EFFEMERIDI ASTRONOMICHE

DI MILANO

PER L'ANNO 1849

CON

APPENDICE.

MILANO

DALL' IMPERIALE REGIA STAMPERIA

1848.

INDICE.

APPENDICE.

AVVERTIMENTO.

Il calcolo delle posizioni degli astri per le Effemeridi dell'anno 1849 è stato eseguito dal Sacerdote *Giovanni Capelli* e dall'Ingegnere *Curzio Buzzetti*. Le occultazioni delle stelle sotto la Luna sono state calcolate in doppio dal Direttore *Carlini* e dal *Capelli* suddetto.

Errata.

Nelle declinazioni di Venere per l'anno 1848 date alle pagine 76 e 77 la lettera B deve cambiarsi in A, e viceversa. In conseguenza di quest'errore sono da riformarsi le ore del nascere e del tramontare.

SPIEGAZIONE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIATURE.

Segni del Zodiaco.

♈	Ariete.
♉	Toro.
♊	Gemelli.
♋	Cancro.
♌	Leone.
♍	Vergine.
♎	Libra.
♏	Scorpione.
♐	Sagittario.
♑	Capricorno.
♒	Aquario.
♓	Pesci.

Pianeti.

☿	Mercurio.
♀	Venere.
♁	Terra.
♂	Marte.
⚳	Cerere.
⚴	Pallade.
⚵	Giunone.
⚶	Vesta.
♃	Giove.
♄	Saturno.
♅	Urano.

☉ Sole.

☽ Luna.

g	indica	Giorni.
h		Ore.
s		Segni.
°		Gradi.
′		Minuti.
″		Secondi.
☌		Congiunzione.
☍		Opposizione.
☊		Nodo ascendente.
☋		Nodo discendente.

M	indica	Mattina.
S		Sera.
A		Australe.
B		Boreale.
diff.		Differenza.
dist. min.		Distanza minima.
imm.		Immersione.
em.		Emersione.
AR.		Ascensione retta.
Lat.		Latitudine.

FESTE MOBILI.

Settuagesima			4	Febbrajo.
Giorno delle Ceneri			21	Febbrajo.
Pasqua di Risurrezione			8	Aprile.
Litanie alla Romana	14	15	16	Maggio.
Ascensione del Signore			17	Maggio.
Litanie all'Ambrosiana	21	22	23	Maggio.
Pentecoste			27	Maggio.
Santissima Trinità			3	Giugno.
Corpus Domini			7	Giugno.
Avvento all'Ambrosiana			18	Novembre.
Avvento alla Romana			2	Dicembre.

NUMERI DELL'ANNO.

Numero d'Oro	7.
Ciclo Solare	10.
Epatta	VI.
Indizione Romana	7.
Lettera Domenicale	G.

QUATTRO TEMPORA.

Di Primavera	28	Febbrajo,	2	3	Marzo.
D'Estate	30	Maggio,	1	2	Giugno.
D'Autunno		19	21	22	Settembre.
D'Inverno		19	21	22	Dicembre.

ECLISSI DELL' ANNO 1849 IN TEMPO MEDIO.

22 Febbrajo. Eclisse annulare di Sole invisibile a Milano.
Congiunzione vera della Luna col Sole a 14^h $6'$.

9 Marzo. Eclisse parziale di Luna visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse a 12^h $1'$.
Fine dell' Eclisse a 15^h $1'$.
Quantità dell' Eclisse digiti 8 minuti 48.

17 Agosto. Eclisse totale di Sole invisibile a Milano.
Congiunzione vera della Luna col Sole a 18^h $9'$.

2 Settem. Eclisse parziale di Luna in parte visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse a 4^h $24'$.
Mezzo dell' Eclisse a 5^h $47'$.
Fine dell' Eclisse a 7^h $10'$.
Quantità dell' Eclisse digiti 7 minuti 6.

Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.	Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.
0	23° 27' 23'',0	− 3'',8	190	23° 27' 23'',4	− 6'',3
10	23,1	3,6	200	23,6	6,1
20	23,3	3,5	210	23,8	6,1
30	23,6	3,5	220	24,0	6,2
40	23,8	3,7	230	24,3	6,4
50	24,0	4,0	240	24,5	6,8
60	24,2	4,4	250	24,6	7,2
70	24,3	4,9	260	24,7	7,7
80	24,3	5,5	270	24,7	8,3
90	24,3	6,2	280	24,7	8,9
100	24,2	6,7	290	24,6	9,4
110	24,1	7,1	300	24,4	9,8
120	23,9	7,4	310	24,2	10,0
130	23,7	7,5	320	24,1	10,1
140	23,5	7,5	330	24,0	10,1
150	23,4	7,4	340	23,9	9,9
160	23,3	7,2	350	23,9	9,6
170	23,3	6,9	360	23,9	9,3
180	23,3	6,6	370	24,0	8,9

Occultazioni delle principali stelle dietro la Luna per l' anno 1849 *a Milano.*

Giorni del mese.	Astri occultati.	Tempo medio dell' immer.	Tempo medio dell' emers.	Distanza dal punto più alto della ☽ nell' em.	Cong. appar. sull' orbita.	Distanza minima dal lembo della ☽.
		h '	h '	°	h '	'
Genn. 5	54 γ ♉ 3. 4.ª	......	......	.....	2 52	2 B
Febb. 2	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	0 8	16 A
9	5 β ♍ 3. 4.ª	......	......	.....	16 50	3 A
Marzo 8	84 τ ♌ 4.ª	......	......	.....	15 57	11 B
Marzo 9	15 η ♍ 4. 5.ª	......	......	.....	16 39	3 A
Aprile 5	5 β ♍ 3. 4.ª	7 25	8 40	48	.....	......
Maggio 5	98 κ ♍ 4.ª	......	......	.....	16 14	2 B
7	44 η ♎ 4. 5.ª	12 7	13 28	105	.....	......
18	87 α ♉ Ald. 1.ª	7 29	8 15	150	.....	......
22	15 η ♍ 3. 4.ª	11 21	12 28	100	.....	......
30	♄	......	......	.....	2 15	14 A
Giugno 3	38 γ ♎ 4. 5.ª	......	......	.....	15 35	6 A
18	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	16 28	6 A
Luglio 16	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	4 8	3 A
Sett. 6	87 μ Balena 4.ª	16 43	17 22	189	.....	......
8	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	15 38	3 A
Ottob. 5	54 γ ♉ 3. 4.ª	14 26	15 38	135	.....	......
5	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	22 50	1 A
31	87 μ Balena 4.ª	6 56	7 56	87	.....	......
Nov. 7	32 α ♌ Regolo 1.ª	......	......	.....	19 25	1 A
29	54 γ ♉ 3. 4.ª	8 22	9 17	80	.....	......
29	87 α ♉ Ald. 1.ª	16 32	17 28	148	.....	......
Dicem. 6	♅	......	......	.....	20 4	1 B
27	87 α ♉ Ald. 1.ª	......	......	.....	2 24	3 A

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Primo quarto	20ʰ 15′
8	Luna piena	11 27
15	Ultimo quarto	19 31
23	Luna nuova	22 39
31	Primo quarto	5 19

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	80 e ♓ 5.ª	3 5
2	98 μ ♓ 5.ª	12 3
3	65 ξ¹ Balena 5.ª	6 37
5	54 γ ♉ 3. 4.ª	10 57
5	61 δ¹ ♉ 4.ª	12 43
5	64 δ² ♉ 4. 5.ª	13 7
5	77 θ¹ ♉ 5.ª	14 29
5	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	17 25
6	104 m ♉ 5.ª	5 49
10	5 ξ ♌ 5.ª	15 7
10	47 ρ ♌ 4.ª	17 2
13	5 β ♍ 3. 4.ª	7 5
13	15 η ♍ 3. 4.ª	21 44
14	29 γ ♍ 4.ª	8 1
14	51 θ ♍ 4. 5.ª	23 45
16	98 κ ♍ 4.ª	8 7
17	15 ξ² ♎ 5.ª	5 31
18	38 γ ♎ 4. 5.ª	1 47
18	44 η ♎ 4. 5.ª	6 17
19	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	5 11
22	43 d ♐ 5.ª	11 51
22	44 ρ¹ ♐ 3.ª	14 1
27	♀	14 3
27	♄	14 51
29	98 μ ♓ 5.ª	17 33
30	65 ξ¹ Balena 5.ª	12 30
31	87 μ Balena 4.ª	1 56

	Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
		I. Satellite.
		h ′ ″
*	1	11 42 1 imm.
	3	6 10 20
	5	0 38 39
	6	19 7 0
*	8	13 35 21
*	10	8 3 42
	12	2 32 2
	13	20 59 25
*	15	15 28 47
*	17	9 57 9
	19	4 25 32
	20	22 53 56
*	22	17 12 20
*	24	11 50 44
	26	6 19 8
	28	0 47 34
	29	19 16 0
*	31	13 44 25
		II. Satellite.
*	1	9 33 36 imm.
	4	22 51 11
*	8	12 9 56
	12	1 27 35
*	15	14 46 43
	19	4 4 7
*	22	17 23 0
*	26	6 40 48
	29	19 59 44
		III. Satellite.
	3	0 50 58 imm.
	3	4 24 21 em.
	10	4 49 27 imm.
*	10	8 22 55 em.
*	17	8 47 37 imm.
*	17	12 21 15 em.
*	24	12 46 6 imm.
*	24	16 19 37 em.
*	31	16 44 10 imm.
	31	20 17 43 em.
		IV. Satellite.
	14	4 40 41 imm.
*	14	9 26 6 em.
	30	22 40 17 imm.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
1	1	Lun.	0 3 57,21	18 47 56,85	18 43 58,99	7 39	4 21
2	2	Mart.	0 4 25,37	18 52 21,63	18 47 55,54	7 38	4 22
3	3	Merc.	0 4 53,15	18 56 46,05	18 51 52,10	7 38	4 22
4	4	Giov.	0 5 20,51	19 1 10,03	18 55 48,66	7 37	4 23
5	5	Ven.	0 5 47,42	19 5 33,58	18 59 45,22	7 37	4 23
6	6	Sab.	0 6 13,87	19 9 56,66	19 3 41,77	7 36	4 24
7	7	Dom.	0 6 39,82	19 14 19,23	19 7 38,33	7 35	4 25
8	8	Lun.	0 7 5,26	19 18 41,32	19 11 34,89	7 34	4 26
9	9	Mart.	0 7 30,18	19 23 2,87	19 15 31,44	7 34	4 26
10	10	Merc.	0 7 54,55	19 27 23,85	19 19 28,00	7 33	4 27
11	11	Giov.	0 8 18,35	19 31 44,27	19 23 24,56	7 32	4 28
12	12	Ven.	0 8 41,55	19 36 4,09	19 27 21,17	7 32	4 28
13	13	Sab.	0 9 4,14	19 40 23,29	19 31 17,67	7 31	4 29
14	14	Dom.	0 9 26,10	19 44 41,86	19 35 14,22	7 30	4 30
15	15	Lun.	0 9 47,41	19 48 59,79	19 39 10,78	7 29	4 31
16	16	Mart.	0 10 8,05	19 53 17,05	19 43 7,34	7 28	4 32
17	17	Merc.	0 10 28,02	19 57 33,63	19 47 3,89	7 26	4 34
18	18	Giov.	0 10 47,29	20 1 49,51	19 51 0,48	7 25	4 35
19	19	Ven.	0 11 5,86	20 6 4,68	19 54 57,00	7 24	4 36
20	20	Sab.	0 11 23,70	20 10 19,12	19 58 53,56	7 23	4 37
21	21	Dom.	0 11 40,78	20 14 32,81	20 2 50,12	7 22	4 38
22	22	Lun.	0 11 57,10	20 18 45,73	20 6 46,67	7 21	4 39
23	23	Mart.	0 12 12,65	20 22 57,89	20 10 43,23	7 20	4 40
24	24	Merc.	0 12 27,42	20 27 9,25	20 14 39,78	7 18	4 42
25	25	Giov.	0 12 41,38	20 31 19,81	20 18 36,34	7 17	4 43
26	26	Ven.	0 12 54,53	20 35 29,55	20 22 32,89	7 16	4 44
27	27	Sab.	0 13 6,86	20 39 38,47	20 26 29,45	7 15	4 45
28	28	Dom.	0 13 18,37	20 43 46,55	20 30 26,00	7 14	4 46
29	29	Lun.	0 13 29,04	20 47 53,81	20 34 22,56	7 13	4 47
30	30	Mart.	0 13 38,88	20 52 0,23	20 38 19,11	7 12	4 48
31	31	Merc.	0 13 47,87	20 56 5,80	20 42 15,66	7 11	4 49

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	9 11 1 7,9	22 59 55,0	+ 0,21	− 0,23	9,9926568
2	9 12 2 17,7	22 54 37,6	0,23	0,35	9,9926565
3	9 13 3 27,3	22 48 53,0	0,25	0,46	9,9926586
4	9 14 4 36,4	22 42 41,2	0,27	0,53	9,9926630
5	9 15 5 45,1	22 36 2,5	0,29	0,59	9,9926700
6	9 16 6 53,4	22 28 57,0	0,31	0,60	9,9926797
7	9 17 8 1,4	22 21 24,9	0,33	0,59	9,9926922
8	9 18 9 9,1	22 13 26,5	0,34	0,56	9,9927076
9	9 19 10 16,4	22 5 1,9	0,36	0,49	9,9927258
10	9 20 11 23,3	21 56 11,5	0,38	0,40	9,9927468
11	9 21 12 30,0	21 46 55,3	0,40	0,30	9,9927707
12	9 22 13 36,5	21 37 13,8	0,41	0,17	9,9927973
13	9 23 14 42,7	21 27 7,2	0,43	− 0,03	9,9928266
14	9 24 15 48,6	21 16 35,8	0,44	+ 0,10	9,9928586
15	9 25 16 54,2	21 3 39,7	0,46	0,23	9,9928930
16	9 26 17 59,6	20 54 19,3	0,48	0,34	9,9929297
17	9 27 19 4,7	20 42 35,2	0,49	0,44	9,9929686
18	9 28 20 9,5	20 30 27,5	0,51	0,52	9,9930095
19	9 29 21 14,0	20 17 56,3	0,52	0,55	9,9930523
20	10 0 22 17,9	20 5 2,2	0,54	0,57	9,9930969
21	10 1 23 21,3	19 51 45,6	0,56	0,55	9,9931433
22	10 2 24 24,1	19 38 6,8	0,57	0,50	9,9931913
23	10 3 25 26,1	19 24 6,1	0,59	0,42	9,9932408
24	10 4 26 27,3	19 9 43,9	0,60	0,33	9,9932917
25	10 5 27 27,6	18 55 0,6	0,62	0,21	9,9933440
26	10 6 28 27,0	18 39 56,7	0,63	+ 0,09	9,9933977
27	10 7 29 25,2	18 24 32,5	0,65	− 0,04	9,9934530
28	10 8 30 22,2	18 8 48,4	0,66	0,18	9,9935100
29	10 9 31 18,1	17 52 44,6	0,68	0,30	9,9935685
30	10 10 32 12,7	17 36 22,1	0,69	0,40	9,9936287
31	10 11 33 5,9	17 19 41,0	0,70	− 0,49	9,9936907

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Lun.	0 0 23 59	0 7 10 29	1 25 4A	1 59 8A	5 31
2	Mart.	0 14 1 51	0 20 58 18	2 31 53	3 2 49	6 21
3	Merc.	0 27 59 13	1 5 6 37	3 31 21	3 56 59	7 13
4	Giov.	1 12 18 17	1 19 34 34	4 19 9	4 37 23	8 7
5	Ven.	1 26 54 58	2 4 18 48	4 51 14	5 0 21	9 5
6	Sab.	2 11 45 11	2 19 13 11	5 4 27	5 3 23	10 5
7	Dom.	2 26 41 40	3 4 9 29	4 57 8	4 45 49	11 6
8	Lun.	3 11 35 30	3 18 58 36	4 29 42	4 9 8	12 7
9	Mart.	3 26 17 42	4 3 31 54	3 44 37	3 16 42	13 5
10	Merc.	4 10 40 27	4 17 42 49	2 45 59	2 13 7	14 1
11	Giov.	4 24 38 34	5 1 27 31	1 38 43	1 3 25	14 53
12	Ven.	5 8 9 40	5 14 45 8	0 27 46	0 7 43B	15 42
13	Sab.	5 21 14 12	5 27 37 16	0 42 33B	1 16 21	16 28
14	Dom.	6 3 54 49	6 10 7 23	1 48 44	2 19 25	17 13
15	Lun.	6 16 15 34	6 22 20 0	2 48 7	3 14 38	17 57
16	Mart.	6 28 21 19	7 4 20 13	3 38 44	4 0 16	18 41
17	Merc.	7 10 17 17	7 16 13 10	4 19 6	4 35 4	19 25
18	Giov.	7 22 8 28	7 28 3 46	4 48 4	4 57 57	20 10
19	Ven.	8 3 59 34	8 9 56 22	5 4 41	5 8 8	20 56
20	Sab.	8 15 54 35	8 21 54 35	5 8 14	5 4 58	21 44
21	Dom.	8 27 56 42	9 4 1 13	4 58 17	4 48 12	22 33
22	Lun.	9 10 8 18	9 16 18 10	4 34 44	4 17 58	23 22
23	Mart.	9 22 30 55	9 28 46 38	3 58 0	3 35 0	* *
24	Merc.	10 5 5 23	10 11 27 9	3 9 9	2 40 42	0 13
25	Giov.	10 17 51 58	10 24 19 47	2 9 58	1 37 17	1 2
26	Ven.	11 0 50 34	11 7 24 17	1 3 3	0 27 40	1 51
27	Sab.	11 14 0 55	11 20 40 28	0 8 22A	0 44 36A	2 40
28	Dom.	11 27 22 55	0 4 8 16	1 20 30	1 55 34	3 29
29	Lun.	0 10 56 34	0 17 47 50	2 29 15	3 1 3	4 18
30	Mart.	0 24 42 5	1 1 39 17	3 30 27	3 56 59	5 9
31	Merc.	1 8 39 23	1 15 42 20	4 20 9	4 39 33	6 1

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' ''	' ''	' ''	' ''	h '	h '
1	0 16	0 9A	57 53	58 13	31 56	31 47	23 59	11 44
2	1 10	4 21B	58 33	58 53	31 58	32 9	* *	12 52
3	2 6	8 43	58 12	59 31	32 19	32 29	0 30	14 3
4	3 4	12 38	59 48	60 3	32 38	32 46	1 10	15 15
5	4 6	15 48	60 15	60 25	32 53	32 59	1 51	16 26
6	5 10	17 52	60 32	60 35	33 3	33 5	2 39	17 35
7	6 15	18 38	60 34	60 29	33 4	33 1	3 34	18 38
8	7 20	18 0	60 20	60 7	32 56	32 49	4 37	19 33
9	8 23	16 5	59 51	59 32	32 40	32 30	5 43	20 20
10	9 23	13 9	59 10	58 46	32 18	32 5	6 52	21 2
11	10 19	9 32	58 20	57 53	31 51	31 36	8 3	21 38
12	11 12	5 31	57 26	57 0	31 21	31 7	9 6	22 10
13	12 2	1 22	56 34	56 10	30 53	30 40	10 9	22 39
14	12 51	2 43A	55 47	55 26	30 27	30 15	11 10	23 8
15	13 39	6 35	55 7	54 51	30 5	29 56	12 11	23 37
16	14 27	10 7	54 37	54 25	29 48	29 42	13 11	* *
17	15 15	13 10	54 16	54 10	29 37	29 34	14 9	0 5
18	16 4	15 39	54 6	54 4	29 32	29 31	15 7	0 36
19	16 55	17 26	54 5	54 9	29 31	29 33	16 3	1 9
20	17 47	18 25	54 14	54 21	29 36	29 40	16 56	1 46
21	18 40	18 31	54 30	54 41	29 45	29 51	17 47	2 31
22	19 33	17 42	54 53	55 6	29 58	30 5	18 32	3 20
23	* *	* *	55 20	55 34	30 12	30 20	19 15	4 15
24	20 27	15 56	55 49	56 4	30 28	30 36	19 52	5 15
25	21 21	13 18	56 19	56 34	30 44	30 53	20 28	6 17
26	22 14	9 55	56 49	57 3	31 1	31 9	20 59	7 22
27	23 7	5 58	57 17	57 31	31 16	31 24	21 30	8 29
28	0 0	1 39	57 45	57 58	31 31	31 38	22 1	9 36
29	0 53	2 49B	58 11	58 23	31 45	31 52	22 35	10 44
30	1 48	7 12	58 35	58 47	31 59	32 5	23 9	11 52
31	2 45	11 13	58 58	59 8	32 11	32 17	23 48	13 1

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	13h 16′	*Occidente*
1	4. 2.	○	3. 1●
2	.4 .2	○	.1,3.
3	.4 3☌1	○	.2
4	3☌4	○	2☌1
5	.3,1☌2. .4	○	
6	2☌3	○	1☌4
7	.1	○	2☌3 .4
8	02	○	1. .3 .4
9	.2	○	.1 3. .4
10	1. 3.	○	.2 .4
11	3.	○	.1,2. 4.
12	.3 2☌1	○	4.
13	2☌3	○	1. 4.
14	.1,4.	○	2☌3
15	4.	○	2☌1 .3
16	4. 2.	○	.1 3.
17	4. 1.	○	.2 3●
18	.4 3.	○	.1,2.
19	.4 .3 1. 2.	○	
20	.4 2☌3	○	1.
21	.4 .1	○	.3 .2
22	.4	○	2☌1 .3
23	2. .1	○	.4 3.
24	02 1.	○	3. .4
25	3.	○	.1 .2 .4
26	3. 1. 2.	○	.4
27	.3 .2	○	1. 4.
28	.1	○	.3 .2 4.
29		○	1.2. .3,4.
30	2. .1	○	4. 3.
31	4. .2	○	3. 1●

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
6	Luna piena	$23^h\ 52'$
14	Ultimo quarto	16 39
22	Luna nuova	14 6

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	54 γ ♉ 3. 4.ª	18 14
1	64 δ² ♉ 4. 5.ª	20 28
1	77 θ¹ ♉ 5.ª	21 52
2	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	0 57
2	104 m ♉ 5.ª	13 46
7	5 ξ ♌ 5.ª	1 14
8	47 ρ ♌ 4.ª	3 11
9	5 β ♍ 3. 4.ª	16 45
10	15 η ♍ 3. 4.ª	7 5
10	29 γ ♍ 4.ª	17 13
13	15 ξ² ♎ 5.ª	13 37
14	38 γ ♎ 4. 5.ª	9 47
14	44 η ♎ 4. 5.ª	14 16
15	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	13 9
18	43 d ♐ 5.ª	20 9
18	44 ρ¹ ♐ 5.ª	22 21
22	73 λ ♒ 4.ª	23 13
23	90 φ ♒ 5.ª	9 3
24	♄	3 11
25	98 μ ♓ 5.ª	23 29
26	65 ξ¹ Balena 5.ª	18 4
28	54 γ ♉ 3. 4.ª	23 43

Giorni.	Eclissi de'Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
* 1	8 12 52 imm.
4	2 41 19
5	21 9 48
* 7	17 53 27 em.
* 9	12 21 56
* 11	6 50 25
13	1 18 56
14	19 47 25
16	14 15 56
* 18	8 44 27
20	3 13 0
21	21 41 31
23	16 10 4
* 25	10 38 37
27	5 7 13
28	23 35 46
	II. Satellite.
* 2	9 17 37 imm.
5	22 36 36
* 9	14 47 20 em.
13	4 6 19
* 16	17 24 14
20	6 43 14
23	20 1 12
* 27	9 20 12
	III. Satellite.
7	20 42 14 imm.
8	0 15 47 em.
15	0 40 37 imm.
15	4 14 9 em.
22	4 39 13 imm.
* 22	8 13 15 em.
	IV. Satellite.
* 16	16 41 14 imm.
16	21 27 29 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della setimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
32	1	Giov.	0 13 56,01	21 0 10,52	20 46 12,22	7 9	4 51
33	2	Ven.	0 14 3,30	21 4 14,38	20 50 8,77	7 8	4 52
34	3	Sab.	0 14 9,77	21 8 17,43	20 54 5,33	7 6	4 54
35	4	Dom.	0 14 15,41	21 12 19,63	20 58 1,88	7 5	4 55
36	5	Lun.	0 14 20,22	21 16 21,00	21 1 58,43	7 3	4 57
37	6	Mart.	0 14 24,20	21 20 21,54	21 5 54,99	7 2	4 58
38	7	Merc.	0 14 27,36	21 24 21,27	21 9 51,54	7 1	4 59
39	8	Giov.	0 14 29,73	21 28 20,19	21 13 48,10	7 0	5 0
40	9	Ven.	0 14 31,30	21 32 18,33	21 17 44,65	6 58	5 2
41	10	Sab.	0 14 32,09	21 36 15,68	21 21 41,20	6 57	5 3
42	11	Dom.	0 14 32,12	21 40 12,25	21 25 37,76	6 55	5 5
43	12	Lun.	0 14 31,39	21 44 8,08	21 29 34,31	6 54	5 6
44	13	Mart.	0 14 29,91	21 48 3,15	21 33 30,87	6 53	5 7
45	14	Merc.	0 14 27,71	21 51 57,50	21 37 27,42	6 51	5 9
46	15	Giov.	0 14 24,79	21 55 51,13	21 41 23,97	6 49	5 11
47	16	Ven.	0 14 21,16	21 59 44,04	21 45 20,53	6 48	5 12
48	17	Sab.	0 14 16,83	22 3 36,25	21 49 17,08	6 46	5 14
49	18	Dom.	0 14 11,82	22 7 27,78	21 53 13,64	6 45	5 15
50	19	Lun.	0 14 6,14	22 11 18,65	21 57 10,19	6 43	5 17
51	20	Mart.	0 13 59,81	22 15 8,84	22 1 6,74	6 42	5 18
52	21	Merc.	0 13 52,82	22 18 58,38	22 5 3,29	6 40	5 20
53	22	Giov.	0 13 45,18	22 22 47,29	22 8 59,85	6 38	5 22
54	23	Ven.	0 13 36,92	22 26 35,56	22 12 56,40	6 37	5 23
55	24	Sab.	0 13 28,05	22 30 23,21	22 16 52,95	6 35	5 25
56	25	Dom.	0 13 18,58	22 34 10,27	22 20 49,50	6 34	5 26
57	26	Lun.	0 13 8,50	22 37 56,72	22 24 46,06	6 32	5 28
58	27	Mart.	0 12 57,86	22 41 42,60	22 28 42,61	6 31	5 29
59	28	Merc.	0 12 46,67	22 45 27,93	22 32 39,16	6 29	5 31

