il comportamento e le caratteristiche dei campioni di tempo e di frequenza P1, P2 e Q2 attualmente in funzione presso l'Osservatorio di Brera nel servizio dell'ora e nelle attività connesse, questi ultimi sono stati confrontati con un riferimento di tempo uniforme e fra loro.

Nel primo caso i confronti di tempo forniscono la correzione del tempo locale rispetto al tempo uniforme di riferimento, nel secondo caso i confronti di frequenze forniscono la marcia istantanea relativa tra i vari oscillatori rispetto all'oscillatore P1 fondamentale.

Come riferimento di tempo uniforme sono stati considerati i segnali orari della stazione HBN (Neuchâtel) basati sulla scala di tempo atomico TUA.

Nella tabella I sono riassunti i vari intervalli  $t - t_0$  presi in considerazione relativi ai confronti di tempo e di frequenza nonché il numero  $n$  dei dati rilevati, cioè il numero delle equazioni di condizione utilizzate per risolvere i sistemi di tipo (1) e (4). La risoluzione col metodo dei minimi quadrati di questi sistemi con numero molto elevato di equazioni è stata realizzata mediante l'uso del calcolatore elettronico IBM 1620 dell'Osservatorio di Brera.

Il calcolo dei coefficienti degli sviluppi tipo (1) e (4) è stato effettuato tenendo conto di più intervalli di tempo progressivi al fine di potere mettere in evidenza l'eventuale errore di estrapolazione che viene commesso estrapolando la marcia media o istantanea e l'accelerazione per intervalli di tempo superiori a quelli ai quali si riferiscono i valori dei coefficienti  $a_i$  calcolati. Chiamando infatti  $\Delta a_i$  e  $\Delta b_i$  la variazione che i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  presentano relativamente a due periodi diversi consecutivi l'errore di estrapolazione nel calcolo della deriva per

mezzo della (3) e della (5) sarà dato con sufficiente approssimazione per l'intervallo considerato da:

$$(6) \quad \Delta a' = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i(i-1)}{i!} (t-t_0)^{i-2} \Delta a_i + \right. \\ \left. + 2 \frac{i}{i!} (t-t_0)^{i-1} \Delta a_{i+1} + \frac{(t-t_0)^i}{i!} \Delta a_{i+2} \right].$$

$$(6') \quad \Delta a = \sum_{i=l}^n \left[ \frac{i}{i!} (t-t_0)^{i-1} \Delta b_i + \frac{(t-t_0)^i}{i!} \Delta b_{i+1} \right].$$

TABELLA I.

Intervallo	Q2 - HBN		n	P1 - HBN		n
	t <sub>0</sub>	t		t <sub>0</sub>	t	
I	GENNAIO 62	MARZO 62	80	LUGLIO 63	OTTOBRE 63	103
II		GIUGNO 62	185		FEBBRAIO 64	252
III		DICEMBRE 62	432		GIUGNO 64	400
IV		LUGLIO 63	716			

Intervallo	P1 - P2		n	P1 - Q2		n
	t <sub>0</sub>	t		t <sub>0</sub>	t	
I	APRILE 63	LUGLIO 63	143	DICEMBRE 62	MARZO 63	145
II		DICEMBRE 63	358		LUGLIO 63	300
III		GIUGNO 64	650			

6. — Per il calcolo di coefficienti gli sviluppi (1) e (4) sono stati limitati rispettivamente al termine  $a_5$  e  $b_4$  mentre alle funzioni  $\varphi(p_k)$  e  $\psi(p_k)$  è stata assegnata in ambedue i casi la forma

$$\varphi(p_k) = \psi(p_k) = u_1 (T - T_0) + u_2 (T - T_0)^2 + u_3 (U - U_0).$$

nella quale T ed U indicano rispettivamente la temperatura in °C e l'umidità in %.

Nelle tabelle II, III, in unità di  $10^{-3}$  s, e nelle tabelle IV e V in unità relative di  $10^{-8}$  sono riportati ordinatamente i valori dei coefficienti calcolati con i rispettivi errori medi.

TABELLA II.

Coeff.	Q <sup>2</sup> - HBN		
	I	II	III
$a_1$	$-1,28 \pm 0,21$	$(-5,28 \pm 2,30) \cdot 10^{-1}$	$(-3,48 \pm 1,15) \cdot 10^{-1}$
$a_2$	$(+1,14 \pm 0,37) \cdot 10^{-1}$	$(+9,83 \pm 0,97) \cdot 10^{-3}$	$(-8,82 \pm 0,89) \cdot 10^{-4}$
$a_3$	$(-3,04 \pm 0,06) \cdot 10^{-3}$	$(+8,72 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$	$(+5,34 \pm 0,06) \cdot 10^{-5}$
$a_4$	$(+3,33 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$(-8,11 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$(-3,25 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$
$a_5$	$(-1,06 \pm 0,00) \cdot 10^{-5}$	$(+1,69 \pm 0,00) \cdot 10^{-7}$	$(+8,35 \pm 0,00) \cdot 10^{-8}$

