

RIDUZIONE DEGLI ERRORI SISTEMATICI NELLE OSSERVAZIONI MERIDIANE DI TEMPO E DI LONGITUDINE

Nota di EDOARDO PROVERBIO (*)
(*Osservatorio Astronomico di Brera*)

RIASSUNTO. — Viene indicata la possibilità pratica di utilizzare un procedimento astronomico basato su osservazioni contemporanee di più osservatori a più strumenti per la determinazione degli errori strumentali e personali relativi nelle determinazioni di tempo. Condizioni particolari permettono inoltre di ricavare gli errori personali assoluti e di studiare l'andamento delle variazioni locali (errori locali).

Il procedimento viene impiegato per la determinazione degli errori relativi personali e strumentali degli operatori partecipanti alla campagna di determinazione dei punti di Laplace.

SUMMARY. — The practical possibility to utilise an astronomical procedure based on simultaneous observations with several observers and instruments for the determination of the relative instrumental and personal errors in the time determination is taken into consideration. Besides special conditions permit to obtain absolute personal errors and to study the behaviour of the local variations (local errors).

The procedure is used to determine relative personal and instrumental errors of the observers taking part to the observations for the determination of the Laplace points

IL PROCEDIMENTO DI RIDUZIONE

1. — Le determinazioni assolute di tempo e di longitudine sono affette, come è noto, da errori sistematici ed accidentali di vario genere tra cui i più importanti sono:

- a) errori personali,
- b) errori strumentali (disuguaglianza dei perni, costanti strumentali non corrette, ecc.),
- c) errori delle AR delle stelle osservate (errori di catalogo),
- d) errori dovuti a variazione apparente della verticale.

(*) Ricevuta il 3 marzo 1964.

Gli errori di tipo a) e b) possono essere determinati in valore assoluto facendo ricorso a ricerche di laboratorio e fisiche particolari. Gli errori di tipo c) sono invece non facilmente rivelabili e costituiscono anzi l'oggetto di importanti e laboriose ricerche aventi come scopo il miglioramento dei cataloghi fondamentali.

Per quanto riguarda infine gli errori dovuti alla variazione della verticale, essi possono assumere carattere sistematico od accidentale, e la loro ricerca avviene quasi sempre a posteriori sulla base dello studio dei risultati di lunghi periodi di osservazione.

D'altra parte, poichè l'ordine di grandezza degli errori che si ammettono in precise determinazioni di tempo, anche di campagna, tende costantemente a diminuire, la necessità di tener conto di alcuni di detti errori diventa sempre più indispensabile.

Nel caso di determinazioni differenziali di tempo, utilizzabili in determinazioni bilaterali o unilaterali di longitudine, gli errori di catalogo possono essere ridotti notevolmente, inoltre l'osservazione preliminare o comunque accessoria di particolari programmi stellari permette di mettere in evidenza gli errori strumentali relativi, gli unici che abbiano significato in simili operazioni.

Una determinazione di tempo in meridiano, utilizzando il metodo di Mayer, fornisce infatti un sistema di equazioni del tipo

$$(1) \quad \alpha_r + \Delta\alpha_r = t_{n,m} + \Delta t + (a_m + \Delta a_m)A + i_m I + e_n(p) + e_m(s) + e_{n,m}(p, s) + e_m(t, l)$$

in cui è sottinteso per ciascun termine del secondo membro l'indice r , avendo i vari indici i seguenti significati:

- r = numero delle stelle di un gruppo,
- n = numero degli osservatori,
- m = numero degli strumenti di osservazione.

Inoltre si sono chiamati: Δa , l'errore di cui è affetto l'azimut osservato, $e(p)$, $e(s)$ rispettivamente gli errori sistematici personali e strumentali, $e(p, s)$ la componente dell'errore personale dipendente dallo strumento di osservazione (errore di illuminazione, di fuocatura, ecc.), $e(t, l)$ un errore variabile in funzione del tempo e del luogo (variazione locale) che si può presupporre costante per intervalli molto brevi (al più dell'ordine di un'ora).

