

UN MODELLO SPERIMENTALE DI PENDOLO DI PRECISIONE A SCAPPAMENTO ELETTRONICO

Nota di A. KRANJC (*)

(Osservatorio Astronomico di Milano - Merate)

SOMMARIO. — Si esamina criticamente il funzionamento di alcuni tipi di orologi in uso negli osservatori astronomici e si descrive un modello di orologio a pendolo di facile costruzione completamente libero oscillante nel vuoto a scappamento elettromagnetico comandato da impulsi pendolari fotoelettrici. La precisione è dell'ordine del centesimo di secondo al giorno.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird die Arbeitsweise einiger astronomischer Pendeluhren kritisch untersucht und ein vollkommen frei im Vakuum schwingendes Modell beschrieben, welches mit elektromagnetischer Hemmung und durch photoelektrische Impulse geregelt ist, und eine Genauigkeit von der Ordnung von $0^s.01$ pro Tag besitzt.

PARTE PRIMA

1. — EQUAZIONE DEL MOTO.

Supponiamo di avere un pendolo oscillante su dei coltelli supposti perfettamente rigidi; dalla dinamica si ha che l'equazione del moto è data dalla

$$(1) \quad M = I \ddot{\varphi}$$

ove M = momento agente

I = momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse dei coltelli

φ = spostamento angolare dalla verticale.

Se h_1 è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione, P è il peso del pendolo ed m la sua massa, se si tiene conto anche di un termine di viscosità dovuto agli attriti, si ottiene

$$(2) \quad M = -m g h_1 \text{ sen } \varphi - h_2 \dot{\varphi}$$

con h_2 costante di smorzamento, e quindi si ha l'equazione differenziale completa per il caso reale

$$(3) \quad I \ddot{\varphi} + h_2 \dot{\varphi} + m g h_1 \text{ sen } \varphi = 0.$$

(*) Pervenuta l'8 giugno 1955.

Se lo smorzamento h_2 è trascurabile e l'elongazione massima assai piccola si ha l'equazione del moto armonico

$$(4) \quad I \ddot{\varphi} + m g h_1 \varphi = 0.$$

che integrata dà

$$(5) \quad \varphi = \Phi \operatorname{sen} \frac{2 \pi}{T} t, \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{m g h_1}}$$

Posto $l = \frac{I}{m h_1}$ la lunghezza ridotta del pendolo equivalente si ha

$$(6) \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Se si vuole che il pendolo batta il secondo bisogna che $T = 2$

$$(7) \quad l = g / \pi^2$$

e quindi dovrà essere circa $l = 100$ cm.

Se conserviamo per ora l'ipotesi $h_2 = 0$ ma togliamo la restrizione che l'elongazione sia piccola, l'espressione del periodo è data notoriamente dallo sviluppo in serie, ove Φ è l'elongazione massima

$$(8) \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\Phi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\Phi}{2} + \dots \right]$$

Dalla (8) segue che l'isocronismo del pendolo è legato al mantenersi costante della elongazione massima Φ . La tabella I dà per alcuni valori di Φ gli importi del secondo e terzo termine della serie.

Esaminiamo ora l'influenza del termine h_2 . L'equazione (3), nell'ipotesi che Φ sia piccolo, può essere scritta

$$(9) \quad \ddot{\varphi} + 2 h \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

ove

$$(10) \quad \omega^2 = g / l \quad h = \frac{h_2}{2 I}.$$

Siccome $l = 100$ cm e $g = 981$ cm sec⁻² ne segue che $\omega = 3,14$ sec⁻¹. Per effetto del termine h la soluzione non è più un moto armonico persistente ma smorzato.

Si avrà

$$(11) \quad \varphi = \Phi e^{-ht} \operatorname{sen} \frac{2 \pi}{T} t,$$

ove

$$(12) \quad T = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 - h^2/\omega^2}}$$

TABELLA I

Φ	I	II
0'	0.0000000	0.0000000
10	5	0
20	21	0
30	47	0
40	85	0
50	132	0
1° 00	190	0
10	259	0
20	339	0
30	428	0
40	528	0
50	640	1
2° 00	761	1
10	894	1
20	1036	2
30	1190	2
40	1354	3
50	1529	4
3° 00	1723	5

L'effetto dello smorzamento h è quindi non solo di diminuire esponenzialmente l'ampiezza Φ ma anche di variarne il periodo. Se alla fine teniamo conto degli effetti combinati dello smorzamento e dell'ampiezza si trova la

$$(13) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1 + \Phi^2/16 + \dots}{\sqrt{1 - \frac{l h^2}{g}}}$$

Determiniamo ora l'energia del pendolo e la potenza dissipata, cioè evidentemente la potenza che dovrebbe essergli fornita per mantenerlo in regime di oscillazione costante. Essa è data dall'energia potenziale dedotta per Φ

$$(14) \quad U_0 = \frac{1}{2} M g h_1 \Phi^2.$$

Trascorso il tempo $\frac{1}{2}T$, semiperiodo di oscillazione, l'energia totale si è ridotta a

$$(15) \quad U_{\frac{1}{2}T} = \frac{1}{2} M g h_1 \left(\Phi e^{-h \frac{T}{2}} \right)^2$$

e quindi

$$(16) \quad U_{\frac{1}{2}T} = U_0 e^{-hT}$$

Si può porre con buona approssimazione, essendo h molto piccolo,

$$U_{\frac{1}{2}T} = U_0 (1 - hT)$$

e quindi

$$(17) \quad \Delta U = U_0 h T.$$

Questa importante formula permette di calcolare la potenza necessaria a mantenere un pendolo in oscillazione di ampiezza Φ . Bisogna a questo scopo conoscere quanto è grande h . Essa può essere calcolata dalla relazione

$$(18) \quad h = \frac{\log \Phi_0 - \log \Phi_t}{t \log e}.$$

Per un pendolo invar del tipo normalmente usato negli orologi Riefler, sospeso ad una lama di acciaio, oscillante nell'aria libero da altri vincoli meccanici si è trovato sperimentalmente la relazione di figura 1 tra Φ ed il tempo :

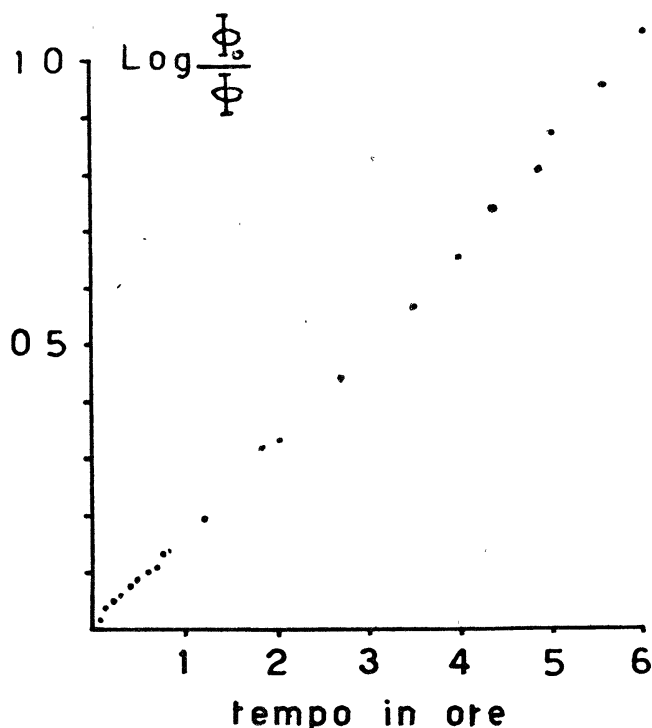


Fig. 1

Da questa figura si vede che l'ipotesi che le forze di attrito siano proporzionali alla velocità porta a conseguenze abbastanza ben verificate. Dalla stessa figura si trova che h è dell'ordine di $1,1 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, da cui risulta che l'ampiezza dell'oscillazione dimezza ogni 6200 secondi. Un pendolo in invar pesa circa kg. 7.5: siccome la maggior parte della sua massa è concentrata nella lente, possiamo con buona approssimazione supporre che $h_1 = l$; quindi, essendo $T = 2 \text{ sec}$,