Coeff.	Q <sup>2</sup> - HBN			
	IV	$\Delta a_i (I-IV)$	$\Delta a_i (II-IV)$	$\Delta a_i (III-IV)$
$a_1$	$(-1,07 \pm 0,14) \cdot 10^{-1}$	-2,17	-0,42	-0,24
$a_2$	$(-4,42 \pm 0,89) \cdot 10^{-4}$	$+1,14 \cdot 10^{-1}$	$+1,03 \cdot 10^{-2}$	$-4,40 \cdot 10^{-4}$
$a_3$	$(+1,26 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$	$-3,05 \cdot 10^{-3}$	$+7,46 \cdot 10^{-5}$	$+4,08 \cdot 10^{-5}$
$a_4$	$(-4,78 \pm 0,00) \cdot 10^{-7}$	$+3,33 \cdot 10^{-4}$	$-7,63 \cdot 10^{-6}$	$-2,77 \cdot 10^{-6}$
$a_5$	$(+2,69 \pm 0,00) \cdot 10^{-9}$	$-1,06 \cdot 10^{-5}$	$+1,66 \cdot 10^{-7}$	$+8,08 \cdot 10^{-8}$

TABELLA III.

Coeff.	P1 - HBN				
	I	II	III	$\Delta a_i (I - III)$	$\Delta a_i (II - III)$
$a_1$	$+ 0,87 \pm 0,29$	$+ 0,35 \pm 0,17$	$+ 0,26 \pm 0,01$	$+ 0,61$	$+ 0,09$
$a_2$	$(- 1,21 \pm 0,05) \cdot 10^{-1}$	$(- 3,95 \pm 0,06) \cdot 10^{-2}$	$(- 1,30 \pm 0,00) \cdot 10^{-2}$	$- 0,81 \cdot 10^{-1}$	$- 2,65 \cdot 10^{-2}$
$a_3$	$(+ 4,92 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$	$(+ 7,76 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$(+ 1,80 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$+ 4,74 \cdot 10^{-3}$	$+ 5,96 \cdot 10^{-4}$
$a_4$	$(- 4,68 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$(- 3,58 \pm 0,00) \cdot 10^{-5}$	$(- 5,31 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$- 4,63 \cdot 10^{-4}$	$- 3,05 \cdot 10^{-5}$
$a_5$	$(+ 9,30 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$(+ 3,37 \pm 0,00) \cdot 10^{-7}$	$(+ 3,28 \pm 0,00) \cdot 10^{-8}$	$+ 9,27 \cdot 10^{-6}$	$+ 3,04 \cdot 10^{-7}$

TABELLA IV.

Coeff.	P1 - P2				
	I	II	III	$\Delta b_i (I - III)$	$\Delta b_i (II - III)$
$b_1$	$(- 4,22 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$	$(- 5,04 \pm 0,00) \cdot 10^{-2}$	$(- 4,41 \pm 0,00) \cdot 10^{-2}$	$+ 0,19 \cdot 10^{-2}$	$- 0,63 \cdot 10^{-2}$
$b_2$	$(+ 2,93 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$	$(+ 8,90 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$(+ 7,03 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$- 4,10 \cdot 10^{-4}$	$+ 1,87 \cdot 10^{-4}$
$b_3$	$(+ 7,55 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$(- 4,52 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$(- 3,68 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$+ 1,12 \cdot 10^{-5}$	$- 0,84 \cdot 10^{-6}$
$b_4$	$(- 4,04 \pm 0,00) \cdot 10^{-7}$	$(+ 3,08 \pm 0,00) \cdot 10^{-8}$	$(+ 3,32 \pm 0,00) \cdot 10^{-8}$	$- 4,37 \cdot 10^{-7}$	$- 0,24 \cdot 10^{-8}$

TABELLA V.

Coeff.	P1 - Q2		
	I	II	$\Delta b_i (I - II)$
$b_1$	$+ 0,15 \pm 0,00$	$+ 0,12 \pm 0,00$	$+ 0,03$
$b_2$	$(+ 2,13 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$	$(+ 3,65 \pm 0,01) \cdot 10^{-4}$	$+ 1,76 \cdot 10^{-3}$
$b_3$	$(- 1,34 \pm 0,00) \cdot 10^{-4}$	$(- 2,71 \pm 0,00) \cdot 10^{-5}$	$- 1,07 \cdot 10^{-4}$
$b_4$	$(+ 6,88 \pm 0,00) \cdot 10^{-6}$	$(+ 8,82 \pm 0,00) \cdot 10^{-7}$	$+ 6,00 \cdot 10^{-6}$

Questi risultati mostrano chiaramente l'esistenza del fenomeno della variazione della cosiddetta accelerazione o deriva, variazione che naturalmente rimane camuffata se si utilizzano sviluppi del tipo (1) e (4) limitati al terzo ed al secondo termine (a scapito naturalmente degli errori medi).