Per il $\overline{\Delta t}$ medio di un gruppo si può quindi scrivere

$$(2) \quad \overline{\Delta t} = \frac{1}{r} \sum [\alpha_r - (t_{n,m} + a_m A + i_m I)] - \\ - [e_n(p) + e_m(s) + e_{n,m}(s, p) + e_m(t, l) + \frac{1}{r} (\sum \Delta a_m - \sum \Delta \alpha_r)].$$

Nell'ipotesi che ciascuno degli n osservatori osservi il passaggio di ciascuna stella a tutti gli m strumenti il sistema (1) sarà costituito da nmr equazioni. Le incognite risulteranno invece in numero $n + m + nm + m + m + r + 1 = n + 3m + nm + r + 1$. Inoltre se si ammette che l'errore $e(t, l)$ risulti costante durante il periodo di osservazione e si attribuisce l'errore Δ in prevalenza agli errori di posizione delle stelle utilizzate per la determinazione dell'azimut, questi ultimi risultano non separabili dagli errori di tipo strumentale $e_m(s)$ all'interno del gruppo di osservazione, per cui l'effettivo numero delle incognite può essere ridotto a $n + m + nm + r + 1$.

La relazione che lega il numero delle equazioni di condizione (N_c) a quello delle incognite (N_i)

$$nmr = n + m + nm + r + 1,$$

permette di costruire un certo numero di sistemi corrispondenti ad altrettanti casi specifici di osservazione con n , m , r variabili, restando sottinteso che i numeri n , m , r , che non soddisfano la precedente relazione danno luogo a sistemi e quindi a matrici di tipo rettangolare.

Le equazioni dei sistemi così costruiti non risultano tutte indipendenti e l'analisi della caratteristica delle matrici ci permette di conoscere il numero di queste equazioni e quindi delle incognite indipendenti. Da semplici considerazioni si può vedere che detta caratteristica (C_s) può essere espressa dalla relazione

$$C_s = nm + r - 1.$$

Ne consegue che la risoluzione esplicita di tutte le incognite è possibile solo se si ammettono un numero

$$N_c = N_i - C_s = n + m + 2,$$

di condizioni esprimibili in equazioni supplementari indipendenti che soddisfino, entro convenienti limiti, le caratteristiche fisiche del problema. Nella Tabella I sono indicati per i casi più importanti i valori che assumono le precedenti quantità, i valori di r entro parentesi riferendosi a casi di matrici rettangolari.

Riteniamo che entro certi limiti, basati su valide considerazioni teoriche o stabilite dall'esperienza, possano essere prese in esame nei casi concreti le seguenti condizioni particolari:

- a) gli errori personali variabili da strumento a strumento si possono ritenere poco differenti da osservatore a osservatore,
- b) se n è almeno eguale a 3 la media degli errori personali di tutti gli osservatori si può supporre piccola rispetto ad ogni singolo errore personale.

TABELLA I

n	m	r	N_i	N_e	C_s	N_c
1	1	(1)	5	1	1	4
1	2	6	12	12	7	5
2	1	6	12	12	7	5
2	2	3	12	12	6	6
3	2	(3)	15	18	8	7
2	3	(3)	15	18	8	7
4	2	(2)	17	16	9	8

2. — Prendendo in considerazione ad esempio il caso: $D = 2$, $m = 2$, $r = 3$, la caratteristica del cui sistema risulta 6, e considerando le sei equazioni indipendenti fornite da uno dei minori di sesto ordine $\neq 0$; si ottengono le seguenti soluzioni,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 \quad , \\
 x_2 &= \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_3 \quad , \\
 x_3 &= e_1(p) - e_2(p) + e_{1,1}(s, p) - e_{1,2}(s, p) \quad , \\
 x_4 &= e_1(p) - e_2(p) + e_{2,1}(s, p) - e_{2,2}(s, p) \quad , \\
 x_5 &= e_1(s) - e_2(s) + e_{1,1}(s, p) - e_{2,1}(s, p) \quad , \\
 x_6 &= e_1(s) - e_2(s) + e_{1,2}(s, p) - e_{2,2}(s, p) \quad ,
 \end{aligned}$$

ove i primi membri risultano funzione di quantità note. Le otto quantità incognite dipendenti dagli errori personali e strumentali sono quindi contenute nelle ultime quattro equazioni. La condizione particolare a) fornisce le seguenti relazioni supplementari:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad e_{1,1}(s, p) &= e_{1,2}(s, p) \quad , \\
 e_{2,1}(s, p) &= e_{2,2}(s, p) \quad ,
 \end{aligned}$$

che permettono di scrivere,

$$\begin{aligned}
 x_3 &= e_1(p) - e_2(p) \quad , \\
 x_4 &= e_1(p) - e_2(p) \quad ,
 \end{aligned}$$

da cui,

$$(4) \quad e_1(p) - e_2(p) = (x_3 + x_4) / 2.$$

Una verifica sperimentale della relazione (3) si ha se, entro certi limiti, è soddisfatta l'eguaglianza

$$x_5 - x_6 = 0 \quad ,$$

che discende direttamente dalle (3) stesse.