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	10 12 33 57,5	17 2 41,6	+ 0,71	− 0,56	9,9937547
2	10 13 34 47,9	16 45 23,9	0,73	0,58	9,9938208
3	10 14 35 36,8	16 27 49,3	0,74	0,57	9,9938890
4	10 15 36 24,3	16 9 57,4	0,75	0,55	9,9939594
5	10 16 37 10,3	15 51 48,9	0,76	0,48	9,9940321
6	10 17 37 54,9	15 33 24,3	0,77	0,40	9,9941071
7	10 18 38 38,1	15 14 44,0	0,78	0,30	9,9941844
8	10 19 39 20,0	14 55 48,2	0,79	0,17	9,9942641
9	10 20 40 0,6	14 36 37,3	0,80	− 0,03	9,9943462
10	10 21 40 40,0	14 17 11,8	0,81	+ 0,10	9,9944306
11	10 22 41 18,1	13 57 31,9	0,82	0,22	9,9945171
12	10 23 41 54,8	13 37 38,3	0,83	0,33	9,9946057
13	10 24 42 30,4	13 17 31,2	0,84	0,43	9,9946962
14	10 25 43 4,8	12 57 11,2	0,85	0,52	9,9947885
15	10 26 43 38,0	12 36 38,5	0,86	0,56	9,9948825
16	10 27 44 10,0	12 15 55,3	0,87	0,58	9,9949779
17	10 28 44 40,7	11 54 56,8	0,87	0,58	9,9950747
18	10 29 45 10,0	11 33 48,6	0,88	0,54	9,9951726
19	11 0 45 38,0	11 12 29,6	0,89	0,46	9,9952716
20	11 1 46 4,4	10 51 0,0	0,90	0,37	9,9953716
21	11 2 46 29,3	10 29 20,3	0,90	0,27	9,9954723
22	11 3 46 52,7	10 7 30,9	0,91	0,15	9,9955737
23	11 4 47 14,3	9 45 32,3	0,91	0,00	9,9956758
24	11 5 47 34,1	9 23 25,0	0,92	− 0,13	9,9957786
25	11 6 47 52,1	9 1 9,3	0,93	0,25	9,9958821
26	11 7 48 8,2	8 38 45,4	0,93	0,36	9,9959863
27	11 8 48 22,4	8 16 14,2	0,94	0,45	9,9960913
28	11 9 48 34,4	7 53 35,8	0,94	− 0,52	9,9961971

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Giov.	1 22 47 56	1 29 55 58	4 54 49A	5 5 37A	6 56
2	Ven.	2 7 6 7	2 14 17 59	5 11 43	5 12 57	7 53
3	Sab.	2 21 31 4	2 28 44 48	5 9 14	5 0 37	8 51
4	Dom.	3 5 58 34	3 13 11 40	4 47 13	4 29 16	9 51
5	Lun.	3 20 23 24	3 27 33 3	4 7 5	3 41 7	10 49
6	Mart.	4 4 39 56	4 11 43 23	3 11 51	2 39 51	11 46
7	Merc.	4 18 42 48	4 25 37 42	2 5 43	1 30 3	12 39
8	Giov.	5 2 27 43	5 9 12 32	0 53 28	0 16 33	13 30
9	Ven.	5 15 51 60	5 22 26 4	0 20 8B	0 56 4B	14 19
10	Sab.	5 28 54 49	6 5 18 24	1 30 49	2 3 59	15 5
11	Dom.	6 11 37 5	6 17 51 13	2 35 12	3 4 11	15 50
12	Lun.	6 24 1 13	7 0 7 32	3 30 42	3 54 34	16 34
13	Mart.	7 6 10 42	7 12 11 17	4 15 35	4 33 38	17 19
14	Merc.	7 18 9 50	7 24 6 57	4 48 36	5 0 24	18 4
15	Giov.	8 0 3 15	8 5 59 19	5 8 57	5 14 13	18 50
16	Ven.	8 11 55 46	8 17 53 9	5 16 7	5 14 37	19 37
17	Sab.	8 23 52 2	8 29 52 56	5 9 43	5 1 24	20 25
18	Dom.	9 5 56 19	9 12 2 38	4 49 40	4 34 35	21 14
19	Lun.	9 18 12 16	9 24 25 32	4 16 11	3 54 35	22 4
20	Mart.	10 0 42 43	10 7 4 2	3 29 56	3 2 25	22 54
21	Merc.	10 13 29 35	10 19 59 28	2 32 17	1 59 50	23 44
22	Giov.	10 26 33 39	10 3 12 2	1 25 25	0 49 29	* *
23	Ven.	11 9 54 29	11 16 40 48	0 12 29	0 25 3A	0 34
24	Sab.	11 23 30 42	0 0 23 51	1 2 34A	1 39 28	1 24
25	Dom.	0 7 19 57	0 14 18 38	2 15 10	2 49 5	2 14
26	Lun.	0 21 19 31	0 28 22 13	3 20 37	3 49 15	3 6
27	Mart.	1 5 26 24	1 12 31 40	4 14 30	4 35 54	3 58
28	Merc.	1 19 37 41	1 26 44 8	4 53 8	5 5 53	4 52

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	3 43	14 35B	59 17	59 25	32 22	32 26	* *	14 12
2	4 44	17 3	59 31	59 35	32 29	32 31	0 31	15 20
3	5 47	18 22	59 38	59 39	32 33	32 34	1 22	16 22
4	6 50	18 24	59 37	59 32	32 33	32 30	2 19	17 21
5	7 53	17 8	59 25	59 16	32 26	32 21	3 21	18 11
6	8 53	14 45	59 4	58 50	32 15	32 7	4 28	18 55
7	9 51	11 29	58 33	58 15	31 58	31 48	5 36	19 32
8	10 46	7 37	57 55	57 34	31 37	31 25	6 45	20 7
9	11 39	3 28	57 12	56 49	31 13	31 1	7 51	20 39
10	12 29	0 44A	56 27	56 6	30 49	30 37	8 54	21 8
11	13 18	4 47	55 45	55 26	30 26	30 16	9 56	21 36
12	14 7	8 31	55 8	54 53	30 6	29 57	10 58	22 4
13	14 55	11 49	54 40	54 29	29 50	29 44	11 57	22 35
14	15 44	14 35	54 21	54 15	29 40	29 37	12 55	23 8
15	16 34	16 40	54 12	54 11	29 35	29 35	13 52	23 45
16	17 25	18 0	54 13	54 17	29 36	29 38	14 47	* *
17	18 17	18 30	54 24	54 33	29 42	29 47	15 38	0 25
18	19 11	18 5	54 45	54 59	29 53	30 1	16 26	1 11
19	20 4	16 44	55 14	55 31	30 9	30 18	17 10	2 3
20	20 59	14 28	55 49	56 8	30 28	30 38	17 49	3 1
21	21 53	11 22	56 27	56 46	30 49	30 59	18 26	4 4
22	* *	* *	57 5	57 23	31 9	31 19	19 1	5 8
23	22 47	7 34	57 41	57 57	31 29	31 38	19 33	6 16
24	23 41	3 17	58 12	58 25	31 46	31 53	20 4	7 24
25	0 35	1 15B	58 37	58 47	31 59	32 5	20 38	8 33
26	1 31	5 46	58 55	59 2	32 10	32 14	21 11	9 44
27	2 27	9 59	59 7	59 11	32 17	32 19	21 49	10 54
28	3 25	13 36	59 13	59 14	32 20	32 20	22 31	12 3

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$11^h\ 33'$	*Occidente*
1	4. 3. .1	O	.2
2	4. 3. 2.1.	O	
3	4. .3 .2	O	.1
4	.4 1.	O	.3 .2
5	.4	O	2♂1 .3
6	.4 2. .1	O	3.
7	.4 .2	O	1♂3
8	3. .1	O	.2 4O
9	●1 3. 2.	O	.4
10	.3 .2	O	.1 .4
11	O3 1.	O	.2 .4
12		O	2♂1 .3 .4
13	2. 1.	O	3. 4.
14	.2	O	1. 3. 4.
15	3. .1	O	.2,4.
16	3.	O	4♂2♂1
17	.3,2. 4.	O	.1
18	4. 1. .3	O	.2
19	4.	O	.1,2. .3
20	4. 2♂1.	O	.3
21	.4 .2	O	1. 3.
22	.4 3♂1	O	.2
23	3♂4	O	2♂1
24	.3 2. .4	O	1O
25	O2 .3,1.	O	.4
26		O	.1,2♂3 .4
27	2♂1	O	.3 .4
28	.2	O	.1,3. .4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Primo quarto	12h 39′
8	Luna piena	13 38
16	Ultimo quarto	13 15
24	Luna nuova	2 42
30	Primo quarto	19 26

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	64 δ² ♉ 4. 5.ª	1 57
1	77 θ¹ ♉ 5.ª	3 23
1	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª	6 29
1	104 m ♉ 5.ª	19 32
6	5 ξ ♌ 5.ª	9 48
7	47 ρ ♌ 4.ª	12 2
8	84 τ ♌ 4.ª	15 27
9	5 β ♍ 3. 4.ª	1 51
9	15 η ♍ 4. 5.ª	16 13
10	29 γ ♍ 4.ª	2 18
10	51 θ ♍ 4. 5.ª	17 37
12	15 ξ ♎ 5.ª	22 5
13	38 γ ♎ 4. 5.ª	18 5
13	44 η ♎ 4. 5.ª	22 34
14	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	21 21
14	24 m ♏ 5.ª	2 33
18	43 d ♐ 5.ª	4 53
18	44 ρ¹ ♐ 4. 5.ª	7 5
22	77 λ ♒ 4.ª	8 32
22	90 φ ♒ 5.ª	18 18
23	♄	17 57
25	98 μ ♓ 5.ª	7 27
26	65 ξ¹ Balena 5.ª	1 33
26	87 μ Balena 4.ª	14 29
28	54 γ ♉ 3. 4.ª	5 45
28	64 δ² ♉ 4. 5.ª	7 57
28	77 θ¹ ♉ 5.ª	9 21
28	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª	12 23
29	104 m ♉ 5.ª	1 10

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite. h ′ ″
2	18 4 21 em.
* 4	12 32 55
6	7 1 33
8	1 30 8
9	19 58 44
* 11	14 27 20
* 13	8 56 0
15	3 24 37
16	21 53 15
18	16 21 53
* 20	10 50 35
22	5 19 13
23	23 47 53
25	18 16 32
* 27	12 45 15
* 29	7 13 54
31	1 42 36
	II. Satellite.
2	22 38 12 em.
* 6	11 57 11
10	1 15 13
* 13	14 34 11
17	3 52 13
20	17 11 8
24	6 29 11
27	19 48 4
* 31	9 6 6
	III. Satellite.
* 1	8 38 35 imm.
* 1	12 12 4 em.
* 8	12 37 35 imm.
* 8	16 11 2 em.
15	16 36 54 imm.
15	20 10 18 em.
22	20 35 48 imm.
23	0 9 7 em.
30	0 34 41 imm.
30	4 7 55 em.
	IV. Satellite
* 5	10 42 16 imm.
* 5	15 28 29 em.
22	4 43 47 imm.
* 22	9 29 42 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
60	1	Giov.	0 12 34,94	22 49 12,73	22 36 35,72	6 26	5 34
61	2	Ven.	0 12 22,68	22 52 56,99	22 40 32,27	6 25	5 35
62	3	Sab.	0 12 9,92	22 56 40,74	22 44 28,82	6 24	5 36
63	4	Dom.	0 11 56,67	23 0 24,01	22 48 25,37	6 22	5 38
64	5	Lun.	0 11 42,95	23 4 6,80	22 52 21,93	6 21	5 39
65	6	Mart.	0 11 28,79	23 7 49,15	22 56 18,48	6 19	5 41
66	7	Merc.	0 11 14,21	23 11 31,09	23 0 15,03	6 18	5 42
67	8	Giov.	0 10 59,22	23 15 12,61	23 4 11,59	6 16	5 44
68	9	Ven.	0 10 43,86	23 18 53,75	23 8 8,12	6 15	5 45
69	10	Sab.	0 10 28,13	23 22 34,54	23 12 4,69	6 13	5 47
70	11	Dom.	0 10 12,09	23 26 15,01	23 16 1,24	6 12	5 48
71	12	Lun.	0 9 55,75	23 29 55,17	23 19 57,79	6 10	5 50
72	13	Mart.	0 9 39,12	23 33 35,04	23 23 54,34	6 9	5 51
73	14	Merc.	0 9 22,24	23 37 14,67	23 27 50,89	6 7	5 53
74	15	Giov.	0 9 5,11	23 40 54,05	23 31 47,45	6 5	5 55
75	16	Ven.	0 8 47,77	23 44 33,21	23 35 44,00	6 4	5 56
76	17	Sab.	0 8 30,24	23 48 12,19	23 39 40,55	6 2	5 58
77	18	Dom.	0 8 12,53	23 51 50,99	23 43 37,11	6 1	5 59
78	19	Lun.	0 7 54,67	23 55 29,63	23 47 33,66	5 59	6 1
79	20	Mart.	0 7 36,67	23 59 8,11	23 51 30,21	5 58	6 2
80	21	Merc.	0 7 18,57	0 2 46,53	23 55 26,76	5 56	6 4
81	22	Giov.	0 7 0,37	0 6 24,83	23 59 23,31	5 54	6 6
82	23	Ven.	0 6 42,07	0 10 3,03	0 3 19,86	5 53	6 7
83	24	Sab.	0 6 23,72	0 13 41,17	0 7 16,41	5 51	6 9
84	25	Dom.	0 6 5,32	0 17 19,28	0 11 12,96	5 50	6 10
85	26	Lun.	0 5 46,88	0 20 57,34	0 15 9,51	5 48	6 12
86	27	Mart.	0 5 28,41	0 24 35,38	0 19 6,07	5 46	6 14
87	28	Merc.	0 5 9,95	0 28 13,42	0 23 2,62	5 45	6 15
88	29	Giov.	0 4 51,52	0 31 51,48	0 26 59,17	5 43	6 17
89	30	Ven.	0 4 33,12	0 35 29,58	0 30 55,72	5 41	6 19
90	31	Sab.	0 4 14,77	0 39 7,73	0 34 52,27	5 40	6 20

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	11 10 48 44,3	7 30 50,8	+ 0,95	− 0,55	9,9963039
2	11 11 48 52,1	7 7 59,3	0,95	0,56	9,9964117
3	11 12 48 57,8	6 45 1,8	0,96	0,53	9,9965205
4	11 13 49 1,4	6 21 58,8	0,96	0,47	9,9966305
5	11 14 49 2,9	5 58 50,7	0,97	0,39	9,9967418
6	11 15 49 2,2	5 35 37,9	0,97	0,30	9,9968544
7	11 16 48 59,4	5 12 20,6	0,97	0,19	9,9969684
8	11 17 48 54,6	4 48 59,3	0,97	− 0,06	9,9970838
9	11 18 48 47,8	4 25 34,3	0,98	+ 0,07	9,9972007
10	11 19 48 39,1	4 2 5,9	0,98	0,20	9,9973190
11	11 20 48 28,5	3 38 34,7	0,98	0,33	9,9974386
12	11 21 48 16,1	3 15 0,8	0,98	0,43	9,9975594
13	11 22 48 1,8	2 51 24,5	0,98	0,51	9,9976813
14	11 23 47 45,8	2 27 46,4	0,99	0,57	9,9978043
15	11 24 47 28,1	2 4 6,7	0,99	0,59	9,9979281
16	11 25 47 8,6	1 40 25,7	0,99	0,59	9,9980526
17	11 26 46 47,4	1 16 44,0	0,99	0,56	9,9981777
18	11 27 46 24,6	0 53 1,8	0,99	0,49	9,9983032
19	11 28 45 59,9	0 29 19,4	0,99	0,40	9,9984289
20	0 29 45 33,4	0 5 37,3	0,99	0,29	9,9985547
21	0 0 45 5,1	0 18 4,0	0,99	0,17	9,9986803
22	0 1 44 34,9	0 41 44,3 Boreale	0,99	+ 0,04	9,9988058
23	0 2 44 2,8	1 55 23,3	0,99	− 0,09	9,9989310
24	0 3 43 28,7	1 29 0,5	0,98	0,23	9,9990559
25	0 4 42 52,4	1 52 35,5	0,98	0,35	9,9991803
26	0 5 42 14,1	2 16 8,0	0,98	0,43	9,9993044
27	0 6 41 33,6	2 39 37,6	0,98	0,50	9,9994282
28	0 7 40 50,8	3 3 3,9	0,98	0,55	9,9995516
29	0 8 40 5,6	3 26 26,4	0,97	0,57	9,9996747
30	0 9 39 18,2	3 49 44,8	0,97	0,55	9,9997975
31	0 10 38 28,5	4 12 59,0	0,97	− 0,50	9,9999200

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' ''	s ° ' ''	° ' ''	° ' ''	h '
1	Giov.	2 3 50 40	2 10 57 0	5 13 57A	5 17 13A	5 48
2	Ven.	2 18 2 48	2 25 7 49	5 15 38	5 9 16	6 45
3	Sab.	3 2 11 45	3 9 14 21	5 58 14	4 42 44	7 43
4	Dom.	3 16 15 19	3 23 14 24	4 23 3	3 59 33	8 40
5	Lun.	4 0 11 21	4 7 5 54	3 32 38	3 2 44	9 35
6	Mart.	4 13 57 47	4 20 46 46	2 30 24	1 56 7	10 29
7	Merc.	4 27 32 37	5 4 15 6	1 20 28	0 44 0	11 20
8	Giov.	5 10 54 1	5 17 29 13	0 7 15	0 29 15B	12 9
9	Ven.	5 24 0 34	6 0 28 3	1 5 0B	1 39 33	12 56
10	Sab.	6 6 51 37	6 13 11 20	2 12 29	2 43 26	13 42
11	Dom.	6 19 27 19	6 25 39 44	3 12 5	3 38 11	14 27
12	Lun.	7 1 48 49	7 7 54 50	4 1 29	4 21 50	15 12
13	Mart.	7 13 58 9	7 19 59 8	4 39 6	4 53 9	15 57
14	Merc.	7 25 58 13	8 1 55 52	5 3 56	5 11 23	16 43
15	Giov.	8 7 52 36	8 13 48 56	5 15 28	5 16 11	17 29
16	Ven.	8 19 45 27	8 25 42 42	5 13 30	5 7 28	18 17
17	Sab.	9 1 41 18	9 7 41 49	4 58 5	4 45 23	19 5
18	Dom.	9 13 44 50	9 19 50 55	4 29 27	4 10 20	19 53
19	Lun.	9 26 0 38	10 2 14 28	3 48 9	3 23 3	20 42
20	Mart.	10 8 32 53	10 14 56 18	2 55 11	2 24 46	21 33
21	Merc.	10 21 25 2	10 27 59 18	1 52 6	1 17 30	22 23
22	Giov.	11 4 39 16	11 11 24 56	0 41 23	0 4 11	23 13
23	Ven.	11 18 16 12	11 25 12 50	0 33 34A	1 11 17A	* *
24	Sab.	0 2 14 29	0 9 20 37	1 48 21	2 24 6	0 4
25	Dom.	0 16 30 40	0 23 43 56	2 57 53	3 29 3	0 56
26	Lun.	1 0 59 38	1 8 16 58	3 57 0	4 21 11	1 50
27	Mart.	1 15 35 8	1 22 53 19	4 41 10	4 56 34	2 45
28	Merc.	2 0 10 44	2 7 26 42	5 7 8	5 12 43	3 43
29	Giov.	2 14 40 37	2 21 51 56	5 13 19	5 8 59	4 40
30	Ven.	2 29 0 15	3 6 5 15	4 59 53	4 46 16	5 38
31	Sab.	3 13 6 43	3 20 4 31	4 28 28	4 6 49	6 35

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	4 25	16 21B	59 14	59 12	32 20	32 19	23 19	13 12
2	5 27	18 1	59 9	59 5	32 17	32 15	* *	14 15
3	6 28	18 29	59 0	58 54	32 12	32 9	0 12	15 14
4	7 29	17 43	58 47	58 38	32 5	32 0	1 11	16 6
5	8 29	15 48	58 28	58 17	31 55	31 49	2 15	16 50
6	9 27	12 57	58 5	57 53	31 43	31 36	3 21	17 29
7	10 22	9 23	57 49	57 25	31 28	31 20	4 28	18 4
8	11 15	5 22	57 9	56 53	31 12	31 3	5 34	18 36
9	12 6	1 11	56 36	56 18	30 54	30 44	6 38	19 6
10	12 56	2 59A	56 1	55 44	30 34	30 25	7 41	19 35
11	13 45	6 55	55 28	55 12	30 16	30 8	8 42	20 5
12	14 34	10 27	54 57	54 44	30 0	29 53	9 43	20 35
13	15 23	13 29	54 36	54 24	29 47	29 42	10 42	21 7
14	16 13	15 53	54 17	54 13	29 38	29 36	11 41	21 41
15	17 4	17 33	54 11	54 11	29 35	29 35	12 36	22 19
16	17 55	18 24	54 14	54 19	29 36	29 39	13 29	23 4
17	18 47	18 23	54 27	54 38	29 43	29 49	14 18	23 53
18	19 40	17 28	54 51	55 6	29 56	30 4	15 2	* *
19	20 34	15 38	55 23	55 43	30 14	30 25	15 43	0 47
20	21 27	12 55	56 5	56 28	30 37	30 49	16 22	1 46
21	22 21	9 25	56 51	57 15	31 2	31 15	16 58	2 50
22	23 16	5 18	57 39	58 2	31 28	31 41	17 31	3 57
23	* *	* *	58 24	58 45	31 53	32 4	18 2	5 5
24	0 11	0 45	59 4	59 20	32 14	32 26	18 35	6 16
25	1 7	3 56B	59 33	59 44	32 30	32 36	19 10	7 27
26	2 5	8 26	59 52	59 57	32 40	32 43	19 48	8 40
27	3 5	12 26	59 58	59 57	32 44	32 43	20 30	9 52
28	4 6	15 36	59 53	59 46	32 41	32 38	21 15	11 3
29	5 8	17 41	59 37	59 27	32 33	32 27	22 7	12 9
30	6 10	18 32	59 15	59 2	32 20	32 13	23 4	13 9
31	7 11	18 8	58 48	58 34	32 6	31 58	* *	14 3