Questa variazione si manifesta chiaramente sia per la presenza dei termini  $a_3$  e successivi che mettono in evidenza il fenomeno della variazione all'interno del periodo considerato, ma soprattutto ed in misura notevolmente maggiore, confrontando i valori dell'accelerazione  $a_2$  calcolata per periodi diversi.

I diagrammi di fig. 1, ricavati con i dati delle tabelle II e III mostrano l'andamento a lungo periodo della deriva in funzione degli intervalli di tempo rappresentati nella tabella I ed espressi in giorni, per gli oscillatori campione Q2 e P1 riferiti alla scala di tempo atomico dei segnali orari di HBN.

Il carattere di questa variazione secolare della deriva sembra di tipo esponenziale e quindi essa risulta praticamente trascurabile dopo un periodo di  $1 \div 3$  anni di funzionamento dell'oscillatore a quarzo. Prima di questo periodo i dati a disposizione permettono di attribuire a queste variazioni un valore compreso tra  $1 \cdot 10^{-12}$  e  $1 \cdot 10^{-13}$ .

7. - Lo studio analitico del comportamento a lungo periodo di un oscillatore a quarzo mediante gli sviluppi in serie (1) o (4) richiederebbe la conoscenza a priori del numero di termini necessari per rappresentare adeguatamente la funzione  $f(t)$ , o analoga per la marcia, sull'intervallo  $t - t_0$  considerato.

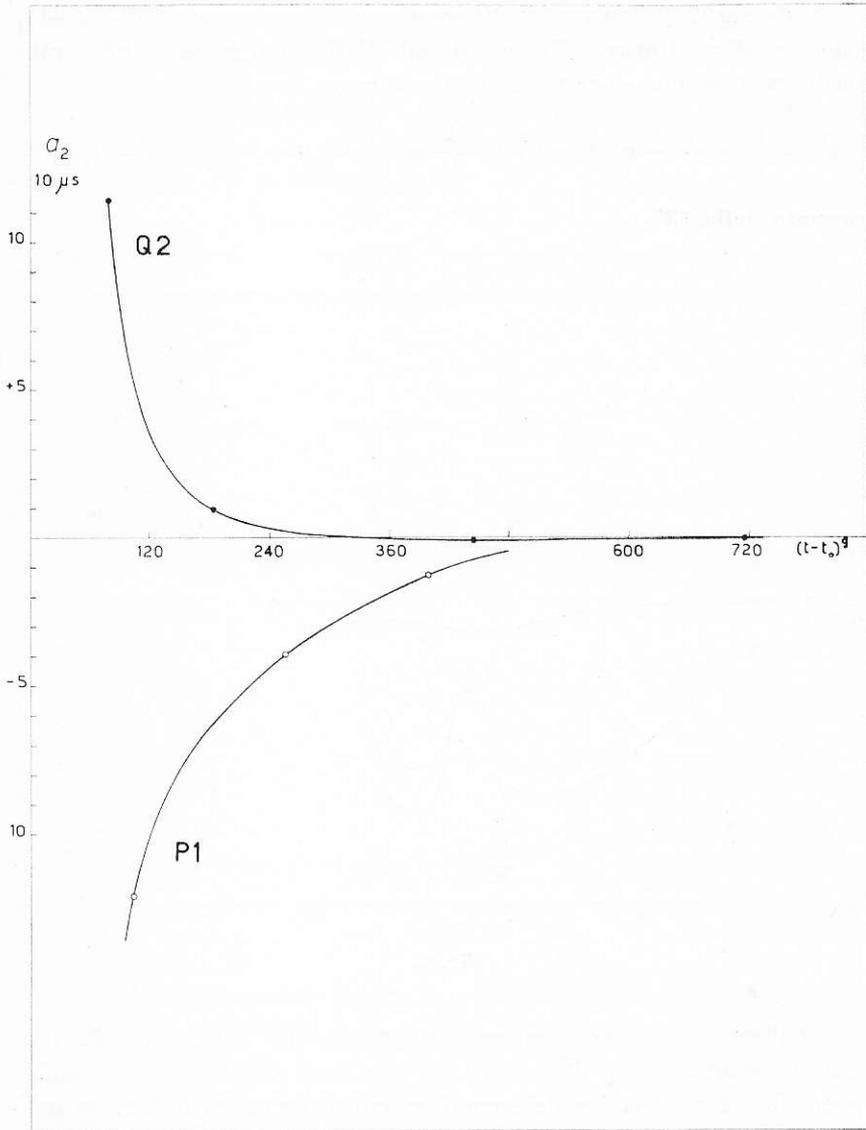


Fig. 1.

