DESCRIZIONE D' UNA MACCHINETTA
CHE SERVE A RISOLVERE IL PROBLEMA DI KEPLERO

OSSIA A TROVARE L' ANOMALIA ECCENTRICA DATA L' ANOMALIA MEDIA
QUALUNQUE SIA L' ECCENTRICITA'

MEMORIA

DI

FRANCESCO CARLINI

MEMBRO EFFETTIVO DELL' I. R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI,
PRIMO ASTRONOMO E DIRETTORE DELL' I. R. OSSERVATORIO DI BRERA.

Letta nell' adunanza dell' Istituto medesimo del giorno 5 agosto 1852.

CON UNA TAVOLA.

Estratto dal Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti
Tomo V (fascicoli 29.°-30.°)

Gli antichi astronomi, i quali erano intimamente persuasi che il moto reale degli astri dovess'essere circolare ed uniforme, furono naturalmente condotti ad immaginare che le ineguaglianze che si osservano nel loro corso, e che ritornano col medesimo ordine ad ogni rivoluzione, non fossero che apparenti ed avessero origine da ciò, che la terra si trovasse collocata lontana dal punto centrale. Tolomeo adottando quest' idea, forse più antica di lui, volle renderla più speciosa, considerando nell'interno di ciascuna orbita tre punti posti sopra una medesima retta ed equidistanti fra loro; il primo de' quali (non considerando qui l'aggiunta dell' epiciclo, il quale aveva per ufficio di rappresentare la parallasse annua) era il centro del moto uniforme, il secondo il centro delle distanze costanti, il terzo il luogo occupato dalla terra. In tal sistema, chiamando $2e$ la distanza dal primo al terzo punto, avveniva che le longitudini geocentriche erano affette da una ineguaglianza proporzionale a $2e$, e le distanze erano soltanto sottoposte ad una ineguaglianza proporzionale ad e. Tolomeo non reca alcuna ragione dell'aver collocato il centro del moto uniforme discosto dal centro del circolo descritto dal pianeta, nè poteva recarla, non avendo dalle osservazioni di allora alcun dato sulle distanze rettilinee dei corpi celesti. Eppure la sua ipotesi si accosta mirabilmente alla legge del moto ellittico, giusta la quale il primo termine dello svolgimento in serie dell'equazione del centro è eguale al doppio dell'eccentricità moltiplicata pel seno dell'anomalia media, mentre il primo termine, dopo la costante, dello svolgimento del raggio vettore è eguale alla semplice eccentricità moltiplicata pel coseno del medesimo angolo. Egli dunque aperse la strada al ritrovamento della legge del moto degli astri, giusta la quale il centro del sole trovasi all'un de' fuochi dell'ellisse, mentre è all'altro fuoco e non al centro che il movimento di esso è con qualche approssimazione proporzionale al tempo.

Il Keplero, avendo adottato il sistema copernicano, ebbe in mano il modo di dedurre dall' osservazione non solo la posizione della visuale diretta ai pianeti, ma anche la lunghezza della visuale stessa espressa in parti della distanza media della terra dal sole. Egli rivolse le sue indagini al moto del pianeta Marte, ed avendo sottomesso al calcolo un gran numero delle osservazioni lasciategli dal Ticone, riuscì a stabilire il fatto fondamentale, ch'egli espresse nei seguenti termini: *Itaque plane hoc est: Orbita planetæ non est circulus, sed ingrediens ad latera utraque paulatim, iterumque ad circuli amplitudinem in perigeo exiens, cujusmodi figuram itineris ovalem appellitant* (1).

Restava a stabilirsi la relazione fra il tempo trascorso dopo il passaggio per l'afelio e l'angolo al fuoco. Egli aveva riconosciuto che, stando ancora al moto circolare eccentrico, la somma di tutte le distanze è prossimamente al tempo periodico, come una parte di questa somma al tempo corrispondente; e quindi immaginò di trasferire questa proprietà all'ellisse. Indi per un lampo di genio indovinò che alla somma de' raggi vettori fra di loro vicinissimi poteva sostituirsi la superficie del settore ellittico; e così stabilì la legge delle aree proporzionali ai tempi.