$$\left. \begin{aligned} (19) \quad U_0 &= \frac{1}{2} Pl \Phi^2 = 36,8 \Phi^2 \text{ joules} \\ (20) \quad \Delta U &= U_0 h T = 8,10 \Phi^2 \cdot 10^{-3} \text{ joules} \end{aligned} \right\} \frac{U_0}{\Delta U} = 4540.$$

2. — SCAPPAMENTO.

La potenza necessaria al funzionamento del pendolo viene data da un meccanismo detto scappamento. Esso è normalmente comandato dal pendolo stesso in modo che la sua azione è sviluppabile in serie di Fourier di periodo fondamentale eguale a quello del pendolo. Se

$$F(t) = \sum_1^{\infty} A_n \text{ sen} \left(\frac{2 n \pi}{T} t + \varphi_n \right)$$

è l'espressione del momento applicato dall'esterno, si ha un'equazione differenziale

$$(21) \quad I \ddot{\varphi} + h_2 \dot{\varphi} + m g h_1 \text{ sen } \varphi = F(t)$$

dalla quale si può ricavare φ in funzione del tempo. E' intuitivo, ed è possibile dimostrarlo rigorosamente, che l'equazione differenziale (21) ammette una soluzione asintotica approssimata data dalla (5), ove Φ dipende dalla $F(t)$. Una variazione della $F(t)$ provocherebbe sia una variazione della Φ , e quindi del periodo a causa della (8), sia una variazione della fase della (8). Al fine di poter studiare meglio l'effetto di uno scappamento, supponiamo di decomporre la $F(t)$ in tanti piccoli impulsi di energia successivamente agenti sul pendolo, e cerchiamo la loro influenza sul moto.

L'espressione della

$$(5) \quad \varphi = \Phi \text{ sen} \frac{2 \pi}{T} t$$

è l'espressione di un moto armonico che ammette la funzione potenziale; l'energia totale è data dalla

$$(22) \quad U = \frac{1}{2} Pl \Phi^2 \cdot$$

Il punto φ descrive notoriamente la proiezione sull'asse X di un punto P ruotante uniformemente su una circonferenza di raggio Φ . (v. fig. 2).

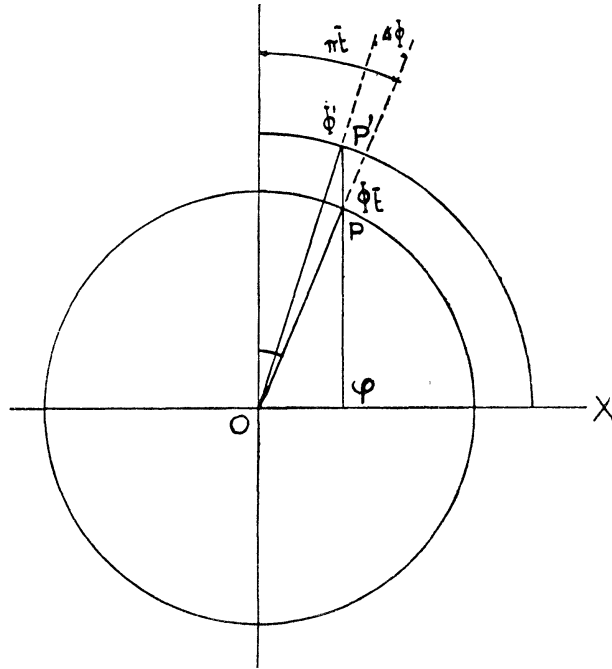


Fig. 2

Se nell'istante \bar{t} forniamo una energia supplementare tramite lo scappamento, il movimento seguente sarà ancora un moto armonico dello stesso periodo, ma di ampiezza e fase diversa. L' ampiezza sarà variata perchè se U' è la nuova energia totale, si dovrà avere per la nuova ampiezza il valore

$$\Phi'^2 = \frac{2 U'}{P l} .$$

Siccome la posizione del punto sul diametro X non può variare con discontinuità, il punto P dovrà appartenere alla perpendicolare innalzata sopra φ , che già passa per P . Ora si vede subito che la fase dell'oscillazione è variata dall'angolo \widehat{POP} ; siccome è facile vedere che le ordinate in figura sono proporzionali alle velocità del punto φ , ne viene che le variazioni dell'angolo di fase sono date da

$$(23) \quad \frac{\Delta V}{V_{\max}} \text{ sen } \frac{2 \pi}{T} t .$$

E' paradossale notare a questo proposito che un impulso ΔV applicato al pendolo dopo che questo ha oltrepassato la posizione verticale ha l'effetto di ritardare il passaggio del pendolo nella stessa posizione, cioè aumenta il periodo d'oscillazione forzata.

3. — EFFETTI PROVOCATI DALLE VARIAZIONI DEI PARAMETRI.

Scopo d'un orologio è di conservare il più possibile uniformemente un campione di tempo. Se esaminiamo il pendolo vediamo invece che il suo periodo è influenzato da vari parametri. Per stabilire la loro relativa influenza differenziamo logaritmicamente la (13)

$$(24) \quad \left| \frac{dT}{T} \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{dl}{l} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{dg}{g} \right| + \left| \frac{\Phi d\Phi}{8} \right| + \left| \frac{h dh}{\pi^2} \right| + \dots$$

ove ora si è posto il semiperiodo uguale ad 1 secondo, e si è supposto h molto minore di 1. Supponiamo che l'andamento dell'orologio debba restare costante entro un centesimo di secondo al giorno, ciò che è il minimo di precisione richiesta oggi agli orologi astronomici. Si avrà quindi che $dT/T = 0,01/86.400 \sim 1/10^7$, cioè la precisione richiesta è di 1 su dieci milioni. Bisognerà pertanto che le variazioni prodotte da l , g , Φ ecc. siano inferiori a questo limite.

Variazione di l . — Bisognerà che $dl < 2 l \times 10^{-7}$; siccome $l = 100$ cm ne segue che le variazioni di l devono essere inferiori ai 2 decimi di micron. Essendo il coefficiente di dilatazione dell'invar, col quale è fatto il pendolo, circa $1,5 \times 10^{-6}$, ne segue che il pendolo deve essere termostattizzato entro il decimo di grado centigrado.