In pratica il numero dei termini, nel caso presente, come subito vedremo, può essere limitato a cinque o a sei.

Nella fig. 2 è riportato il diagramma dell'andamento della accelerazione media del quarzo P1 rispetto ad HBN per il massimo intervallo considerato calcolato per mezzo dello sviluppo,

$$a'_t = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{6} a_3 (t - t_0) + \frac{1}{24} a_4 (t - t_0)^2 + \frac{1}{120} a_5 (t - t_0)^3,$$

ricavato dalla (3').

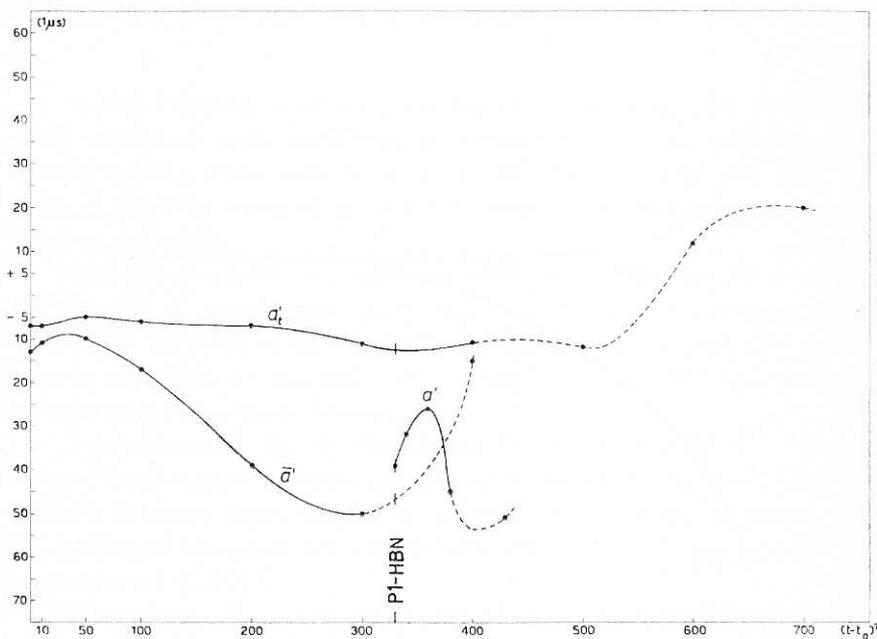


Fig. 2.

Analogamente l'accelerazione istantanea che chiamiamo  $\bar{a}'$ , per l'epoca  $t$  compresa nell'intervallo  $t - t_0$  si avrà dalla (3), trascurando il secondo e terzo termine del secondo membro, per mezzo della relazione,

$$\bar{a}' = a_2 + (t - t_0) a_3 + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 a_4 + \frac{1}{6} (t - t_0)^3 a_5,$$

mentre per gli istanti  $t^* \geq t - t_0$ , dalla (3) potrà essere calcolata la

accelerazione istantanea estrapolata, secondo le ipotesi fatte, per mezzo della relazione,

$$a' = 3 a_2 + 4 a_3 (t - t_0) + 2 a_4 (t - t_0)^2 + \frac{2}{3} a_5 (t - t_0)^3 .$$

Nella fig. 3 sono riportati i diagrammi relativi alle grandezze precedenti riferiti però alle differenze Q2-HBN sempre utilizzando il massimo intervallo  $t - t_0$  preso in esame.

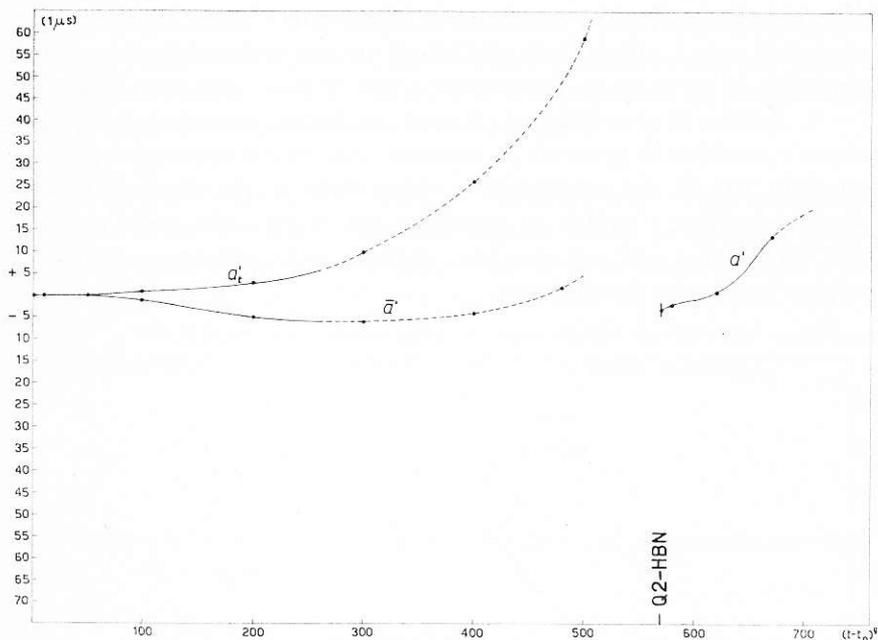


Fig. 3.