La storia di tali scoperte mostra abbastanza che l'ingegno umano non giunge sempre alle recondite verità matematiche per vie dirette ed esatte; il Keplero conosceva benissimo il debole delle sue dimostrazioni, e mostrava di temere il giudizio dei puri matematici e particolarmente del Vieta. Egli con molta sagacità riuscì a stabilire la relazione esatta che sussiste fra le anomalie media e vera, introducendo l'angolo ausiliario che chiamiamo la anomalia eccentrica, e quindi insegnò come esattamente si poteva risolvere il problema inverso; ma quando per la soluzione del problema diretto si trovò astretto a ricorrere a metodi approssimativi e di falsa posizione, volle prevenire le obbiezioni dicendo: *Mihi sufficit credere solvi a priori non posse, propter arcus et sinuum* ἑτερογένειαν. *Erranti mihi, quicumque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius* (pag. 300) (2).

Intorno alla soluzione dell'equazione trascendente

$$x + e \sin x = z$$

(1) Astronomia nova ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ, seu Physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellæ Martis. 1609, pag. 213.

(2) Disse *Apollonius* in luogo di *Apollo*, alludendo ad Apollonio Pergeo, autore del trattato delle *Sezioni coniche*.

nella quale z è l'anomalia media ed x l' anomalia eccentrica, i geometri posteriori non fecero altro passo fuori di quello dell'applicazione ad essa della teoria delle serie; e fortunatamente queste offerirono soluzioni abbastanza comode ed esatte, fin tanto che si trattò di applicarle alle orbite de' pianeti primarj, le cui eccentricità sono molto piccole, od anche ad alcune comete moventisi in orbite ellittiche allungatissime per le quali si ha ricorso allo svolgimento in una serie ordinata secondo le potenze di $1-e$ (1).

Ma nel secolo corrente essendosi scoperto un gran numero di piccoli pianeti od asteroidi, alcuni dei quali hanno una eccentricità che uguaglia il quarto del semi-asse maggiore, ed essendosi inoltre riconosciuto che varie comete si muovono in orbite ellittiche nelle quali s'incontrano eccentricità d'ogni misura, e forse più spesso quelle di $^3/_5$, di $^3/_4$ e di $^5/_6$, e finalmente essendosi considerati i moti dei binarj di stelle, ove trovansi dimensioni consimili, gli svolgimenti in serie divennero talvolta insufficienti, e convenne ritornare ai metodi indiretti.

Ecco come si esprime su tale argomento il Gauss nell' insigne sua opera: *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 10.

Problema inversum, celebre sub nomine problematis Kepleri, scilicet ex anomalia media invenire veram atque radium vectorem, longe frequentioris usus est. Astronomi æquationem centri per seriem infinitam secundum sinus angulorum multiplicium progredientem exhibere solent, quorum sinuum coefficientes singuli et ipsi sunt series secundum potestates excentricitatis in infinitum excurrentes. Huic formulæ pro æquatione centri, quam plures auctores evoluerunt, hic immorari eo minus necessarium duximus, quod, nostro quidem judicio, ad usum practicum, præsertim si excentricitas perparva non fuerit, longe minus idonea est, quam methodus indirecta.

In uno scritto ch'io pubblicai in mia gioventù su tal problema, avea mossa contro lo scioglimento col mezzo delle serie un'altra difficoltà, avendo creduto di poter dimostrare che esse cessano d'essere convergenti quando l'eccentricità passa un limite determinato. Ma il celebre matematico tedesco Jacobi (il quale un anno prima della deplorata sua morte si era presa la cura di dare tradotta in tedesco quella mia antica Memoria (2), corredandola di note) fece

---

(1) Nelle Effemeridi di Milano per l'anno 1831 ho presentate le formole che servono in questo caso alla soluzione del problema di Keplero corredandole con due estese tavole che mi furono apprestate, l'una dal prof. Lorenzo Isnardi delle Scuole Pie, l'altra dal sig. Stambucchi, Aggiunto del nostro Osservatorio.

(2) *Untersuchungen über die Convergenz der Reihe durch welche das Kepler'schen problem gelöst wird, von Franz Carlini*, nel Giornale intitolato *Astronomische Nachrichten*, che si pubblica ad Altona, n. 709, märz 1850.

avvertire, fra gli altri, uno sbaglio di calcolo da me commesso, corretto il quale si dimostra che la serie, come è data dal Lagrange, dall'Oriani e da altri, è convergente, qualunque sia l'eccentricità.