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	10^h 21′	*Occidente*
1	1. 3.	○	.2 4.
2	3.	○	2♂1 4.
3	.3 2. .1	○	4.
4	.3 ·2	○	1. 4.
5	●4	○	.1 .3 .2
6	4. 1. 2.	○	.3
7	4. .2	○	.1 3.
8	4. 1.	○	.2 3●
9	.4 3.	○	1. 2.
10	.4 .3 2. .1	○	
11	.4 .3 .2	○	1.
12	o1 .4	○	.3 .2
13	1♂4	○	2. .3
14	2.	○	.1 .4 3.
15	1.	○	3♂2 .4
16	3.	○	1. 2. .4
17	3. 2. .1	○	.4
18	.3 .2	○	1. 4.
19	.1	○	.3 .2 4.
20	1.	○	2. .3,4.
21	2.	○	.1,4. 3.
22	o2 1. 4.	○	3.
23	4. 3.	○	.1,2.
24	4. 3. 2♂1	○	
25	4. .3 .2	○	1.
26	.4 .1	○	.2 3o
27	.4	○	1.2. .3
28	.4 2.	○	.1 3.
29	.4 1. .2	○	3.
30	3.	○	.1,2. 4o
31	3. 1. 2.	○	.4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
7	Luna piena.	$4^h 26'$
15	Ultimo quarto	7 44
22	Luna nuova	12 31
29	Primo quarto	2 54
	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	5 ξ ♌ 5.ª	15 57
3	47 ρ ♌ 4.ª	18 44
5	5 β ♍ 3. 4.ª	9 15
5	15 η ♍ 3. 4.ª	23 38
6	29 γ^1 ♍ 4.ª	9 58
7	51 θ ♍ 4. 5.ª	1 24
8	98 κ ♍ 4.ª	9 1
10	38 γ ♎ 4. 5.ª	1 45
10	44 η ♎ 4. 5.ª	6 15
11	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	5 3
11	24 m ♏ 5.ª	10 21
14	43 d ♐ 5.ª	13 2
14	44 ρ^1 ♐ 5.ª	15 14
18	73 λ ♒ 4.ª	18 25
19	90 φ ♒ 5.ª	4 19
20	♄	9 51
21	38 μ ♓ 5.ª	17 27
22	65 ξ^1 Balena 5.ª	11 17
22	54 γ ♉ 3. 4.ª	14 2
24	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	16 10
24	77 θ^1 ♉ 5.ª	17 31
24	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	20 29
25	104 m ♉ 5.ª	8 51

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	20 11 16 em.
* 3	14 40 1
* 5	9 8 42
7	3 37 25
8	22 6 6
10	16 34 52
* 12	11 3 33
14	5 32 18
16	0 0 59
17	18 29 46
* 19	12 58 29
21	7 27 15
23	1 55 57
24	20 24 44
26	14 53 28
* 28	9 22 14
30	3 50 57
	II. Satellite.
3	22 24 54 em.
* 7	11 42 57
11	1 1 40
14	14 19 41
18	3 38 19
21	16 56 19
25	6 14 50
28	19 32 47
	III. Satellite.
6	4 33 49 imm.
* 6	8 6 58 em.
* 13	8 33 7 imm.
* 13	12 6 9 em.
* 20	12 33 5 imm.
20	16 6 1 em.
27	16 32 36 imm.
27	20 5 23 em.
	IV. Satellite.
7	22 46 16 imm.
8	3 31 35 em.
24	16 38 30 imm.
24	21 32 54 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
91	1	Dom.	0 3 56,50	0 42 45,96	0 38 48,82	5 39	6 21
92	2	Lun.	0 3 38,32	0 46 24,28	0 42 45,37	5 37	6 23
93	3	Mart.	0 3 20,25	0 50 2,72	0 46 41,92	5 36	6 24
94	4	Merc.	0 3 2,31	0 53 41,28	0 50 38,48	5 34	6 26
95	5	Giov.	0 2 44,52	0 57 19,99	0 54 35,03	5 33	6 27
96	6	Ven.	0 2 26,91	1 0 58,89	0 58 31,58	5 31	6 29
97	7	Sab.	0 2 9,50	1 4 37,98	1 2 28,14	5 30	6 30
98	8	Dom.	0 1 52,30	1 8 17,30	1 6 24,69	5 28	6 32
99	9	Lun.	0 1 35,35	1 11 56,85	1 10 21,24	5 26	6 34
100	10	Mart.	0 1 18,67	1 15 36,67	1 14 17,79	5 24	6 36
101	11	Merc.	0 1 2,27	1 19 16,77	1 18 14,34	5 23	6 37
102	12	Giov.	0 0 46,17	1 22 57,18	1 22 10,89	5 21	6 39
103	13	Ven.	0 0 30,39	1 26 37,92	1 26 7,45	5 19	6 41
104	14	Sab.	0 0 14,94	1 30 18,98	1 30 4,00	5 18	6 42
105	15	Dom.	23 59 59,85	1 34 0,41	1 34 0,56	5 16	6 44
106	16	Lun.	23 59 45,14	1 37 42,21	1 37 57,11	5 14	6 46
107	17	Mart.	23 59 30,82	1 41 24,41	1 41 53,66	5 13	6 47
108	18	Merc.	23 59 16,90	1 45 7,00	1 45 50,22	5 11	6 49
109	19	Giov.	23 59 3,39	1 48 50,01	1 49 46,77	5 10	6 50
110	20	Ven.	23 58 50,30	1 52 33,44	1 53 43,32	5 8	6 52
111	21	Sab.	23 58 37,65	1 56 17,31	1 57 39,87	5 7	6 53
112	22	Dom.	23 58 25,44	2 0 1,62	2 1 36,43	5 5	6 54
113	23	Lun.	23 58 13,69	2 3 46,38	2 5 32,98	5 3	6 55
114	24	Mart.	23 58 2,40	2 7 31,62	2 9 29,54	5 2	6 58
115	25	Merc.	23 57 51,58	2 11 17,31	2 13 26,09	5 1	6 59
116	26	Giov.	23 57 41,23	2 15 3,49	2 17 22,64	5 0	7 0
117	27	Ven.	23 57 31,36	2 18 50,15	2 21 19,20	4 58	7 2
118	28	Sab.	23 57 21,98	2 22 37,31	2 25 15,75	4 57	7 3
119	29	Dom.	23 57 17,10	2 26 24,95	2 29 12,31	4 56	7 4
120	30	Lun.	23 57 4,72	2 30 13,10	2 33 8,86	4 54	7 6

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1h nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	0 11 37 36,4	4 36 8,6	+ 0,97	− 0,45	0,0000425
2	0 12 36 42,0	4 59 13,1	0,96	0,35	0,0001651
3	0 13 35 45,3	5 22 12,1	0,96	0,22	0,0002879
4	0 14 34 46,2	5 45 5,4	0,95	− 0,09	0,0004110
5	0 15 33 44,8	6 7 52,6	0,95	+ 0,04	0,0005343
6	0 16 32 41,4	6 30 33,3	0,94	0,18	0,0006579
7	0 17 31 36,0	6 53 7,5	0,94	0,30	0,0007818
8	0 18 30 28,3	7 15 34,6	0,93	0,40	0,0009059
9	0 19 29 18,6	7 37 54,3	0,93	0,48	0,0010303
10	0 20 28 7,1	8 0 6,4	0,92	0,55	0,0011549
11	0 21 26 53,8	8 22 10,5	0,91	0,58	0,0012795
12	0 22 25 38,7	8 44 6,5	0,91	0,59	0,0014041
13	0 23 24 21,9	9 5 53,8	0,90	0,56	0,0015287
14	0 24 23 3,3	9 27 31,9	0,90	0,50	0,0016530
15	0 25 21 43,0	9 49 0,8	0,89	0,41	0,0017768
16	0 26 20 21,0	10 10 20,5	0,88	0,29	0,0019000
17	0 27 18 57,4	10 31 30,0	0,87	0,17	0,0020223
18	0 28 17 32,3	10 52 29,2	0,87	+ 0,04	0,0021437
19	0 29 16 5,3	11 13 17,7	0,86	− 0,10	0,0022641
20	1 0 14 36,7	11 33 55,4	0,85	0,22	0,0023833
21	1 1 13 6,3	11 54 21,7	0,84	0,33	0,0025010
22	1 2 11 34,1	12 14 36,4	0,83	0,43	0,0026173
23	1 3 10 0,0	12 34 39,0	0,83	0,51	0,0027323
24	1 4 8 24,0	12 54 29,2	0,82	0,56	0,0028459
25	1 5 6 46,0	13 14 6,6	0,81	0,59	0,0029581
26	1 6 5 6,1	13 33 31,1	0,80	0,57	0,0030688
27	1 7 3 24,1	13 52 42,2	0,79	0,52	0,0031781
28	1 8 1 40,1	14 11 39,3	0,78	0,44	0,0032861
29	1 8 59 54,0	14 30 22,4	0,77	0,35	0,0033929
30	1 9 58 5,9	14 48 51,2	0,76	− 0,24	0,0034986

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Dom.	3 26 58 36	4 3 48 59	3 41 46A	3 13 45A	7 31
2	Lun.	4 10 35 43	4 17 18 55	2 43 16	2 10 47	8 24
3	Mart.	4 23 58 39	5 0 35 4	1 36 48	1 1 49	9 15
4	Merc.	5 7 8 15	5 13 38 19	0 26 19	0 9 13B	10 4
5	Giov.	5 20 5 21	5 26 29 25	0 44 20B	1 18 34	10 51
6	Ven.	6 2 50 36	6 9 8 57	1 51 32	2 22 50	11 36
7	Sab.	6 15 24 34	6 21 37 30	2 52 9	3 19 10	12 21
8	Dom.	6 27 47 51	7 3 55 44	3 43 37	4 5 18	13 6
9	Lun.	7 10 1 18	7 16 4 42	4 24 0	4 39 36	13 51
10	Mart.	7 22 6 8	7 28 5 50	4 51 59	5 1 6	14 37
11	Merc.	8 4 4 5	8 10 1 13	5 6 52	5 9 17	15 23
12	Giov.	8 15 57 36	8 21 53 37	5 8 23	5 4 9	16 10
13	Ven.	8 27 49 45	9 3 46 28	4 56 39	4 45 57	16 57
14	Sab.	9 9 44 21	9 15 43 56	4 32 6	4 15 14	17 46
15	Dom.	9 21 45 48	9 27 50 33	3 55 25	3 32 47	18 34
16	Lun.	10 3 58 48	10 10 11 10	3 7 29	3 39 44	19 22
17	Mart.	10 16 28 15	10 22 50 35	2 9 42	1 37 40	20 11
18	Merc.	10 29 18 42	11 5 53 3	1 3 55	0 28 48	21 0
19	Giov.	11 12 33 57	11 19 21 40	0 7 16A	0 43 48A	21 50
20	Ven.	11 26 16 16	0 3 17 40	1 20 17	1 56 5	22 42
21	Sab.	0 10 25 36	0 17 39 35	2 30 35	3 3 8	23 36
22	Dom.	0 24 58 58	1 2 22 54	3 33 1	3 59 38	* *
23	Lun.	1 9 50 22	1 17 20 16	4 22 20	4 40 39	0 31
24	Mart.	1 24 51 22	2 2 22 30	4 54 8	5 2 32	1 29
25	Merc.	2 9 52 26	2 17 20 4	5 5 43	5 3 41	2 29
26	Giov.	2 24 44 26	3 2 4 41	4 56 33	4 44 35	3 29
27	Ven.	3 9 20 11	3 16 30 26	4 28 9	4 7 40	4 29
28	Sab.	3 23 35 10	4 0 34 15	3 43 37	3 16 31	5 26
29	Dom.	4 7 27 42	4 14 15 39	2 46 54	2 15 16	6 21
30	Lun.	4 20 58 20	4 27 36 4	1 42 10	1 8 5	7 13

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	8 11	16 34B	58 19	58 4	31 50	31 42	0 6	14 49
2	9 8	14 1	57 49	57 34	31 34	31 25	1 10	15 30
3	10 3	10 43	57 19	57 4	31 17	31 9	2 16	16 5
4	10 56	6 54	56 49	56 34	31 1	30 53	3 22	16 38
5	11 47	2 48	56 20	56 6	30 45	30 37	4 26	17 8
6	12 37	1 22A	55 52	55 38	30 30	30 22	5 28	17 36
7	13 26	5 24	55 24	55 11	30 14	30 7	6 30	18 4
8	14 15	9 9	54 59	54 47	30 1	29 54	7 32	18 33
9	15 4	12 25	54 36	54 27	29 48	29 43	8 32	19 4
10	15 53	15 7	54 19	54 13	29 39	29 36	9 31	19 38
11	16 44	17 6	54 8	54 5	29 33	29 31	10 28	20 15
12	17 35	18 18	54 4	54 6	29 31	29 31	11 22	20 57
13	18 26	18 38	54 9	54 15	29 33	29 37	12 11	21 43
14	19 18	18 6	54 24	54 35	29 42	29 48	12 58	22 35
15	20 11	16 40	54 49	55 5	29 55	30 4	13 39	23 32
16	21 3	14 22	55 23	55 43	30 14	30 25	14 17	* *
17	21 56	11 16	56 6	56 30	30 37	30 50	14 53	0 32
18	22 49	7 28	56 56	57 23	31 4	31 19	15 26	1 35
19	23 44	3 6	57 51	58 18	31 34	31 49	15 59	2 43
20	0 39	1 34B	58 45	59 11	32 4	32 18	16 32	3 51
21	1 37	6 18	59 35	59 56	32 31	32 43	17 6	5 2
22	* *	* *	60 14	60 28	32 53	33 1	17 41	6 16
23	2 37	10 42	60 38	60 45	33 7	33 10	18 22	7 30
24	3 39	14 26	60 47	60 45	33 11	33 10	19 8	8 46
25	4 42	17 7	60 39	60 30	33 7	33 2	19 59	9 57
26	5 47	18 32	60 17	60 1	32 55	32 46	20 57	11 1
27	6 51	18 35	59 43	59 23	32 36	32 25	21 58	12 0
28	7 52	17 21	59 2	58 40	32 13	32 1	23 3	12 50
29	8 51	15 3	58 18	57 56	31 49	31 37	* *	13 32
30	9 47	11 55	57 34	57 13	31 25	31 14	0 9	14 9

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$10^h\ 36'$	Occidente
1	.3 .2	○	1. .4
2	.1 .3	○	.2 .4
3		○	1. 2. .3 4.
4	○1 2.	○	.3 4.
5	1. .2	○	3. 4.
6	3.	○	.1 .2,4.
7	3. 1. 2.	○	4.
8	.3 4♂2	○	1.
9	4. .1 .3	○	.2
10	4.	○	1. 2. .3
11	.4 2. .1	○	.3
12	.4 .2,1.	○	3.
13	.4 3.	○	.1 .2
14	●2 3♂4 1.	○	
15	.3 .2 .4	○	.1
16	1..3	○	.2.4
17		○	1. 2♂3 .4
18	2. .1	○	.3 .4
19	●1 .2	○	3. .4
20	●3	○	.1 .2 4.
21	3. 1.	○	2. 4.
22	.3 2.	○	.1 4.
23	1♂3	○	.2 4.
24	4.	○	1♂3,2.
25	4. 2. .1	○	.3
26	4. .2	○	1. 3.
27	4.	○	3. .2 1○
28	.4 3. 1.	○	2.
29	.4 3. 2.	○	.1
30	.4 .3,1.	○	2○

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	h	′
6	Luna piena	19	43
14	Ultimo quarto	23	7
21	Luna nuova	20	13
28	Primo quarto	12	0

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	h	′
1	4 ρ ♌ 4.ª	0	15
1	63 ψ ♌ 4. 5.ª	15	19
1	77 σ ♌ 4.ª	23	8
2	5 β ♍ 3. 4.ª	15	4
3	15 η ♍ 5.ª	5	47
3	29 γ ♍ 4.ª	16	4
5	98 κ ♍ 4.ª	15	34
6	15 ξ² ♎ 5.ª	12	34
7	38 γ ♎ 4. 5.ª	8	36
7	44 η ♎ 4. 5.ª	13	3
8	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	11	51
8	24 m ♏ 5.ª	17	9
11	43 d ♐ 5.ª	19	58
11	44 ρ¹ ♐ 3.ª	22	11
16	73 λ ♒ 4.ª	3	26
16	90 φ ♒ 5.ª	13	30
17	♂	16	7
18	♄	0	44
19	98 μ ♓ 5.ª	3	54
19	65 ξ¹ Balena 5.ª	21	53
20	87 μ Balena 4.ª	10	37
22	54 γ ♉ 3. 4.ª	0	21
22	64 δ² ♉ 4. 5.ª	2	25
22	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	6	39
22	104 m ♉ 5.ª	18	45
28	47 ρ ♌ 4.ª	6	16
28	63 ψ ♌ 4. 5.ª	21	7
29	77 σ ♌ 4.ª	4	51
29	5 β ♍ 3. 4.ª	20	28
30	15 η ♍ 3. 4.ª	11	20

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.			
	I. Satellite.			
	h	′	″	
1	22	19	45	em.
3	16	48	29	
* 5	11	17	16	
7	5	45	59	
9	0	14	48	
10	18	43	32	
12	13	12	19	
14	7	41	2	
16	2	9	52	
17	20	38	36	
19	15	7	23	
* 21	9	36	6	
23	4	4	56	
24	22	33	40	
26	17	2	28	
* 28	11	31	11	
30	6	0	0	
	II. Satellite.			
* 2	8	51	12	em.
5	22	9	7	
* 9	11	27	25	
13	0	45	17	
16	14	3	28	
20	3	21	17	
23	16	39	20	
27	5	57	6	
30	19	15	1	
	III. Satellite.			
4	20	32	19	imm.
5	0	4	57	em.
12	0	31	32	imm.
12	4	4	1	em.
19	4	30	40	imm.
* 19	8	2	58	em.
* 26	8	30	1	imm.
26	12	2	7	em.
	IV. Satellite.			
* 11	10	50	45	imm.
11	15	34	0	em.
28	4	53	20	imm.
* 28	9	35	7	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
121	1	Mart.	23 56 56,85	2 34 1,76	2 37 5,41	4 53	7 7
122	2	Merc.	23 56 49,51	2 37 50,96	2 41 1,37	4 52	7 8
123	3	Giov.	23 56 42,70	2 41 40,68	2 44 58,52	4 50	7 10
124	4	Ven.	23 56 36,42	2 45 30,93	2 48 55,08	4 49	7 11
125	5	Sab.	23 56 30,68	2 49 21,73	2 52 51,63	4 48	7 12
126	6	Dom.	23 56 25,50	2 53 13,09	2 56 48,18	4 46	7 14
127	7	Lun.	23 56 20,88	2 57 5,01	3 0 44,74	4 45	7 15
128	8	Mart.	23 56 16,83	3 0 57,51	3 4 41,29	4 44	7 16
129	9	Merc.	23 56 13,35	3 4 50,57	3 8 37,85	4 43	7 17
130	10	Giov.	23 56 10,46	3 8 44,23	3 12 34,40	4 41	7 19
131	11	Ven.	23 56 8,15	3 12 38,47	3 16 30,95	4 40	7 20
132	12	Sab.	23 56 6,43	3 16 33,30	3 20 27,51	4 39	7 21
133	13	Dom.	23 56 5,31	3 20 28,73	3 24 24,06	4 38	7 22
134	14	Lun.	23 56 4,78	3 24 24,76	3 28 20,62	4 37	7 23
135	15	Mart.	23 56 4,85	3 28 21,38	3 32 17,17	4 36	7 24
136	16	Merc.	23 56 5,50	3 32 18,60	3 36 13,73	4 34	7 26
137	17	Giov.	23 56 6,74	3 36 16,38	3 40 10,28	4 33	7 27
138	18	Ven.	23 56 8,56	3 40 14,76	3 44 6,84	4 32	7 28
139	19	Sab.	23 56 10,96	3 44 13,72	3 48 3,39	4 31	7 29
140	20	Dom.	23 56 13,91	3 48 13,24	3 51 59,95	4 30	7 30
141	21	Lun.	23 56 17,42	3 52 13,32	3 55 56,51	4 29	7 31
142	22	Mart.	23 56 22,47	3 56 13,93	3 59 53,06	4 28	7 32
143	23	Merc.	23 56 26,04	4 0 15,08	4 3 49,62	4 27	7 33
144	24	Giov.	23 56 31,13	4 4 16,73	4 7 46,17	4 26	7 34
145	25	Ven.	23 56 36,72	4 8 18,89	4 11 42,73	4 25	7 35
146	26	Sab.	23 56 42,80	4 12 21,55	4 15 39,29	4 24	7 36
147	27	Dom.	23 56 49,56	4 16 24,69	4 19 35,84	4 23	7 37
148	28	Lun.	23 56 56,37	4 20 28,27	4 23 32,40	4 22	7 38
149	29	Mart.	23 57 3,82	4 24 32,28	4 27 28,95	4 21	7 39
150	30	Merc.	23 57 11,69	4 28 36,73	4 31 25,51	4 20	7 40
151	31	Giov.	23 57 19,97	4 32 41,60	4 35 22,07	4 19	7 41

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	1 10 56 15,8	15 7 5,4	+ 0,75	− 0,12	0,0036032
2	1 11 54 23,8	15 25 4,4	0,74	+ 0,02	0,0037069
3	1 12 52 29,8	15 42 48,3	0,73	0,15	0,0038099
4	1 13 50 33,8	16 0 16,4	0,72	0,27	0,0039121
5	1 14 48 36,0	16 17 28,6	0,71	0,38	0,0040136
6	1 15 46 36,4	16 34 24,7	0,70	0,46	0,0041145
7	1 16 44 35,2	16 51 4,3	0,69	0,53	0,0042148
8	1 17 42 32,3	17 7 27,1	0,67	0,57	0,0043144
9	1 18 40 28,0	17 23 32,8	0,66	0,57	0,0044132
10	1 19 38 22,2	17 39 21,2	0,65	0,55	0,0045111
11	1 20 36 15,1	17 54 52,2	0,64	0,49	0,0046082
12	1 21 34 6,8	18 10 5,1	0,63	0,41	0,0047043
13	1 22 31 57,1	18 24 59,7	0,61	0,31	0,0047994
14	1 23 29 46,3	18 39 35,9	0,60	0,19	0,0048932
15	1 24 27 34,4	18 53 53,6	0,59	+ 0,06	0,0049856
16	1 25 25 21,4	19 7 52,1	0,58	− 0,08	0,0050765
17	1 26 23 7,2	19 21 31,2	0,56	0,21	0,0051656
18	1 27 20 51,8	19 34 50,7	0,55	0,33	0,0052529
19	1 28 18 35,3	19 47 50,5	0,53	0,43	0,0053382
20	1 29 16 17,7	20 0 30,2	0,52	0,51	0,0054214
21	2 0 13 59,0	20 12 49,3	0,51	0,57	0,0055024
22	2 1 11 39,0	20 24 47,7	0,49	0,60	0,0055812
23	2 2 9 17,7	20 36 25,2	0,48	0,59	0,0056577
24	2 3 6 55,2	20 47 41,6	0,46	0,55	0,0057321
25	2 4 4 31,3	20 58 36,5	0,45	0,50	0,0058044
26	2 5 2 6,1	21 9 9,7	0,43	0,40	0,0058745
27	2 5 59 39,6	21 19 21,1	0,42	0,29	0,0059424
28	2 6 57 11,6	21 29 10,2	0,40	0,17	0,0060083
29	2 7 54 42,3	21 38 37,0	0,39	− 0,04	0,0060724
30	2 8 52 11,6	21 47 41,3	0,37	+ 0,10	0,0061347
31	2 9 49 39,7	21 56 23,0	0,35	+ 0,23	0,0061952

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	5 4 9 10	5 10 38 0	0 33 31A	0 1 6A	8 2
2	Merc.	5 17 2 56	5 23 24 18	0 35 20B	1 8 44B	8 48
3	Giov.	5 29 42 26	6 5 57 40	1 41 2	2 11 48	9 34
4	Ven.	6 12 10 16	6 18 20 29	2 40 43	3 7 31	10 19
5	Sab.	6 24 28 33	7 0 34 39	3 31 57	3 53 46	11 3
6	Dom.	7 6 38 59	7 12 41 41	4 12 47	4 28 51	11 47
7	Lun.	7 18 42 56	7 24 42 52	4 41 48	4 51 34	12 33
8	Mart.	8 0 41 38	8 6 39 23	4 58 4	5 1 18	13 19
9	Merc.	8 12 36 17	8 18 32 35	5 1 13	4 57 52	14 5
10	Giov.	8 24 28 31	9 0 24 23	4 51 18	4 41 34	14 53
11	Ven.	9 6 20 30	9 12 17 15	4 28 47	4 13 2	15 41
12	Sab.	9 18 15 5	9 24 14 27	3 54 28	3 33 13	16 28
13	Dom.	10 0 15 53	10 6 19 55	3 9 28	2 43 23	17 16
14	Lun.	10 12 27 7	10 18 38 6	2 15 11	1 45 7	18 3
15	Mart.	10 24 53 27	11 1 13 47	1 13 25	0 40 24	18 51
16	Merc.	11 7 39 42	11 14 11 44	0 6 23	0 28 14A	19 39
17	Giov.	11 20 50 24	11 27 36 5	1 3 2A	1 37 32	20 29
18	Ven.	0 4 29 5	0 11 29 32	2 11 12	2 43 29	21 20
19	Sab.	0 18 37 22	0 25 52 16	3 13 46	3 41 23	22 14
20	Dom.	1 3 13 45	1 10 41 2	4 5 44	4 26 12	23 11
21	Lun.	1 18 13 8	1 25 48 52	4 42 16	4 53 29	* *
22	Mart.	2 3 26 55	2 11 5 50	4 59 31	5 0 12	0 10
23	Merc.	2 18 44 11	2 26 20 34	4 55 31	4 45 37	1 12
24	Giov.	3 3 53 40	3 11 22 22	4 30 45	4 11 22	2 14
25	Ven.	3 18 45 43	3 26 2 59	3 47 58	3 21 6	3 15
26	Sab.	4 3 13 40	4 10 17 32	2 51 25	2 19 30	4 13
27	Dom.	4 17 14 31	4 24 4 43	1 45 59	1 11 28	5 8
28	Lun.	5 0 48 23	5 7 25 53	0 36 28	0 1 30	5 59
29	Mart.	5 13 57 37	5 20 24 6	0 32 59B	1 6 35B	6 47
30	Merc.	5 26 45 49	6 3 3 17	1 38 55	2 9 39	7 33
31	Giov.	6 9 16 57	6 15 27 20	2 38 30	3 5 12	8 18