Dalle x_5 e x_6 si può infine ottenere

$$(5) \quad [e_1(s) + e_1(s, p)] - [e_2(s) + e_2(s, p)] = (x_5 + x_6) / 2 \quad ,$$

che con la (4) fornisce le due soluzioni per gli errori personali e strumentali relativi o differenziali.

È da notare che queste soluzioni si ottengono mediante l'osservazione di un'unica stella. L'osservazione di un gruppo di r stelle permette quindi di ottenere i seguenti valori medi

$$(4') \quad \bar{e}_1(p) - \bar{e}_2(p) = \frac{\sum_{i=1}^r P_i (x_3 - x_4)_i}{2 \sum_{i=1}^r P_i} \quad ,$$

in cui P_i sono gli eventuali pesi (proporzionali a $\cos^2 \delta$).

Conseguentemente sarà

$$(5') \quad [\bar{e}_1(s) + \bar{e}_1(s, p)] - [\bar{e}_2(s) + \bar{e}_2(s, p)] = \frac{\sum_{i=1}^r P_i (x_5 + x_6)_i}{2 \sum_{i=1}^r P_i} \quad .$$

Queste relazioni mostrano che nelle ipotesi fatte relativamente agli errori del tipo $e(t, 1)$ e Δa , questi ultimi non compaiono nelle relazioni stesse, nelle quali $e(s)$ ha il significato quindi di errore unicamente strumentale.

Il valore relativo rispetto a due luoghi diversi di osservazione dell'errore $e(t, 1)$ può essere determinato solo utilizzando un unico riferimento di tempo e conoscendo il valore delle (4') e (5'). Ciò risulta di notevole utilità nel caso di determinazioni di differenze bilaterali di Longitudine, nelle quali si desidera ridurre le osservazioni di una delle stazioni, al sistema di osservazione dell'altra stazione, considerata come fondamentale.

Conoscendo invece la *marcia* dell'orologio di riferimento locale è possibile determinare le *variazioni* dell'errore $e(t, 1)$ in funzione del tempo, osservando giorno per giorno una stessa stella o gruppi di stelle.

Si fa notare infine che le quantità x_5 e x_6 contengono il termine $A(a_2 - a_1)$, che è l'unico che introduce quantità non osservate direttamente e che inoltre comporta il calcolo alquanto laborioso degli azimut strumentali. Queste difficoltà possono essere facilmente e con vantaggio eliminate mediante l'uso di mire meridiane, visibili da ambedue gli strumenti, che permettono la determinazione diretta delle differenze di azimut incognite.

3. — Nel caso in cui gli osservatori siano almeno 3 e sempre ritenendo valida la condizione a), l'osservazione di ciascuna stella permette di scrivere

$$\begin{aligned} y_1 &= e_1(p) - e_2(p) \quad , \\ y_2 &= e_1(p) - e_3(p) \quad , \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n-1} &= e_1(p) - e_n(p) \quad , \\ y_n &= e_1(p) - e_1(p) = 0 \quad , \end{aligned}$$

da cui, accettando la condizione b), si ottiene

$$e_1(p) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} .$$

In questo caso quindi è possibile pervenire alla conoscenza sufficientemente approssimata (quanto più è elevato n) dei singoli errori personali.

4. — La precedente indagine mostra a nostro avviso l'utilità ed i vantaggi di una ricerca analitica degli errori sistematici personali e strumentali, soprattutto nel caso di operazioni differenziali, come quelle che discendono da determinazioni di differenze di Longitudine, o che sono legate alla riduzione di un sistema di determinazione del tempo ad un altro sistema fondamentale o di riferimento.

Tali vantaggi possono essere così riassunti:

- 1) possibilità di determinare gli errori relativi (od assoluti in casi particolari) a meno:
 - a) degli errori globali della determinazione del tempo (errori di $\overline{\Delta t}$),
 - b) degli errori della determinazione dell'azimut strumentale,
 - c) degli errori di posizione delle stelle osservate;
- 2) possibilità di determinare, conoscendo i singoli errori relativi personali e strumentali, gli errori o variazioni locali, sempre relativi del tipo $e(t,1)$;
- 3) notevole riduzione dei calcoli a causa della indipendenza della conoscenza dello stato dell'orologio locale di riferimento;
- 4) possibilità pratica di determinare, in casi particolari, gli errori relativi (e assoluti) strumentali e personali mediante l'osservazione anche di un'unica stella, o comunque di un numero di stelle non elevato.

