SULLA DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLA CURVA INTERPOLATRICE DELLE GRANDEZZE FOTOGRAFICHE IN FUNZIONE DEI DIAMETRI DELLE IMMAGINI STELLARI

Nota di E. DE CARO

RIASSUNTO. — Fatte alcune premesse di ordine generale, si discute una relazione analitica che, procedendo da considerazioni differenziali, permette di ottenere direttamente sulla base di soli elementi sperimentali una scala fotometrica di grandezze fotografiche.
Come applicazione dei principii svolti si riporta qualche esempio di riduzione.

1. - Per stabilire un sistema fotometrico di grandezze fotografiche occorre:

a) studiare anzitutto il metodo che permetta di dedurre il rapporto

$$\frac{I_a}{I_b}$$

delle intensità *fotografiche,* o *chimiche* delle immagini di due stelle S_a S_b esclusivamente dalle impressioni, o effetti attinici che esse esercitano su una *data* (1) lastra fotografica; la differenza delle grandezze relative è data quindi dalla legge di POGSON:

$$m_a - m_b = -2.5 \log \frac{I_a}{I_b} \quad [1]$$

(1) Nel precisare il concetto di scala di grandezze fotografiche occorre necessariamente tener presente il grado di sensibilità della lastra per le diverse lunghezze d'onda, in altre parole la *curva di sensibilità* della lastra stessa. In ogni ricerca di carattere fotometrico si rende quindi necessario uno studio preliminare della curva di sensibilità del tipo di lastra adoperato, curva che, per altro, può venir modificata con l'impiego di adeguati filtri di luce.
Il diverso colore delle stelle è appunto causa di notevoli discordanze fra i dati fotometrici riportati nei vari cataloghi.

b) stabilire il *punto zero* della scala in modo che dalle differenze in grandezze stellari sia possibile risalire alle grandezze stesse.

Per questa seconda parte del problema si è già convenuto di fissare lo zero in modo che la grandezza fotografica m_f del tipo spettrale A_0 di HARVARD risulti eguale alla grandezza visuale m_v per $m_f = m_v = 6.0$ circa.

Nella presente Nota mi occuperò della prima parte del problema per quanto concerne il metodo di osservazione *focale*, detto altrimenti metodo dei *diametri*.

Accennerò di sfuggita che il metodo dei diametri è, in generale, meno preciso rispetto ai metodi *estrafocali*, i quali si fondano su basi ben più razionali e su metodi sensitometrici rigorosi, come mostrano i risultati delle numerose ricerche di laboratorio eseguite da ABNEY, da SCHWARZSCHILD, da KRON e da altri e, particolarmente, le curve di HURTER e DRIFFIELD (1), di ELDER (2), di CHANNON (3) e di F. E. ROSS (4), le quali curve tendono a stabilire relazioni ben presise fra *densità* delle immagini fotografiche e *intensità* luminose in rapporto alle varie lunghezze d'onda, alle condizioni di sviluppo (fattore γ delle curve caratteristiche H. a. D.) alle zone sovra e sotto esposte, ecc.

Nella pratica astronomica il metodo focale consente tuttavia una maggiore rapidità di manovra e, ciò che più importa, permette l'esame di stelle di debolissimo splendore non altrimenti osservabili. Detto metodo è l'unico adoperato nel Catalogo Astrografico; ove però si eccettui la zona di Catania, per la quale rigorosi procedimenti di misura e di riduzione hanno permesso di recente il rilievo di errori sistematici del *Draper Catalogue* in relazione con la grandezza e con il tipo spettrale (5), i metodi di riduzione fotometrica seguiti sin oggi nella compilazione del Catalogo Astrografico sono affatto diversi gli uni dagli dagli altri e altrettanto dicasi per i criteri adottati nelle misure; nessuna meraviglia quindi se nel confronto fra le due zone contigue emergono alle volte differenze dell'ordine di ben tre classi di grandezza.

Elemento importantissimo in fotometria fotografica è l'indice di colore delle stelle in dipendenza del tipo spettrale. Una scala di grandezze fotografiche dedotta in base a grandezze visuali fotometriche deve necessariamente dipendere dagli indici di colore e quindi risentire delle incertezze sistematiche di questi ultimi e delle prime; questa considerazione ha grandissima importanza nello stabilire una scala fotografica di riferimento.