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	10 40	8 14B	56 58	56 34	31 3	30 53	1 14	14 42
2	11 30	4 12	56 16	56 0	30 43	30 34	2 17	15 11
3	12 21	0 3	55 45	55 30	30 26	30 18	3 20	15 40
4	13 9	4 2A	55 16	55 3	30 10	30 3	4 22	16 8
5	13 58	7 53	54 51	54 40	29 56	29 50	5 23	16 35
6	14 46	11 22	54 30	54 22	29 45	29 41	6 23	17 5
7	15 35	14 18	54 15	54 9	29 37	29 34	7 23	17 38
8	16 25	16 35	54 4	54 0	29 31	29 29	8 21	18 13
9	17 16	18 7	53 58	53 57	29 28	29 27	9 16	18 52
10	18 8	18 48	53 58	54 1	29 27	29 29	10 7	19 38
11	18 59	18 36	54 6	54 13	29 32	29 36	10 55	20 28
12	19 51	17 31	54 22	54 33	29 41	29 47	11 38	21 21
13	20 43	15 35	54 46	55 1	29 54	30 2	12 23	22 20
14	21 35	12 51	55 19	55 39	30 12	30 23	12 52	23 20
15	22 26	9 24	56 1	56 24	30 35	30 48	13 24	* *
16	23 19	5 21	56 49	57 16	31 2	31 16	13 55	0 25
17	0 12	0 53	57 44	58 13	31 31	31 47	14 28	1 32
18	1 8	3 49B	58 42	59 11	32 2	32 18	15 0	2 40
19	2 6	8 26	59 39	60 4	32 35	32 47	15 34	3 50
20	3 6	12 37	60 26	60 45	32 59	33 9	16 13	5 4
21	* *	* *	61 0	61 10	33 17	33 23	16 55	6 18
22	4 10	15 58	61 16	61 17	33 26	33 27	17 44	7 32
23	5 16	18 8	61 13	61 4	33 25	33 20	18 41	8 43
24	6 22	18 54	60 51	60 34	33 13	33 4	19 44	9 47
25	7 27	18 13	60 14	59 51	32 53	32 40	20 50	10 42
26	8 30	16 17	59 26	58 59	32 26	32 12	21 59	11 30
27	9 28	13 19	58 32	58 5	31 57	31 42	23 5	12 10
28	10 24	9 43	57 39	57 13	31 28	31 14	* *	12 44
29	11 16	5 42	56 49	56 26	31 1	30 48	0 11	13 15
30	12 6	1 31	56 4	55 44	30 36	30 25	1 14	13 44
31	12 54	2 38	55 26	55 10	30 15	30 7	2 15	14 13

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$10^h\ 10'$	*Occidente*
1	.4	○	.3 1. 2.
2	1☌2 .4	○	.3
3	.2	○	1. .4 3.
4	.1	○	3. .2 .4
5	3. 1.	○	2. .4
6	3. 2.	○	.1 .4
7	.3 1. .2	○	4.
8		○	.3 .1 .2 4.
9	.1 2.	○	.3,4.
10	.2	○	1.4. 3.
11	4. .1	○	2☌3
12	●1 4. 3.	○	2.
13	4. 3. 2.	○	.1
14	4. .3 1. .2	○	
15	.4 .3	○	.1 .2
16	.4 1.	○	.3 2●
17	.4 .2	○	1. .3
18	.4 .1	○	.2, 3.
19	3.	○	1. 2. 4○
20	○1 3. 2.	○	.4
21	.3 .2,1.	○	.4
22	.3	○	.1 .2 .4
23	1.	○	2. .3 .4
24	2.	○	1. .3 4.
25	.1	○	.2 3. 4.
26	3.	○	1. 2. 4.
27	3. 2. .1	○	4.
28	.3 4☌2 1.	○	
29	4. .3	○	.1 .2
30	4. 1.	○	2. .3
31	.4 2.	○	1. .3

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Luna piena	11^h 3′
13	Ultimo quarto	11 1
20	Luna nuova	2 56
26	Primo quarto	23 20

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	15 ξ² ♎ 5.ª	18 31
3	38 γ ♎ 4. 5.ª	14 39
3	44 η ♎ 4. 5.ª	19 5
4	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	18 15
4	24 m ♏ 5.ª	23 12
8	43 d ♐ 5.ª	1 59
8	44 ρ¹ ♐ 5.ª	4 16
12	73 λ ♒ 4.ª	10 26
12	99 φ ♒ 5.ª	20 49
14	♄	12 45
15	98 μ ♓ 5.ª	13 6
15	106 γ ♓ 5.ª	17 12
15	65 ξ¹ Balena 5.ª	7 37
16	87 μ Balena 4.ª	20 40
18	54 γ ♉ 3. 4.ª	11 3
18	64 δ² ♉ 4. 5.ª	13 8
18	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	17 21
19	104 m ♉ 5.ª	5 27
23	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	2 44
24	47 ρ ♌ 4.ª	14 4
25	63 ψ ♌ 4. 5.ª	4 51
25	77 σ ♌ 4.ª	12 3
26	5 β ♍ 3. 4.ª	3 30
26	15 η ♍ 3. 4.ª	17 57
27	29 γ ♍ 4.ª	4 5
30	15 ξ² ♎ 5.ª	0 29
30	39 γ ♎ 4. 5.ª	20 36

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	0 28 44 em.
2	18 57 32
4	13 26 15
6	7 55 4
8	2 23 48
9	20 52 36
11	15 21 18
* 13	9 50 7
15	4 18 46
16	22 47 38
18	17 16 19
20	11 45 8
22	6 13 51
24	0 42 39
25	19 11 20
27	13 40 8
* 29	8 8 50
	II. Satellite.
3	8 52 43 em.
6	21 50 32
10	11 8 9
14	0 25 51
17	13 43 24
21	3 0 58
24	16 18 26
28	5 35 54
	III. Satellite.
2	12 29 25 imm.
2	16 1 19 em.
9	16 29 26 imm.
9	20 1 7 em.
16	20 28 53 imm.
16	23 54 21 em.
24	0 28 28 imm.
24	3 59 41 em.
	IV. Satellite.
13	22 55 17 imm.
14	3 55 20 em.
30	16 56 59 imm.
30	21 35 1 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
152	1	Ven.	23 57 28,65	4 36 46,86	4 39 18,63	4 19	7 41
153	2	Sab.	23 57 37,71	4 40 52,50	4 43 15,18	4 18	7 42
154	3	Dom.	23 57 47,14	4 44 58,52	4 47 11,74	4 18	7 42
155	4	Lun.	23 57 56,93	4 49 4,91	4 51 8,30	4 17	7 43
156	5	Mart.	23 58 7,07	4 53 11,63	4 55 4,86	4 16	7 44
157	6	Merc.	23 58 17,57	4 57 18,69	4 59 1,41	4 16	7 44
158	7	Giov.	23 58 28,35	5 1 26,07	5 2 57,97	4 15	7 45
159	8	Ven.	23 58 39,43	5 5 33,74	5 6 54,53	4 15	7 45
160	9	Sab.	23 58 50,79	5 9 41,68	5 10 51,08	4 14	7 46
161	10	Dom.	23 59 2,42	5 13 49,90	5 14 47,64	4 14	7 46
162	11	Lun.	23 59 14,30	5 17 58,37	5 18 44,20	4 14	7 46
163	12	Mart.	23 59 26,41	5 22 7,08	5 22 40,76	4 13	7 47
164	13	Merc.	23 59 38,72	5 26 15,97	5 26 37,31	4 13	7 47
165	14	Giov.	23 59 51,22	5 30 25,07	5 30 35,87	4 13	7 47
166	15	Ven.	0 0 3,89	5 34 34,35	5 34 30,43	4 13	7 47
167	16	Sab.	0 0 16,69	5 38 43,72	5 38 26,98	4 13	7 47
168	17	Dom.	0 0 29,61	5 42 53,23	5 42 23,54	4 12	7 48
169	18	Lun.	0 0 42,61	5 47 2,83	5 46 20,10	4 12	7 48
170	19	Mart.	0 0 55,67	5 51 12,48	5 50 16,66	4 12	7 48
171	20	Merc.	0 1 8,76	5 55 22,16	5 54 13,22	4 12	7 48
172	21	Giov.	0 1 21,84	5 59 31,84	5 58 9,78	4 12	7 48
173	22	Ven.	0 1 34,91	6 3 41,50	6 2 6,33	4 12	7 48
174	23	Sab.	0 1 47,92	6 7 51,10	6 6 2,89	4 12	7 48
175	24	Dom.	0 2 0,85	6 12 0,63	6 9 59,45	4 12	7 48
176	25	Lun.	0 2 13,67	6 16 10,04	6 13 56,00	4 12	7 48
177	26	Mart.	0 2 26,34	6 20 19,32	6 17 52,56	4 13	7 47
178	27	Merc.	0 2 38,86	6 24 28,42	6 21 49,12	4 13	7 47
179	28	Giov.	0 2 51,21	6 28 37,35	6 25 45,67	4 13	7 47
180	29	Ven.	0 3 3,34	6 32 46,08	6 29 42,23	4 13	7 47
181	30	Sab.	0 3 15,24	6 36 54,56	6 33 38,79	4 13	7 47

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	2 10 47 6,4	22 4 41,7	+ 0,34	+ 0,34	0,0062543
2	2 11 44 31,9	22 12 37,4	0,32	0,44	0,0063120
3	2 12 41 56,4	22 20 10,0	0,31	0,50	0,0063684
4	2 13 39 19,8	22 27 19,2	0,29	0,53	0,0064234
5	2 14 36 42,1	22 34 4,8	0,27	0,55	0,0064771
6	2 15 34 3,7	22 40 26,8	0,26	0,53	0,0065296
7	2 16 31 24,6	22 46 25,0	0,24	0,48	0,0065808
8	2 17 28 44,7	22 51 59,2	0,23	0,40	0,0066307
9	2 18 26 4,1	22 57 9,4	0,21	0,30	0,0066791
10	2 19 23 23,0	23 1 55,4	0,19	0,18	0,0067261
11	2 20 20 41,5	23 6 17,1	0,17	+ 0,05	0,0067715
12	2 21 17 59,6	23 10 14,4	0,16	− 0,08	0,0068152
13	2 22 15 17,4	23 13 47,4	0,14	0,21	0,0068570
14	2 23 12 34,9	23 16 55,9	0,12	0,33	0,0068969
15	2 24 9 52,1	23 19 39,7	0,10	0,43	0,0069347
16	2 25 7 9,1	23 21 58,8	0,09	0,51	0,0069702
17	2 26 4 25,8	23 23 53,3	0,07	0,57	0,0070033
18	2 27 1 42,1	23 25 23,0	0,06	0,60	0,0070339
19	2 27 58 58,1	23 26 27,9	0,04	0,60	0,0070621
20	2 28 56 13,8	23 27 7,9	+ 0,02	0,59	0,0070876
21	2 29 53 29,1	23 27 23,1	0,00	0,53	0,0071105
22	3 0 50 44,1	23 27 13,5	− 0,01	0,44	0,0071308
23	3 1 47 58,7	23 26 39,2	0,03	0,34	0,0071485
24	3 2 45 12,9	23 25 40,0	0,05	0,21	0,0071637
25	3 3 42 26,4	23 24 15,9	0,07	− 0,07	0,0071764
26	3 4 39 39,6	23 22 27,1	0,09	+ 0,06	0,0071867
27	3 5 36 52,1	23 20 13,8	0,10	0,18	0,0071948
28	3 6 34 4,3	23 17 35,9	0,12	0,29	0,0072008
29	3 7 31 16,2	23 14 33,5	0,14	0,39	0,0072048
30	3 8 28 27,5	23 11 6,7	− 0,16	0,48	0,0072069

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	6 21 34 51	6 27 39 55	3 29 31B	3 51 16B	9 2
2	Sab.	7 3 42 56	7 9 44 16	4 10 14	4 26 18	9 46
3	Dom.	7 15 44 12	7 21 43 0	3 39 20	4 49 14	10 30
4	Lun.	7 27 40 54	8 3 38 8	4 55 55	4 59 21	11 16
5	Mart.	8 9 34 53	8 15 31 18	4 59 31	4 56 25	12 2
6	Merc.	8 21 27 33	8 27 23 49	4 50 5	4 40 35	12 50
7	Giov.	9 3 20 16	9 9 17 6	4 28 1	4 12 30	13 38
8	Ven.	9 15 14 35	9 21 12 58	3 54 10	3 33 11	14 25
9	Sab.	9 27 12 36	10 3 13 48	3 9 44	2 44 1	15 13
10	Dom.	10 9 16 57	10 15 22 31	2 16 18	1 46 48	16 0
11	Lun.	10 21 30 58	10 27 42 46	1 15 48	0 43 36	16 47
12	Mart.	11 3 58 26	11 10 18 29	0 10 30	0 23 7A	17 34
13	Merc.	11 16 43 29	11 23 13 56	0 56 54A	1 30 25	18 21
14	Giov.	11 29 50 22	0 6 33 12	2 3 15	2 34 54	19 10
15	Ven.	0 13 22 48	0 20 19 24	3 4 51	3 32 36	20 1
16	Sab.	0 27 23 7	1 4 33 50	3 57 34	4 19 13	20 54
17	Dom.	1 11 51 15	1 19 14 49	4 37 2	4 50 25	21 51
18	Lun.	1 26 43 47	2 4 17 9	4 59 4	5 2 35	22 51
19	Mart.	2 11 53 44	2 19 32 13	5 0 48	4 53 39	23 54
20	Merc.	2 27 11 12	3 4 49 15	4 41 14	4 23 48	* *
21	Giov.	3 12 24 59	3 19 57 5	4 1 46	3 35 38	0 56
22	Ven.	3 27 24 25	4 4 46 5	3 6 3	2 23 40	1 58
23	Sab.	4 14 1 22	4 19 9 45	1 59 12	1 23 21	2 56
24	Dom.	4 26 11 0	5 3 5 4	0 46 46	0 10 5	3 51
25	Lun.	5 9 52 4	5 16 32 15	0 26 9B	1 1 26B	4 42
26	Mart.	5 23 6 1	5 29 33 48	1 35 21	2 7 32	5 30
27	Merc.	6 5 56 7	6 12 13 29	2 37 40	3 5 28	6 16
28	Giov.	6 18 26 30	6 24 35 41	3 20 44	3 53 17	7 0
29	Ven.	7 0 41 36	7 6 44 45	4 12 57	4 29 37	7 44
30	Sab.	7 12 45 41	7 18 44 50	4 43 10	4 53 33	8 29

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	13 43	6 36A	54 55	54 42	29 59	29 52	3 16	14 41
2	14 31	10 13	54 31	54 22	29 46	29 41	4 17	15 9
3	15 19	13 22	54 14	54 7	29 36	29 32	5 15	15 40
4	16 9	15 56	54 2	53 58	29 29	29 27	6 14	16 14
5	16 59	17 46	53 56	53 55	29 26	29 26	7 10	16 51
6	17 51	18 47	53 56	53 57	29 26	29 27	8 4	17 35
7	18 43	18 55	54 0	54 4	29 29	29 31	8 53	18 24
8	19 34	18 10	54 10	54 18	29 34	29 38	9 38	19 15
9	20 26	16 32	54 27	54 38	29 43	29 49	10 19	20 12
10	21 17	14 6	54 51	55 5	29 56	30 4	10 55	21 12
11	22 8	10 56	55 21	55 39	30 13	30 23	11 28	22 13
12	22 59	7 11	55 58	56 19	30 33	30 44	11 59	23 17
13	23 51	2 57	56 42	57 7	30 57	31 11	12 29	* *
14	0 44	1 33B	57 33	58 0	31 25	31 40	13 0	0 23
15	1 38	6 8	58 28	58 55	31 55	32 10	13 31	1 31
16	2 36	10 30	59 22	59 47	32 24	32 38	14 6	2 40
17	3 37	14 18	60 11	60 32	32 51	33 2	14 45	3 52
18	4 41	17 9	60 50	61 4	33 12	33 20	15 29	5 6
19	5 48	17 44	61 13	61 18	33 25	33 28	16 23	6 19
20	* *	* *	61 18	61 13	33 28	33 25	17 22	7 27
21	6 55	18 50	61 3	66 49	33 20	33 12	18 29	8 28
22	8 0	17 30	60 31	60 9	33 2	32 50	19 38	9 21
23	9 3	14 56	59 44	59 17	32 36	32 21	20 49	10 6
24	10 1	11 29	58 49	58 20	32 6	31 50	21 58	10 44
25	10 57	7 30	57 51	57 23	31 35	31 19	23 3	11 18
26	11 49	3 15	56 56	56 30	31 4	30 50	* *	11 49
27	12 38	1 11A	56 6	55 44	30 37	30 25	0 6	12 18
28	13 27	5 7	55 24	55 6	30 14	30 5	1 7	12 45
29	14 15	8 55	54 50	54 36	29 56	29 48	2 9	13 13
30	15 4	12 16	54 24	54 15	29 42	29 37	3 9	13 43

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	9h 20′	Occidente
1	.4 1. .2	○	3.
2	.4	○	1. 2. 3●
3	.4 3. 2☌1	○	
4	3. 2☌4	○	1.
5	.3	○	4☌1 .2
6	1.	○	2☌3 .4
7	2.	○	.1 .3 .4
8	1. .2	○	3. .4
9		○	3. 1. .2 .4
10	3. .1,2.	○	4.
11	3. .2	○	1. 4.
12	o1 .3	○	.2 4.
13	1.	○	4. .3,2.
14	4☌2	○	.1 .3
15	4. 1. .2	○	3.
16	4.	○	3. 1. .2
17	4. 3. .1	○	2.
18	.4 3. 2.	○	1.
19	.4 .3 .1	○	.2
20	●1 .4	○	2. 3o
21	2☌4	○	.1 .3
22	.2,1.	○	.4 .3
23		○	3☌1.2 .4
24	3☌1	○	2. .4
25	3. .2	○	1. .4
26	o2 .3 .1	○	4.
27	.3	○	1. 2. 4.
28	2.	○	.1 .3 4.
29	.2 1.	○	4. .3
30	●4	○	.1,3☌2

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Luna piena	$2^h\ 5'$
12	Ultimo quarto	19 44
19	Luna nuova	9 52
26	Primo quarto	13 12

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	44 η ♎ 4. 5.ª	1 5
2	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	0 1
2	24 m ♏ 5.ª	5 27
5	43 d ♐ 5.ª	7 55
5	44 ρ¹ ♐ 4. 5.ª	10 11
9	73 λ ♒ 4.ª	16 7
10	90 φ ♒ 5.ª	2 40
11	♄	20 57
12	98 μ ♓ 5.ª	20 16
13	106 γ ♓ 5.ª	0 29
13	65 ξ¹ Balena 5.ª	15 17
14	87 μ Balena 4.ª	4 41
15	54 γ ♉ 3. 4.ª	20 23
15	61 δ¹ ♉ 4.ª	22 9
15	64 δ² ♉ 4. 5.ª	20 34
15	77 θ¹ ♉ 5.ª	23 56
16	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	2 54
16	104 m ♉ 5.ª	15 21
21	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	12 52
21	47 ρ ♌ 4.ª	23 39
22	63 ψ ♌ 4.ª	13 44
22	77 σ ♌ 4.ª	21 7
24	29 γ ♍ 4.ª	11 57
27	15 ξ ♎ 5.ª	7 19
28	38 γ ♎ 4. 5.ª	3 17
28	44 η ♎ 4. 5.ª	7 45
29	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	6 33
29	24 m ♏ 5.ª	11 52

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	2 37 37 em.
2	21 6 17
4	15 35 4
6	10 3 46
8	4 32 32
9	23 1 12
11	17 29 58
13	11 58 39
15	6 27 24
17	0 56 2
18	19 24 49
20	13 53 29
22	8 22 13
24	2 50 50
	II. Satellite.
1	18 53 17 em.
5	8 10 39
8	21 27 58
12	10 45 14
16	0 2 28
19	13 19 39
23	2 37 9
	III. Satellite.
1	4 27 32 imm.
1	7 58 29 em.
8	8 26 27 imm.
8	11 57 8 em.
15	12 26 33 imm.
15	15 55 56 em.
22	16 24 40 imm.
22	19 54 45 em.
	IV. Satellite.
17	10 58 41 imm.
17	15 34 22 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
182	1	Dom.	0 3 26,90	6 41 2,81	6 37 35,35	4 14	7 46
183	2	Lun.	0 3 38,30	6 45 10,80	6 41 31,90	4 14	7 46
184	3	Mart.	0 3 49,41	6 49 18,50	6 45 28,46	4 14	7 46
185	4	Merc.	0 4 0,23	6 53 25,90	6 49 25,02	4 14	7 46
186	5	Giov.	0 4 10,72	6 57 32,97	6 53 21,57	4 15	7 45
187	6	Ven.	0 4 20,88	7 1 39,72	6 57 18,13	4 15	7 45
188	7	Sab.	0 4 30,69	7 5 46,10	7 1 14,68	4 16	7 44
189	8	Dom.	0 4 40,13	7 9 52,12	7 5 11,24	4 16	7 44
190	9	Lun.	0 4 49,18	7 13 57,74	7 9 7,80	4 17	7 43
191	10	Mart.	0 4 57,83	7 18 2,99	7 13 4,36	4 18	7 42
192	11	Merc.	0 5 6,09	7 22 7,84	7 17 0,91	4 18	7 42
193	12	Giov.	0 5 13,95	7 26 12,28	7 20 57,47	4 19	7 41
194	13	Ven.	0 5 21,37	7 30 16,27	7 24 54,02	4 21	7 39
195	14	Sab.	0 5 28,32	7 34 19,79	7 28 50,58	4 21	7 39
196	15	Dom.	0 5 34,80	7 38 22,85	7 32 47,14	4 22	7 38
197	16	Lun.	0 5 40,81	7 42 25,43	7 36 43,69	4 23	7 37
198	17	Mart.	0 5 46,32	7 46 27,52	7 40 40,25	4 24	7 36
199	18	Merc.	0 5 51,31	7 50 29,09	7 44 36,80	4 25	7 35
200	19	Giov.	0 5 55,78	7 54 30,12	7 48 33,36	4 26	7 34
201	20	Ven.	0 5 59,71	7 58 30,61	7 52 29,92	4 27	7 33
202	21	Sab.	0 6 3,10	8 2 30,56	7 56 26,47	4 28	7 32
203	22	Dom.	0 6 5,92	8 6 29,94	8 0 23,03	4 29	7 31
204	23	Lun.	0 6 8,16	8 10 28,74	8 4 19,58	4 30	7 30
205	24	Mart.	0 6 9,80	8 14 26,94	8 8 13,14	4 31	7 29
206	25	Merc.	0 6 10,84	8 18 24,54	8 12 12,69	4 32	7 28
207	26	Giov.	0 6 11,27	8 22 21,53	8 16 9,25	4 33	7 27
208	27	Ven.	0 6 11,09	8 26 17,91	8 20 5,80	4 34	7 26
209	28	Sab.	0 6 10,30	8 30 13,67	8 24 2,36	4 35	7 25
210	29	Dom.	0 6 8,89	8 34 8,81	8 27 58,91	4 36	7 24
211	30	Lun.	0 6 6,89	8 38 3,33	8 31 55,47	4 37	7 23
212	31	Mart.	0 6 4,21	8 41 57,23	8 35 52,02	4 38	7 22