Variazione di g . — Si trova che g deve essere costante entro i due micron. Possibili cause di variazioni di g sono microsismi, perturbazioni lunisolari, vibrazioni del pilastro di sostegno dovute alle oscillazioni di altri pendoli o di macchine varie, ecc. Non bisogna però dimenticare che g interviene per determinare il peso; esso è determinato anche dalla spinta aerostatica dell'aria. Siccome la sua densità a pressione normale è di 1,3 grammi per litro, avendo il pendolo Riefler un volume di circa $\text{dm}^3 0,86$, ne segue che la spinta aerostatica è di grammi 1,1. Per ottenere la precisione voluta bisogna dunque che la densità dell'aria rimanga costante entro l'1,4 per mille, cioè la pressione deve essere costante entro il millimetro di mercurio. Si può facilmente dimostrare che se la pressione è inferiore ad una atmosfera, la tolleranza rimane sempre la stessa di un millimetro di mercurio. E' ovvio però che a pressione ridotta la variazione percentuale tollerata è maggiore.

Variazione di Φ . — Dalla tabella II si ottiene la massima variazione tollerata $\delta\Phi$ nell'ampiezza per variazioni inferiori a 10^{-7} nel periodo del pendolo. La terza colonna dà la variazione percentuale massima tollerata.

Siccome l'ampiezza d'oscillazione dipende dalla potenza fornita dallo scappamento e dalla costante di smorzamento che vi si contrappone, bisogna che anche queste siano regolate con una tolleranza percentuale data dalle

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \frac{\delta \Delta U}{\Delta U} &= \frac{16}{\Phi^2} \left| \frac{\Phi \delta \Phi}{8} \right| = \frac{1,6 \times 10^{-6}}{\Phi^2} \\
 (26) \quad \frac{\delta h}{h} &= \frac{1,6 \times 10^{-6}}{\Phi^2} = \frac{\delta \Delta U}{\Delta U}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (25) \\ (26) \end{aligned}} \right\} = 2 \frac{\delta \Phi}{\Phi}$$

Il valore comune della tolleranza percentuale è trascritto nella quarta colonna, e si vede che le tolleranze sono tanto più rigide quanto più ampia è l'oscillazione.

TABELLA II

Φ	$\delta \Phi$	$\delta \Phi / \Phi \%$	$\frac{\delta \Delta U}{\Delta U} = 2 \frac{\delta \Phi}{\Phi} \%$
10'	0.94	9.4	19
20	0.47	2.3	4.7
30	0.31	1.0	2.1
40	0.23	0.59	1.2
50	0.19	0.38	0.75
1°00	0.15	0.26	0.52
10	0.13	0.19	0.38
20	0.12	0.15	0.29
30	0.10	0.12	0.23
40	0.094	0.094	0.18
50	0.083	0.078	0.16
2°00	0.065	0.065	0.13

Variazione di h. — Siccome $h = 1,1 \times 10^{-4}$ la massima variazione tollerata è molto maggiore della stessa h e perciò non può avere influenza diretta. Può avvenire che una diminuzione di h , mantenendo costante la potenza fornita al pendolo, ne aumenti l'ampiezza d'oscillazione, e le tolleranze sono espresse dalla (26).

Variazioni dell'angolo di fase. — Dalla (23) si ha che la variazione nella fase d'oscillazione del pendolo è data da

$$\frac{\Delta V}{V_{\max}} \text{ sen } \frac{2\pi}{T} t$$

Per rendere minimo l'effetto di eventuali variazioni nell'impulso è chiaro che bisognerà applicarlo nell'istante in cui il pendolo passa per la verticale; in quel caso la variazione di fase è nulla qualunque sia l'impulso. In pratica esso non può essere istantaneo, ma si vede subito che lo sfasamento è ancora nullo se applicato simmetricamente intorno alla verticale. Se si suppone che venga concentrato nell'angolo di fase α , la condizione di stazionarietà delle oscillazioni impone la condizione.

$$(27) \quad \Phi' - \Phi = h \frac{T}{2} \Phi$$

e quindi, detta θ la variazione nella fase dell'oscillazione libera del pendolo

$$(28) \quad \theta = h \frac{T}{2} \text{sen } \alpha$$

L'intervallo fra due passaggi nella verticale diviene quindi

$$(29) \quad \frac{T}{2} \left(1 + \frac{\theta}{\pi} \right)$$

Se si vuole che una variazione nella fase abbia influenza inferiore al centesimo di secondo al giorno bisogna che

$$(30) \quad \frac{\partial \theta}{\pi} \leq 10^{-7}$$

cioè la variazione percentuale ammessa è data dalla

$$(31) \quad \frac{\partial \theta}{\theta} = \frac{\pi}{10^7 h \text{sen } \alpha}$$

Quindi per $\alpha = \pm 90^\circ$ la tolleranza è di circa il 3 per mille. Tolleranze più larghe possono essere ottenute con pendoli aventi h minori od angoli di fase dell'impulso notevolmente minori di 90° . E' interessante osservare che la tolleranza in θ non dipende dalla ampiezza d'oscillazione in regime stazionario.

Al contrario una variazione non periodica nell'impulso, ad esempio un microsismo, ha influenza tanto maggiore quanto minore è Φ ; per questo motivo l'ampiezza non deve essere troppo piccola.

3. — ESAME DI SCAPPAMENTI USATI PER PENDOLI DI PRECISIONE.

Le poche ed elementari nozioni precedenti sono già sufficienti per restringere moltissimo il campo dei possibili tipi di scappamenti che danno una sufficiente garanzia di precisione. Come è ben noto gli scappamenti si dividono in liberi, a riposo, e misti. Negli scappamenti a riposo l'asse del pendolo è sempre collegato meccanicamente al rotismo di scappamento, mentre negli scappamenti liberi la connessione avviene soltanto durante il tempo in cui al pendolo viene applicata energia. Negli scappamenti misti si ha una situazione intermedia. Un esempio di scappamento a riposo è il tipo Graham, che è comunemente usato in quasi tutti i pendoli d'uso normale; come esempio del tipo misto notiamo i tipi Hipp,

Riefler, ecc.; fra gli scappamenti completamente liberi il tipo Shortt. E' chiaro che sono accettabili solamente gli scappamenti completamente liberi; infatti la connessione fra pendolo e scappamento protratta per una notevole frazione del periodo fa sì che la variazione del momento applicato al pendolo può variare notevolmente dal valore medio dovuto alla sola gravità. Nello scappamento Graham e simili l'impulso viene poi dato nell'istante di massima elongazione, cioè nel peggior modo possibile; lo stesso avviene in molti altri tipi di scappamento ad esempio il tipo Hipp.