Se si parte da un sistema fotografico noto (quale il Draper Catalogue che può considerarsi come la fonte più completa e organica), il problema

---

(1) Journ. Soc. Chem. Ind. May 1890 (U. S. A.).
(2) Journ. Camera Club-April 1893 (U. S. A.).
(3) Photographic Journ. June 1906 (U. S. A.).
(4) Journ. of the Optic. Soc. of America. Sept 1920.
(5) *Ricerche sugli errori sistematici del Draper Catalogue*. Nota di A. BEMPORAD e L. GENOVESE - (Rend. della R. Acc. dei Lincei - Vol. IX, serie 6a - Maggio 1929).

da risolvere consisterà nel determinare la forma analitica ***più adatta*** a rappresentare la relazione fra i diametri osservati e le grandezze m_f del catalogo. In tale ordine di idee la formola cubica (1) attualmente adoperata nelle riduzioni fotometriche del Catalogo Astrografico per Catania ha dato i risultati migliori.

Quando invece, sulla scorta dei soli dati sperimentali, che nel nostro caso sono i diametri misurati, occorra risalire alla *forma* della curva interpolatrice, si dovrà procedere con metodo sostanzialmente diverso.

2. - Diaframmando opportunamente l'obbiettivo, o lo specchio se si tratta di riflettore, mediante schermi o reticoli di diffrazione a sbarre parallele applicabili davanti all'obbiettivo o allo specchio, è possibile ridurre la luminosità di una stella secondo un determinato rapporto; tale procedimento seguito negli Osservatori di GREENWICH, di HARVARD, di M. WILSON consente di ottenere per una data stella due, o più immagini: a, b, c..., le quali immagini possono considerarsi come altrettante stelle aventi differenze di grandezza

$$m_a - m_b = -2.5 \log \frac{I_a}{I_b} \quad , \quad m_a - m_c = -2.5 \log \frac{I_a}{I_c}, \ldots$$

prestabilite. In linea teorica i rapporti di riduzione $\frac{I_a}{I_b}$, $\frac{I_a}{I_c}$... sono indipendenti (2) dalla composizione spettrale della sorgente luminosa, ma in pratica accade di osservare piccole differenze sistematiche col variare della lunghezza d'onda effettiva.

Se l'intervallo libero fra due fili di un reticolo a fili paralleli è eguale allo spessore dei fili stessi le immagini diffratte di posto r pari, come è noto, si annullano mentre le intensità delle immagini di posto r dispari si riducono nel rapporto:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} r \frac{\pi}{2}}{r \pi} \right)$$

e d'altra parte, l'intensità dell'immagine centrale si riduce a $\frac{1}{4}$; ne consegue che fra l'immagine principale (centrale) a e la prima immagine diffratta b sussisterà una differenza di grandezza pari a

$$\Delta m = -0\overset{\mathrm{m}}{.}981$$

(1) *Di una nuova formula per determinare la grandezza fotografica delle stelle.* Nota di A. BEMPORAD (Rendiconto della R. Acc. dei Lincei - Vol. XXXII - Serie 5ª, Marzo 1923).

(2) Ben inteso, restando nell'ambito della teoria elementare del reticolo astronomico comunemente adoperato in fotometria.

Indicando ora con ΔD il relativo incremento del diametro [1] e supposti inoltre Δm e ΔD dell'ordine delle quantità differenziali, possiamo scrivere:

$$\frac{\Delta m}{\Delta D} = \frac{d\,F(D)}{d\,D} \tag{2}$$

avendo posto $m = F(D)$.

Val quanto dire il rapporto del 1° membro della [2] si identifica praticamente con la derivata di $F(D)$ che supponiamo riferita al punto di mezzo dell'intervallo considerato Δm.

Se si pone ora:

$$\Delta m = -K = \text{costante}$$

cioè se si considera Δm eguale alla differenza di grandezza $(m - m')$ costante, relativa a due immagini di diffrazione di determinato ordine, possiamo scrivere per la [2]:

$$\Delta D = \varphi(D) \tag{3}$$

La forma di questa funzione è incognita, ma sperimentalmente essa può studiarsi assumendo come ordinate nel piano cartesiano le differenze $\Delta D = D - D'$ desunte direttamente dalle misure e come ascisse le medie $\overline{D} = \frac{1}{2}(D + D')$. Tale procedimento è stato seguito nei due esempi di calcolo riportati nella presente Nota ed è applicabile in linea di massima fin tanto che K e quindi $\Delta D = D - D'$ si mantengano nell'ordine delle quantità differenziali. La rappresentazione grafica di $\Delta D = \varphi(D)$ può dare quindi un indice circa la possibilità di esprimere $\varphi(D)$ con una serie di potenze crescenti di D, cioè:

$$D - D' = \varphi(D) = a + b\,D + c\,D^2 + \ldots \tag{3'}$$

Questa serie, per la natura stessa del fenomeno considerato, può ritenersi sufficientemente convergente entro un campo di variabilità anche grande.