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	3 9 25 38,6	23 7 15,5	− 0,17	+ 0,54	0,0072072
2	3 10 22 49,5	23 3 0,0	0,19	0,55	0,0072059
3	3 11 20 0,3	22 58 20,4	0,20	0,53	0,0072030
4	3 12 17 10,9	22 53 16,8	0,22	0,49	0,0071987
5	3 13 14 21,6	22 47 49,4	0,24	0,42	0,0071930
6	3 14 11 32,3	22 41 58,1	0,25	0,33	0,0071858
7	3 15 8 43,2	22 35 43,3	0,27	0,21	0,0071771
8	3 16 5 54,5	22 29 5,0	0,28	+ 0,08	0,0071670
9	3 17 3 6,1	22 22 3,5	0,30	− 0,05	0,0071553
10	3 18 0 18,2	22 14 38,7	0,32	0,18	0,0071420
11	3 18 57 30,8	22 6 50,8	0,33	0,31	0,0071270
12	3 19 54 43,9	21 58 40,0	0,35	0,42	0,0071100
13	3 20 51 57,8	21 50 6,6	0,36	0,51	0,0070910
14	3 21 49 12,2	21 41 10,7	0,38	0,58	0,0070700
15	3 22 46 27,3	21 31 52,7	0,39	0,61	0,0070468
16	3 23 43 43,1	21 22 12,6	0,41	0,62	0,0070213
17	3 24 40 59,6	21 12 10,5	0,42	0,59	0,0069933
18	3 25 38 16,7	21 1 46,9	0,44	0,54	0,0069629
19	3 26 35 34,3	20 51 2,0	0,45	0,46	0,0069299
20	3 27 32 52,6	20 39 55,9	0,46	0,35	0,0068943
21	3 28 30 11,5	20 28 28,7	0,48	0,23	0,0068561
22	3 29 27 31,0	20 16 41,0	0,49	− 0,09	0,0068154
23	4 0 24 50,9	20 4 32,9	0,51	+ 0,04	0,0067722
24	4 1 22 11,3	19 52 4,7	0,52	0,16	0,0067266
25	4 2 19 32,1	19 39 16,7	0,53	0,28	0,0066787
26	4 3 16 53,5	19 26 9,2	0,55	0,39	0,0066287
27	4 4 14 15,3	19 12 42,3	0,56	0,47	0,0065766
28	4 5 11 37,7	18 58 56,5	0,58	0,53	0,0065226
29	4 6 9 0,5	18 44 51,9	0,59	0,55	0,0064668
30	4 7 6 23,9	18 30 28,8	0,60	0,54	0,0064095
31	4 8 3 48,0	18 15 47,6	0,61	0,51	0,0063507

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA								LATITUDINE DELLA LUNA						Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.	
		a mezzodì medio.				a mezzanotte media.				a mezzodì medio.			a mezza notte media.				
		s	°	′	″	s	°	′	″	°	′	″	°	′	″	h	′
1	Dom.	7	24	42	38	8	0	39	31	5	0	40B	5	4	31B	9	14
2	Lun.	8	6	35	49	8	12	31	53	5	5	4	5	2	20	10	0
3	Mart.	8	18	27	50	8	24	24	18	4	56	19	4	47	5	10	47
4	Merc.	9	0	21	9	9	6	18	41	4	34	42	4	19	17	11	35
5	Giov.	9	12	17	7	9	18	16	35	4	0	58	3	39	55	12	23
6	Ven.	9	24	17	19	10	0	19	31	3	16	18	2	50	22	13	11
7	Sab.	10	6	23	24	10	12	29	11	2	22	20	1	52	29	13	58
8	Dom.	10	18	37	8	10	24	47	34	1	21	8	0	48	34	14	45
9	Lun.	11	1	0	44	11	7	16	59	0	15	8	0	18	46A	15	32
10	Mart.	11	13	36	40	11	20	0	8	0	52	48A	1	26	32	16	19
11	Merc.	11	26	27	47	0	2	59	59	1	59	32	2	31	23	17	6
12	Giov.	0	9	37	5	0	16	19	25	3	1	36	3	29	45	17	54
13	Ven.	0	23	7	17	1	0	0	52	3	55	19	4	17	51	18	45
14	Sab.	1	7	0	17	1	14	5	31	4	36	54	4	51	59	19	38
15	Dom.	1	21	16	22	1	28	32	31	5	2	43	5	8	45	20	34
16	Lun.	2	5	53	26	2	13	18	26	5	9	48	5	5	43	21	35
17	Mart.	2	20	46	40	2	28	17	8	4	56	25	4	41	59	22	37
18	Merc.	3	5	48	43	3	13	20	16	4	22	38	3	58	43	23	39
19	Giov.	3	20	50	35	3	28	18	30	3	30	44	2	59	14	*	*
20	Ven.	4	5	42	57	4	13	2	57	2	24	55	2	48	30	0	39
21	Sab.	4	20	17	44	4	27	26	38	1	10	42	0	32	15	1	37
22	Dom.	5	4	29	13	5	11	25	12	0	6	10B	0	43	55B	2	31
23	Lun.	5	18	14	31	5	24	57	12	1	20	28	1	55	19	3	21
24	Mart.	6	1	33	28	6	8	3	38	2	28	5	2	58	25	4	9
25	Merc.	6	14	28	3	6	20	47	13	3	26	3	3	50	47	4	55
26	Giov.	6	27	1	38	7	3	11	49	4	12	26	4	30	54	5	41
27	Ven.	7	9	18	22	7	15	21	48	4	46	6	4	57	58	6	25
28	Sab.	7	21	22	43	7	27	21	39	5	6	27	5	11	34	7	10
29	Dom.	8	3	19	7	8	9	15	40	5	13	17	5	11	38	7	56
30	Lun.	8	15	11	45	8	21	7	49	5	6	39	4	58	22	8	43
31	Mart.	8	27	4	17	9	3	1	31	4	46	52	4	32	14	9	30

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	15 53	15 4A	54 8	54 5	29 33	29 30	4 8	14 6
2	16 43	17 11	53 59	53 57	29 28	29 27	5 5	14 46
3	17 34	18 31	53 57	53 58	29 27	29 28	6 0	15 31
4	18 26	18 59	54 1	54 5	29 29	29 31	6 51	16 22
5	19 18	18 34	54 11	54 18	29 34	29 38	7 37	17 19
6	20 10	17 14	54 26	54 35	29 43	29 48	8 19	18 6
7	21 2	15 4	54 45	54 56	29 53	29 59	8 56	19 5
8	21 53	12 9	55 8	55 22	30 6	30 13	9 30	20 6
9	22 44	8 56	55 37	55 53	30 21	30 30	10 2	21 8
10	23 34	4 34	56 10	56 28	30 39	30 49	10 33	22 14
11	0 26	0 13	56 47	57 8	31 0	31 11	11 3	23 19
12	1 18	4 15B	57 30	57 52	31 23	31 35	11 33	* *
13	2 13	8 37	58 14	58 37	31 47	32 0	12 5	0 25
14	3 10	12 35	59 0	59 22	32 12	32 24	12 40	1 35
15	4 10	15 51	59 45	60 2	32 36	32 46	13 20	2 46
16	5 15	18 4	60 18	60 32	32 55	33 3	14 9	3 56
17	6 21	18 57	60 45	60 50	33 9	33 13	15 4	5 6
18	7 27	18 23	60 53	60 51	33 14	33 13	16 6	6 10
19	* *	* *	60 45	60 35	33 10	33 4	17 16	7 8
20	8 32	16 27	60 20	60 2	32 56	32 46	18 26	7 58
21	9 33	13 23	59 41	59 18	32 35	32 22	19 37	8 40
22	10 32	9 33	58 53	58 26	32 8	31 55	20 45	9 16
23	11 26	5 18	57 58	57 30	51 38	31 23	21 51	9 47
24	12 18	0 55	57 3	56 37	51 8	30 54	22 56	10 17
25	13 8	3 22A	56 12	55 48	30 41	30 28	23 59	10 46
26	13 58	7 23	55 27	55 8	30 16	30 6	* *	11 15
27	14 46	10 58	54 52	54 38	29 57	29 49	1 0	11 44
28	15 36	14 0	54 26	54 17	29 43	29 38	1 58	12 17
29	16 25	16 24	54 10	54 6	29 34	29 32	2 57	12 50
30	17 16	18 3	54 4	54 4	29 31	29 31	3 52	13 31
31	18 7	18 51	54 5	54 9	29 31	29 33	4 44	14 15

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	8h 38′	*Occidente*
1	4. 1. 3.	○	2.
2	4. 3. 2.	○	.1
3	4. .3 .1 .2	○	
4	4. .3	○	1. .2
5	.4 2. .1	○	.3
6	.4 .2 1.	○	.3
7	.4	○	.1 .2 3.
8	●3 .4, 1.	○	2.
9	3. 2.	○	.4 .1
10	3. .1 .2	○	.4
11	.3	○	1. .2 .4
12	●2 .1	○	.3 .4
13	.2	○	1. .3 4.
14		○	.1 .2 3. 4.
15	1.	○	3. 2. 4.
16	3. 2.	○	.1 4.
17	3. 1..2,4.	○	
18	4○3	○	1. .2
19	4. .1	○	2..3
20	4. 2.	○	1. .3
21	4. .1	○	.2 3.
22	.4 1.	○	3. 2.
23	.4 3. 2.	○	1.
24	3. .4 1○2	○	
25	.3 .4	○	1. .2
26	.1	○	.3,2. .4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
3	Luna piena	$16^h28'$
11	Ultimo quarto	2 9
17	Luna nuova	18 9
25	Primo quarto	5 32

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	43 δ ♐ 5.ª	14 31
1	44 ρ^1 ♐ 5.ª	16 44
5	73 λ ♒ 4.ª	21 53
6	90 ϕ ♒ 5.ª	8 17
8	♄	1 57
9	98 μ ♓ 5.ª	1 52
9	106 γ ♓ 5.ª	6 7
9	65 ξ^1 Balena 5.ª	21 9
10	87 μ Balena 4.ª	10 56
12	54 γ ♉ 3. 4.ª	3 33
12	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	5 47
12	77 θ^1 ♉ 5.ª	7 12
12	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	10 17
12	104 m ♉ 5.ª	23 7
17	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	22 40
18	♃	4 57
18	47 ρ ♌ 4.ª	9 43
18	13 ψ ♌ 4. 5.ª	23 40
19	77 σ ♌ 4.ª	6 57
20	29 γ ♍ 4.ª	21 11
23	15 ξ^2 ♎ 5.ª	15 19
24	38 γ ♎ 4. 5.ª	11 1
24	44 η ♎ 4. 5.ª	15 27
25	8 ϕ Ofiuco 4. 5.ª	14 7
25	24 m ♏ 5.ª	19 23
29	44 δ^1 ♐ 5.ª	0 11

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	IN QUESTO MESE NON SONO VISIBILI I SATELLITI DI GIOVE.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
213	1	Merc.	0 6 0,94	8 45 50,51	8 39 48,58	4 40	7 20
214	2	Giov.	0 5 57,05	8 49 43,16	8 43 45,13	4 42	7 18
215	3	Ven.	0 5 52,56	8 53 35,21	8 47 41,69	4 43	7 17
216	4	Sab.	0 5 47,47	8 57 26,66	8 51 38,24	4 44	7 16
217	5	Dom.	0 5 41,78	9 1 17,52	8 55 34,80	4 45	7 15
218	6	Lun.	0 5 35,49	9 5 7,77	8 59 31,35	4 46	7 14
219	7	Mart.	0 5 28,64	9 8 57,45	9 3 27,91	4 48	7 12
220	8	Merc.	0 5 21,22	9 12 46,55	9 7 24,46	4 49	7 11
221	9	Giov.	0 5 13,23	9 16 35,10	9 11 21,01	4 50	7 10
222	10	Ven.	0 5 4,67	9 20 23,07	9 15 17,57	4 52	7 8
223	11	Sab.	0 4 55,55	9 24 10,49	9 19 14,12	4 53	7 7
224	12	Dom.	0 4 45,89	9 27 57,35	9 23 10,68	4 55	7 5
225	13	Lun.	0 4 35,70	9 31 43,69	9 27 7,23	4 56	7 4
226	14	Mart.	0 4 24,98	9 35 29,48	9 31 3,78	4 58	7 2
227	15	Merc.	0 4 13,73	9 39 14,76	9 35 0,34	4 59	7 1
228	16	Giov.	0 4 1,97	9 42 59,52	9 38 56,89	5 0	7 0
229	17	Ven.	0 3 49,71	9 46 43,78	9 42 53,45	5 1	6 59
230	18	Sab.	0 3 36,95	9 50 27,54	9 46 50,00	5 3	6 57
231	19	Dom.	0 3 23,68	9 54 10,79	9 50 46,55	5 4	6 56
232	20	Lun.	0 3 9,93	9 57 53,54	9 54 43,10	5 5	6 55
233	21	Mart.	0 2 55,70	10 1 35,84	9 58 39,66	5 7	6 53
234	22	Merc.	0 2 41,00	10 5 17,65	10 2 36,21	5 8	6 52
235	23	Giov.	0 2 25,84	10 8 59,00	10 6 32,76	5 10	6 50
236	24	Ven.	0 2 10,22	10 12 39,90	10 10 29,32	5 11	6 49
237	25	Sab.	0 1 54,17	10 16 20,35	10 14 25,87	5 13	6 47
238	26	Dom.	0 1 37,69	10 20 0,39	10 18 22,42	5 14	6 46
239	27	Lun.	0 1 20,81	10 23 40,02	10 22 18,98	5 16	6 44
240	28	Mart.	0 1 3,54	10 27 19,25	10 26 15,53	5 17	6 43
241	29	Merc.	0 0 45,89	10 30 58,10	10 30 12,08	5 19	6 41
242	30	Giov.	0 0 27,88	10 34 36,59	10 34 8,63	5 21	6 39
243	31	Ven.	0 0 9,53	10 38 14,75	10 38 5,19	5 22	6 38

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.				Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.			Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s	°	'	"	°	'	"	"	"	
1	4	9	1	12,7	18	0	48,6	− 0,63	+ 0,44	0,0062904
2	4	9	58	38,4	17	45	51,9	0,64	0,35	0,0062289
3	4	10	56	4,8	17	29	57,7	0,65	0,24	0,0061662
4	4	11	53	32,2	17	14	6,6	0,66	+ 0,12	0,0061024
5	4	12	51	0,7	16	57	58,8	0,67	− 0,02	0,0060373
6	4	13	48	30,4	16	41	54,5	0,69	0,14	0,0059711
7	4	14	46	1,2	16	24	54,0	0,70	0,25	0,0059037
8	4	15	43	33,4	16	7	57,5	0,71	0,35	0,0058350
9	4	16	41	6,9	15	50	45,2	0,72	0,44	0,0057650
10	4	17	38	41,9	15	33	17,7	0,73	0,52	0,0056936
11	4	18	36	18,3	15	15	35,2	0,74	0,59	0,0056208
12	4	19	33	56,3	14	57	37,7	0,75	0,62	0,0055459
13	4	20	31	35,9	14	39	25,9	0,76	0,60	0,0054695
14	4	21	29	16,8	14	21	0,1	0,77	0,56	0,0053913
15	4	22	26	59,3	14	2	20,5	0,78	0,48	0,0053110
16	4	23	24	43,4	13	43	27,2	0,79	0,37	0,0052287
17	4	24	22	29,1	13	24	20,8	0,80	0,25	0,0051443
18	4	25	20	16,2	13	5	1,7	0,81	− 0,13	0,0050579
19	4	26	18	4,5	12	45	30,1	0,82	0,00	0,0049693
20	4	27	15	54,3	12	25	48,1	0,83	+ 0,13	0,0048787
21	4	28	13	45,6	12	5	50,5	0,83	0,25	0,0047861
22	4	29	11	38,0	11	45	43,4	0,84	0,35	0,0046917
23	5	0	9	31,8	11	25	25,3	0,85	0,46	0,0045954
24	5	1	7	26,7	11	4	56,3	0,86	0,53	0,0044975
25	5	2	5	22,9	10	44	16,8	0,86	0,55	0,0043980
26	5	3	3	20,6	10	23	27,1	0,87	0,56	0,0042972
27	5	4	1	19,4	10	2	27,8	0,87	0,53	0.0041951
28	5	4	59	19,6	9	41	18,8	0,88	0,46	0,0040919
29	5	5	57	21,1	9	20	0,8	0,89	0,37	0,0039877
30	5	6	55	24,0	8	58	33,8	0,89	0,27	0,0038827
31	5	7	53	28,5	8	36	58,3	0,90	+ 0,16	0,0037770

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna		Latitudine della Luna		Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		a mezzodì medio.	a mezzanotte media.	a mezzodì medio.	a mezza notte media.	
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	9 8 59 51	9 14 59 35	4 14 36B	4 54 14B	10 18
2	Giov.	9 21 1 0	9 27 4 18	3 30 50	3 5 6	11 7
3	Ven.	10 3 9 45	10 9 17 31	2 37 5	2 7 3	11 55
4	Sab.	10 15 27 46	10 21 40 39	1 35 18	1 2 11	12 43
5	Dom.	10 27 56 20	11 4 14 55	0 28 2	0 6 45A	13 30
6	Lun.	11 10 36 32	11 17 1 18	0 41 45A	1 16 32	14 17
7	Mart.	11 23 29 21	0 0 0 50	1 50 38	2 23 36	15 4
8	Merc.	0 6 35 50	0 13 14 29	2 54 58	3 24 17	15 52
9	Giov.	0 19 56 55	0 26 43 14	3 51 5	4 14 55	16 42
10	Ven.	1 3 33 30	1 10 27 45	4 35 23	4 52 4	17 33
11	Sab.	1 17 25 57	1 24 28 0	5 4 38	5 12 45	18 27
12	Dom.	2 1 33 46	2 8 42 57	5 16 12	5 14 48	19 23
13	Lun.	2 15 55 15	2 23 10 12	5 8 28	4 57 11	20 22
14	Mart.	3 0 27 15	3 7 45 47	4 41 4	4 20 20	21 22
15	Merc.	3 15 5 7	3 22 24 28	3 55 18	3 26 25	22 22
16	Giov.	3 29 43 3	4 7 0 5	2 54 11	2 19 12	23 21
17	Ven.	4 14 14 45	4 21 26 19	1 42 9	1 3 43	* *
18	Sab.	4 28 34 4	5 5 37 27	0 24 36	0 14 30B	0 16
19	Dom.	5 12 35 55	5 19 29 9	0 52 57B	1 30 8	1 9
20	Lun.	5 26 16 51	6 2 58 54	2 5 33	2 38 44	1 59
21	Mart.	6 9 35 17	6 16 6 7	3 9 18	3 36 58	2 47
22	Merc.	6 22 31 36	6 28 52 1	4 1 30	4 22 43	3 33
23	Giov.	7 5 7 44	7 11 19 10	4 40 32	4 54 51	4 19
24	Ven.	7 17 26 47	7 23 31 8	5 5 39	5 12 54	5 5
25	Sab.	7 29 32 44	8 5 32 9	5 16 40	5 16 57	5 51
26	Dom.	8 11 29 56	8 17 26 41	5 13 49	5 7 20	6 37
27	Lun.	8 23 22 57	8 29 19 16	4 57 34	4 44 37	7 24
28	Mart.	9 5 16 13	9 11 14 17	4 28 35	4 9 35	8 12
29	Merc.	9 17 13 57	9 23 15 39	3 47 47	3 23 20	9 0
30	Giov.	9 29 19 49	10 5 26 47	2 56 26	2 27 18	9 48
31	Ven.	10 11 36 53	10 17 50 24	1 56 13	1 23 28	10 37

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	19 0	18 46A	54 15	54 22	29 37	29 41	5 33	15 4
2	19 52	17 47	54 31	54 41	29 46	29 51	6 18	15 59
3	20 44	15 55	54 52	55 4	29 57	30 3	6 57	16 58
4	21 36	13 13	55 16	55 29	30 10	30 17	7 33	17 59
5	22 28	9 50	55 42	55 56	30 24	30 32	8 5	19 1
6	23 19	5 55	56 10	56 25	30 40	30 48	8 36	20 6
7	0 10	1 39	56 40	56 55	30 56	31 4	9 5	21 12
8	1 2	2 47B	57 11	57 27	31 13	31 22	9 36	22 18
9	1 56	7 9	57 43	58 0	31 31	31 40	10 8	23 26
10	2 51	11 12	58 16	58 32	31 48	31 57	10 41	* *
11	3 49	14 40	58 48	59 4	32 6	32 14	11 18	0 34
12	4 50	17 14	59 18	59 31	32 22	32 29	12 1	1 44
13	5 53	18 40	59 43	59 52	32 36	32 41	12 51	2 51
14	6 57	18 47	59 59	60 4	32 45	32 47	13 48	3 55
15	8 1	17 31	60 6	60 5	32 48	32 48	14 52	4 54
16	9 3	15 1	60 1	59 54	32 46	32 42	16 2	5 46
17	* *	* *	59 43	59 29	32 36	32 28	17 14	6 31
18	10 3	11 33	59 13	58 54	32 19	32 9	18 24	7 9
19	11 0	7 27	58 33	58 11	31 58	31 46	19 32	7 44
20	11 54	3 3	57 47	57 23	31 33	31 19	20 39	8 16
21	12 46	1 23A	56 58	56 34	31 6	30 53	21 42	8 47
22	13 37	5 57	56 10	55 48	30 40	30 28	22 45	9 16
23	14 26	9 28	55 28	55 10	30 17	30 7	23 46	9 45
24	15 16	12 47	54 54	54 40	29 58	29 50	* *	10 17
25	16 6	15 29	54 29	54 21	29 44	29 40	0 46	10 54
26	16 56	17 27	54 15	54 11	29 37	29 35	1 45	11 28
27	17 47	18 36	54 10	54 12	29 34	29 35	2 37	12 10
28	18 39	18 52	54 16	54 22	29 37	29 41	3 27	12 58
29	19 32	18 15	54 30	54 40	29 45	29 50	4 13	13 50
30	20 24	16 43	54 52	55 5	29 57	30 4	4 54	14 45
31	21 16	14 20	55 20	55 35	30 12	30 20	5 32	15 47

IN QUESTO MESE

NON SONO VISIBILI

I SATELLITI DI GIOVE.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
2	Luna piena	$5^h 54'$
9	Ultimo quarto	7 32
16	Luna nuova	4 58
24	Primo quarto	0 0

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	57 σ ♒ 5.ª	17 11
2	73 λ ♒ 4.ª	4 48
2	90 φ ♒ 5.ª	15 3
4	♄	5 31
5	98 μ ♓ 5.ª	7 34
5	106 γ ♓ 5.ª	11 47
6	65 ξ¹ Balena 5.ª	2 38
6	87 μ Balena 4.ª	16 16
8	54 γ ♉ 3. 4.ª	9 7
8	77 θ¹ ♉ 5.ª	12 48
8	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª	15 53
9	104 m ♉ 5.ª	4 55
13	♀	0 37
14	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	7 26
14	47 ρ ♌ 4.ª	18 41
15	63 χ ♌ 4. 5.ª	8 53
16	♃	0 19
17	29 γ ♍ 4.ª	6 32
19	15 ξ² ♎ 5.ª	23 54
20	38 γ ♎ 4. 5.ª	19 26
21	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	22 13
22	24 m ♏ 5.ª	3 27
25	43 d ♐ 5.ª	6 12
25	44 ρ¹ ♐ 3.ª	8 29
29	57 σ ♒ 5.ª	1 54
29	73 λ ♒ 4.ª	13 22
29	90 φ ♒ 5.ª	23 27

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
23	$23^h\ 16'\ 46''$ imm.
25	17 45 13
* 27	12 13 47
29	6 42 15
	II. Satellite.
24	22 53 11 imm.
* 28	12 9 54
	III. Satellite.
25	4 14 12 imm.
25	7 40 58 em.
	IV. Satellite.
22	10 59 36 imm.
22	15 23 10 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
244	1	Sab.	23 59 50,87	10 41 52,59	10 42 1,74	5 23	6 37
245	2	Dom.	23 59 31,91	10 45 30,13	10 45 58,29	5 25	6 35
246	3	Lun.	23 59 12,66	10 49 7,38	10 49 54,85	5 27	6 33
247	4	Mart.	23 58 53,16	10 52 44,38	10 53 51,40	5 29	6 31
248	5	Merc.	23 58 33,43	10 56 21,15	10 57 47,95	5 30	6 30
249	6	Giov.	23 58 13,48	10 59 57,71	11 1 44,51	5 31	6 29
250	7	Ven.	23 57 53,34	11 3 34,06	11 5 41,06	5 33	6 27
251	8	Sab.	23 57 33,04	11 7 10,25	11 9 37,61	5 35	6 25
252	9	Dom.	23 57 12,58	11 10 46,28	11 13 34,16	5 36	6 24
253	10	Lun.	23 56 51,96	11 14 22,16	11 17 30,71	5 38	6 22
254	11	Mart.	23 56 31,25	11 17 57,95	11 21 27,27	5 40	6 20
255	12	Merc.	23 56 10,45	11 21 33,64	11 25 23,82	5 42	6 18
256	13	Giov.	23 55 49,57	11 25 9,26	11 29 20,37	5 44	6 16
257	14	Ven.	23 55 28,62	11 28 44,81	11 33 16,93	5 45	6 15
258	15	Sab.	23 55 7,62	11 32 20,31	11 37 13,48	5 47	6 13
259	16	Dom.	23 54 46,60	11 35 55,77	11 41 10,03	5 48	6 12
260	17	Lun.	23 54 25,57	11 39 31,24	11 45 6,58	5 50	6 10
261	18	Mart.	23 54 4,56	11 43 6,72	11 49 3,13	5 51	6 9
262	19	Merc.	23 53 43,57	11 46 42,23	11 52 59,68	5 53	6 7
263	20	Giov.	23 53 22,61	11 50 17,76	11 56 56,23	5 55	6 5
264	21	Ven.	23 53 1,69	11 53 53,34	12 0 52,79	5 57	6 3
265	22	Sab.	23 52 40,85	11 57 28,96	12 4 49,34	5 58	6 2
266	23	Dom.	23 52 20,12	12 1 4,75	12 8 45,89	5 59	6 1
267	24	Lun.	23 51 59,50	12 4 40,63	12 12 42,45	6 1	5 59
268	25	Mart.	23 51 39,00	12 8 16,63	12 16 39,00	6 2	5 58
269	26	Merc.	23 51 18,66	12 11 52,78	12 20 35,55	6 3	5 57
270	27	Giov.	23 50 58,48	12 15 29,10	12 24 32,10	6 5	5 55
271	28	Ven.	23 50 38,49	12 19 5,61	12 28 28,65	6 6	5 54
272	29	Sab.	23 50 18,74	12 22 42,35	12 32 25,20	6 8	5 52
273	30	Dom.	23 49 59,23	12 26 19,34	12 36 21,75	6 9	5 51