Io faccio dunque qui la mia ritrattazione; ma devo avvertire nello stesso tempo che la convergenza della serie può, oltre certi limiti, essere tanto lenta che la ricerca, col mezzo di essa, d'una sola equazione del centro richieda molti mesi di lavoro.

Æquatio, prosegue il Gauss, *quæ ad transcendentium genus referenda est, solutionemque per operationes finitas directas non admittit, tentando solvenda est, incipiendo a valore quodam approximato ipsius* x, *qui per methodos idoneas toties repetitas corrigitur, usque dum illi æquationi exacte satisfaciat. Quodsi hæ correctiones haud temere, sed per normam tutam atque certam instituuntur vix ullum discrimen essentiale inter methodum talem indirectam atque solutionem per series adest, nisi quod in illa valor primus incognitæ aliquatenus est arbitrarius.*

L'autore non dà alcuna regola matematica per la scelta di questo primo valore approssimato, alla quale lacuna ha dottamente supplito il collega nostro Frisiani in diverse Memorie inserite nelle Effemeridi astronomiche di Milano, nelle quali estendendo alle equazioni trascendenti i criterj dati dal Fourier relativamente alle algebriche, mostra i limiti entro i quali si può restringere il valor iniziale dell'anomalia eccentrica.

Mi ha però egli stesso fatto avvertito, all'occasione d'un esempio numerico ch'io gli aveva proposto da trattare, che l'esatta applicazione delle sue regole richiederebbe talvolta operazioni lunghissime. Ora l'astronomo che si accinge a rintracciare gli elementi dell'orbita d'un astro nuovamente scoperto, non può sagrificare un lungo tempo allo scrupolo di non allontanarsi dal rigor matematico, ed ama meglio avventurare una supposizione arbitraria, quando è certo che l'errore di essa verrà rettificato nelle successive approssimazioni.

Molte volte poi le prime ricerche dell'orbita d'una cometa o d'un pianeta si fanno graficamente; alle quali operazioni, se si tratta d'una cometa che si consideri come mossa in una parabola, riesce assai comodo l'uso della scala della caduta parabolica immaginata dall'ingegnosissimo Lambert. In vista di tali considerazioni, mi parve che non dovess'essere inutile fatica l'immaginare e far costruire una macchinetta che prestasse lo stesso vantaggio per rispetto alle orbite ellittiche e servisse a risolvere l'equazione del Keplero, massimamente nei casi in cui l'eccentricità non è nè piccolissima nè pochissimo diversa dall'unità.

La macchina mi riuscì molto semplice, non avendo alcun bisogno di disegnare l'ellisse, nè di prendere distanze col compasso da riportarsi sopra una scala. Tutto si riduce alla tensione d'un filo da allungarsi in modo che l'archetto descritto dalla sua estremità riesca tangente ad una riga; la quale operazione, se non è nei postulati della geometria d'Euclide, è però assai più facile di quella che comunemente s'adopera per costruire graficamente un' ellisse.

L'equazione che noi vogliamo risolvere è, come si è detto,

$$x + e \sin x = z$$

ove le anomalie sono prese dall'apogeo e non dal perigeo, all'intento di rendere i segni positivi, ciò che facilita molto la costruzione.

Sia un circolo APL diviso in gradi, sul quale giri un diametro MP portante un nonio, ed avente un movimento dolce per mezzo del pignone P. Un raggio fisso AC sia diviso per mezzo d'una scala in parti decimali, e sovr'esso scorra un indice portante una punta B prominente e mobile per mezzo di una vite. All'estremità del diametro mobile sia legato il capo d'un filo o di una sottil cordicella, la quale si applichi nell'interno d'una gola scavata sulla costa del circolo, passi per il forellino A del raggio fisso, ed abbia nel suo prolungamento un bottoncino T scorrevole a sfregamento.

Ciò posto: primo, si faccia scorrere l'indice sul raggio fisso, e si fermi sulla divisione che corrisponde all'eccentricità dell'ellisse che abbiamo chiamata e.

Secondo, si faccia scorrere il diametro mobile in modo che l'indice P corrisponda al grado della data anomalia media, indicata con z.

Terzo, si stenda il filo sulla gola e si ripieghi sopra il raggio fisso, indi si faccia scorrere il bottoncino fino a che colla sua estremità inferiore tocchi la punta B.