Dalla [2], fatte le debite sostituzioni e separate le variabili, si ha integrando:

$$m = F(D) = -K \int \frac{d\,D}{a + b\,D + c\,D^2 + \ldots} + C \tag{4}$$

in cui K, come si è visto, è un coefficiente dipendente dallo schermo o dal reticolo adoperato mentre la costante additiva C si calcola in base al

(1) Per l'impostazione analitica del problema cfr:
G. ARMELLINI - *Trattato di Astronomia Siderale* - Vol. I, pag. 157.

sistema di riferimento adottato; così ad es. supposte note tutte le altre costanti, C può determinarsi sulla base di stelle di tipo spettrale A_0 e di grandezza intorno alla 6ª.

3. - Esaminiamo ora qualche caso particolare.

I) Per $\varphi(D) = a =$ costante la [4] si riduce semplicemente all'equazione di una retta. Posto:

$$-\frac{K}{a} = p$$

si ha infatti:

[5] $$m = p\,D + C$$

II) Limitandoci invece ai due primi termini della serie (3') e cioè:

$$\varphi(D) = a + b\,D$$

si ha:

[6] $$m = F(D) = -\frac{K}{b}\log_e(1 + \gamma\,D) + C_1$$

avendo posto:

$$C_1 = \log_e a + C \quad , \quad \gamma = \frac{b}{a}$$

Il rapporto γ ora definito, a giudicare dalle prove eseguite e in parte riportate nella presente Nota, è piccolissimo e si mantiene notevolmente al disotto di 0.01.

La [6] può anche scriversi:

[6] $$D = \frac{1}{\gamma}\left(e^{\frac{b}{K}(C_1 - m)} - 1\right)$$

dove γ, b e C_1 sono costanti da determinare.

III) Con l'aggiunta di un terzo termine e cioè:

$$\varphi(D) = a + b\,D + c\,D^2$$

si può scrivere:

$$\int \frac{d\,D}{a + b\,D + c\,D^2} = \frac{1}{c}\int \frac{d\,D}{\left(D + \frac{b}{2\,c}\right)^2 + \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,c^2}}$$

a) Se $\frac{4ac - b^2}{4c^2}$ è negativo, l' integrale precedente diventa:

$$\frac{1}{a'} \log \frac{2cD + b - a'}{2cD + b + a'}$$

avendo posto:

$$a' = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

quindi:

$$m = F(D) = -\frac{K}{a'} \log \frac{2cD + b - a'}{2cD + b + a'} + C \qquad [7]$$

Quest' ultima formula, di gran lunga più complicata della relazione precedentemente trovata, non è certamente di facile impiego e viene data soltanto a titolo di curiosità. Non è però da escludere che l' esame di un gran numero di lastre eseguite nelle condizioni più differenti, potrebbe forse consigliarne l' impiego in qualche caso particolare. La scarsezza del materiale osservativo disponibile non mi permette per ora di trarre conclusioni; ritengo però che uno studio sistematico, eseguito con mezzi adeguati, apporterebbe certamente un utile contributo all' argomento.

b) Più interessante dal punto di vista dell' applicazione, appare ad ogni modo l' ipotesi:

$$\frac{4ac - b^2}{4c^2} > 0$$

Posto $a' = \sqrt{4ac - b^2}$ si ha pertanto:

$$m = F(D) = -\frac{2K}{a'} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cD + b}{a'} + C \qquad [8]$$

Ponendo inoltre per brevità:

$$\frac{a'}{2K} = u \quad , \quad \frac{2c}{a'} = v \quad , \quad \frac{b}{2c} = w$$

la precedente relazione può scriversi:

$$D = \frac{1}{v} \operatorname{tg}[u(C - m)] - w \qquad [8']$$

Il calcolo delle costanti u, v, w può effettuarsi, come vedremo, in modo molto semplice.