Per eliminare l'influenza della temperatura, pressione, ecc. bisogna evidentemente ed inevitabilmente porre il pendolo sotto campana a bassa pressione in una camera tenuta a temperatura costante entro il decimo di grado. Da ciò segue che il pendolo non può essere azionato da meccanismi ad ingranaggi, ruote ed altre parti ruotanti che abbisognino di lubrificazione accurata, e ciò perchè a bassa pressione il lubrificante si seccerebbe. Per questo motivo il Riefler non può funzionare a pressione troppo bassa. L'estrazione dell'aria diminuisce lo smorzamento, e perciò permette di applicare impulsi molto piccoli a distanze notevoli di tempo, diminuendo così al minimo possibile l'interazione tra il pendolo ed il meccanismo che lo rifornisce d'energia e che inevitabilmente ne perturba in tutti i casi il periodo o almeno la fase. Sempre allo scopo di diminuire lo smorzamento per il motivo esposto bisogna che la lamina di sospensione sia accuratamente studiata pur soddisfacendo ai necessari requisiti di robustezza. Una accurata regolazione dello scappamento è pure importante per mantenere costante il più possibile l'ampiezza dell'oscillazione (v. Tabella 2); si può evitare qualunque inconveniente del genere azionando lo scappamento quando l'ampiezza scende sotto il limite voluto, come avviene nel tipo Hipp che ora esaminiamo.

Il pendolo porta inferiormente all'asta una banderuola libera di ruotare parallelamente all'asse di rotazione del pendolo (v. figura 3).

Se l'ampiezza d'oscillazione è sufficientemente grande, la banderuola urta tanto all'andata che al ritorno contro una massa metallica M supportata da una sottilissima molla m incastrata in A , e nulla avviene eccetto una piccola perdita di energia del pendolo per urto contro M . Ad un certo punto per diminuire della ampiezza d'oscillazione la banderuola non sorpassa più la tacca T nella bassa M , ed al ritorno vi si incastra; la molla m è spinta quindi verso il basso dal peso del pendolo e si chiude così un contatto C ; un'elettrocalamita non segnata in figura provvede ad attirare il pendolo dandogli così l'impulso necessario.

Il pregio maggiore di questo tipo consiste nella semplicità. Osserviamo che l'ampiezza d'oscillazione è limitata fra il valore minimo corrispondente all'incastro in T , ed il valore massimo corrispondente all'impulso dato dall'elettrocalamita. Siccome la chiusura del contatto C avviene ogni 20 o 30 secondi è chiaro che l'ampiezza varia tra limiti assai ristretti. Purtroppo si deve notare che ogni secondo il pendolo è accop-

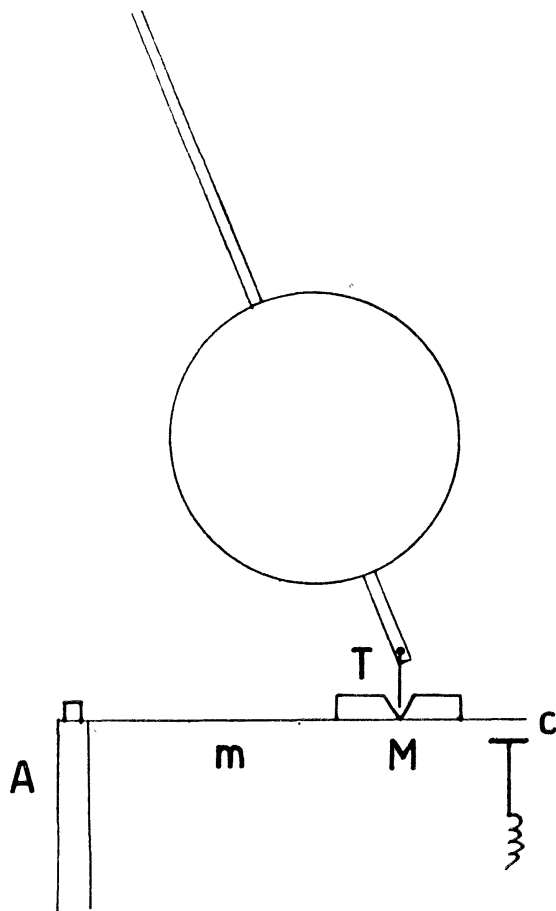


Fig. 3

piato alla molla m tramite la banderuola, e che l'impulso viene dato anche qui nella fase peggiore della massima elongazione; per di più il massimo lavoro eseguito dal pendolo consiste nel flettere la molla m , ciò che avviene pure nella massima elongazione.

Esaminiamo ora lo scappamento Riefler descritto da Riefler stesso in Z.f. Ikd. 1894, pag. 350.

Il pendolo in invar B è appeso al bilanciante $A A_1$ tramite due molle d'acciaio i ; il bilanciante $A A_1$ appoggia sui due piani d'agata P per mezzo di due coltelli C e può ruotare intorno al loro spigolo flettendo la molla i .

Solidale al bilanciante un'ancora porta due cilindretti $S S_1$ la cui metà anteriore è spianata come si vede in figura a forma di paletta. La ruota di scappamento consiste in due ruote dentate di cui l'una, di diametro più piccolo, è la ruota H di sollevamento, fornita dei denti h ; l'altra è la ruota R di riposo ed è un po' maggiore.

Quando il pendolo oscillando da destra verso sinistra oltrepassa la posizione verticale, per forza elastica si trascina dietro il bilanciante per mezzo delle molle i e la paletta S scorre sul dente r della ruota di riposo;