LA DETERMINAZIONE DEGLI ERRORI PERSONALI E STRUMENTALI

5. — Le precedenti considerazioni sono state utilizzate all'Osservatorio di Brera per la determinazione degli errori personali e strumentali in occasione dell'inizio della campagna di determinazione dei punti di Laplace organizzata dalla Commissione Geodetica Italiana ed alla quale l'Osservatorio di Brera partecipa attivamente.

Gli strumenti impiegati sono stati lo strumento dei passaggi Ap 100 dell'Osservatorio, situato sul pilastro centrale della cupola maggiore (punto fondamentale di riferimento delle Longitudini italiane) e lo strumento dei

passaggi Ap 70 dell'Istituto Geografico Militare, situato sul pilastrino Sud nella stessa cupola. Gli osservatori:

1. Proverbio E. (Osservatorio Astronomico di Brera),
2. Pericoli A. (Istituto Geografico Militare),
3. Carlà C. (Istituto Geografico Militare),
4. De Concini C. (Istituto Geodesia Università di Padova),
5. Martini L. (Osservatorio Astronomico di Brera).

Come base di questa ricerca sono state ammesse a priori le seguenti ipotesi:

- a) $e_m(t, l) = \text{costante}$ per ogni serata di osservazione,
- b) $e_{n,m}(p, s) = \text{trascurabile}$,
- c) $\frac{\sum e_n(p)}{n} = \text{trascurabile}$. ($n \geq 3$).

Per la realizzazione pratica delle prime due ipotesi sono state comunque poste le condizioni accessorie qui elencate:

- a₁) osservazioni contemporanee con i due strumenti,
- a₂) osservazioni di stelle circumzenitali,
- a₃) omogeneità termica all'interno e all'esterno della cupola dello strumento,
- b₁) controllo della fuocatura dei fili e delle stelle per ciascuno osservatore e strumento,
- b₂) eguale intensità luminosa del campo degli strumenti,
- b₃) condizioni di osservazione il più possibile analoghe.

Non tutte le precedenti condizioni vennero sempre realizzate rigorosamente, ad esempio nel programma di osservazione sono stati previsti anche gruppi di stelle equatoriali e polari per mettere in evidenza eventuali variazioni degli errori in funzione di δ , e ciò naturalmente presuppone l'ulteriore condizione che nell'intervallo delle osservazioni gli errori di rifrazione (laterale) siano piccoli. Riteniamo però che in generale le osservazioni utilizzate soddisfino certamente, nel limite delle precisioni in gioco, le ipotesi a) e b).

Per la determinazione degli errori strumentali differenziali lo strumento Ap 70 è stato inoltre sistemato in modo che da esso potesse essere visibile contemporaneamente allo strumento Ap 100 la mira meridiana orizzontale.

Il programma di osservazione (Tabella II) comprendeva 5 gruppi di sette stelle ciascuno, ed è stato studiato in modo da permettere, come è stato accennato, una ricerca sulla variazione degli errori in funzione di δ , (grup-

TABELLA II

Gruppo	N	GC (FK3 ⁺)	α	z	m	I	A
1	1	705+	18 ^h 48 ^m	-12 ^o 09 ^p	3.4	1.170	-0.251
	2	713+	57	-12 50	4.0	1.158	-0.264
	3	726+	19 16	+ 7 49	4.0	1.657	+0.228
	4	733+	28	+ 6 10	3.9	1.602	+0.173
	5	479+	43	- 0 28	3.0	1.414	-0.011
	6	1521+	54	-10 30	4.0	1.199	-0.223
	7	757+	20 12	+ 1 08	4.0	1.455	+0.029
2	1	25964	18 53	- 3 56	5.6	1.333	-0.091
	2	26318	19 04	- 4 08	6.2	1.329	-0.096
	3	26475	10	+11 18	5.2	1.789	+0.358
	4	26782	22	+ 4 42	6.3	1.556	+0.128
	5	27068	33	+ 5 39	5.7	1.586	+0.157
	6	27206	37	+ 9 23	5.9	1.713	+0.283
	7	27492	49	- 5 00	5.6	1.309	-0.114
3	1	28415	20 23	+ 9 49	7.3	1.730	+0.300
	2	28546	29	- 1 19	7.2	1.394	-0.032
	3	28737	36	- 2 48	7.1	1.358	-0.066
	4	28987	45	- 3 15	7.1	1.348	-0.075
	5	29172	52	+ 3 52	7.1	1.531	+0.104
	6	29339	58	+ 3 01	7.1	1.507	+0.080
	7	29579	21 07	+ 1 36	7.1	1.468	+0.041
4	1	25862	18 48	-48 51	6.0	0.659	-0.755
	2	25964	53	-38 55	5.7	0.783	-0.632
	3	26190	19 00	-49 14	5.6	0.654	-0.759
	4	26379	06	-39 28	5.4	0.776	-0.639
	5	26567	14	-40 44	5.4	0.741	-0.654
	6	26736	20	-35 39	6.3	0.825	-0.591
	7	26884	25	-42 38	5.9	0.737	-0.678
5	1	27174	19 36	+28 48	7.1	3.234	+1.779
	2	27499	49	+33 52	7.4	4.494	+3.018
	3	27809	20 01	+30 53	6.4	3.640	+2.149
	4	28215	16	+34 02	7.1	4.557	+3.080
	5	28670	34	+37 59	6.2	6.911	+5.396
	6	29107	49	+34 54	5.6	4.901	+3.419
	6	29563	21 06	+32 27	5.9	4.033	+2.565