E' noto (1) che la curva rappresentativa dei diametri in funzione delle grandezze manifesta nelle lastre del Catalogo Astrofotografico quasi sempre una decisa inflessione verso il basso, dopo la 9ª grandezza; quest' ultima porzione di curva, concava e non più convessa verso gli assi di riferimento m e D corrisponde verosimilmente ad una particolare zona sottoesposta, o per difetto di focamento o per altre anomalie di sensibilità della lastra, affini forse all' *effetto Purkinje* (2).

La [8'] offre quindi il modo di rappresentare adeguatamente il fenomeno accennato ed infatti per $m = C$ e per $D = -w = -\frac{b}{2c}$ si ha un punto d' inflessione; ma, essendo D sempre positivo, si ha ***praticamente*** inflessione solo quando:

$$[6] \qquad -w = -\frac{b}{2c} > 0$$

Occorre infine osservare che l' aggiunta di nuovi termini e relativi parametri alla $\varphi(D)$ (come in generale per qualunque altra formula empirica) è consigliabile solo quando i termini supplementari abbiano un preciso significato, corrispondente ad una realtà fisica. Nel nostro problema l' aggiunta di nuovi parametri darebbe luogo a curve di tipo non sostanzialmente dissimile da quelli sin qui trattati; una ulteriore complicazione della formula rappresentatrice andrebbe a discapito della semplicità e della precisione dei calcoli a cui essa è destinata. D' altra parte, la non estrema esattezza del metodo dei diametri sarebbe in contrasto con l' uso di formule troppo complesse e di laborioso impiego.

4. - Per l' utilizzazione pratica della formula [6] e relativa [6] e della [8] e relativa [8'] il calcolo dei coefficienti b e γ per la prima e dei coefficienti a' v w (e quindi a b c) per la seconda può effettuarsi direttamente nel modo che segue.

a) Detti D_i e D'_i rispettivamente i diametri misurati dell' immagine principale e della prima immagine difratta di una data stella S_i e sostituiti questi valori successivamente nella [6], abbiamo:

$$-m_i = \frac{K}{b} \log_e (1 + \gamma D_i) - C_1$$

$$-m'_i = \frac{K}{b} \log_e (1 + \gamma D'_i) - C_1$$

(1) Cfr. A. BEMPORAD - Nota citata.
(2) Cfr. lavori di PARKHURST e ROSS in Astroph. Journ. Vol. XLIX, L, LII, LVI.

e sottraendo membro a membro:

$$m_i' - m_i = \frac{K}{b} \log_e \frac{1 + \gamma D_i}{1 + \gamma D_i'} \; ;$$

ma essendo la differenza $m_i' - m_i = K$ costante per *tutte* le stelle della **lastra, la precedente relazione diventa con l'eliminazione di** $K = m_i' - m_i$:

$$e^b - 1 = \gamma D_i - e^b \gamma D_i'$$

Posto per brevità:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{e^b - 1} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{e^b \gamma}{e^b - 1}$$

si ottiene il sistema di equazioni di condizione fra le incognite γ_1 e γ_2:

[10] $$D_i \gamma_1 - D_i' \gamma_2 - 1 = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Noti γ_1 e γ_2 **sarà facile calcolare** b e γ che definiscono la curva [6] a **meno di una costante additiva, essendo** K **noto a priori.**

b) **Simimente, introducendo** D_i e D_i' nella [8'] si ha:

A)
$$v D_i + v w = \operatorname{tg}\left[\frac{a'}{2K}(C - m_i)\right]$$
$$v D_i' + v w = \operatorname{tg}\left[\frac{a'}{2K}(C - m_i')\right]$$

Essendo $m_i' - m_i = K$ **costante per tutte le stelle e tenendo presente la relazione:**

$$\operatorname{tg}\left[\frac{a'}{2K}(C - m_i)\right] - \operatorname{tg}\left[\frac{a'}{2K} C - m_i'\right)\right] = \left[1 + (v D_i + v w)(v D_i' + v w)\right] \operatorname{tg}\frac{a'}{2} \, ,$$

si ottiene sottraendo membro a membro le *A*):

$$\frac{v}{\operatorname{tg}\frac{a'}{2}}(D_i - D_i') = v^2 D_i D_i' + v^2 w (D_i + D_i') + (1 + v^2 w^2)$$

Posto:

[11] $$\frac{v}{\operatorname{tg}\frac{a'}{2}(1 + v^2 w^2)} = \alpha \, , \quad \frac{v^2}{1 + v^2 w^2} = \beta \, , \quad \frac{v^2 w}{1 + v^2 w^2} = \gamma$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni di condizione fra le tre incognite α, β, γ:

$$(D_i - D'_i)\,\alpha - D_i D'_i\,\beta - (D_i + D'_i)\,\gamma = 1 \tag{12}$$

Come è facile verificare, il valore della quantità $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ è molto prossimo a quello dei coefficienti a, c, $\frac{b}{2}$. La risoluzione della [12] permetterà quindi di scegliere, senza ambiguità di sorta, fra la [7] e [8].