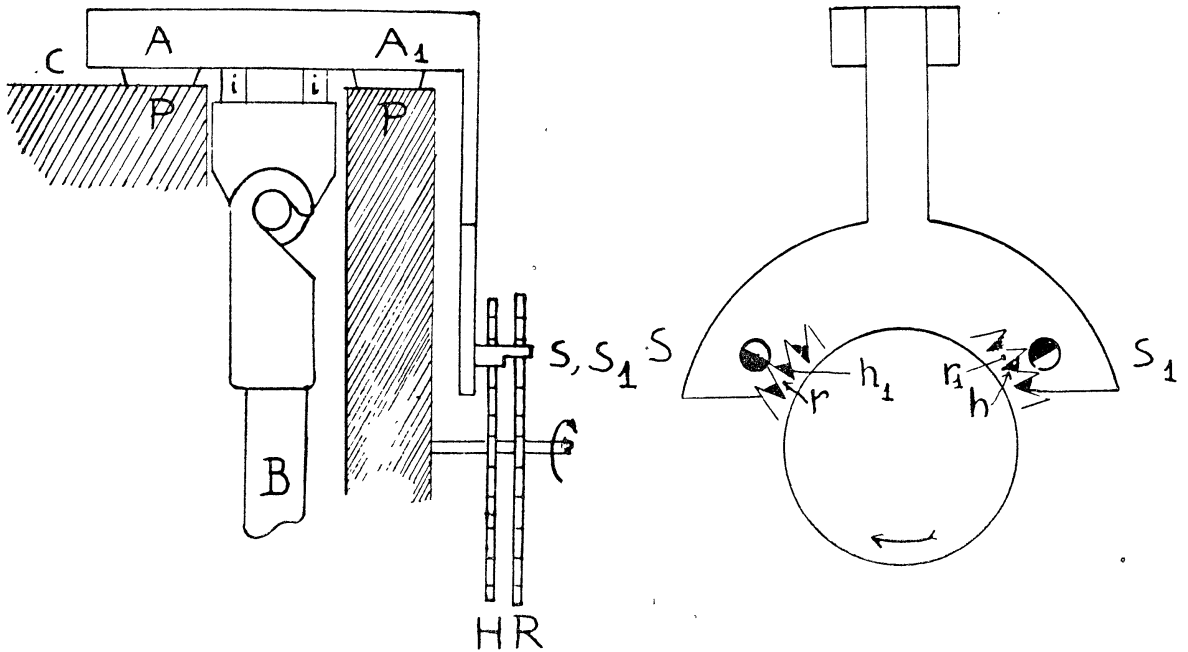


Fig. 4

quando il pendolo si è trascinato dietro il bilanciere per un quarto di grado, il dente r si disimpegna dalla paletta S e le due ruote $H R$ trascinate da un piccolo peso ruotano verso destra; durante questa rotazione il dente h della ruota di sollevamento viene a contatto con la parte cilindrica del piolino S_1 e costringe perciò ancora e bilanciere a ruotare in direzione opposta a quella del pendolo sin quando la paletta S_1 viene ad impedire l'ulteriore rotazione della ruota di riposo R essendo venuta a contatto col dente r_1 . Il pendolo prosegue la sua oscillazione verso sinistra e poi ritorna nella posizione verticale; durante questo periodo il piolino S è libero ed il piolino S_1 è tenuto premuto contro la ruota di sollevamento per effetto della elasticità della molla di sospensione i . Arrivati a questo punto tutto procede come precedentemente solo che ora entra in gioco lo sganciamento della paletta di S_1 dal dente r_1 . E' chiaro che è importante che nella posizione verticale del pendolo la lama sia così esattamente disposta sul bilanciere oscillante che questo sia in equilibrio sui coltelli. Altrimenti il momento del peso del pendolo rispetto all'asse dei coltelli terrebbe premute le palette contro la ruota di riposo in maniera eccessiva provocando attriti nocivi; se poi la sospensione è troppo fuori asse può avvenire addirittura che il momento flettente della lamina di sospensione non ce la faccia più a controbilanciare il momento del pendolo e quindi lo scappamento non funziona più. Nella maggior parte dei casi è questo il motivo per cui uno scappamento Riefler manomesso da persone poco pratiche non va più bene o non va del tutto. Il funzionamento quindi è talmente critico che causa meraviglia la grande precisione

ottenuta. Osserviamo che lo scappamento è del tipo misto, perchè è necessario che il pendolo oscilli per un quarto di grado affinchè il dente r della ruota di riposo si disimpegni dalla paletta S .

Riguardo alle variazioni di fase bisogna notare che il ragionamento del paragrafo 2 va leggermente modificato in quanto non si ha in questo caso un impulso applicato al pendolo ma una diminuzione della forza di richiamo per un quarto di grado di oscillazione seguita da un brusco ritorno al valore normale dovuto alla molla di sospensione i . La differenza di energia totale è fornita dalla ruota di sollevamento H .

E' interessante esaminare matematicamente il meccanismo. Se

$$(32) \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$$

è l'equazione del moto del pendolo con ancora bloccata in posizione verticale dal dente r ed h , nella quale dunque ω è comprensivo del momento della forza peso del pendolo e del momento flettente della lamina molla, che si può supporre abbia ora un estremo incastrato fisso nel bilanciere, la soluzione sarà data da

$$(33) \quad \varphi = \Phi \operatorname{sen} \omega t$$

dove Φ è l'ampiezza; possiamo evidentemente supporre che la fase sia nulla quando il pendolo è verticale. Quando il pendolo oltrepassa la posizione verticale e sino a quando il dente r si sgancia dalla paletta S la molla resta dritta perchè costretta dalla propria elasticità a seguire la direzione dell'asse del pendolo, senza esserne ostacolata da altri appoggi. Manca quindi per un breve periodo di tempo la componente dovuta al momento flettente della molla e quindi il moto è soggetto alla nuova legge

$$(34) \quad \ddot{\varphi} = -\omega'^2 \varphi$$

La soluzione di (34) è ancora del tipo armonico precedente; se si impone la condizione che per $t = 0$ la posizione e la velocità non devono presentare discontinuità risulta

$$(35) \quad \varphi = \Phi' \operatorname{sen} \omega' t \quad \text{con} \quad \Phi' = \Phi \frac{\omega}{\omega'}$$

Si può facilmente vedere che la fase non varia. Trascorso un certo intervallo di tempo \bar{t} la molla i è costretta a reincurvarsi dalla ruota di sollevamento e dall'inerzia del pendolo, e l'equazione del moto ridiventa la (32). Imponendo anche ora eguali condizioni di raccordo fra la soluzione di (32) più generale, in cui compare ora anche un angolo di fase θ , e la soluzione (35) in corrispondenza al tempo t si trova, indicando con Φ'' la nuova ampiezza,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi'' \operatorname{sen} (\omega \bar{t} + \theta) = \Phi' \operatorname{sen} \omega' \bar{t} \\ \omega \Phi'' \cos (\omega \bar{t} + \theta) = \omega' \Phi' \cos \omega' \bar{t} \end{array} \right.$$

da cui

$$\omega' \operatorname{tg} (\omega \bar{t} + \theta) = \omega \operatorname{tg} \omega' \bar{t}$$

Se confrontiamo l'equazione del moto prima e dopo l'impulso vediamo che sono date l'una da

$$\varphi = \Phi \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

e l'altra da

$$\varphi = \Phi'' \operatorname{sen} (\omega t + \theta)$$

L'impulso produce dunque una variazione della fase uguale a θ nell'istante in cui l'energia viene fornita. L'istante t , se l'ampiezza di oscillazione è di 1° è sfasato di circa 15° rispetto alla fase corretta di 0° richiesta dalla teoria esposta. Per quanto il miglioramento rispetto al tipo Graham ed Hipp sia notevole (15° anzichè 90°) e per quanto Riefler credesse che la fase dell'iniezione dell'energia fosse di 0° anzichè di 15° è chiaro che il progresso non è ancora sufficiente. Infatti si può facilmente dimostrare che lo sfasamento prodotto ad ogni oscillazione, supponendo che queste siano stazionarie, è dato da

$$(37) \quad \theta \cong \frac{2}{3} h \omega \bar{t}$$

ponendo $h = 1,1 \times 10^{-4}$ ed $\omega t = 0,25$ si trova $\theta = 18,10^{-6}$ radianti corrispondenti a 6μ sec e quindi la tolleranza in θ

$$(38) \quad \frac{\delta \theta}{\theta} \cong \frac{\pi \cdot 10^{-7}}{18 \cdot 10^{-6}} \cong 1,5\%$$

Nella trattazione precedente per semplicità si è trascurata l'inerzia del bilanciere oscillante, l'attrito delle palette sui denti di riposo ecc.; ciononostante il risultato è sufficiente per dare un'idea delle tolleranze necessarie.

Negli orologi Shortt il pendolo è accoppiato meccanicamente allo scappamento soltanto durante il tempo in cui gli viene erogata energia, ed è quindi del tipo completamente libero. La mancanza di ingranaggi permette che sia posto a pressione molto bassa, (circa 30 mm). L'impulso gli viene dato quando passa esattamente nella posizione verticale. In questi fatti risiede il motivo della sua superiorità sull'orologio Riefler.