pi 2, 4, 5) e della magnitudine delle stelle osservate (gruppi 1, 2, 3). Prima e dopo le osservazioni stellari era prevista la determinazione contemporanea da ambedue gli strumenti dell'azimut strumentale rispetto alla mira meridiana. Durante le osservazioni e per i calcoli di riduzione sono stati inoltre

usati modelli e schemi di calcolo che hanno notevolmente facilitato le une e gli altri.

L'osservazione di ogni stella veniva eseguita contemporaneamente ai due strumenti, in media, da tre osservatori che seguivano il cammino della stella nel campo dello strumento con micrometro impersonale per tratti diversi prima e dopo l'inversione, in modo da permettere l'osservazione del passaggio con ambedue gli strumenti. I tratti del campo stabilito dal programma di osservazione risultavano in media per tutti gli osservatori centrati sul mezzo del semicampo, in modo da compensare eventuali errori dovuti alle aberrazioni di campo. Ovviamente le stelle luminose sono state osservate senza diaframma e schermo.

Il calcolo degli errori personali relativi è stato condotto partendo dalla (4), che, esplicitando il secondo membro, diventa

$$(6) \quad e_1(p) - e_k(p) = \frac{1}{2} [(t_{k,1} + t_{k,2}) - (t_{1,1} + t_{1,2})] , \quad (k = 2, 3, 4, 5)$$

mentre dalla (5'), tenendo conto della ipotesi a), si ha per gli errori strumentali

$$(7) \quad e_1(s) - e_2(s) = (a_2 - a_1)A + (i_2 - i_1)I + \frac{1}{n} \Sigma (t_{k,2} - t_{k,1}) , \quad (k = 1, \dots, n)$$

In queste $t_{k,j}$ rappresenta l'istante osservato del passaggio delle stelle in meridiano dall'osservatore k allo strumento j , i ed a rappresentano l'inclinazione e l'azimut strumentale ed I , A i rispettivi coefficienti.

La determinazione della differenza di azimut $a_2 - a_1$, potendosi scrivere

$$\bar{a}_2 - \bar{a}_1 = a_2 - a_1 ,$$

è stata eseguita indirettamente basandosi sulla determinazione dell'azimut \bar{a} ($i = 1, 2$) della mira meridiana.

Quest'ultimo a sua volta è stato calcolato con la relazione

$$\bar{a}_j = -\frac{1}{2} (l_j^{(W)} - l_j^{(E)}) M_j \operatorname{cosec} z_j - i_{0,j} \cos z_j , \quad (j = 1, 2)$$

ove l'indice $j = 1, 2$ si riferisce agli strumenti Ap 100 e Ap 70, mentre le quantità l_j , M_j , z_j , ed i_j sono rispettivamente le letture micrometriche (nelle due posizioni W ed E dello strumento), il valore del passo del micrometro in secondi di tempo, la distanza zenitale della mira e l'inclinazione dello strumento durante le osservazioni di quest'ultima.

TABELLA III

Gruppo	Stella (N)	k	$t_{k,1} + t_{k,2}$	$t_{k,2} - t_{k,1}$	i_1	i_2	
1	3	1	2 ^s .537	+0 ^s .293	-0 ^s .102	-0 ^s .081	
		3	2.545	+0.329			
	4	1	1.716	+0.072	-0.089	-0.034	
		4	1.790	+0.042			
		5	2.015	-0.217			
	6	1	11.645	-0.619	-0.081	-0.078	
		7	1	11.686	+0.020	-0.104	-0.063
	2		11.792	-0.160			
	5		11.926	-0.090			
	2	2	1	56.999	-0.319	-0.197	-0.059
1			31.210	+0.316	-0.087	-0.074	
4		3	31.173	+0.489			
		1	22.290	+0.082	-0.110	-0.086	
		4	22.392	+0.086			
6		5	22.546	+0.040			
		1	8.614	+0.418	-0.055	-0.137	
3		1	4	8.750	+0.290		
			1	37.207	+0.447	-0.110	-0.088
		3	3	37.486	+0.440		
	1		28.775	-0.091	-0.106	-0.032	
	4	1	45.029	-0.091	-0.087	-0.063	
		5	45.282	-0.030			
	6	1	45.977	-0.061	-0.092	-0.036	
		4	46.041	-0.017			
7	1	19.157	-0.135	-0.079	-0.068		