Quarto, si faccia progredire il raggio CP fino ad un punto Q, determinato in modo che la cordicella accavallata alla punta giunga colla sua estremità, cioè colla parte inferiore del bottoncino, a strisciare in T sulla costa del raggio CQ, descrivendo un archetto di circolo, di cui esso raggio sia la tangente. È facile il vedere che la differenza fra gli archi AP e AQ è eguale alla perpendicolare BT calata dal punto B sul raggio CQ. Ora se l'arco AQ è eguale ad x, la distanza $CB = e$, sarà la perpendicolare $BT = e \sin x$; e quindi l'angolo x soddisferà all'equazione $x + e \sin x = z$.

Ora quando col mezzo della macchina si sia ottenuto un valore di x che non si allontani dal vero che di pochi minuti primi, saremo certi che col metodo delle successive sostituzioni (il quale conduce ad una specie di serie ricorrente a scala di relazione trascendente) ci anderemo sempre più e con certa regola accostando al vero valore di x. Il Gauss, come abbiamo veduto, raccomanda questo metodo, sebbene segua poi in pratica un'altra via.

Sia x^0 il primo valore approssimato di x ottenuto per mezzo della nostra macchina, si farà successivamente

$$x' = z - e \sin x^0, \quad x'' = z - e \sin x' \ldots\ldots x^{(n)} = z - e \sin x^{(n-1)}.$$

Ora si può dimostrare che se si prendono le differenze finite fra i successivi valori di x^0, x', x'' ecc., cosicchè si abbia

$$\text{(A)} \qquad x = x^0 + \Delta x^0 + \Delta x' + \Delta x'' \text{ ecc.}$$

questi termini convergono verso una progressione geometrica, per lo che calcolati soltanto alcuni dei primi, si potrà direttamente trovare la somma dei rimanenti.

Infatti essendo $\Delta x^{(n)} = x^{(n+1)} - x^{(n)}$, $x^{(n+1)} = z - e \sin x^{(n)}$, $x^{(n)} = z - e \sin x^{(n-1)}$ sarà $\Delta x^{(n)} = e\,(\sin x^{(n-1)} - \sin x^{(n)}) = -\,e\,\Delta \sin x^{(n-1)}$;

Ed essendo $\Delta x^{(n-1)}$ (quando n è alquanto considerabile) quantità molto piccola, sarà prossimamente $\Delta \sin x^{(n-1)} = \cos x^{(n-1)}\,\Delta x^{(n-1)}$,

e quindi, $\qquad \Delta x^{(n)} = -\,e \cos x^{(n-1)}\,\Delta x^{(n-1)}$.

Ora poichè il valore di $x^{(n)}$ converge verso x, quello di $\Delta x^{(n)}$ convergerà verso $-\,e \cos x \,.\, \Delta x^{(n-1)}$, che è quanto dire che la serie dei valori convergerà verso una progressione geometrica, il cui rapporto sia $-\,e \cos x$.

Se dunque si fossero calcolati i termini dell'equazione (A) fino a $\Delta x^{(p)}$, si avrebbe il resto della serie dopo $\Delta x^{(p-1)}$ espresso prossimamente da $\dfrac{\Delta x^{(p)}}{1 + e \cos x}$, ed il valore totale

$$x = x^0 + \Delta x^0 + \Delta x' \ldots + \Delta x^{(p-1)} + \frac{\Delta x^{(p)}}{1 + e \cos x} = x^{(p)} + \frac{\Delta x^{(p)}}{1 + e \cos x};$$

ove nel secondo membro basterà mettere un valore di $\cos x$ approssimato.

Per mostrare l'utilità di questi metodi sceglieremo un' orbita la cui eccentricità sia alquanto considerabile, sicchè riesca troppo lunga e faticosa la soluzione per mezzo delle serie conosciute; sia dunque $e = 0{,}6$, e sia l'anomalia media z presa dall'apogeo $= 100^\circ$; operando colla macchinetta che ho fatto costruire, la quale ha 8 pollici di diametro ed è divisa con un nonio in gradi e decimi di grado, trovo che il valore approssimato dell'anomalia eccentrica x è di 68° ed alcuni minuti; prendo perciò in numero tondo $x^0 = 68^\circ\ 0'\ 0''$.