In quest' ultima ipotesi [8] si ha:

$$w = \frac{\gamma}{\beta} \quad , \quad v = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a'}{2}}\,\frac{\beta}{\alpha} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{a'}{2} = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta - \gamma^2}$$

da cui a'. Fra le quattro soluzioni possibili converrà sciegliere:

$$0 \leq \frac{a'}{2} \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Le costanti additive C_1 o C, si calcolano, come è stato già detto, servendosi di stelle di grandezza nota.

Col procedimento ora esposto si ha il vantaggio di utilizzare *tutte* le immagini date dalla lastra fotografica, comprese le stelle di debolissimo splendore rispetto alle quali lo studio dell' andamento della curva potrà riuscire particolarmente interessante ai fini della riduzione fotometrica.

5. - Riporto ora a titolo di esempio i risultati delle riduzioni fotometriche di due lastre riguardanti una zona intorno alla *Nova Lacertae 1936* eseguite con l' equatoriale fotografico Salmoiraghi di Catania [1].

Ambedue le lastre, contrassegnate rispettivamente con i numeri **105** e **116** sono *ultrarapide* della Casa Cappelli, del tipo ordinario la prima e del tipo ortocromatico l' altra.

L' intervallo libero fra i fili del reticolo [2] adoperato è stato reso eguale allo spessore di 2 mm. dei fili stessi. La differenza di grandezza fra l'immagine principale e la prima immagine diffratta risulta eguale a $0.^{\mathrm{m}}98$, valore controllato da determinazioni dirette le quali diedero però un risultato leggermente inferiore a quello teorico.

---

(1) Dette lastre fanno parte di una serie di fotografie eseguite dallo scrivente col dott. P. SCONZO, per uno studio fotometrico sulla *Nova Lacertae 1936*. Le misure dei diametri al macromicrometro Gauthier sono state effettuate, per controllo, due volte e indipendentemente dai due osservatori.

(2) Costruito dal Tecnico dell' Osservatorio Astrofisico di Catania sulle indicazioni e sui dati forniti dallo scrivente.

La formula adoperata è stata la [6] con sole tre costanti.

Nella 1ª colonna delle due tabelle che seguono si riportano i numeri del Draper Catalogue relativi alle stelle osservate e successivamente: il tipo spettrale, le grandezze, fotometrica m_v e fotografica m_f, date dal Catalogo stesso, i diametri misurati D_i delle immagini principali, le differenze $D_i - D'_i$, le quantità $\frac{K}{M\,b}\log_{10}(1+\gamma\,D_i)$ (essendo $K = 0.981$ e M il modulo dei logaritmi di Brigg), C_1 calcolato per ciascuna stella reperibile nel Draper Catalogue, la grandezza fotografica m_c calcolata in base alla media dei vari C_1 conclusi ed infine le differenze $m_f - m_c$ nel senso: Draper-valore calcolato.

In base alle misure D_i e D'_i si ottengono le seguenti costanti per le due lastre:

	Lastra 105	Lastra 116
$b =$	$+\ 0.00646$	$+\ 0.07557$
$\gamma =$	$+\ 0.00028$	$+\ 0.00453$
$C_1 =$	$+\ 11.38$	$+\ 12.50$