Nelle due precedenti figure il tratto segnato a tratteggio dei diagrammi sta a significare, come sembra mostrare lo svolgimento del calcolo numerico, che da un certo  $t$  in poi l'influenza del successivo termine  $a_6$ , trascurato nello sviluppo (1), potrebbe incominciare a farsi sensibile ed in grado di modificare per valori di  $t - t_0$  sempre più grandi l'andamento stesso della deriva calcolata.

Dall'analisi dei diagrammi di  $a'_t$  e  $\bar{a}'$ , nelle figg. 2 e 3, si può rilevare di conseguenza che per l'oscillatore P1 la limitazione dello svi-

luppo al quarto termine risulta sufficiente ad esprimere il reale andamento della deriva per l'intervallo considerato (segnato con un trattino verticale in figura). Al contrario per l'oscillatore Q2 per valori  $t - t_0$  sufficientemente grandi, entro l'intervallo, l'assenza del termine  $a_6$  e successivamente forse anche di un termine  $a_7$  impedisce di calcolare il vero andamento delle due grandezze con sufficiente attendibilità.

A questo proposito è molto interessante notare come i valori della accelerazione istantanea  $a'$  calcolati per valori di  $t^* \geq t - t_0$  si raccordino abbastanza bene, tenendo conto di quanto è stato in precedenza accennato, con i valori di  $a'$  relativi all'ultimo tratto della curva. Ciò convalida in certo senso, praticamente, per lo meno per brevi intervalli  $t - t_0$  (ordine di grandezza: 2 - 3 mesi), le ipotesi precedentemente ammesse e permette in generale di utilizzare con buona approssimazione la relazione (3) sia per estrapolare i valori della deriva che per permettere di conoscere l'ordine di grandezza del valore della stessa ai limiti dell'intervallo  $t - t_0$  nel caso che i termini dello sviluppo calcolati risultino in numero insufficiente.

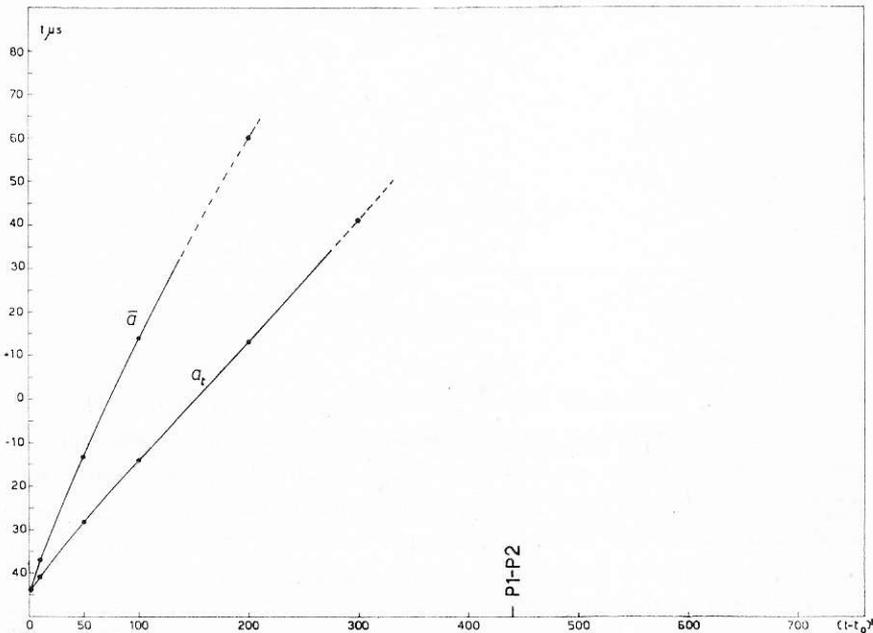


Fig. 4.

8. - Nella fig. 4 sono infine riportati i diagrammi illustranti l'andamento dell'accelerazione relativa media  $a_t$  e istantanea  $\bar{a}$  dell'oscillatore P2 rispetto all'oscillatore P1 calcolata con i dati di tabella IV (ultimo periodo) per mezzo delle relazioni.

$$a_t = b_1 + \frac{1}{2} b_2 (t - t_0) + \frac{1}{6} b_3 (t - t_0)^2 + \frac{1}{24} b_4 (t - t_0)^3,$$

$$\bar{a} = b_1 + b_2 (t - t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 b_3 + \frac{1}{6} (t - t_0)^3 b_4.$$

In questo caso non è possibile estrapolare la marcia utilizzando i valori calcolati di  $a$  poichè l'approssimazione ottenuta con soli quattro termini nello sviluppo della deriva media e istantanea all'interno dell'intervallo risulta manifestamente insufficiente.