Il logaritmo poi dell' eccentricità espressa in minuti secondi, ossia di $\log \dfrac{0,\ 6}{\sin 1''}$ mi risulta $= 5{,}0925763836$. Eseguendo i calcoli col mezzo delle tavole di Vega a dieci decimali, trovo successivamente:

		$x^0 \quad = 68^{\circ}\, 0.'\, 0.''0000$
$x^0 = 68^{\circ}.\,0'.\;\; 0'',0000$	$e \sin x^0 = 114747,2389$	$z - e \sin x^0 = 68.\,7.\,32,7611$
$x^{I} = 68.\;\; 7.\;\; 32,7611$	$e \sin x^{I} = 114848,7268$	$z - e \sin x^{I} = 68.\,5.\,51,2732$
$x^{II} = 68.\;\; 5.\;\; 51,2732$	$e \sin x^{II} = 114826,0260$	$z - e \sin x^{II} = 68.\,6.\,13,9740$
$x^{III} = 68.\;\; 6.\;\; 13,9740$	$e \sin x^{III} = 114831,1062$	$z - e \sin x^{III} = 68.\,6.\;\; 8,8938$
$x^{IV} = 68.\;\; 6.\;\; 8,8939$	$e \sin x^{IV} = 114829,9694$	$z - e \sin x^{IV} = 68.\,6.\,10,0306$
$x^{V} = 68.\;\; 6.\;\; 10,0307$	$e \sin x^{V} = 114830,2237$	$z - e \sin x^{V} = 68.\,6.\;\; 9,7763.$

Scrivendo le differenze fra i numeri dell'ultima colonna, ed i rapporti che sussistono fra di esse, si trova

		rapporti
Δx^0	$= + 452'',7611$	
		0,2242
Δx^{I}	$= - 101,4879$	
		0,2237
Δx^{II}	$= + 22,7008$	
		0,2238
Δx^{III}	$= - 5,0802$	
		0,2238
Δx^{IV}	$= + 1,1368$	
		0,2237
Δx^{V}	$= - 0,2543$	

Arrestandoci alla differenza corrispondente all'indice $p = 5$, avremo dunque

$$x = x^{(5)} + \frac{\Delta x^{(5)}}{1 + e \cos x} = x^{(5)} + \frac{\Delta x^{(5)}}{1 + 0,6 \cos 68^{\circ}.6'},$$

ed in numeri $x = 68^{\circ}.\,6'.\,10'',0306 - \dfrac{0,2543}{1,2235} = 68^{\circ}.\,6'.\,9'',8228.$

Se si sostituisce questo valore nell'equazione data

$$x + \frac{0,6}{\sin 1''} \sin x = 100^{\circ}$$

si troverà esser essa soddisfatta fino alle diecimillesime di minuto secondo.

La macchina che sopra abbiamo descritta è costrutta sulla supposizione che la base della punta B sia un punto matematico; ma se noi riteniamo che questa punta sia, come è in realtà, un cilindro, la cui base abbia un raggio piccolissimo che chiameremo r preso per unità il raggio del circolo APL si verrà, operando nel modo descritto, a determinare un angolo x' che differirà dall'anomalia eccentrica x che si cerca d'una quantità piccolissima che chiameremo ω. Seguendo la serie delle operazioni sopra indicate si vedrà facilmente che nel caso ora contemplato quando l'indice è in P, la lunghezza del filo fino alla base del bottoncino che si fa toccare il cilindro, invece di essere $z + 1 - e$ (intendendo per z l'arco rettificato pel raggio 1), sarà $z + 1 - e - r$. Quando poi accavallato il filo al cilindro, si fa strisciare il bottoncino sul raggio AQ, la lunghezza del filo si compone di quattro parti. La prima è l'arco rettificato x'; la seconda è la retta che dal punto A va fino al punto ove il filo riesce tangente alla base del cilindretto di raggio r. Trascurando le quantità dell'ordine di r^2, e non tenendo neppur conto della grossezza del filo, si può ritenere questa parte $= AB = 1 - e$. La terza è l'archetto del cilindro abbracciato dal filo, il quale, trascurando sulla sua lunghezza lineare le quantità di second'ordine, si trova che forma al centro B un angolo $= 90^\circ - x'$. È dunque la lunghezza di questa parte di filo $= r\,(90^\circ - x')$, posto per $(90^\circ - x')$ l'arco stesso rettificato. La quarta è la perpendicolare al raggio CQ prolungata fino al punto dove diviene tangente al circoletto, la cui lunghezza è eguale alla perpendicolare condotta dal centro della base del cilindro al raggio medesimo, ed ha per valore $e \sin x'$. Ora poichè la lunghezza del filo è rimasta invariata nelle due posizioni dell'alidada, avremo l'equazione:

$$z + 1 - e - r = x' + 1 - e + r\,(90^\circ - x') + e \sin x',$$

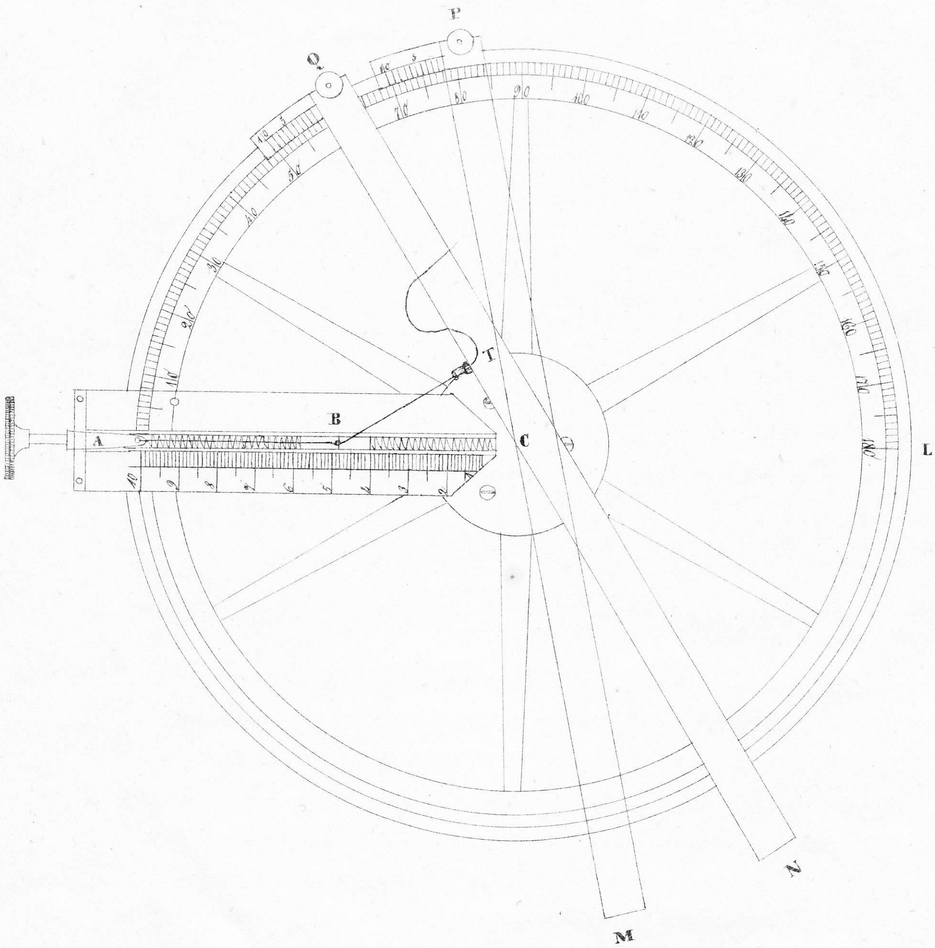
ossia $z = x' + e \sin x' + r\,(1 + 90^\circ - x') = x' + e \sin x' + r\,(2{,}5708 - x')$.
Ma l'angolo x che noi cerchiamo e che abbiamo supposto $= x' + \omega$ è quello determinato dall'equazione $z = x + e \sin x = x' + \omega + e \sin (x' + \omega)$, ossia, trascurando sempre le quantità di second'ordine, $z = x' + \omega + e \sin x' + \omega e \cos x'$,

Paragonando i due valori di z, dovrà essere $\omega\,(1 + e \cos x') = r\,(2{,}5708 - x')$,

e finalmente $\omega = r\,\dfrac{2{,}5708 - x'}{1 + e \cos x'}$.

Questa quantità rappresenta in parti di raggio la correzione che dovrebbe farsi all'angolo x' dato dalla macchina per avere l'anomalia eccentrica x corrispondente alla media z.

Milano, maggio 1854. Tipografia Bernardoni.



Milano, Litog. Vassalli