Lastra 105 - 1936 luglio 9
tempo di posa: $3\overset{m}{.}0$

$$m_c = -\,349\,485\log_{10}(1+0.00028\,D_i) + 11.38$$

N. Draper Cat.	Sp.	m_v	m_f	D_i	$D_i - D'_i$	$\frac{K}{M\,b}\log_{10}(1+\gamma\,D_i)$	C_1	m_c	$m_f - m_c$
211489	F_0	$\overset{m}{8.2}$	8.5	68	16	2.90	11.4	$\overset{m}{8.48}$	$\overset{m}{\pm 0.0}$
211618	B_9	8.9	8.9	57	17	2.44	11.3	8.94	± 0.0
211472	G_5	7.8	8.6	68	19	2.90	11.5	8.48	$+ 0.1$
210616	A_0	7.7	7.7	87	21	3.70	11.4	7.68	± 0.0
210322	F_0	8.4	8.7	79	31	3.35	12.0	8.03	$+ 0.7$
210072	B_8	8.0	8.0	81	26	3.46	11.5	7.92	$+ 0.1$
210494	A_0	8.6	8.6	65	22	2.79	11.4	8.59	± 0.0
210922	K_2	7.44	8.51	58	19	2.48	11.0	8.90	$- 0.4$
211774	A_0	8.9	8.9	55	23	2.33	11.2	9.05	$- 0.1$
211057	B_9	8.0	8.0	85	23	3.59	11.6	7.79	$+ 0.2$

segue Lastra 105 - 1934 luglio 9

tempo di posa: $3\overset{m}{.}0$

$$m_c = -349.485 \log_{10}(1 + 0.00028\, D_i) + 11.38$$

N. Draper Cat.	Sp.	m_v	m_f	D_i	$D_i - D'_i$	$\frac{K}{M\,b}\log_{10}(1+\gamma D)$	C_1	m_c	$m_f - m$	
211352	A_2	$\overset{m}{9.2}$	9.3	44	24	1.88	11.2	$\overset{m}{9.50}$	$\overset{m}{-0.2}$	
211226	A_0	8.6	8.6	54	30	2.30	10.9	9.08	-0.5	
*	—	—	—	132	27	5.58	—	5.80	—	Nova Lacertæ 1936
211430	B_9	7.46	7.44	93	19	3.94	11.4	7.44	± 0.0	
211445	A_0	9.5	9.5	49	25	2.09	11.6	9.29	$+0.2$	
210628	B_5	6.87	6.75	108	23	4·57	11.3	6.81	± 0.0	
211643	A_2	7.16	7.22	95	20	4.05	11.3	7.33	-0.1	
211604	A_5	8.5	8.6	67	30	2.86	11.4	8.52	$+0.1$	
211070	K_0	8.1	9.1	54	24	2.30	11.4	9.08	± 0.0	
210071	B_9	6.22	6.20	122	25	5.17	11.4	6.21	± 0.0	

Media algebrica . . . $+0.005$

» scarti assoluti . ± 0.14

Lastra 116 - 1936 luglio 24

tempo di posa: $3\overset{m}{.}0$

$$m_c = -29.892 \log_{10}(1 + 0.00453\, D_i) + 12.50$$

N. Draper Cat.	Sp.	m_v	m_f	D_i	$D_i - D_i'$	$\frac{K}{M\,b}\log_{10}(1+\gamma D_i)$	C_1	m_c	$m_f - m_c$	
211430	B_9	$\overset{m}{7.46}$	$\overset{m}{7.44}$	108	24	5.17	12.61	$\overset{m}{7.33}$	$\overset{m}{+0.1}$	
211659	A_3	9.9	10.0	47	21	2.51	12.5	9.99	± 0.0	
211853	O_6	9.0	—	59	26	3.08	—	9.42	—	
211773	G_0	8.8	9.4	61	23	3.17	12.6	9.33	$+0.1$	
211445	A_0	9.5	9.5	61	21	3.17	12.7	9.33	$+0.2$	
210628	B_5	6.87	6.75	121	22	5.68	12.43	6.82	± 0.0	
211643	A_2	7.16	7.22	115	26	5.44	12.66	7.06	$+0.1$	
211604	A_5	8.5	8.6	75	20	3.80	12.4	8.70	-0.1	
210855	F_8	5.42	5.92	152	26	6.82	12.74	5.68	$+0.2$	
*	—	—	—	140	36	6.37	—	6.13	—	Nova Lacertæ 1936
211070	K_0	8.1	9.1	68	27	3.50	12.6	9.00	$+0.1$	
211226	A_0	8.6	8.6	76	20	3.83	12.4	8.67	-0.1	
211352	A_2	9.2	9.3	62	18	3.23	12.5	9.27	± 0.0	