Gli svantaggi del pendolo Shortt consistono essenzialmente nella necessità di usare un secondo orologio sincronizzato dal primo. E' chiaro che il pendolo secondario ha unicamente lo scopo di contatore delle oscillazioni del pendolo primario, allo scopo di sganciare nella fase ed istante voluti il braccio a gravità. E' evidente che lo stesso risultato può essere conseguito elettronicamente a mezzo di cellule fotoelettriche e contatori

di impulsi. Un notevole passo su questa via è stato compiuto da Schuler. Egli usa un pendolo non sospeso alla sua estremità, ma un po' più in basso in modo che la distanza del baricentro dall'asse di rotazione sia uguale al raggio d'inerzia. Si può dimostrare facilmente che in tal caso il periodo d'oscillazione non risente che in misura molto minore delle variazioni della distanza del baricentro dall'asse di sospensione, rispetto ai pendoli sospesi normalmente. Questa insensibilità permette di usare una sospensione a coltello anzichè a molla, ottenendo il vantaggio d'un minore valore della costante di smorzamento h ; trova $h = 0,13 \times 10^{-4}$; un valore così basso è stato ottenuto ponendo il tutto in atmosfera di idrogeno alla pressione di 100 mm di Hg; nel vuoto la costante di smorzamento scendeva addirittura a 0.095×10^{-4} . Il vuoto assoluto non era consigliabile perchè non permetteva una sufficiente uguaglianza di temperatura del pendolo causa la scarsa conduttività. D'altra parte l'idrogeno conduce sufficientemente bene il calore ed offre soltanto la tredicesima parte della resistenza offerta a pari pressione dall'aria. Durante la sua oscillazione il pendolo intercetta un fascio di luce e tramite una cellula fotoelettrica agisce su di un commutatore. Esso alternativamente permette di caricare un condensatore ad una tensione stabilizzata e successivamente di scaricarlo nel circuito di una bobina che agisce magneticamente sul pendolo tramite un piccolo magnete portato dal pendolo stesso.

Il pendolo Schuler ha ottenuto precisioni analoghe a quelle degli Shortt.

L'ingegnosa compensazione del periodo rispetto a variazioni del centro di sospensione, se da un lato permette l'uso di coltelli ai quali è associata una minore costante di smorzamento, dall'altro lato offre notevoli inconvenienti, ad esempio la minore energia del pendolo e quindi una maggiore sensibilità a microsismi. L'impulso elettromagnetico per quanto stabilizzato è meno costante dell'impulso di gravità, e così dicasi della fase. Inoltre il magnete portato dal pendolo è soggetto al campo magnetico terrestre od almeno all'induzione magnetica della massa metallica della campana pneumatica. A ciò si aggiunga la difficoltà pratica nel procurarsi un pendolo in invar della forma voluta.

4. — LA SOSPENSIONE.

Vi sono due tipi di sospensione: a coltello ed a molla. Nel primo il pendolo è sostenuto su due coltelli che terminano a spigolo di forma variabile a seconda del costruttore e, purtroppo, delle possibilità costruttive. Dando una forma opportuna allo spigolo si può arrivare a compensare, mediante una variazione della lunghezza effettiva del pendolo, la variazione del periodo dovuta a differenze di ampiezze di oscillazione.

Sfortunatamente le deformazioni nello spigolo del coltello sono estremamente critiche (ricordare che $0,2 \mu$ di variazione di lunghezza portano a variazioni di marcia di $0,01$ secondi al giorno) a meno di usare un pendolo Schuler ove l'influenza è minimizzata ma in pratica non annullata.

La sospensione a molla ha il vantaggio di una maggior facilità di costruzione ma purtroppo rende necessaria una maggiore potenza per il mantenimento delle oscillazioni del pendolo a causa degli attriti interni di flessione.

Siano per la molla L = lunghezza
 a = spessore
 b = larghezza
 E = modulo d'elasticità
 t = carico in kg/mm^2 .

Tenendo conto che le oscillazioni del pendolo sono quasi armoniche e che quindi possono essere calcolate le reazioni d'incastro della molla, si trova inaspettatamente che il prolungamento dell'asse del pendolo passa sempre per uno stesso punto I distante dall'incastro superiore della lama della lunghezza KL ove

$$(39) \quad K = \frac{\text{tgh} \frac{1}{2} \varphi}{\varphi}$$

$$(40) \quad \varphi = \frac{L}{a} \sqrt{\frac{12 t}{E}}$$

A seconda del valore φ si trovano le seguenti espressioni asintotiche:

$$(41) \quad K = \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad \varphi \ll 1$$

$$(42) \quad K = \frac{1}{\varphi} \quad \text{per} \quad \varphi \gg 1.$$

Nel primo caso il centro di rotazione coincide con la metà della lama; nel secondo caso la distanza del centro di oscillazione dall'incastro superiore è data da

$$(43) \quad KL = \frac{L}{\varphi} = a \sqrt{\frac{E}{12 t}}$$

cioè il centro di rotazione è più vicino all'incastro superiore che a quello inferiore.

L'energia T di flessione della lama è data secondo note relazioni

della teoria dell'elasticità dalla

$$(44) \quad T = \frac{1}{4} K' L \Phi^2 mg$$

$$(45) \quad K' = \frac{1}{sh \varphi} \left(\frac{ch \varphi}{\varphi} + \frac{1}{sh \varphi} \right)$$

da cui

$$(46) \quad K' = \frac{2}{\varphi^2} \gg \frac{1}{\varphi} \quad \text{per } \varphi \ll 1$$

$$(47) \quad K' = \frac{1}{\varphi} = K \quad \text{per } \varphi \gg 1$$

L'energia di oscillazione del pendolo è data da $\frac{m g l \Phi^2}{2}$ e quindi il rapporto fra l'energia del pendolo e l'energia necessaria per flettere la lama è data da

$$(48) \quad \Psi = \frac{2 l}{K' L}$$

cioè, posto

$$\Omega = \sqrt{\frac{12 t}{E}}$$

$$(49) \quad \frac{\Psi}{l \Omega} = \frac{2}{a} \quad \text{se } \Omega L \gg a \quad (\varphi \gg 1)$$

$$(50) \quad \frac{\Psi}{l \Omega} = \frac{\Omega L}{a^2} = \frac{\Omega L}{a} \cdot \frac{1}{a} \ll \frac{1}{a} \quad \text{se } \Omega L \ll a \quad (\varphi \ll 1)$$

Il massimo valore di Ψ è ottenuto per valori a/L più piccoli possibile. Siccome l'energia di flessione della molla, a causa della forte costante di smorzamento delle vibrazioni libere della molla stessa, non è moto diversa dalla resistenza offerta alle oscillazioni del pendolo, è chiaro che converrà usare molle lunghe e sottili.

Siccome la (47) vale abbastanza bene per $\varphi \geq 4$ ne segue che, a parità di spessore di lamina, converrà scegliere molle tanto lunghe da rendere $\varphi \simeq 4$. Se la lunghezza L aumentasse, non ci sarebbe alcun vantaggio nella Ψ , perchè nella (49) la Ψ non dipende più da L ; al contrario possono avvenire inconvenienti se L è troppo grande; ad esempio la posizione del centro di rotazione risulta determinata dalla lama oltre

che dal pendolo in invar; da ciò possono sorgere complicazioni. La larghezza della lama va calcolata in modo che il carico del pendolo in kg/mm^2 non superi il carico di sicurezza alla pressoflessione alternata.