9. - Nello studio di un oscillatore campione non è solo importante conoscere la accelerazione istantanea e quella media progressiva, spesso è necessario conoscere la accelerazione (istantanea) media relativa a periodi diversi o ad intervalli progressivi interni all'intervallo  $t - t_0$ . Questa accelerazione che chiamiamo  $D$  può essere facilmente calcolata per l'intervallo  $t_{n+1} - t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, n$ ) dalla relazione,

$$D_{n+1} = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{a}' dt.$$

Esplicitando in questa il valore trovato di  $\bar{a}'$  e ponendo per semplicità  $t_0 = 0$  si trova,

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= a_2 + \frac{1}{2} a_3 (t_{n+1} + t_n) \\ &+ \frac{1}{6} a_4 (t_{n+1}^2 + t_{n+1} t_n + t_n^2) \\ &+ \frac{1}{24} a_5 (t_{n+1}^3 + t_{n+1}^2 t_n + t_{n+1} t_n^2 + t_n^3). \end{aligned}$$

Considerando in particolare un intervallo  $t_{n+1} - t_n = 30$  giorni e facendo variare allo stesso tempo l'istante  $t_n$  di 30 in 30 giorni, il che equivale a porre,

$$t_n = 30 n,$$

$$t_{n+1} = t_n + 30 = 30 (n + 1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n)$$

si ha infine,

$$D_{n+1} = a_2 + 15 a_3 (2n + 1) + 150 a_4 [(n + 1)(2n + 1) + n^2] + 1125 a_5 (2n + 1) [(n + 1)^2 + n^2]. \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Allo stesso risultato si perviene per l'accelerazione (istantanea) media di  $\bar{a}$ , risultando sufficiente in tale caso sostituire i valori corrispondenti dei coefficienti  $a_1$  con quelli  $b_1$ .

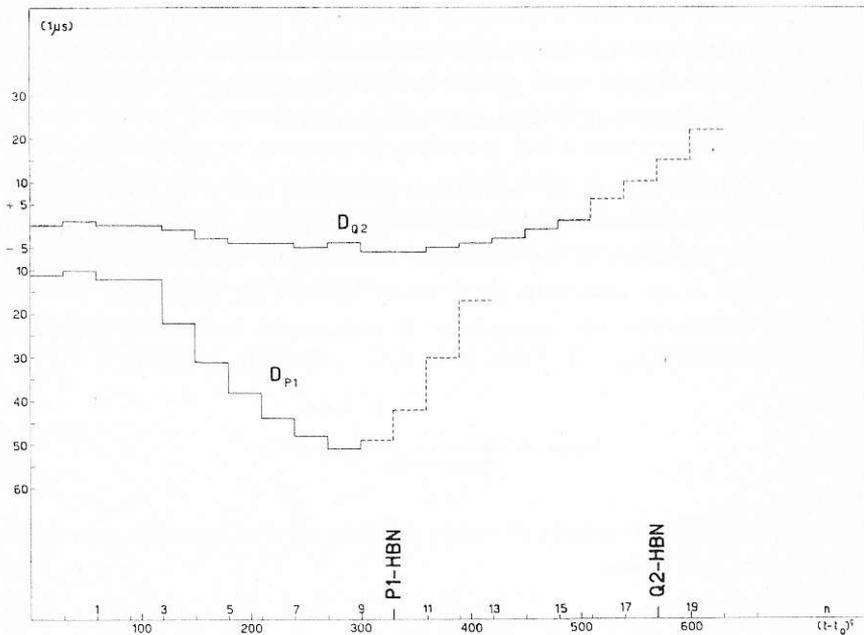


Fig. 5.

Utilizzando la precedente relazione sono state calcolate con i dati delle tabelle II e III le derivate medie mensili dell'oscillatore P1 ( $D_{P1}$ ) e Q2 ( $D_{Q2}$ ) i cui diagrammi riportati in fig. 5 presentano evidentemente lo stesso andamento dei diagrammi della deriva istantanea (fig. 2 e 3).

Tutti questi diagrammi confermano la presenza di variazioni non periodiche della deriva a breve e medio periodo il cui importo risulta in media di  $1.10^{-12}$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] PROVERBIO E., Actes du VII<sup>e</sup> Congr. Inter. de Chronom., Lausanne, Juin 1964.