Nelle Tabelle III e IV sono riportati, a meno dei termini costanti, tutti i dati necessari al calcolo delle (6) e (7) ad esclusione dell'azimut strumentale. Le osservazioni sono state effettuate nei giorni 9, 10, 11 e 12 settembre 1963. A causa di variazioni accidentali dell'azimut dello strumento Ap 70 non è stato possibile utilizzare le osservazioni della mira e quindi ottenere la differenza $a_2 - a_1$ per gli ultimi tre giorni di osservazione. Questa differenza è risultata invece per il giorno 9 settembre: $-1^s.786$, prima delle osservazioni dei gruppi stellari e $-1^s.364$, dopo le osservazioni stesse. Dato il notevole scarto fra i due valori nel calcolo degli errori strumentali è stato usato per ogni stella un valore interpolato di $a_2 - a_1$. Gli elementi per il calcolo ed i singoli risultati di questi errori sono dati nella tabella V che fornisce il peso dei risultati stessi posto eguale a n . La media pesata degli errori strumentali relativi ai due strumenti risulta,

$$e_1(s) - e_2(s) = -0^s.103 \pm 0^s.020 .$$

Riteniamo comunque che questo dato debba essere considerato come un dato

TABELLA IV

Gr.	Stella	k	$t_{k,1} + t_{k,2}$	Gr.	Stella	k	$t_{k,1} + t_{k,2}$	Gr.	Stella	k	$t_{k,1} + t_{k,2}$	
4	3	1	45.022	5	5	4	53.133	2	2	1	03.574	
		2	45.026			2	53.635			4	03.645	
	4	1	09.524			3	53.583		5	03.718		
		4	09.704			6	1		51.312	1	47.069	
		5	09.717		4		51.694		3	47.142		
	5	1	03.671		3	51.589	2		47.127			
		2	03.759		7	1	62.919		3	2	05.581	
		3	03.756			2	63.526			4	05.776	
	4	47.570	5			63.603	5			06.030		
	6	1	47.624		4	63.328	3		1	45.196		
		3	47.654		1	1			24.812	3	45.241	
		7	1			39.621			2	24.942	2	45.298
	2		39.719			3	24.904		1	05.106		
	5	2	1			59.400	3		1	18.486	5	3
4			59.640	2		18.570		3	01.122			
5			59.991	4		1	17.790	1	01.314			
3		4	42.332			4	17.943	4	01.376			
		1	42.021			5	18.084	5	02.038			
4		3	42.435	7		1	27.805	5	4	24.848		
		2	42.384			2	27.909		1	24.746		
		3	3			34.512	5		28.087	2		25.092
			1			34.616	2		1	19.121		3
		4	34.637			2			19.138	6		09.268
5		34.826	3	19.118		1		08.890				
							4	08.788				
							7	09.052				
							7	1	57.121			
								5	57.922			
								3	57.425			

solo orientativo, sia per il numero limitato di osservazioni sia soprattutto per il fatto che le osservazioni si riferiscano ad una sola serata, se si tiene conto che nell'errore strumentale confluiscono praticamente tutti gli errori locali a volte estremamente variabili. Oltre a questi, particolarmente temibili sono gli errori di azimut Δa per cui sarebbe necessario in operazioni di questo genere una serie di determinazioni accurate dell'azimut della mira, soprattutto nei casi in cui quest'ultimo presenta variazioni regolari o accidentali.

Per il calcolo degli errori personali relativi, dalle tabelle III e IV sono stati calcolati per mezzo della (6) i valori $e_1 - e_i$ espressi in millesimi di secondo e riportati nella tabella VI suddivisi in gruppo.