segue **Lastra 116 - 1936 luglio 24**

tempo di posa: $\overset{m}{3.0}$

$$m_c = -29.892 \log_{10}(1 + 0.00453\, D_i) + 12.50$$

N. Draper Cat.	Sp.	m_v	m_f	D_i	$D_i - D_i'$	$\frac{K}{M\,b}\log_{10}(1+\gamma D_i)$	C_1	m_c	$m_f - m_c$
211057	B_9	$\overset{m}{8.0}$	$\overset{m}{8.0}$	95	27	4.63	12.6	$\overset{m}{7.87}$	$\overset{m}{+0.1}$
211774	A_0	8.9	8.9	71	23	3.62	12.5	8.88	± 0.0
210922	K_2	7.44	8.51	81	24	4.07	12.6	8.43	± 0.0
210494	A_0	8.6	8.6	78	22	3.92	12.5	8.58	± 0.0
210322	F_0	8.4	8.7	83	22	4.15	12.8	8.35	$+0.3$
211820	F_5	8.6	9.0	65	20	3.35	12.4	9.15	-0.2
211903	A	8.9	8.9	66	16	3.41	12.3	9.09	-0.2
210414	G_0	8.6	9.2	64	18	3.32	12.5	9.18	± 0.0
212043	B_8	6.54	6.49	135	21	6.19	12.6	6.31	$+0.2$
212070	A	9.0	9.0	58	18	3.01	12.0	9.49	-0.5
211982	K_0	7.30	8.30	77	19	3.89	12.2	8.61	-0.3
212183	B_9	7.89	7.87	93	28	4.57	12.4	7.93	± 0.0
212118	A_5	8.6	8.7	67	[14]	3.44	12.1	9.06	-0.4
212106	F_5	8.0	8.4	89	19	4.40	12.8	8.10	$+0.3$
212455	B_2	8.4	8.2	90	27	4.46	12.7	8.04	$+0.2$
211618	B_9	8.9	8.9	72	23	3.67	12.6	8.83	$+0.1$
211472	G_5	7.8	8.6	83	21	4.15	12.7	8.35	$+0.2$
211489	F_0	8.2	8.5	82	16	4.10	12.6	8.40	$+0.1$
212466	M_a	7.06	8.41	78	25	3.92	12.3	8.58	-0.2
212093	B_9	8.16	8.14	80	19	4.01	12.2	8.49	-0.4

Media algebrica . . . $+0.003$

» scarti assoluti . ± 0.15

Confrontando i risultati m_c della Lastra 105 con quelli della Lastra 116 e indicando con Δ le differenze nel senso 116 - 105, si ha per le seguenti 16 stelle comuni nelle due lastre:

N.º Draper Cat.	Δ
211489	$-\overset{\text{m}}{0.1}$
211618	-0.1
211472	-0.1
210322	$+0.3$
210494	± 0.0
210922	-0.5
211774	-0.1
211057	$+0.1$
211352	-0.2
211226	-0.4
211430	-0.1
211445	± 0.0
210628	± 0.0
211643	-0.2
211604	$+0.2$
211070	± 0.0
Media algebrica . .	-0.07
» valori assoluti	± 0.15

Nessuna sistematicità di rilievo appare in queste differenze Δ che possiamo quindi attribuire esclusivamente agli errori di misura. In base a questi valori Δ si calcola:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta\,\Delta]}{n}} = \pm \overset{\text{m}}{0.20}$$

Detto μ_1 l'errore medio (che supponiamo identico per tutte e due le lastre) di una misura m_c, si può porre:

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \pm \overset{\text{m}}{0.14} \; .$$

Indicando inoltre con μ_2 l'errore medio di una grandezza generica risultante come media semplice da due lastre, si ha:

$$\mu_2 = \frac{\mu_1}{\sqrt{2}} = \pm \overset{\text{m}}{0.10} \; .$$

e per il relativo errore probabile:

$$e_p = \pm 0\overset{m}{.}067$$

Uno studio completo e più particolareggiato avrebbe richiesto osservazioni numerose, atte sovratutto a rivelare un maggior numero di stelle deboli oltre la 10ª grandezza, ed eseguite nelle condizioni più differenti.

Ad ogni modo i risultati conclusi possono costituire una prova relativamente efficace circa l' applicabilità dei procedimenti esposti.

* * *

Al chiarissimo prof. M. MAGGINI, per le utili indicazioni gentilmente fornitemi nel corso della presente ricerca, porgo il più vivo ringraziamento.

R. Specola di Collurania, luglio 1937 XV.