Si osservi che il coefficiente φ stimato per le lame di sospensione d'un pendolo Riefler è circa uguale ad 1,2. Ma evidentemente non era possibile farle più sottili perchè ivi era proprio l'energia di flessione della lama che serviva a dare l'impulso al pendolo, ed una lama troppo sottile non sarebbe stata sufficiente allo scopo. Non siamo in possesso di dati sulla sospensione dei pendoli Shortt, ma è probabile che il costruttore abbia seguito la normale tendenza inglese delle lame lunghe e sottili.

PARTE SECONDA

1. — FUNZIONAMENTO DELLO SCAPPAMENTO ELETTRONICO DEL MODELLO COSTRUITO.

Per quanto si è visto nella prima parte bisogna che il pendolo invar sia termostattizzato entro il decimo di grado centigrado, che l'energia gli venga apportata mentre passa per la verticale durante la sua oscillazione, che l'ampiezza sia costante il più possibile, (e quindi pure la potenza

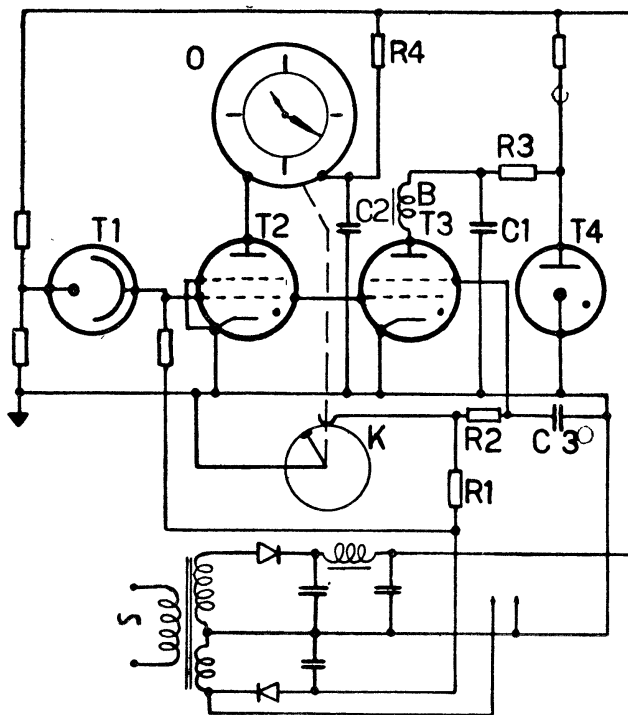


Fig. 5

fornitagli) e che infine lo smorzamento sia il minimo possibile. Nel modello sperimentale costruito all'Osservatorio di Merate si è preso un pendolo in invar originariamente destinato ad un orologio Riefler, e lo si è posto in una campana completamente metallica dalla quale è stata estratta l'aria. Inferiormente esso porta un piccolo magnetino M , ed una lametta che, oscillando rigidamente connessa al pendolo, intercetta un fascio di luce e lo lascia filtrare attraverso una stretta fenditura solo quando il pendolo è esattamente verticale; una cellula fotoelettrica T1 (v. fig. 5) riceve dunque un impulso ad ogni secondo ed innesca un thyatron T2 il quale fa avanzare di un dente la lancetta dei secondi di un comune orologio elettrico O che funziona dunque da semplice contatore di impulsi. L'impulso dalla cellula, oltre che al thyatron T2 va anche alla griglia di un secondo thyatron T3 nel cui circuito di placca è inserita una bobina B accoppiata solo magneticamente (senza alcun contatto meccanico) al magnetino portato dal pendolo. L'energia della scarica viene fornita dai due condensatori C1, C2 in parallelo ai thyatron T2, T3. La tensione massima di carica del condensatore C1 di scappamento è stabilizzata da un tubo al neon T4 al valore di circa 85 volta con una costanza del ± 2 per mille. La bassa tensione anodica permette di usare la griglia schermo di T3 per impedire che la scarica avvenga ogni secondo, come quella del thyatron T2; essa infatti è polarizzata normalmente alla tensione negativa di circa -9 volta e gli impulsi dalla cellula non sono abbastanza alti per innescare in queste condizioni T3; ma ad ogni minuto la griglia schermo viene portata a massa tramite il contatto K strisciante su una ruota solidale con la lancetta dei secondi, e nella cui periferia è disposto un sottile filo d'oro connesso a massa. In tal modo se inizialmente il pendolo è lanciato in direzione opportuna, riceverà un impulso al minuto dovuto alla scarica di C1 attraverso alla bobina B ed il tubo T3, e quindi sempre nella direzione e fase opportuna.

Nei dettagli il circuito di griglia schermo di T3 è un po' più complesso; la resistenza R1 serve a prevenire corti circuiti dalla polarizzazione negativa a massa; in tal modo la corrente portata dal contatto strisciante è assai ridotta. Il gruppo R2, C3 serve a rallentare il tempo di salita della tensione di griglia schermo; se non ci fosse potrebbe avvenire che essendo ancora in atto la scarica di C2 attraverso T2 la tensione di griglia sarebbe ancora sufficiente ad innescare anche T3; naturalmente la durata non infinitesima del segnale dalla cellula fotoelettrica T1 ha lo stesso effetto: una scarica di C1 ed un impulso attraverso B su M in controfase rispetto all'oscillazione del pendolo col risultato di frenarlo ed infine di fermarlo.

I due condensatori C1, C2 vengono ricaricati tramite le due resistenze R3, R4; la R3 è calcolata in modo che C1 raggiunga la tensione della stabilizzatrice in un tempo dell'ordine del minuto; con ciò si ottiene il vantaggio di non shuntare troppo T4 ed inoltre da non perturbare la

scarica di C1 attraverso T3 e quindi B. La R4 invece è scelta in modo da garantire la ricarica di C2 in un secondo ad un tensione sufficiente ad azionare l'orologio elettrico O.

Bisognerebbe che l'impulso fosse ben simmetrico rispetto alla verticale. Ciò diminuirebbe la fluttuazione nell'angolo di fase. Sicuramente l'impulso è asimmetrico, ma a causa della sua breve durata, stimata ad un oscillografo ad un centesimo di secondo, variazioni di forma non dovrebbero essere molto importanti. Non è stato possibile ottenere una fotografia della sua forma perchè l'Osservatorio di Merate non dispone al momento di un sincroscopio adatto.

2. — STABILITA' DI FUNZIONAMENTO.

L'energia del condensatore è data dal prodotto $CV^2/2$; la capacità del condensatore è sufficientemente costante rispetto agli altri parametri. La tensione V è determinata dalla valvola stabilizzatrice T4. La forte resistenza di carico previene irregolarità dovute alla tensione di rete.

L'energia elettrostatica del condensatore C1 va dispersa sotto forma di calore entro T3 per effetto della scarica, e nei conduttori per effetto Joule.

Quest'ultima perdita può essere considerata sufficientemente costante, a causa della costanza della resistenza ohmica dei conduttori e dei contatti stagnati. Siccome la caduta di tensione entro il thyatron a gas raro è circa il dieci per cento della tensione di punta del condensatore, la perdita di potenza nel thyatron è proporzionalmente piccola, e quindi le variazioni d'energia utile sono meno importanti. Siccome il pendolo è fatto oscillare su un'ampiezza di 30' per parte, risulta dalla tabella 2 che sono temibili variazioni della potenza utile solo se superiori al 2% circa, cioè, come ordine di grandezza, del 20% nella potenza assorbita nel thyatron.