Nella Tabella VII sono invece calcolate le medie di gruppo dei valori $e_1 - e_i$ in funzione dei valori medi delle rispettive declinazioni e magnitudini di gruppo. Con questi dati è stata tentata la determinazione dei coefficienti

TABELLA V

Gruppo	Stella	$(a_2 - a_1)_{int}$	$I(i_2 - i_1)$	$A(a_2 - a_1)_{int}$	$\frac{1}{n} \Sigma(t_{k,2} - t_{k,1})$	$e_1(s) - e_2(s)$	n
1	3	-1 ^s .75	+0 ^s .035	-0 ^s .399	+0 ^s .311	-0 ^s .053	2
	4	.73	+0 .088	-0 .299	-0 .034	-0 .245	3
	6	.69	+0 .004	+0 .377	-0 .619	-0 .238	1
2	7	.67	+0 .059	-0 .046	-0 .076	-0 .065	3
	2	.63	+0 .184	+0 .156	-0 .319	+0 .021	1
	3	.61	+0 .024	-0 .576	+0 .403	-0 .149	2
3	4	.59	+0 .038	-0 .204	+0 .069	-0 .097	3
	6	.55	-0 .141	-0 .439	+0 .354	-0 .226	1
	1	.51	+0 .038	-0 .453	+0 .444	+0 .029	2
	3	.47	+0 .101	+0 .097	-0 .091	+0 .107	1
	4	.45	+0 .033	+0 .109	-0 .197	-0 .055	2
3	6	.41	+0 .085	-0 .113	-0 .119	-0 .147	2
	7	39.	+0 .016	-0 .057	-0 .135	-0 .176	1

TABELLA VI

Gr.	$e_1 - e_2$	$e_1 - e_3$	$e_1 - e_4$	$e_1 - e_5$	Gr.	$e_1 - e_2$	$e_1 - e_3$	$e_1 - e_4$	$e_1 - e_5$
1	+ 53	+ 4	+ 37	+150	4	+ 2	+ 43	+ 90	+ 97
	+ 65	+ 46	+ 77	+ 120		+ 44	+ 42	+ 27	
	+ 42			+147		+ 49			
	+ 52			+141	5	+182	+207	+120	+296
+ 9	- 19	+ 51	+128	+304		- 52	+156	105	
+ 29	- 2	+ 68	+ 82	+118		+139	+ 11	342	
	+ 37	+ 36		+173		- 96	+191	362	
3	+ 51	+140	+ 32	+126	+ 77	+149	+205	401	
		+ 23	+ 98	+225		+185	+ 31		
						+152	+ 51		
							- 56		

α e β , in funzione della magnitudine e della distanza zenitale, risolvendo quattro sistemi di equazioni del tipo,

$$e_1 - e_i = (e_1 - e_i)_0 + \alpha(\bar{m} - m_0) + \beta z^- , \quad (i = 2, 3, 4, 5) , \quad (m_0 = 6.0)$$

in cui $(e_1 - e_i)_0$ rappresenta il valore dell'errore relativo dell'osservatore i rispetto all'osservatore 1 per $m = 6.0$ e $z = 0$.

I risultati di questi calcoli riassunti nella Tabella VIII mettono in evidenza la realtà del coefficiente β che si manifesta come una variazione positiva dell'errore relativo al crescere della declinazione. Altrettanto evidente, anche se gli errori medi risultano molto più grandi, risulta la notevole variazione

TABELLA VII

Gr.	\bar{m}	\bar{z}	$e_1 - e_2$	$e_1 - e_3$	$e_1 - e_4$	$e_1 - e_5$
1	3.9	- 3 ^o .0	+ 53	+ 25	+ 57	+140
2	5.8	+ 2 .6	+ 19	+ 6	+ 52	+105
3	7.2	+ 1 .5	+ 51	+ 82	+ 65	+176
4	5.8	-42 .2	+ 32	+ 43	+ 59	+ 97
5	6.5	+33 .3	+171	+ 98	+ 89	+301

TABELLA VIII

i	$(e_1 - e_i)_0$	α	β
2	+ 68 \pm 16	+ 4.5 \pm 2.5	+1.61 \pm 0.01
3	+ 43 \pm 12	+18.2 \pm 1.9	+0.68 \pm 0.01
4	+ 67 \pm 4	+ 3.6 \pm 0.6	+ .32 \pm 0.00
5	+169 \pm 20	+ 9.7 \pm 3.2	+2.36 \pm 0.01

TABELLA IX

i	$(e_i)_0$
1	+69
2	+ 1
3	+26
4	+ 2
5	-100

in funzione della magnitudine, ciò che raccomanda l'uso di filtri o diaframmi.

Se si ritiene infine valida la condizione che la somma degli errori assoluti per i cinque osservatori risulti piccola e quindi trascurabile si ottiene per l'errore assoluto dell'osservatore di riferimento 1 : $(e_1)_0 = +69$ millisecondi, da cui derivano i valori assoluti degli altri osservatori nella Tabella IX.