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	5 8 51 34,5	8 15 14,5	− 0,90	+ 0,03	0,0036707
2	5 9 49 42,1	7 53 22,7	0,91	− 0,11	0,0035639
3	5 10 47 51,3	7 31 23,3	0,92	0,25	0,0034568
4	5 11 46 2,4	7 9 16,6	0,92	0,37	0,0033492
5	5 12 44 15,5	6 47 2,9	0,93	0,48	0,0032410
6	5 13 42 30,4	6 24 42,5	0,93	0,54	0,0031322
7	5 14 40 47,3	6 2 15,4	0,94	0,58	0,0030229
8	5 15 39 6,2	5 39 42,3	0,94	0,60	0,0029129
9	5 16 37 27,3	5 17 3,4	0,95	0,59	0,0028022
10	5 17 35 50,6	4 54 19,1	0,95	0,55	0,0026907
11	5 18 34 15,9	4 31 29,6	0,96	0,47	0,0025783
12	5 19 32 43,4	4 8 35,2	0,96	0,38	0,0024649
13	5 20 31 13,0	3 45 36,4	0,96	0,27	0,0023505
14	5 21 29 44,8	3 22 33,3	0,96	0,15	0,0022349
15	5 22 28 18,5	2 59 26,5	0,97	− 0,01	0,0021179
16	5 23 26 54,2	2 36 16,3	0,97	+ 0,13	0,0019997
17	5 24 25 32,1	2 13 2,9	0,97	0,25	0,0018803
18	5 25 24 11,9	1 49 46,9	0,97	0,36	0,0017597
19	5 26 22 53,5	1 26 28,4	0,97	0,45	0,0016379
20	5 27 21 36,9	1 3 8,0	0,98	0,52	0,0015151
21	5 28 21 22,1	0 39 46,0	0,98	0,56	0,0013913
22	5 29 19 9,1	0 16 22,7	0,98	0,57	0,0012666
23	6 0 17 57,9	0 7 1,6 Aust.	0,98	0,55	0,0011413
24	6 1 16 48,3	0 30 26,4	0,98	0,49	0,0010155
25	6 2 15 40,4	0 53 51,5	0,98	0,41	0,0008893
26	6 3 14 34,3	1 17 16,4	0,98	0,32	0,0007627
27	6 4 13 29,8	1 40 40,9	0,98	0,20	0,0006361
28	6 5 12 27,2	2 4 4,7	0,98	+ 0,06	0,0005096
29	6 6 11 26,3	2 27 27,3	0,98	− 0,07	0,0003832
30	6 7 10 27,6	2 50 48,5	− 0,97	− 0,20	0,0002572

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna: a mezzodì medio.	Longitudine della Luna: a mezzanotte media.	Latitudine della Luna: a mezzodì medio.	Latitudine della Luna: a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Sab.	10 24 7 31	11 0 28 24	0 49 23B	0 14 22B	11 25
2	Dom.	11 6 53 9	11 13 21 49	0 21 10A	0 56 47A	12 13
3	Lun.	11 19 54 18	11 26 30 37	1 32 7	2 6 20	13 1
4	Mart.	0 3 10 37	0 9 54 8	2 39 14	3 10 12	13 49
5	Merc.	0 16 41 1	0 23 31 1	3 38 45	4 4 23	14 39
6	Giov.	1 0 23 55	1 7 19 29	4 26 41	4 45 13	15 30
7	Ven.	1 14 17 28	1 21 17 36	4 59 40	5 9 45	16 23
8	Sab.	1 28 19 37	2 5 23 15	5 15 14	5 15 59	17 18
9	Dom.	2 12 28 15	2 19 34 18	5 11 57	5 3 10	18 15
10	Lun.	2 26 41 8	3 3 48 25	4 49 41	4 31 45	19 13
11	Mart.	3 10 55 52	3 18 3 10	4 9 37	3 43 39	20 12
12	Merc.	3 25 9 57	4 2 15 53	3 14 14	2 41 54	21 9
13	Giov.	4 9 20 35	4 16 23 40	2 7 10	1 30 37	22 4
14	Ven.	4 23 24 44	5 0 23 24	0 52 53	0 14 36	22 57
15	Sab.	5 7 19 16	5 14 11 56	0 23 38B	1 1 13B	23 49
16	Dom.	5 21 1 4	5 27 46 22	1 37 34	2 12 10	* *
17	Lun.	6 4 27 33	6 11 4 25	2 44 33	3 14 21	0 37
18	Mart.	6 17 36 52	6 24 4 50	3 41 14	4 4 56	1 24
19	Merc.	7 0 28 22	7 6 47 34	4 25 17	4 42 7	2 11
20	Giov.	7 13 2 37	7 19 13 47	4 55 23	5 5 3	2 57
21	Ven.	7 25 21 22	8 1 25 46	5 11 7	5 13 37	3 43
22	Sab.	8 7 27 26	8 13 26 51	5 12 38	5 8 14	4 30
23	Dom.	8 19 24 31	8 25 21 1	5 0 31	4 49 36	5 17
24	Lun.	9 1 16 56	9 7 12 53	4 35 37	4 18 40	6 5
25	Mart.	9 13 9 28	9 19 7 19	3 50 58	3 36 29	6 52
26	Merc.	9 25 7 1	10 1 9 12	3 11 55	2 42 44	7 40
27	Giov.	10 7 14 24	10 13 23 9	2 15 8	1 44 2	8 28
28	Ven.	10 19 35 55	10 25 53 9	1 11 23	0 37 31	9 16
29	Sab.	11 2 15 10	11 8 42 15	0 2 47	0 32 25A	10 4
30	Dom.	11 15 14 33	11 21 52 8	1 7 38A	1 42 22	10 52

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	22 9	11 10A	55 51	56 8	30 29	30 38	6 7	16 49
2	23 1	7 23	56 24	56 41	30 47	30 56	6 38	17 55
3	23 53	3 8	56 57	57 12	31 5	31 13	7 9	19 1
4	0 45	1 20B	57 27	57 41	31 21	31 29	7 39	20 8
5	1 39	5 49	57 54	58 6	31 36	31 43	8 11	21 17
6	2 34	10 2	58 18	58 29	31 49	31 55	8 44	22 26
7	3 31	15 42	58 39	58 48	32 1	32 6	9 19	23 35
8	4 31	16 33	58 56	59 3	32 10	32 14	10 0	* *
9	5 32	18 21	59 9	59 14	32 17	32 20	10 47	0 43
10	6 34	18 54	59 18	59 20	32 22	32 23	11 40	1 47
11	7 37	18 9	59 21	59 20	32 23	32 23	12 41	2 46
12	8 38	16 11	59 17	59 13	32 22	32 19	13 46	3 39
13	9 37	13 10	59 7	58 59	32 16	32 12	14 55	4 25
14	10 34	9 22	58 50	58 38	32 7	32 0	16 5	5 5
15	11 30	5 6	58 24	58 9	31 53	31 45	17 13	5 40
16	* *	* *	57 52	57 34	31 35	31 25	18 21	6 14
17	12 22	0 38	57 15	56 55	31 15	31 4	19 26	6 45
18	13 13	3 45A	56 35	56 15	30 53	30 42	20 31	7 14
19	14 4	7 51	55 55	55 37	30 32	30 22	21 34	7 44
20	14 54	11 28	55 19	55 3	30 12	30 3	22 33	8 14
21	15 45	14 29	54 49	54 37	29 55	29 49	23 33	8 48
22	16 35	16 47	54 27	54 20	29 43	29 39	* *	9 23
23	17 26	18 17	54 15	54 13	29 37	29 36	0 28	10 4
24	18 19	18 56	54 13	54 15	29 36	29 37	1 20	10 50
25	19 10	18 41	54 20	54 28	29 49	29 44	2 6	11 39
26	20 2	17 32	54 38	54 51	29 49	29 56	2 50	12 33
27	20 54	15 31	55 6	55 22	30 4	30 13	3 29	13 32
28	21 46	12 40	55 40	56 0	30 23	30 34	4 4	14 34
29	22 38	9 7	56 20	56 41	30 45	30 56	4 36	15 39
30	23 30	5 0	57 2	57 23	31 8	31 19	5 7	16 46

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$17^h\ 0'$	*Occidente*
22	O4 .2,1.	○	.3
23	4.	○	1☌2 3.
24	4. .1	○	2. 3.
25	4. 2. 3.	○	1.
26	.4 3. .2	○	1○
27	.4 .3 1.	○	.2
28	.4 3☌2	○	.1
29	.4 .2,1.	○	.3
30	.4	○	1☌2 .3

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Luna piena	18^h $9'$
8	Ultimo quarto	13 20
15	Luna nuova	17 49
23	Primo quarto	19 40
31	Luna piena.	5 23

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	♄	9 57
2	98 μ ♓ 5.ª	15 4
2	106 γ ♓ 5.ª	19 10
3	65 ξ^1 Balena 5.ª	9 41
3	87 μ Balena 4.ª	22 59
5	54 γ ♉ 3. 4.ª	14 53
5	61 δ^1 ♉ 4.ª	16 41
5	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	17 7
5	77 θ^1 ♉ 5.ª	18 31
5	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	21 37
6	104 m ♉ 5.ª	10 28
11	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	14 13
12	47 ρ ♌ 4.ª	1 43
12	63 ψ ♌ 4. 5.ª	16 22
12	77 σ ♌ 4.ª	23 41
13	♃	17 35
14	29 γ^1 ♍ 4.ª	14 38
17	15 ξ^2 ♎ 5.ª.	8 17
18	38 γ ♎ 4. 5.ª	3 42
18	44 η ♎ 4. 5.ª.	8 2
19	8 ϕ Ofiuco 4. 5.ª	6 21
19	24 m ♏ 5.ª	11 35
22	43 d ♐ 5.ª	14 20
22	44 ρ^1 ♐ 5.ª	16 31
24	11 ρ ♑ 5.ª	0 18
26	57 σ ♒ 5.ª.	11 20
26	73 λ ♒ 4.ª.	22 54
27	90 ϕ ♒ 5.ª.	9 15
28	♄	16 26
31	87 μ Balena 4.ª	8 5

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	1 10 48 imm.
2	19 39 14
4	14 7 46
6	8 35 12
8	3 4 45
9	21 33 8
* 11	16 1 39
13	10 30 4
15	4 58 35
16	23 26 58
* 18	17 55 27
20	12 23 51
22	6 52 20
24	1 20 42
25	19 49 9
27	14 17 32
29	8 46 0
31	3 14 21
	II. Satellite.
2	1 26 35 imm.
5	14 43 18
9	4 0 0
* 12	17 16 42
16	6 33 23
19	19 50 4
23	9 6 46
26	22 23 29
30	11 40 13
	III. Satellite.
2	8 12 40 imm.
2	11 38 58 em.
9	12 10 35 imm.
9	15 36 26 em.
* 16	16 8 21 imm.
16	19 33 45 em.
23	20 6 20 imm.
23	23 31 15 em.
31	0 4 14 imm.
31	3 28 41 em.
	IV. Satellite.
9	4 38 40 imm.
9	6 18 31 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
274	1	Lun.	23 49 39,98	12 29 56,58	12 40 18,30	6 11	5 49
275	2	Mart.	23 49 21,02	12 33 34,13	12 44 14,86	6 13	5 47
276	3	Merc.	23 49 2,37	12 37 11,98	12 48 11,41	6 15	5 45
277	4	Giov.	23 48 44,06	12 40 50,17	12 52 7,96	6 16	5 44
278	5	Ven.	23 48 26,11	12 44 28,73	12 56 4,51	6 17	5 43
279	6	Sab.	23 48 8,54	12 48 7,76	13 0 1,06	6 18	5 42
280	7	Dom.	23 47 51,38	12 51 47,00	13 3 57,61	6 20	5 40
281	8	Lun.	23 47 34,65	12 55 26,77	13 7 54,16	6 21	5 39
282	9	Mart.	23 47 18,38	12 59 7,00	13 11 50,71	6 23	5 37
283	10	Merc.	23 47 2,57	13 2 47,70	13 15 47,26	6 24	5 36
284	11	Giov.	23 46 47,23	13 6 28,88	13 19 43,82	6 25	5 34
285	12	Ven.	23 46 32,41	13 10 10,57	13 23 40,37	6 27	5 33
286	13	Sab.	23 46 18,11	13 13 52,78	13 27 36,92	6 28	5 32
287	14	Dom.	23 46 4,35	13 17 35,54	13 31 33,48	6 30	5 30
288	15	Lun.	23 45 51,14	13 21 18,85	13 35 30,03	6 31	5 29
289	16	Mart.	23 45 38,50	13 25 2,73	13 39 26,58	6 33	5 27
290	17	Merc.	23 45 26,44	13 28 47,18	13 43 23,13	6 35	5 25
291	18	Giov.	23 45 14,98	13 32 32,24	13 47 19,68	6 37	5 23
292	19	Ven.	23 45 4,14	13 36 17,92	13 51 16,23	6 38	5 22
293	20	Sab.	23 44 53,91	13 40 4,21	13 55 12,79	6 40	5 20
294	21	Dom.	23 44 44,30	13 43 51,14	13 59 9,34	6 42	5 18
295	22	Lun.	23 44 35,33	13 47 38,70	14 3 5,90	6 43	5 17
296	23	Mart.	23 44 27,04	13 51 26,93	14 7 2,45	6 45	5 15
297	24	Merc.	23 44 19,42	13 55 15,85	14 10 59,00	6 47	5 13
298	25	Giov.	23 44 12,48	13 59 5,45	14 14 55,56	6 48	5 12
299	26	Ven.	23 44 6,24	14 2 55,74	14 18 52,11	6 49	5 11
300	27	Sab.	23 44 0,73	14 6 46,76	14 22 48,66	6 51	5 9
301	28	Dom.	23 43 55,95	14 10 38,53	14 26 45,21	6 52	5 8
302	29	Lun.	23 43 51,92	14 14 31,04	14 30 41,77	6 54	5 6
303	30	Mart.	23 43 48,64	14 18 24,30	14 34 38,32	6 56	5 4
304	31	Merc.	23 43 46,13	14 22 18,34	14 38 34,88	6 57	5 3

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	6 8 9 30,6	3 14 7,9	− 0,97	− 0,32	0,0001318
2	6 9 8 35,6	3 37 25,1	0,97	0,44	0,0000069
3	6 10 7 42,8	4 0 40,0	0,97	0,52	9,9998824
4	6 11 6 52,0	4 23 52,1	0,97	0,56	9,9997584
5	6 12 6 3,5	4 47 1,1	0,96	0,58	9,9996350
6	6 13 5 17,3	5 10 6,6	0,96	0,57	9,9995120
7	6 14 4 33,2	5 33 8,2	0,96	0,54	9,9993894
8	6 15 3 51,4	5 56 5,8	0,96	0,47	9,9992673
9	6 16 3 12,1	6 18 58,9	0,95	0,38	9,9991454
10	6 17 2 34,9	6 41 47,0	0,95	0,27	9,9990237
11	6 18 2 0,2	7 4 29,8	0,94	0,15	9,9989021
12	6 19 1 28,0	7 27 7,1	0,94	− 0,02	9,9987805
13	6 20 0 57,7	7 49 38,2	0,93	+ 0,12	9,9986588
14	6 21 0 29,7	8 12 2,8	0,93	0,25	9,9985369
15	6 22 0 4,1	8 34 20,6	0,92	0,36	9,9984149
16	6 22 59 40,5	8 56 31,3	0,92	0,45	9,9982927
17	6 23 59 19,0	9 18 34,4	0,91	0,53	9,9981703
18	6 24 58 59,3	9 40 29,3	0,90	0,56	9,9980478
19	6 25 58 41,6	10 2 15,8	0,90	0,57	9,9979252
20	6 26 58 25,6	10 23 53,3	0,89	0,55	9,9978027
21	6 27 58 11,6	10 45 21,6	0,89	0,51	9,9976805
22	6 28 57 59,2	11 6 40,3	0,88	0,43	9,9975586
23	6 29 57 48,4	11 27 48,8	0,87	0,32	9,9974371
24	7 0 57 39,5	11 48 46,7	0,86	0,21	9,9973163
25	7 1 57 32,0	12 9 33,7	0,86	+ 0,07	9,9971962
26	7 2 57 26,3	12 30 9,3	0,85	− 0,06	9,9970769
27	7 3 57 22,2	12 50 33,4	0,84	0,18	9,9969588
28	7 4 57 19,8	13 10 45,4	0,83	0,29	9,9968420
29	7 5 57 19,2	13 30 45,0	0,83	0,39	9,9967265
30	7 6 57 20,3	13 50 31,8	0,82	0,47	9,9966124
31	7 7 57 23,2	14 10 5,2	− 0,81	0,53	9,9965000

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Lun.	11 28 34 58	0 5 22 52	2 16 6A	2 48 18A	11 41
2	Mart.	0 12 15 34	0 19 12 40	3 18 24	3 45 51	12 31
3	Merc.	0 26 13 40	1 3 18 3	4 10 8	4 30 46	13 23
4	Giov.	1 10 25 9	1 17 34 19	4 47 20	4 59 30	14 17
5	Ven.	1 24 44 53	2 1 56 11	5 7 1	5 9 41	15 13
6	Sab.	2 9 7 37	2 16 18 36	5 7 30	5 0 30	16 10
7	Dom.	2 23 28 38	3 0 37 17	4 48 48	4 32 39	17 9
8	Lun.	3 7 44 13	3 14 49 10	4 12 20	3 48 15	18 7
9	Mart.	3 21 51 57	3 28 52 25	3 20 49	2 50 30	19 4
10	Merc.	4 5 50 28	4 12 46 4	2 17 49	1 43 18	19 59
11	Giov.	4 19 39 10	4 26 29 45	1 7 29	0 30 57	20 51
12	Ven.	5 3 17 48	5 10 3 15	0 5 47B	0 42 10B	21 41
13	Sab.	5 16 46 4	5 23 26 9	1 17 40	1 51 50	22 30
14	Dom.	6 0 3 23	6 6 37 42	2 24 12	2 54 21	23 17
15	Lun.	6 13 8 57	6 19 37 4	3 21 56	3 46 39	* *
16	Mart.	6 26 1 56	7 2 23 30	4 8 14	4 26 30	0 3
17	Merc.	7 8 41 45	7 14 56 42	4 41 20	4 52 38	0 49
18	Giov.	7 21 8 23	7 27 16 57	5 0 21	5 4 31	1 36
19	Ven.	8 3 22 34	8 9 25 27	5 5 10	5 2 23	2 23
20	Sab.	8 15 25 55	8 21 24 19	4 56 14	4 46 53	3 10
21	Dom.	8 27 21 3	9 3 16 36	4 34 28	4 19 7	3 57
22	Lun.	9 9 11 30	9 15 6 18	4 1 1	3 40 20	4 45
23	Mart.	9 21 1 39	9 26 58 10	3 17 14	2 51 55	5 32
24	Merc.	10 2 56 31	10 8 57 23	2 24 35	1 55 28	6 20
25	Giov.	10 15 1 26	10 21 9 19	1 24 47	0 52 49	7 7
26	Ven.	10 27 21 41	11 3 39 7	0 19 51	0 13 46A	7 54
27	Sab.	11 10 2 10	11 16 31 14	0 47 41A	1 21 29	8 42
28	Dom.	11 23 6 41	11 29 48 45	1 54 42	2 26 52	9 30
29	Lun.	0 6 37 30	0 13 32 51	2 57 25	3 25 50	10 19
30	Mart.	0 20 34 32	0 20 42 7	3 51 31	4 13 56	11 11
31	Merc.	1 4 54 58	1 12 12 18	4 32 34	4 46 57	12 5

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	0 24	0 30A	57 43	58 2	31 30	31 40	5 38	17 51
2	1 18	4 8B	58 20	58 36	31 50	31 59	6 10	19 2
3	2 14	8 37	58 50	59 2	32 7	32 14	6 43	20 13
4	3 11	12 38	59 12	59 29	32 19	32 23	7 19	21 25
5	4 12	15 52	59 25	59 28	32 26	32 28	7 59	22 36
6	5 13	18 3	59 29	59 28	32 29	32 28	8 44	23 41
7	6 16	19 0	59 25	59 21	32 26	32 24	9 36	* *
8	7 18	18 39	59 16	59 9	32 21	32 17	10 33	0 42
9	8 19	17 3	59 1	58 52	32 13	32 8	11 37	1 38
10	9 18	14 23	58 42	58 32	32 3	31 57	12 45	2 26
11	10 14	10 53	58 21	58 9	31 51	31 45	13 52	3 6
12	11 8	6 49	57 57	57 44	31 38	31 31	14 59	3 41
13	12 1	2 27	57 30	57 16	31 23	31 15	16 6	4 13
14	12 52	1 58	57 1	56 46	31 7	30 59	17 12	4 44
15	* *	* *	56 30	56 15	30 50	30 42	18 15	5 14
16	13 43	6 13A	55 59	55 43	30 34	30 25	19 18	5 43
17	14 33	10 45	55 28	55 13	30 17	30 9	20 20	6 12
18	15 23	15 25	54 59	54 46	30 1	29 54	21 21	6 45
19	16 14	16 4	54 35	54 25	29 48	29 41	22 19	7 20
20	17 6	17 57	54 17	54 11	29 38	29 35	23 12	7 58
21	17 57	18 58	54 8	54 7	29 33	29 32	* *	8 41
22	18 49	19 5	54 8	54 12	29 33	29 35	0 2	9 29
23	19 40	18 19	54 18	54 26	29 38	29 43	0 46	10 21
24	20 32	16 40	55 37	54 51	29 49	29 56	1 26	11 18
25	21 23	14 12	55 7	55 26	30 5	30 15	2 1	12 18
26	22 14	10 59	55 46	56 8	30 26	30 38	2 35	13 19
27	23 6	7 8	56 32	56 57	30 51	31 5	3 6	14 25
28	23 58	2 47	57 23	57 49	31 19	31 33	3 37	15 35
29	0 52	1 52	58 14	58 38	31 47	32 0	4 7	16 41
30	1 47	6 33	59 1	59 22	32 13	32 25	4 40	17 52
31	2 45	10 58	59 41	59 56	32 35	32 43	5 15	19 5

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$16^h\ 49'$	*Occidente*
1	1.	○	2☌4 3.
2	2. 3.	○	1. .4
3	3. .2.1	○	.4
4	•1 .3	○	.2 .4
5	.3, 2.	○	.1 4.
6	.2 1.	○	.3 4.
7		○	.2.1 4☌3
8	1.	○	2☌4 3.
9	•3 2. 4.	○	1.
10	4☌3 2☌1	○	
11	4. .3	○	1. .2
12	4. .3	○	2..1
13	.4 2. 1.	○	.3
14	.4	○	2. .1 .3
15	.4 1.	○	.2 3.
16	.4 .2	○	3. 1.
17	3. 2☌1 .4	○	
18	3.	○	1. 2☌4
19	.3 .1	○	2. .4
20	2. 1.	○	.3 .4
21		○	.2 .1 .3 .4
22	1.	○	2. 3. 4.
23	2.	○	3. .1 4.
24	3. .2.1	○	4.
25	3.	○	1. 4. .2
26	.3 4. .1	○	2.
27	•1 4. 2.	○	.3
28	4.	○	.1 .3 20
29	4. 1.	○	.2, 3.
30	4. .2	○	1☌3
31	.4 2☌3 1.	○	

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
6	Ultimo quarto	20ʰ 59′
14	Luna nuova	9 49
22	Primo quarto	15 1
29	Luna piena.	16 1

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	54 γ ♉ 3. 4.ª	22 56
2	61 δ¹ ♉ 4.ª	0 39
2	64 δ² ♉ 4. 5.ª	1 3
2	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	5 22
2	104 m ♉ 5.ª	17 50
4	18 υ □ 5.ª	1 15
7	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	19 37
8	47 ρ ♌ 4.ª	7 14
8	63 χ ♌ 4. 5.ª	21 50
9	77 σ ♌ 4.ª	5 25
9	♃	8 3
13	15 ξ² ♎ 5.ª	15 29
14	38 γ ♎ 4. 5.ª	10 58
14	44 η ♎ 4. 5.ª	15 29
15	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	13 40
15	24 m ♏ 5.ª	18 56
18	43 d ♐ 5.ª	21 37
19	44 ρ¹ ♐ 5.ª	0 2
20	11 ρ ♑ 5.ª	7 47
22	51 μ ♑ 5.ª	1 7
22	57 σ ♒ 5.ª	19 37
23	73 λ ♒ 4.ª	7 52
23	90 φ ♒ 5.ª	18 28
25	♄	0 33
25	98 μ ♓ 5.ª	11 19
27	65 ξ¹ Balena 5.ª	5 49
27	73 ξ² Balena 5.ª	11 32
29	54 γ ♉ 3. 4.ª	9 23
29	61 δ¹ ♉ 4.ª	11 7
29	64 δ² ♉ 4. 5.ª	11 31
29	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª . .	15 45