# CONTRIBUTI DELL'OSSERVATORIO ASTRONOMICOMI DI MILANO-MERATE

## NUOVA SERIE

- » 150 - E. PROVERBIO, *La détermination théorique et expérimentale des retards dans la comparaison des signaux horaires.*
- » 151 - A. MASANI, *The early evolutionary phases of stars of small masses.*
- » 152 - M. HACK, *The spectrum of Upsilon Sagittarii.*
- » 153 - E. PROVERBIO, *Determinazioni di ascensioni rette e semidiametri del pianeta Marte.*
- » 154 - E. PROVERBIO, *Il servizio dell'ora all'Osservatorio Astronomico di Brera - Milano.*
- » 155 - P. BROGLIA, *Curve di luce in due colori ed elementi fotometrici della binaria ad eclisse SU Bootis.*
- » 156 - F. ZAGAR, *Nuove prospettive nello studio del sistema solare.*
- » 157 - M. HACK, *Macro e microturbolenza nell'atmosfera di  $\epsilon$  Aur.*
- » 158 - E. PROVERBIO, *Nuovo studio di un apparecchio esaminatore di livelle.*
- » 159 - M. HACK, *Ricerche sulle stelle A peculiari: Analisi di  $\gamma$  Equulei.*
- » 160 - E. PROVERBIO, *Osservazioni di occultazioni da parte della Luna.*
- » 161 - F. ZAGAR, *Giovanni Schiaparelli nel cinquantenario della morte.*
- » 162 - E. PROVERBIO, *Les signaux de temps et leur utilisation ecc.*
- » 163 - J. O. FLECKENSTEIN, *Il problema della cattura nella cosmogonia delle binarie.*
- » 164 - A. MASANI, *La politropica d'indice 3 e possibili applicazioni ecc.*
- » 165 - P. BROGLIA, *Variazioni delle curve di luce e degli elementi della variabile ad eclisse EZ Comae.*
- » 166 - M. HACK, *Sulla natura del compagno di  $\epsilon$  Aurigae.*
- » 167 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo d'orbita di stelle doppie a lungo periodo tenendo presente la legge delle aree.*
- » 168 - T. TAMBURINI e G. THIESSEN, *On the origin of the slowly variable soft X-ray radiation ecc.*
- » 169 - A. MASOTTI, *Sull'estensione della formula di Lambert al moto apparente delle stelle doppie.*
- » 170 - E. PROVERBIO, *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti esterni.*
- » 171 - E. PROVERBIO, *I micrometri e le livelle dello strumento Ap 100 dell'Osservatorio di Brera.*
- » 172 - T. TAMBURINI e T. THIESSEN, *On the existence of a new polarisation effect in stellar spectral lines.*
- » 173 - M. HACK e M. FRACASSINI, *Studio sulla polarizzazione della corona solare.*
- » 174 - E. L. PASINETTI, *Sulla possibilità dell'impiego di microfotogrammi nello studio della corona solare.*
- » 175 - P. BROGLIA, *Sui periodi di alcune variabili di tipo RR Lyrae.*
- » 176 - F. GULISANO e E. PROVERBIO, *Riduzione delle posizioni apparenti stellari per mezzo di un calcolatore IBM 650.*
- » 177 - P. BROGLIA, *Osservazioni fotoelettriche di due variabili a eclisse.*
- » 178 - E. PROVERBIO, *La misura dei ritardi alla ricezione di segnali orari utilizzati nella determinazione di tempo e di longitudine.*
- » 179 - E. PROVERBIO, *Comparaisons entre étalons atomiques de fréquence.*
- » 180 - F. ZAGAR, *L'attività di E. G. Boscovich a Milano.*
- » 181 - E. PROVERBIO, *Sulla riduzione teorica dei diametri dei pianeti esterni.*
- » 182 - I. E. PASINETTI, *Confronto quantitativo di tre coppie di stelle a righe forti e a righe deboli.*
- » 183 - F. ZAGAR e L. GRATTON, *Emilio Bianchi nel ventennio della morte.*
- » 184 - J. O. FLECKENSTEIN, *Variazioni della latitudine e costante della aberrazione annua 1951/52 nel sistema FK3.*
- » 185 - M. HACK, *A new explanation of the binary system  $\epsilon$  Aurigae.*
- » 186 - F. ZAGAR, *L'eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 187 - F. ZAGAR, *Sulle perturbazioni orbitali di un satellite terrestre artificiale.*
- » 188 - A. PASINETTI e L. E. PASINETTI, *Aspetti astrofisici e radiobiologici del volo umano.*
- » 189 - M. HACK, *Radio emission at 21 cm in a region close to h and  $\chi$  Persei Clusters.*
- » 190 - P. BROGLIA, *Curve di luce in tre colori ed elementi di SW Lacertae.*

(Continua in 4ª pagina)