Le correnti di Foucault indotte dalla bobina nel magnete sono evidentemente costanti; al contrario la corrente indotta ad ogni secondo dal magnete nella bobina, se questa fosse cortocircuitata, agirebbe da freno elettromagnetico col risultato di aumentare lo smorzamento. Ma la bobina è stata posta nel circuito appositamente in modo da evitare quest'inconveniente; i suoi estremi infatti sono accoppiati solo tramite la capacità diffusa dei conduttori e la capacità anodo catodo di T3. A riprova si è misurato il coefficiente di smorzamento con e senza bobina accoppiata al pendolo (naturalmente senza comunicargli energia): non si è notata alcuna differenza.

L'energia comunicata alla bobina direttamente dall'alta tensione durante la fase di ricarica del thyatron T3 di scappamento è assai minore di quella erogata da C1 perchè la resistenza in serie a C1 è assai elevata.

In tal modo la durata della scarica è determinata dalla capacità del condensatore e dalla induttanza e resistenza di B, ma non dal segnale di griglia che potrebbe altrimenti dar luogo ad oscillazioni di rilassamento; infatti la costante di tempo di ricarica del condensatore è dell'ordine di dieci secondi, largamente sufficiente tanto per impedire scariche per rilassamento quanto per garantire che C1 raggiunga la tensione della stabilizzatrice in un minuto senza che la tensione finale sia influenzata da variazioni della costante di tempo in maniera apprezzabile.

3. — COSTRUZIONE MECCANICA.

La campana a tenuta di vuoto è costruita secondo le normali regole e non offre caratteristiche degne di rilievo. La sospensione a molla è stata costruita sul modello della sospensione Riefler originale, che aveva un coefficiente $\varphi = 1,2$ e precisamente si è usata una lamina d'acciaio speciale per sospensioni larga 11 mm. e spessa 0,075 mm; il coefficiente φ calcolato è uguale a 4, come si era prestabilito. Il coefficiente di smorzamento misurato nel vuoto è di $28 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$. Tenendo conto della formola (20) ne segue che la potenza necessaria al funzionamento del pendolo è di 1,6 erg/sec. Si osservi che Schuler aveva ottenuto uno smorzamento tre volte inferiore e quindi è da ritenere che siano ancora possibili miglioramenti, per quanto egli abbia usato sospensioni a coltello anzichè a molla.

Entro la campana trovano posto, oltre al pendolo colla sua sospensione, la bobina B, una lampadina ad incandescenza a filamento rettilineo che una piccola lente condensatrice mette a fuoco sulla fessura della banderuola portata dal pendolo, ed infine la cellula fotoelettrica T1 a vuoto. Un foro circolare nella campana, chiuso a tenuta da un disco di plastica trasparente, permette di esaminare dall'esterno l'ampiezza di oscillazione del pendolo ed il passaggio di alcuni elettrodi che vanno alla cellula, alla lampadina ecc. Un barometro posto nella campana serve da controllo del vuoto: una fuga d'aria provoca l'innalzamento della colonna di mercurio nel tubo barometrico, lungo in questo caso solo pochi centimetri, e quindi la chiusura di un contatto che viene rivelata dall'esterno con un voltmetro. La sensibilità del dispositivo è regolabile ed è possibile arrivare ad ottenere la chiusura del contatto anche per variazioni di pressione dell'ordine di mezzo millimetro di mercurio, e quindi entro le tolleranze stabilite in proposito. La tenuta è buona; sinora non si è ancora presentata la necessità di pompare aria entrata.

Il pendolo è lanciato dall'esterno facendo passare attraverso B per qualche istante una forte corrente continua.

Nessuna possibilità è prevista per regolare l'andamento del pendolo dall'esterno ma evidentemente ciò non ha alcuna importanza teorica e presenta anche alcuni vantaggi di natura pratica. E' però possibile spostare senza inconvenienti le lancette dell'orologio elettrico O. Il metodo della correzione magnetica della g non è evidentemente adatto.

4. — VANTAGGI, SVANTAGGI, RISULTATI.

Il principale vantaggio del pendolo costruito consiste nella semplicità di costruzione e di messa a punto, la quale consiste unicamente nel mettere bene a fuoco il filamento della lampadina sulla fenditura quando il pendolo è ben fermo. Ciò è facilmente ottenibile agendo sulle tre viti calanti a mezzo delle quali la campana appoggia su due putrelle sporgenti dal muro. Non ci sono parti meccanicamente difficili da costruire, nella campana non c'è nulla che debba essere lubrificato, non ci sono contatti di relais soggetti a scintille, e si è visto infatti che il contatto strisciante ne è esente. Il circuito elettronico non richiede una scelta di valvole, ed il suo funzionamento è assai poco influenzato dalle variazioni delle caratteristiche elettriche dei suoi componenti, i quali si possono facilmente trovare sul mercato italiano.

La libertà d'oscillazione è ancora più spinta che nel tipo Shortt perchè manca qui persino il piccolo attrito della rotella sul braccio a gravità poco prima che essa inizi la sua caduta. L'interazione di M col campo magnetico esterno è molto ridotta a causa della potente schermatura offerta dalla campana. Brevi prove eseguite con un cronografo ordinario a punte registrante i segnali orari hanno del resto confermato che la precisione raggiunta è dell'ordine del centesimo di secondo al giorno. A causa di cattivo funzionamento del cronografo stesso e delle variazioni di temperatura della stanza ove il pendolo è posto, non è possibile per ora sapere se si può scendere sotto il centesimo di secondo al giorno.

Lo svantaggio principale consiste nell'essere legati alla tensione di rete; inoltre le valvole hanno una vita limitata anche se assai lunga, come ad esempio le valvole del tipo telefonico a vita maggiore di 10000 ore.

Probabilmente un circuito elettronico di soddisfacenti qualità e durata potrebbe essere realizzato a mezzo di transistori e fotodiodi; immutata resterebbe la lampadina d'eccitazione che dovrà esser posta fuori campana per poterla facilmente cambiare. L'alta sensibilità dei fotodiodi nell'infrarosso permetterebbe di sottovoltare notevolmente la lampadina allungandone di moltissimo la durata. Sarebbe inoltre possibile usare una piccola batteria di accumulatori sganciandosi così dalla rete. I noti inconvenienti dell'instabilità dei transistori sarebbero meno importanti perchè già il pendolo stesso deve essere posto in camera termostattizzata.

Sfortunatamente non esiste un metodo semplice per la compensazione dell'errore circolare, agendo sulla fase. Se la potenza fornita aumenta il periodo si allunga; per un opportuno angolo di fase d'oscillazione in cui viene applicato l'impulso si può compensare l'allungamento del periodo. Bisogna spostare l'immagine del filamento della lampadina della quantità μ tale che $\frac{\mu}{\Phi} = \frac{\Phi^2 \pi}{2 h T}$; fatti i calcoli si trova $\mu = 3,7 \Phi$ e quindi la soluzione non esiste.