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	ʰ ′ ″
1	21 42 47 imm.
* 3	16 11 9
5	10 39 35
7	5 7 55
8	23 36 20
* 10	18 4 40
12	12 33 6
14	7 1 24
16	1 29 48
17	19 58 7
* 19	14 26 31
21	8 54 49
23	3 23 11
24	21 51 29
* 26	16 19 53
28	10 48 9
30	5 16 30
	II. Satellite.
3	0 56 54 imm.
* 6	14 13 41
10	3 30 23
* 13	16 47 13
17	6 3 57
20	19 20 50
24	8 37 35
27	21 54 33
	III. Satellite.
7	4 12 44 imm.
7	7 26 39 em.
14	8 0 33 imm.
14	11 23 57 em.
21	11 58 25 imm.
* 21	15 21 17 em.
* 28	15 55 46 imm.
28	19 18 6 em.
	IV. Satellite.
* 11	16 55 48 imm.
11	21 7 15 em.
28	10 53 53 imm.
* 28	15 0 40 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
305	1	Giov.	23 43 44,42	14 26 13,18	14 42 31,43	6 58	5 2
306	2	Ven.	23 43 43,52	14 30 8,83	14 46 27,98	7 0	5 0
307	3	Sab.	23 43 43,43	14 34 5,30	14 50 24,54	7 1	4 59
308	4	Dom.	23 43 44,17	14 38 2,59	14 54 21,09	7 2	4 58
309	5	Lun.	23 43 45,74	14 42 0,72	14 58 17,65	7 4	4 56
310	6	Mart.	23 43 48,16	14 45 59,70	15 2 14,20	7 5	4 55
311	7	Merc.	23 43 51,44	14 49 59,54	15 6 10,75	7 6	4 54
312	8	Giov.	23 43 55,57	14 54 0,24	15 10 7,31	7 8	4 52
313	9	Ven.	23 44 0,56	14 58 1,80	15 14 3,86	7 9	4 51
314	10	Sab.	23 44 6,42	15 2 4,22	15 18 0,42	7 10	4 50
315	11	Dom.	23 44 13,15	15 6 7,53	15 21 56,97	7 12	4 48
316	12	Lun.	23 44 20,74	15 10 11,70	15 25 53,53	7 13	4 47
317	13	Mart.	23 44 29,19	15 14 16,73	15 29 50,08	7 14	4 46
318	14	Merc.	23 44 38,50	15 18 22,61	15 33 46,64	7 15	4 45
319	15	Giov.	23 44 48,66	15 22 29,35	15 37 43,19	7 16	4 44
320	16	Ven.	23 45 59,65	15 26 36,94	15 41 39,75	7 17	4 43
321	17	Sab.	23 45 11,48	15 30 45,36	15 45 36,31	7 19	4 41
322	18	Dom.	23 45 24,14	15 34 54,61	15 49 32,86	7 20	4 40
323	19	Lun.	23 45 37,62	15 39 4,68	15 53 29,42	7 21	4 39
324	20	Mart.	23 45 51,90	15 43 15,55	15 57 25,97	7 22	4 38
325	21	Merc.	23 46 6,97	15 47 27,22	16 1 22,53	7 23	4 37
326	22	Giov.	23 46 22,83	15 51 39,68	16 5 19,09	7 24	4 36
327	23	Ven.	23 46 39,45	15 55 52,91	16 9 15,64	7 25	4 35
328	24	Sab.	23 46 56,83	16 0 6,89	16 13 12,20	7 26	4 34
329	25	Dom.	23 47 14,96	16 4 21,61	16 17 8,75	7 27	4 33
330	26	Lun.	23 47 33,82	16 8 37,08	16 21 5,31	7 28	4 32
331	27	Mart.	23 47 53,39	16 12 53,27	16 25 1,87	7 29	4 31
332	28	Merc.	23 48 13,66	16 17 10,16	16 28 58,43	7 30	4 30
333	29	Giov.	23 48 34,63	16 21 27,74	16 32 54,98	7 31	4 29
334	30	Ven.	23 48 56,27	16 25 46,00	16 36 51,54	7 32	4 28

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	7 8 57 28,1	14 29 25,0	− 0,80	+ 0,55	9,9963892
2	7 9 57 34,7	14 48 30,9	0,79	0,56	9,9962800
3	7 10 57 43,3	15 7 22,4	0,78	0,52	9,9961724
4	7 11 57 53,8	15 25 58,9	0,77	0,46	9,9960664
5	7 12 58 6,5	15 44 20,4	0,76	0,37	9,9959619
6	7 13 58 21,1	16 2 26,3	0,75	0,26	9,9958589
7	7 14 58 37,7	16 20 16,1	0,74	+ 0,13	9,9957573
8	7 15 58 56,3	16 37 9,7	0,73	+ 0,01	9,9956569
9	7 16 59 16,9	16 55 6,4	0,71	0,14	9,9955578
10	7 17 59 39,6	17 12 6,1	0,70	0,26	9,9954599
11	7 19 0 4,2	17 28 47,8	0,69	0,37	9,9953630
12	7 20 0 30,6	17 45 11,5	0,68	0,47	9,9952670
13	7 21 0 58,8	18 1 16,8	0,66	0,55	9,9951718
14	7 22 1 28,8	18 17 3,2	0,65	0,60	9,9950775
15	7 23 2 0,3	18 32 30,4	0,63	0,61	9,9949841
16	7 24 2 33,5	18 47 38,0	0,62	0,59	9,9948916
17	7 25 3 8,0	19 2 25,4	0,61	0,54	9,9948000
18	7 26 3 44,1	19 16 52,2	0,59	0,48	9,9947093
19	7 27 4 21,3	19 30 58,2	0,58	0,39	9,9946198
20	7 28 4 59,8	19 44 43,2	0,56	0,29	9,9945316
21	7 29 5 39,4	19 58 6,4	0,55	0,17	9,9944448
22	8 0 6 20,2	20 11 7,5	0,53	+ 0,03	9,9943595
23	8 1 7 2,0	20 23 46,3	0,52	− 0,09	9,9942758
24	8 2 7 44,9	20 36 2,5	0,50	0,21	9,9941939
25	8 3 8 28,9	20 47 55,6	0,49	0,32	9,9941139
26	8 4 9 13,9	20 59 25,3	0,47	0,42	9,9940361
27	8 5 9 59,8	21 10 31,4	0,45	0,48	9,9939605
28	8 6 10 46,9	21 21 13,6	0,44	0,51	9,9938871
29	8 7 11 35,1	21 31 31,3	0,42	0,51	9,9938162
30	8 8 12 24,4	21 41 24,4	− 0,41	− 0,48	9,9937479

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Giov.	1 19 33 11	1 26 56 38	4 56 42A	5 1 34A	13 1
2	Ven.	2 4 21 31	2 11 46 46	5 1 22	4 56 5	14 0
3	Sab.	2 19 11 19	2 26 34 12	4 45 50	4 30 50	15 1
4	Dom.	3 3 54 34	3 11 11 42	4 11 26	3 48 4	16 1
5	Lun.	3 18 25 2	3 25 34 12	3 21 12	2 51 24	16 59
6	Mart.	4 2 38 57	4 9 39 10	2 19 14	1 45 18	17 55
7	Merc.	4 16 34 53	4 23 26 13	1 10 9	0 34 21	18 48
8	Giov.	5 0 13 20	5 6 56 29	0 1 35B	0 37 7B	19 39
9	Ven.	5 13 35 51	5 20 11 42	1 11 47	1 45 9	20 27
10	Sab.	5 26 44 15	6 3 13 42	2 16 49	2 46 24	21 14
11	Dom.	6 9 40 13	6 16 3 58	3 13 36	3 38 6	21 59
12	Lun.	6 22 25 2	6 28 43 31	3 59 42	4 18 9	22 45
13	Mart.	7 4 59 29	7 14 12 59	4 33 20	4 45 7	23 32
14	Merc.	7 17 24 5	7 23 2 49	4 53 26	4 58 17	* *
15	Giov.	7 29 39 15	8 5 43 28	4 59 38	4 57 34	0 17
16	Ven.	8 11 45 33	8 17 43 38	4 52 9	4 43 29	1 4
17	Sab.	8 23 43 55	8 29 40 38	4 31 44	4 17 4	1 52
18	Dom.	9 5 36 3	9 11 30 31	3 59 37	3 39 38	2 39
19	Lun.	9 17 24 27	9 23 18 18	3 17 16	2 52 47	3 27
20	Mart.	9 29 12 36	10 5 7 53	2 26 22	1 58 16	4 14
21	Merc.	10 11 4 48	10 17 4 0	1 28 44	0 58 1	5 1
22	Giov.	10 23 6 7	10 29 11 52	0 26 22	0 5 54A	5 47
23	Ven.	11 5 21 55	11 11 36 58	0 38 28A	1 11 1	6 33
24	Sab.	11 17 57 39	11 24 24 34	1 43 10	1 14 31	7 19
25	Dom.	0 0 58 15	0 7 39 7	2 44 37	3 12 59	8 7
26	Lun.	0 14 27 28	0 21 23 24	3 39 8	4 2 33	8 56
27	Mart.	0 28 26 53	1 5 57 36	4 22 40	4 39 0	9 48
28	Merc.	1 12 55 4	1 20 18 31	4 51 3	4 58 25	10 43
29	Giov.	1 27 47 1	2 5 19 25	5 0 47	4 57 57	11 42
30	Ven.	2 12 54 26	2 20 30 44	4 49 51	4 36 35	12 43

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' ''	' ''	' ''	' ''	h '	h '
1	3 46	14 44B	60 8	60 16	32 49	32 54	5 52	20 19
2	4 49	17 30	60 21	60 22	32 57	32 57	6 36	21 30
3	5 53	19 1	60 19	60 14	32 55	32 53	7 29	22 35
4	6 57	19 7	60 5	59 54	32 48	32 42	8 26	23 34
5	8 0	17 53	59 40	59 25	32 34	32 26	9 28	* *
6	9 1	15 30	59 9	58 51	32 17	32 7	10 35	0 25
7	9 58	12 12	58 33	58 15	31 58	31 48	11 43	1 8
8	10 52	8 17	57 57	57 39	31 38	31 28	12 51	1 45
9	11 44	4 1	57 21	57 4	31 18	31 9	13 56	2 18
10	12 35	0 22A	56 48	56 32	31 0	30 52	15 2	2 48
11	13 25	4 41	56 16	56 1	30 43	30 35	16 5	3 18
12	14 14	8 42	55 47	55 33	30 27	30 19	17 8	3 45
13	15 4	12 17	55 20	55 7	30 12	30 5	18 12	4 14
14	* *	* *	54 55	54 44	29 59	29 53	19 11	4 46
15	15 55	15 14	54 35	54 25	29 47	29 42	20 10	5 18
16	16 46	17 28	54 16	54 10	29 38	29 34	21 6	5 55
17	17 37	18 52	54 5	54 1	29 31	29 29	21 56	6 36
18	18 29	19 22	53 59	53 59	29 28	29 28	22 43	7 21
19	19 21	18 57	54 1	54 5	29 29	29 31	23 24	8 12
20	20 12	17 40	54 11	54 20	29 34	29 39	* *	9 7
21	21 3	15 33	54 31	54 44	29 45	29 52	0 2	10 5
22	21 53	12 41	55 0	55 18	30 1	30 11	0 35	11 5
23	22 43	9 9	55 38	56 1	30 22	30 34	1 5	12 8
24	23 33	5 6	56 26	56 52	30 47	31 2	1 34	13 12
25	0 25	0 38	57 20	57 49	31 18	31 34	2 4	14 19
26	1 18	4 1B	58 18	58 46	31 49	32 5	2 35	15 27
27	2 14	8 37	59 14	59 40	32 20	32 34	3 8	16 38
28	3 14	12 50	60 4	60 25	32 47	32 59	3 44	17 51
29	4 17	16 17	60 42	60 56	33 9	33 16	4 25	19 7
30	5 22	18 34	61 4	61 8	33 20	33 22	5 15	20 17

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	16^h 10′	*Occidente*
1	.4 3.	○	.2,1.
2	.3 .4 .1	○	2.
3	2. .3	○	1. 40
4	01 .2	○	3☌4
5	1.	○	.2 .3 .4
6		○	2. 1. 3. .4
7	2. 1. 3.	○	.4
8	3.	○	2. 1. 4.
9	.3 .1	○	.2 4.
10	.2.3	○	1. 4.
11	.2 .1	○	4. .3
12	4. 1.	○	.2 .3
13	4.	○	2☌1 3.
14	4. 2. 1. 3.	○	
15	4. 3.	○	.1 20
16	.4 .3 .1	○	2.
17	.4 .3,2.	○	1.
18	.4 .2 .1	○	.3
19	.4	○	1. .2 .3
20		○	.1 .4☌2 3.
21	2. 1.	○	3. .4
22	3. .2	○	.1 .4
23	.3 .1	○	.2 .4
24	.3 .2	○	1. .4
25	.2 .1	○	.3 4.
26		○	1. .2 .3 4.
27	01	○	2. 4. 3.
28	2. 1.	○	4. 3.
29	4☌3 .2	○	.1
30	4. 3. 1.	○	.2

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
6	Ultimo quarto	$7^h 29'$
14	Luna nuova	4 14
22	Primo quarto	8 17
29	Luna piena	2 37

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	62 χ^2 Orione 5.ª	1 5
1	18 υ □ 5.ª	10 25
5	32 α ♌ (Regolo) 1.ª	1 53
5	47 ρ ♌ 4.ª	13 11
6	63 χ ♌ 4.ª	3 33
6	77 σ ♌ 4. 5.ª	11 2
6	♅	19 57
10	15 ξ^2 ♎ 5.ª	21 29
11	38 γ ♎ 4. 5.ª	17 9
11	44 η ♎ 4. 5.ª	21 33
12	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	20 1
12	24 m ♏ 5.ª	1 17
16	43 d ♐ 5.ª	4 7
16	44 ρ^1 ♐ 4. 5.ª	6 23
17	10 π ♑ 5.ª	13 9
17	11 ρ ♑ 5.ª	14 15
19	51 μ ♑ 5.ª	7 57
20	57 σ ♒ 5.ª	2 56
20	73 λ ♒ 4.ª	15 7
21	90 φ ♒ 5.ª	1 57
22	♄	9 21
23	98 μ ♓ 5.ª	20 47
24	65 ξ^1 Balena 5.ª	15 57
24	73 ξ^2 Balena 5.ª	21 53
25	87 μ Balena 4.ª	5 25
26	54 γ ♉ 3. 4.ª	20 43
26	61 δ^1 ♉ 4.ª	22 27
26	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	22 51
26	87 α ♉ (Aldebaran) 1.ª	3 9

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
1	$23^h 44' 48''$ imm.
3	18 13 11
5	12 41 27
7	7 9 47
9	1 38 4
10	20 6 25
* 12	14 34 41
14	9 3 0
16	3 31 17
17	21 59 38
* 19	16 27 53
21	10 56 12
23	5 24 28
24	23 52 49
* 26	18 21 4
28	12 49 23
30	7 17 39
	II. Satellite.
1	11 11 19 imm.
5	0 28 23
* 8	13 45 12
12	3 2 21
* 15	16 19 11
19	5 36 27
22	18 53 20
26	8 10 43
29	21 27 39
	III. Satellite.
5	19 53 3 imm.
5	23 14 51 em.
12	23 50 37 imm.
13	3 11 51 em.
20	3 48 11 imm.
20	7 8 51 em.
27	7 46 21 imm.
27	11 6 26 em.
	IV. Satellite.
15	4 52 10 imm.
15	8 53 56 em.
31	22 50 5 imm.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
335	1	Sab.	23 49 19,58	16 30 4,92	16 40 48,10	7 33	4 27
336	2	Dom.	23 49 41,54	16 34 24,50	16 44 44,65	7 33	4 27
337	3	Lun.	23 50 5,13	16 38 44,69	16 48 41,21	7 34	4 26
338	4	Mart.	23 50 29,32	16 43 5,52	16 52 37,76	7 35	4 25
339	5	Merc.	23 50 54,09	16 47 26,92	16 56 34,32	7 36	4 24
340	6	Giov.	23 51 19,41	16 51 48,88	17 0 30,88	7 36	4 24
341	7	Ven.	23 51 45,27	16 56 11,36	17 4 27,44	7 37	4 23
342	8	Sab.	23 52 11,67	17 0 34,38	17 8 24,00	7 37	4 23
343	9	Dom.	23 52 38,54	17 4 57,88	17 12 20,55	7 38	4 22
344	10	Lun.	23 53 5,85	17 9 21,83	17 16 17,11	7 38	4 22
345	11	Mart.	23 53 33,60	17 13 46,22	17 20 13,67	7 39	4 21
346	12	Merc.	23 54 1,74	17 18 11,00	17 24 10,22	7 39	4 21
347	13	Giov.	23 54 30,23	17 22 36,12	17 28 6,78	7 40	4 20
348	14	Ven.	23 54 59,03	17 27 1,54	17 32 3,33	7 40	4 20
349	15	Sab.	23 55 28,12	17 31 27,27	17 35 59,89	7 40	4 20
350	16	Dom.	23 55 57,44	17 35 53,23	17 39 56,45	7 41	4 19
351	17	Lun.	23 56 26,96	17 40 19,40	17 43 53,01	7 41	4 19
352	18	Mart.	23 56 56,69	17 44 45,76	17 47 49,57	7 41	4 19
353	19	Merc.	23 57 26,54	17 49 12,25	17 51 46,13	7 42	4 18
354	20	Giov.	23 57 56,49	17 53 38,83	17 55 42,68	7 42	4 18
355	21	Ven.	23 58 26,48	17 58 5,47	17 59 39,24	7 42	4 18
356	22	Sab.	23 58 56,50	18 2 32,13	18 3 35,80	7 42	4 18
357	23	Dom.	23 59 26,51	18 6 58,77	18 7 32,35	7 42	4 18
358	24	Lun.	23 59 56,46	18 11 25,36	18 11 28,91	7 42	4 18
359	25	Mart.	0 0 26,35	18 15 51,89	18 15 25,47	7 41	4 19
360	26	Merc.	0 0 56,12	18 20 18,30	18 59 22,03	7 41	4 19
361	27	Giov.	0 1 25,74	18 24 44,58	18 43 18,59	7 41	4 19
362	28	Ven.	0 1 55,22	18 29 10,68	18 57 15,15	7 40	4 20
363	29	Sab.	0 2 24,51	18 33 36,61	18 31 11,70	7 40	4 20
364	30	Dom.	0 2 53,56	18 38 2,29	18 35 8,26	7 39	4 21
365	31	Lun.	0 3 22,34	18 42 27,72	18 39 4,82	7 39	4 21

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	8 9 13 15,0	21 50 52,8	− 0,39	− 0,43	9,9936821
2	8 10 14 6,7	21 59 55,9	0,37	0,36	9,9936188
3	8 11 14 59,4	22 8 33,7	0,35	0,25	9,9935579
4	8 12 15 53,7	22 16 45,9	0,34	− 0,13	9,9934994
5	8 13 16 49,0	22 24 32,1	0,32	+ 0,01	9,9934432
6	8 14 17 45,7	22 31 52,1	0,30	0,14	9,9933892
7	8 15 18 43,4	22 38 45,6	0,28	0,27	9,9933373
8	8 16 19 42,5	22 45 12,6	0,26	0,39	9,9932875
9	8 17 20 42,6	22 51 12,8	0,24	0,49	9,9932898
10	8 18 21 43,8	22 56 45,9	0,22	0,57	9,9931939
11	8 19 22 46,1	23 1 51,8	0,20	0,64	9,9931497
12	8 20 23 49,5	23 6 30,3	0,18	0,66	9,9931071
13	8 21 24 53,6	23 10 41,3	0,16	0,65	9,9930661
14	8 22 25 58,5	23 14 24,5	0,15	0,61	9,9930267
15	8 23 27 4,1	23 17 39,8	0,13	0,54	9,9929887
16	8 24 28 10,3	23 20 27,1	0,11	0,46	9,9929522
17	8 25 29 16,9	23 22 46,3	0,09	0,35	9,9929173
18	8 26 30 24,0	23 24 37,3	0,07	0,23	9,9928840
19	8 27 31 31,4	23 26 0,2	0,05	+ 0,10	9,9928526
20	8 28 32 39,0	23 26 54,9	0,03	− 0,04	9,9928232
21	8 29 33 46,8	23 27 21,4	− 0,01	0,16	9,9927958
22	9 0 34 54,7	23 27 19,5	+ 0,01	0,27	9,9927705
23	9 1 36 2,5	23 26 49,2	0,03	0,37	9,9927474
24	9 2 37 10,3	23 25 50,5	0,05	0,43	9,9927266
25	9 3 38 18,4	23 24 23,6	0,07	0,47	9,9927084
26	9 4 39 26,5	23 22 28,5	0,09	0,50	9,9926928
27	9 5 40 34,5	23 20 5,2	0,11	0,48	9,9926798
28	9 6 41 42,6	23 17 13,7	0,13	0,43	9,9926695
29	9 7 42 50,8	23 13 54,2	0,15	0,35	9,9926622
30	9 8 43 59,1	23 10 6,9	0,17	0,25	9,9926578
31	9 9 45 7,5	23 5 51,8	+ 0,19	− 0,24	9,9926563

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Sab.	2 28 6 56	3 5 41 40	4 18 25A	3 55 44A	13 46
2	Dom.	3 13 13 44	3 20 42 3	3 28 59	2 58 50	14 48
3	Lun.	3 28 5 41	4 5 23 57	2 25 55	1 50 58	15 47
4	Mart.	4 12 36 23	4 19 42 43	1 14 38	0 37 37	16 44
5	Merc.	4 26 42 51	5 3 36 51	0 0 32	0 36 2B	17 36
6	Giov.	5 10 24 56	5 17 7 23	1 11 35B	1 45 38	18 26
7	Ven.	5 23 44 33	6 0 16 50	2 17 48	2 47 45	19 13
8	Sab.	6 6 44 38	6 13 8 21	3 15 11	3 39 49	19 58
9	Dom.	6 19 28 21	6 25 45 50	4 1 30	4 20 2	20 43
10	Lun.	7 1 58 39	7 8 9 37	4 35 18	4 47 12	21 28
11	Mart.	7 14 18 11	7 20 24 34	4 55 41	5 0 43	22 14
12	Merc.	7 26 28 59	8 2 31 38	5 2 18	5 0 27	23 1
13	Giov.	8 8 32 40	8 14 32 15	4 55 15	4 46 48	23 48
14	Ven.	8 20 30 31	8 26 27 36	4 35 13	4 20 38	* *
15	Sab.	9 2 23 41	9 8 18 55	4 3 13	3 43 12	0 35
16	Dom.	9 14 13 31	9 20 7 44	3 20 45	2 56 8	1 23
17	Lun.	9 26 1 50	10 1 56 10	2 29 36	2 1 22	2 10
18	Mart.	10 7 51 6	10 13 47 4	1 31 45	1 1 0	2 57
19	Merc.	10 19 44 32	10 25 44 0	0 29 24	0 2 43A	3 43
20	Giov.	11 1 46 3	11 7 51 14	0 35 5A	1 7 21	4 28
21	Ven.	11 14 0 9	11 20 13 27	1 39 11	2 10 14	5 13
22	Sab.	11 26 31 44	0 2 55 36	2 40 7	3 8 27	5 59
23	Dom.	0 9 25 38	0 16 2 20	3 34 49	3 58 46	6 45
24	Lun.	0 22 46 10	0 29 37 24	4 19 52	4 37 39	7 35
25	Mart.	1 6 36 12	1 13 42 32	4 51 39	5 1 28	8 26
26	Merc.	1 20 56 9	1 28 16 34	5 6 40	5 6 57	9 21
27	Giov.	2 5 43 5	2 13 14 47	5 2 5	4 51 57	10 21
28	Ven.	2 20 50 33	2 28 29 6	4 36 37	4 16 14	11 23
29	Sab.	3 6 9 3	3 13 48 58	3 51 9	3 21 52	12 27
30	Dom.	3 21 27 29	3 29 3 16	2 49 1	2 13 18	13 30
31	Lun.	4 6 35 6	4 14 2 0	1 35 31	0 56 26	14 30