- » 191 - M. FRACASSINI, M. HACK, L. PASINETTI, *Project for a system for the automation ecc.*
- » 192 - E. PROVERBIO, *Sul calcolo rigoroso delle posizioni apparenti delle stelle.*
- » 193 - A. MASANI e G. OCCHINI, *The propagation of perturbations and shock waves in the inside of stars I.*
- » 194 - P. BOTTO e M. HACK, *A two dimensional classification of stars of class O.*
- » 195 - E. PROVERBIO - *Latitudine e longitudine astronomica provvisorie della stazione di M.te Conero durante l'eclisse totale di Sole del 15-2-1961.*
- » 196 - A. GÖKGÖZ, M. HACK, I. KENDIR - *Study of the spectrum and radial velocities of  $\zeta$  Tauri in 1958 and 1959.*
- » 197 - M. FRACASSINI, M. HACK - *Intensities, polarization and electron density of the solar corona from photographs taken during the total solar eclipse of 1961, february 15.*
- » 198 - E. PROVERBIO - *Recherches dans le champs de la métrologie du temps.*
- » 199 - R. FARAGGIANA, M. HACK - *Peculiar A stars studies of 73 Draconis.*
- » 200 - G. DE MOTTONI - *Nuovi specchi telescopici metallici.*
- » 201 - F. ZAGAR - *L'Osservatorio di Milano nella storia.*
- » 202 - M. HACK - *Absolute Magnitude of O-type stars.*
- » 203 - G. DE MOTTONI - *Il nuovo riflettore di 1,37 m dell'Osservatorio di Merate.*
- » 204 - M. FRACASSINI - *The solution of the van de Hulst's integral equations for computing electron density of the solar corona.*
- » 205 - M. HACK - *The shell spectrum of W Serpentis.*
- » 206 - A. GÖKGÖZ, M. HACK, I. KENDIR - *Study of the spectrum of  $\zeta$  Tauri in 1960.*
- » 207 - J. O. FLECKENSTEIN - *Boscovich als Mitbegründer der Sphärischen Trigonometrie.*
- » 208 - A. MASANI - *The propagation of shock waves in the inside of stars II.*
- » 209 - F. ZAGAR - *Galileo Astronomo.*
- » 210 - E. PROVERBIO - *Condizioni per la determinazione della costante micrometrica ecc.*
- » 211 - A. MASOTTI - *Sopra alcuni cimeli bibliografici della Specola braidense.*
- » 212 - M. FRACASSINI - *The solution of the van de Hulst's integral equations ecc.*
- » 213 - E. PROVERBIO - *Determinazione fotografica di precisi istanti dei contatti durante la eclisse totale di Sole del 15 febbraio 1961.*
- » 214 - G. DE MOTTONI, *Considerazioni sulla Collaborazione internazionale nello studio fotografico del Pianeta Marte.*
- » 215 - M. HACK e L. PASINETTI - *Quantitative analysis of the Hydrogen-poor star  $\nu$  Sagittarii.*
- » 216 - A. MASANI - *Sui recenti sviluppi della teoria delle stelle variabili.*
- » 217 - M. FRACASSINI e M. HACK - *Intensities, polarization and electron density of the solar corona during the total solar eclipse of 1961, february 15: (final results) paper II.*
- » 218 - R. FARAGGIANA e M. HACK - *The magnetic star  $\gamma$  Equulei.*
- » 219 - E. PROVERBIO - *La variazione della latitudine di Milano (Brera) nel periodo 1960.1-1961.3.*
- » 220 - E. PROVERBIO - *Sul problema della determinazione dell'azimut strumentale meridiano.*
- » 221 - R. FARAGGIANA e M. HACK - *Results obtained from the 1961-62 eclipse of 31 Cygni.*
- » 222 - P. BROGLIA - *The ultrashort period variable SZ Lyncis.*
- » 223 - A. PASINETTI e L. E. PASINETTI - *The problem of ionising radiations in space flight.*
- » 224 - E. PROVERBIO - *Possibilità della misura di distanze nel campo topografico con metodi ottici.*
- » 225 - T. TAMBURINI - *Studio spettrofotometrico di 56 Arietis.*
- » 226 - P. BROGLIA - *Light curve variations and elements of CW Cassiopeiae.*
- » 227 - A. MASANI, G. SILVESTRO - *Energy Spectrum of Neutrinos....*
- » 228 - M. FRACASSINI, L. E. PASINETTI - *Study of  $\epsilon$  Del; Reduction and Elaboration of the observations by the electronic computer IBM 1620.*
- » 229 - E. PROVERBIO - *Riduzione degli errori sistematici nelle osservazioni meridiane di tempo e di longitudine.*
- » 230 - E. PROVERBIO - *Sulla determinazione di differenze di longitudine per scopi geodetici.*
- » 231 - E. PROVERBIO - *Osservazioni sulla propagazione di segnalatori....*
- » 232 - R. FARAGGIANA - *Quantitative analysis of  $\gamma$  Capricorni.*
- » 233 - A. MASANI - *La produzione di neutrini dei plasmi ad altissima temperatura.*
- » 234 - E. PROVERBIO - *Ricerche sulla marcia e sulla deriva di campioni di frequenza a quarzo.*