Precisiamo comunque, se ce ne fosse bisogno, che questi ultimi risultati possono essere considerati nel nostro caso, in mancanza di valide considerazioni circa la veridicità della ipotesi accettata, di una attendibilità molto limitata.

L'intervallo di tempo limitato (quattro serate di osservazioni) non ha

TABELLA X

t	Δ_{5-1}	t	Δ_{5-1}
0	+133	103	+25
6	+140	104	+143
8	+123	110	+56
13	+104	144	+86
34	+98	145	+13
41	+108	159	+62
48	+95	166	+47
54	+97	205	+15
55	+37	206	+70
68	+106		

TABELLA XI

t	Δ_{5-1}
7	+125
24	+108
44	+100
56	+84
83	+78
115	+78
140	+54
176	+41

permesso di mettere in evidenza eventuali variazioni in funzione del tempo degli errori $e_1 - e_i$.

Questa ricerca, che richiede intervalli di tempo notevolmente lunghi, è stata invece tentata su altre basi per l'errore relativo dagli osservatori 1 e 5.

Nella Tabella X sono dati in funzione del tempo espresso in giorni con origine arbitraria, le differenze, sempre in millesimi di secondo,

$$\Delta_{5-1} = \bar{\Delta t}_5 - \bar{\Delta t}_1 ,$$

tra la correzione dell'orologio determinata dai due osservatori 1 e 5 con l'osservazione di un medesimo gruppo di stelle. Numerose stelle orarie e qualche volta anche le circumpolari utilizzate per la determinazione dell'azimut strumentale, non sono state in pratica tutte osservate contemporaneamente, per cui avendosi dalla (2)

$$\bar{\Delta t}_1 = \Delta t - [e_1(p) + e(s) + e_1(s, p) + e(t, e) + \frac{1}{r'} \Sigma \Delta a' - \frac{1}{r'} \Sigma \Delta \alpha_{r'}] ,$$

$$\bar{\Delta t}_5 = \Delta t - [e_5(p) + e(s) + e_5(s, p) + e(t, e) + \frac{1}{r''} \Sigma \Delta a'' - \frac{1}{r''} \Sigma \Delta \alpha_{r''}] ,$$

si avrà in generale, ritenendo valide le ipotesi precedentemente fatte,

$$\Delta_{5-1} = e_1(p) - e_5(p) + \bar{\Delta a}' - \bar{\Delta a}'' + \frac{1}{r'} \Sigma \Delta \alpha_{r'} - \frac{1}{r''} \Sigma \Delta \alpha_{r''} .$$

Se si ammette con buon fondamento che gli ultimi quattro termini di quest'ultima relazione rivestono carattere accidentale per valori diversi di

Δ_{5-1} la media $\overline{\Delta}_{5-1}$ di un certo numero di valori Δ_{5-1} relativi a osservazioni successive, dovrebbe permettere di scrivere

$$\overline{\Delta}_{5-1} = \overline{e_1(p)} - \overline{e_5(p)} \quad ,$$

e cioè rappresentare il valore medio dell'errore relativo $e_1(p) - e_5(p)$ per il periodo considerato.

Nella Tabella XI sono dati in funzione del tempo i valori medi $\overline{\Delta}_{5-1}$ determinati come una progressione di medie di quattro valori Δ_{5-1} con ragione di 2. Questi valori mettono chiaramente in evidenza una variazione progressiva di $e_1(p) - e_5(p)$ dovuta probabilmente all'osservatore 5 che ha iniziato all'epoca $t = 0$ le sue prime osservazioni di tempo. L'errore medio di ciascun valore Δ_{5-1} calcolato utilizzando gli scarti $\overline{\Delta}_{5-1} - \Delta_{5-1}$ risulta ± 28 millesimi di secondo, il che verifica sperimentalmente quanto accennato in precedenza in linea generale circa la precisione inferiore che si ha tentando di determinare gli errori personali e strumentali basandosi su programmi non specifici.

I risultati conseguiti in questa ricerca, a prescindere dall'utilità pratica che essi possono rivestire, sono una conferma della necessità e della possibilità di una verifica permanente, da effettuarsi periodicamente, degli errori personali e strumentali, se si desidera che le misure ed i risultati delle ricerche astronomiche e geodetiche basate sulle determinazioni di tempo, sempre frutto di lungo lavoro, corrispondano con maggiore fedeltà alle grandezze, spesso di grande importanza pratica e teorica, che esse rappresentano.

*