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	6 29	19 25B	61 7	61 2	33 22	33 19	6 11	21 22
2	7 35	18 46	60 52	60 38	33 13	33 6	7 14	22 18
3	8 38	16 45	60 21	60 1	32 57	32 46	8 21	23 7
4	9 39	13 40	59 39	59 15	32 34	32 21	9 32	23 47
5	10 36	9 50	58 50	58 25	32 7	31 53	10 41	* *
6	11 29	5 35	58 0	57 35	31 40	31 26	11 49	0 21
7	12 20	1 10	57 11	56 49	31 13	31 1	12 55	0 53
8	13 10	3 12A	56 28	56 8	30 49	30 38	13 58	1 23
9	13 58	7 20	55 50	55 33	30 28	30 19	15 1	1 50
10	14 48	11 5	55 17	55 3	30 11	30 3	16 3	2 18
11	15 38	14 16	54 50	54 39	29 56	29 50	17 4	2 47
12	16 28	16 48	54 29	54 20	29 44	29 39	18 4	3 19
13	17 20	18 32	54 12	54 6	29 35	29 32	19 0	3 54
14	* *	* *	54 1	53 57	29 29	29 27	19 52	4 33
15	18 11	19 24	53 54	53 53	29 26	29 25	20 41	5 18
16	19 3	19 21	53 53	53 55	29 25	29 26	21 24	6 6
17	19 55	18 23	53 58	54 3	29 28	29 31	22 3	6 59
18	20 45	16 35	54 10	54 18	29 34	29 38	22 37	7 50
19	21 35	14 1	54 28	54 41	29 44	29 51	23 7	8 55
20	22 25	10 46	54 55	55 11	29 59	30 8	23 36	9 56
21	23 13	6 59	55 29	55 50	30 18	30 29	* *	10 58
22	0 4	2 47	56 13	56 38	30 41	30 55	0 4	12 2
23	0 54	1 41B	57 4	57 32	31 9	31 24	0 33	13 7
24	1 47	6 13	58 1	58 30	31 40	31 56	1 5	14 15
25	2 43	10 34	58 59	59 27	32 12	32 27	1 37	15 25
26	3 42	14 26	59 54	60 19	32 42	32 55	2 14	16 37
27	4 46	17 25	60 41	60 59	33 7	33 17	2 58	17 51
28	5 52	19 9	61 13	61 23	33 25	33 30	3 51	18 58
29	7 0	19 23	61 27	61 26	33 32	33 32	4 51	20 1
30	8 7	18 4	61 20	61 9	33 29	33 23	5 59	20 55
31	9 11	15 25	60 54	60 34	33 15	33 4	7 10	21 45

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

		Oriente	15ʰ 36′	*Occidente*	
1		4. .3	○	.1	2●
2	4.	.2 .1	○	.3	
3	.4		○	1. .2 .3	
4		.4 .1	○	2. 3.	
5	●1	.4 2.	○	3.	
6		3☌4 .2	○	.1	
7		3. 1.	○	.4 .2	
8		.3	○	2. .1 .4	
9	○3	.2 .1	○	.4	
10			○	1☌2 .3 .4	
11		.1	○	2. .3 4.	
12		2.	○	1. 3. 4.	
13		3☌2	○	.1 4.	
14		3. 1.	○	4☌2	
15	●4	.3	○	2. .1	
16		2☌4 1. .3	○		
17		4.	○	.2, 1. .3	
18		4. .1	○	2. .3	
19	4.	2.	○	1. 3.	
20		.4 .2, 3. .1	○		
21		.4 3. 1.	○	.2	
22		3☌4	○	1☌2	
23		2.1☌3☌4	○		
24	○2		○	1☌4 .3	
25		.1	○	2. .4 .3	
26		2.	○	1. 3. .4	
27	●3	.2 .1	○	.4	
28	●1	3.	○	.2 4.	
29		3.	○	.1, 2. 4.	
30		2. .3, 1.	○	4.	
31		.2	○	.1, 4☌3	

Semidiametro del Sole, tempo sidereo impiegato dal Sole a passare pel meridiano, e longitudine del nodo della Luna a' mezzodì medio.

Giorni.		Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.	Giorni.		Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.
		′ ″	′ ″	s ° ′			′ ″	′ ″	s ° ′
Gennajo	1	16 17,8	2 21,0	5 15 30	Luglio	6	15 45,6	2 17,1	5 5 39
	7	16 17,7	2 21,4	5 15 11		12	15 45,8	2 16,4	5 5 20
	13	16 17,4	2 20,4	5 14 52		18	15 46,1	2 15,5	5 5 1
	19	16 16,9	2 19,3	5 14 33		24	15 46,5	2 14,6	5 4 41
	25	16 16,3	2 18,1	5 14 14		30	15 47,1	2 13,6	5 4 22
	31	16 15,5	2 16,7	5 13 54	Agosto	5	15 47,9	2 12,5	5 4 3
Febbrajo	6	16 14,5	2 15,3	5 13 35		11	15 48,8	2 11,5	5 3 44
	12	16 13,4	2 13,8	5 13 16		17	15 49,9	2 10,5	5 3 25
	18	16 12,2	2 12,6	5 12 57		23	15 51,1	2 9,7	5 3 6
	24	16 10,9	2 11,5	5 12 38		29	15 52,4	2 9,1	5 2 47
Marzo	2	16 9,5	2 10,6	5 12 19	Settembre	4	15 53,8	2 8,6	5 2 28
	8	16 8,0	2 9,9	5 12 0		10	15 55,3	2 8,2	5 2 9
	14	16 6,5	2 9,4	5 11 41		16	15 56,8	2 8,1	5 1 50
	20	16 4,8	2 9,0	5 11 22		22	15 58,4	2 8,2	5 1 31
	26	16 3,1	2 8,9	5 11 3		28	16 0,0	2 8,5	5 1 12
Aprile	1	16 1,5	2 8,9	5 10 44	Ottobre	4	16 1,6	2 9,0	5 0 53
	7	15 59,8	2 9,3	5 10 25		10	16 3,3	2 9,7	5 0 34
	13	15 58,2	2 9,7	5 10 6		16	16 5,0	2 10,7	5 0 15
	19	15 56,6	2 10,3	5 9 47		22	16 6,6	2 11,8	4 29 56
	25	15 55,1	2 11,1	5 9 28		28	16 8,2	2 13,0	4 29 37
Maggio	1	15 53,6	2 12,0	5 9 9	Novembre	3	16 9,7	2 14,4	4 29 18
	7	15 52,3	2 13,0	5 8 50		9	16 11,2	2 15,7	4 28 59
	13	15 51,0	2 14,0	5 8 31		15	16 12,5	2 17,1	4 28 40
	19	15 49,8	2 14,9	5 8 12		21	16 13,7	2 18,5	4 28 21
	25	15 48,8	2 15,8	5 7 53		27	16 14,7	2 19,8	4 28 2
	31	15 47,9	2 16,6	5 7 33	Dicembre	3	16 15,6	2 20,8	4 27 43
Giugno	6	15 47,1	2 17,2	5 7 14		9	16 16,4	2 21,6	4 27 24
	12	15 46,5	2 17,6	5 6 55		15	16 17,1	2 22,2	4 27 5
	18	15 46,0	2 17,8	5 6 36		21	16 17,4	2 22,5	4 26 46
	24	15 45,6	2 17,8	5 6 17		27	16 17,7	2 22,3	4 26 25
	30	15 45,5	2 17,5	5 5 58					

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo 1	9 6 38	1 29A	18 29	24 45A	19 33	23 45	3 57
7	9 16 22	1 52	19 12	24 18	19 50	0 4	4 18
13	9 26 14	2 4	19 55	22 57	20 2	0 23	4 44
19	10 6 26	2 2	20 37	20 40	20 9	0 42	5 15
25	10 16 47	1 41	21 19	17 27	20 11	1 0	5 49
31	10 26 51	0 57	21 58	13 28	20 8	1 15	6 22
Febbrajo 6	11 5 10	0 16B	22 29	9 15	19 58	1 23	6 48
12	11 10 37	1 48	22 46	5 54	19 37	1 16	6 55
18	11 10 12	3 12	22 42	4 44	19 5	0 49	6 33
24	11 4 56	3 41	22 22	6 15	18 28	0 5	5 42
Marzo 2	10 29 17	2 59	22 1	8 57	17 54	23 20	4 46
8	10 26 51	1 39	21 54	11 2	17 32	22 50	4 8
14	10 28 8	0 17	22 0	11 53	17 20	22 33	3 46
20	11 2 13	0 52A	22 18	11 30	17 10	22 26	3 42
26	11 8 16	1 43	22 42	10 4	17 5	22 27	3 49
Aprile 1	11 15 43	2 15	23 10	7 44	17 0	22 32	4 4
7	11 24 16	2 29	23 43	4 36	16 56	22 40	4 24
13	0 3 49	2 27	0 18	0 44	16 51	22 51	4 51
19	0 14 20	2 5	0 56	3 42B	16 48	23 6	5 24
25	0 25 50	1 25	1 37	8 38	16 45	23 24	6 3
Maggio 1	1 8 13	0 30	2 23	13 45	16 46	23 47	6 48
7	1 21 10	0 32B	3 14	16 33	16 51	0 14	7 39
13	2 3 51	1 29	4 6	22 22	17 0	0 42	8 24
19	2 15 23	2 6	4 55	24 43	17 13	1 8	9 3
25	2 25 13	2 15	5 39	25 36	17 26	1 27	9 28
31	3 3 8	1 54	6 13	25 20	17 39	1 38	9 37
Giugno 6	3 8 58	1 5	6 39	24 14	17 48	1 40	9 32
12	3 12 26	0 4A	6 54	22 42	17 47	1 31	9 15
18	3 13 16	1 44	6 57	21 4	17 36	1 11	8 46
24	3 11 33	3 20	6 49	19 33	17 11	0 39	8 7
30	3 8 13	4 28	6 34	18 44	16 37	0 1	7 25

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	3 5 8	4 46A	6 21	18 34B	16 0	23 24	6 48
	12	3 4 11	4 12	6 17	19 10	15 31	22 57	6 23
	18	3 6 22	3 1	6 27	20 16	15 10	22 42	6 14
	24	3 11 49	1 36	6 50	21 20	15 5	22 42	6 19
	30	3 20 17	0 21	7 27	21 44	15 16	22 55	6 34
Agosto	5	4 1 7	0 55B	8 14	20 50	15 42	23 18	6 54
	11	4 13 11	1 35	9 4	18 24	16 23	23 45	7 7
	17	4 25 20	1 45	9 53	14 45	17 4	0 10	7 16
	23	5 6 54	1 32	10 37	10 25	17 44	0 30	7 16
	29	5 17 45	1 3	11 16	5 50	18 19	0 46	7 13
Settem.	4	5 27 50	0 24	11 53	1 15	18 49	0 58	7 7
	10	6 7 11	0 21A	12 25	3 9A	19 18	1 8	6 58
	16	6 15 50	1 8	12 56	7 16	19 42	1 15	6 48
	22	6 23 45	1 55	13 25	11 0	20 2	1 20	6 38
	28	7 0 44	2 36	13 50	14 10	20 18	1 22	6 26
Ottobre	4	7 6 17	3 9	14 11	16 31	20 27	1 20	6 13
	10	7 9 34	3 21	14 24	17 53	20 22	1 9	5 56
	16	7 9 7	2 57	14 23	17 23	19 55	0 44	5 33
	22	7 3 55	1 36	14 4	14 23	18 59	0 2	5 5
	28	6 27 0	0 22B	13 40	10 13	17 53	23 14	4 35
Novem.	3	6 24 30	1 48	13 33	7 46	17 12	22 43	4 14
	9	6 28 5	2 17	13 48	8 38	17 5	22 33	4 1
	15	7 5 17	2 4	14 14	11 19	17 21	22 37	3 53
	21	7 14 0	1 31	14 47	14 34	17 41	22 47	3 53
	27	7 23 11	0 51	15 24	17 44	18 11	22 59	3 47
Dicem.	3	8 2 31	0 8	16 2	20 31	18 39	23 13	3 47
	9	8 11 53	0 32A	16 41	22 44	19 6	23 29	3 53
	15	8 21 17	1 8	17 22	24 17	19 31	23 45	3 59
	21	9 0 47	1 37	18 3	25 4	19 52	0 3	4 14
	27	9 10 24	1 59	18 46	25 0	20 11	0 22	4 33

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	10 20 28	1 47A	21 34	16 23A	21 56	2 50	7 44
	7	10 27 39	1 37	22 1	13 49	21 48	2 54	8 0
	13	10 4 48	1 22	22 28	11 2	21 39	2 57	8 15
	19	11 11 52	1 5	22 54	8 7	21 30	3 0	8 30
	25	11 18 51	0 44	23 20	5 6	21 20	3 2	8 44
	31	11 25 47	0 19	23 45	2 0	21 8	3 3	8 58
Febbrajo	6	0 2 34	0 8B	0 9	1 7B	20 55	3 3	9 11
	12	0 9 13	0 37	0 32	4 12	20 43	3 3	9 23
	18	0 15 44	1 9	0 56	7 4	20 31	3 3	9 35
	24	0 22 4	1 43	1 19	10 10	20 17	3 2	9 47
Marzo	2	0 28 9	2 17	1 41	12 58	20 3	3 1	9 59
	8	1 4 1	2 53	2 2	15 34	19 50	2 59	10 8
	14	1 9 33	3 29	2 24	17 58	19 35	2 56	10 17
	20	1 14 40	4 4	2 44	20 7	19 21	2 52	10 23
	26	1 19 18	4 36	3 2	21 59	19 5	2 46	10 27
Aprile	1	1 23 19	5 6	3 18	23 33	18 49	2 39	10 29
	7	1 26 33	5 30	3 31	24 46	18 33	2 29	10 25
	13	1 28 48	5 48	3 41	25 35	18 14	2 15	10 16
	19	1 29 55	5 54	3 45	25 56	17 53	1 56	9 59
	25	1 29 38	5 46	3 44	25 45	17 29	1 31	9 33
Maggio	1	1 27 55	5 17	3 38	24 54	17 4	1 1	8 58
	7	1 25 0	4 26	3 26	23 21	16 37	0 25	8 13
	13	1 21 21	3 14	3 12	21 15	16 11	23 48	7 25
	19	1 17 50	1 51	2 59	18 55	15 46	23 11	6 36
	25	1 15 11	0 27	2 50	16 48	15 23	22 38	5 53
	31	1 13 50	0 47A	2 46	15 13	15 3	22 11	5 19
Giugno	6	1 13 53	1 48	2 47	14 16	14 45	21 48	4 51
	12	1 15 14	2 35	2 54	13 55	14 29	21 31	4 33
	18	1 17 41	3 8	3 4	14 5	14 16	21 18	4 20
	24	1 21 1	3 29	3 18	14 38	14 3	21 8	4 13
	30	1 25 3	3 41	3 34	15 26	13 52	21 0	4 8

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	1 29 39	3 46A	3 53	16 23B	13 43	20 56	4 9
	12	2 4 42	3 43	4 14	17 25	13 36	20 53	4 10
	18	2 10 6	3 35	4 36	18 25	13 29	20 51	4 13
	24	2 15 48	3 22	5 0	19 19	13 24	20 51	4 18
	30	2 21 44	3 7	5 24	20 5	13 23	20 53	4 23
Agosto	5	2 27 52	2 47	5 51	20 38	13 21	20 55	4 29
	11	3 4 11	2 26	6 18	20 57	13 23	20 58	4 33
	17	3 10 38	2 3	6 45	20 58	13 27	21 2	4 37
	23	3 17 13	1 40	7 13	20 42	13 33	21 7	4 41
	29	3 23 55	1 15	7 42	20 7	13 42	21 12	4 42
Settem.	4	4 0 43	0 51	8 11	19 11	13 51	21 17	4 43
	10	4 7 36	0 27	8 40	17 57	14 1	21 22	4 43
	16	4 14 34	0 4	9 8	16 25	14 14	21 27	4 40
	22	4 21 37	0 17B	9 36	14 35	14 26	21 31	4 36
	28	4 28 44	0 36	10 4	12 29	14 41	21 36	4 31
Ottobre	4	5 5 54	0 54	10 31	10 12	14 55	21 40	4 25
	10	5 13 8	1 8	10 59	7 42	15 9	21 44	4 19
	16	5 20 25	1 22	11 27	5 3	15 23	21 47	4 11
	22	5 27 45	1 31	11 54	2 18	15 38	21 51	4 4
	28	6 5 6	1 37	12 21	0 32A	15 53	21 54	3 55
Novem.	3	6 12 30	1 40	12 49	3 23	16 9	21 58	3 47
	9	6 19 55	1 41	13 16	6 13	16 24	22 2	3 40
	15	6 27 23	1 39	13 44	8 59	16 40	22 6	3 32
	21	7 4 51	1 35	14 13	11 39	16 56	22 11	3 26
	27	7 12 20	1 28	14 41	14 9	17 12	22 16	3 20
Dicem.	3	7 19 50	1 18	15 11	16 26	17 28	22 22	3 16
	9	7 27 20	1 7	15 41	18 29	17 45	22 29	3 13
	15	8 4 52	0 55	16 12	20 13	18 1	22 37	3 13
	21	8 12 24	0 42	16 44	21 36	18 17	22 45	3 13
	27	8 19 56	0 27	17 16	22 37	18 30	22 53	3 16

POSIZIONI DI MARTE DI SEI IN SEI GIORNI A MEZZODÌ MEDIO.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	8 17 1	0 17A	17 4	23 5A	18 8	22 19	2 40
	7	8 21 23	0 21	17 22	23 30	17 54	22 14	2 34
	13	8 25 45	0 25	17 41	23 47	17 53	22 10	2 27
	19	9 0 8	0 29	18 0	23 55	17 49	22 5	2 21
	25	9 4 35	0 33	18 20	23 55	17 45	22 1	2 17
	31	9 9 2	0 37	18 40	23 45	17 39	21 57	2 15
Febb.	6	9 13 29	0 41	18 59	23 27	17 34	21 53	2 12
	12	9 17 58	0 44	19 18	22 59	17 28	21 49	2 10
	18	9 22 28	0 49	19 37	22 23	17 19	21 44	2 9
	24	9 27 0	0 53	19 57	21 38	17 12	21 40	2 8
Marzo	2	10 1 32	0 57	20 16	20 45	17 2	21 35	2 8
	8	10 6 5	1 1	20 35	19 45	16 53	21 31	2 9
	14	10 10 39	1 5	20 53	18 37	16 43	21 26	2 9
	20	10 15 14	1 9	21 12	17 22	16 32	21 21	2 10
	26	10 19 48	1 12	21 30	16 2	16 19	21 15	2 11
Aprile	1	10 24 23	1 16	21 48	14 35	16 7	21 9	2 11
	7	10 28 59	1 19	22 6	13 4	15 55	21 4	2 13
	13	11 3 35	1 22	22 24	11 26	15 42	20 58	2 14
	19	11 8 10	1 24	22 41	9 49	15 28	20 51	2 14
	25	11 12 45	1 26	22 58	8 7	15 15	20 45	2 15
Maggio	1	11 17 20	1 29	23 15	6 23	15 2	20 39	2 16
	7	11 21 54	1 31	23 32	4 36	14 48	20 32	2 16
	13	11 26 26	1 32	23 49	2 50	14 34	20 25	2 16
	19	0 0 58	1 34	0 6	1 3	14 19	20 18	2 17
	25	0 5 29	1 35	0 23	0 44B	14 5	20 11	2 17
	31	0 9 59	1 35	0 39	2 28	13 51	20 4	2 17
Giugno	6	0 14 26	1 35	0 56	4 12	13 36	19 56	2 16
	12	0 18 51	1 35	1 12	5 54	13 22	19 49	2 16
	18	0 23 14	1 35	1 28	7 34	13 8	19 42	2 16
	24	0 27 35	1 34	1 44	9 8	12 54	19 35	2 16
	30	1 1 53	1 33	2 0	10 40	12 40	19 27	2 14

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	1 6 7	1 31A	2 17	12 8B	12 26	19 20	2 14
	12	1 10 18	1 29	2 33	13 31	12 12	19 12	2 12
	18	1 14 26	1 26	2 50	14 49	11 59	19 5	2 11
	24	1 18 29	1 22	3 6	16 1	11 46	18 57	2 8
	30	1 22 28	1 18	3 22	17 7	11 34	18 50	2 6
Agosto	5	1 26 22	1 15	3 38	18 8	11 21	18 42	2 3
	11	2 0 11	1 10	3 53	19 3	11 9	18 34	1 59
	17	2 3 55	1 5	4 8	19 53	10 56	18 26	1 56
	23	2 7 32	1 0	4 23	20 35	10 43	18 17	1 51
	29	2 11 1	0 54	4 38	21 14	10 31	18 8	1 45
Settem.	4	2 14 23	0 47	4 52	21 45	10 19	17 59	1 39
	10	2 17 36	0 40	5 6	22 12	10 7	17 49	1 31
	16	2 20 39	0 32	5 19	22 35	9 53	17 38	1 23
	22	2 23 30	0 24	5 32	22 54	9 41	17 27	1 13
	28	2 26 10	0 15	5 44	23 10	9 28	17 15	1 2
Ottobre	4	2 28 35	0 4	5 54	23 23	9 14	17 2	0 50
	10	3 0 44	0 7B	6 3	23 34	8 58	16 47	0 36
	16	3 2 35	0 19	6 11	23 45	8 42	16 32	0 22
	22	3 4 4	0 32	6 18	23 56	8 24	16 15	0 6
	28	3 5 11	0 46	6 23	24 8	8 4	15 56	23 48
Novem.	3	3 5 52	1 2	6 26	24 22	7 43	15 36	23 29
	9	3 6 4	1 19	6 27	24 37	7 18	15 13	23 8
	15	3 5 46	1 36	6 25	24 56	6 51	14 48	22 45
	21	3 4 56	1 54	6 22	25 16	6 21	14 20	22 19
	27	3 3 37	2 12	6 16	25 35	5 50	13 51	21 52
Dicem.	3	3 1 51	2 29	6 8	25 55	5 16	13 19	21 22
	9	2 29 45	2 45	5 59	26 12	4 42	12 46	20 50
	15	2 27 25	2 58	5 48	26 23	4 7	12 12	20 17
	21	2 25 5	3 8	5 38	26 30	3 32	11 38	19 44
	27	2 22 55	3 15	5 27	26 31	2 59	11 5	19 11

Posizioni di Cerere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Giugno	1	9 11 42	2 53A	18 52	25 48A	10 7	14 13	18 19
	7	9 10 37	3 15	18 47	26 15	9 42	13 46	17 50
	13	9 9 27	3 38	18 43	26 43	9 7	13 17	17 18
	19	9 8 17	4 3	18 38	27 10	8 50	12 48	16 46
	25	9 7 6	4 26	18 32	27 35	8 23	12 18	16 13
Luglio	1	9 5 51	4 42	18 26	27 58	7 56	11 49	15 41
	7	9 4 38	4 56	18 21	28 18	7 28	11 19	15 10
	13	9 3 25	5 10	18 15	28 35	7 1	10 50	14 39
	19	9 2 12	5 24	18 10	28 50	6 34	10 22	14 10
	25	9 1 20	5 35	18 6	29 2	6 7	9 54	13 41
	31	9 0 39	5 45	18 3	29 12	5 41	9 27	13 15
Agosto	6	9 0 7	5 52	18 0	29 19	5 16	9 1	12 46
	12	8 29 47	5 58	17 59	29 25	4 51	8 36	12 21
	18	8 29 42	6 2	17 58	29 29	4 27	8 11	11 55
	24	8 29 47	6 6	17 59	29 33	4 5	7 48	11 31
	30	9 0 7	6 9	18 0	29 35	3 42	7 25	11 8

Posizioni di Pallade di sei in sei giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Giugno 1	9 0 20	47 34B	18 1	24 7B	5 31	13 22	21 13
7	8 28 59	47 54	17 57	24 27	5 1	12 54	20 47
13	8 27 17	48 4	17 52	24 38	4 30	12 25	20 20
19	8 25 15	47 59	17 46	24 36	4 2	11 57	19 52
25	8 23 34	47 47	17 41	24 25	3 33	11 28	19 21
Luglio 1	8 21 54	47 19	17 36	24 2	3 8	10 59	18 50
7	8 20 37	46 45	17 32	23 31	2 42	10 31	18 20
13	8 19 22	45 59	17 28	22 49	2 18	10 3	17 48
19	8 18 28	45 7	17 25	22 1	1 55	9 36	17 17
25	8 17 37	44 9	17 22	21 6	1 34	9 10	16 46
31	8 17 5	43 6	17 20	20 6	1 14	8 45	16 16
Agosto 6	8 16 55	42 1	17 19	19 2	0 55	8 20	15 45
12	8 17 3	40 54	17 19	17 54	0 36	7 56	15 16
18	8 17 12	39 45	17 19	16 45	0 18	7 32	14 46
24	8 17 38	38 37	17 20	15 36	0 0	7 10	14 20
30	8 18 23	37 29	17 22	14 26	23 44	6 48	13 52

Posizioni di Giunone di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
Giugno	1	3s 28° 52'	6° 40' A	7h 59'	14° 34' B	20h 16'	3h 20'	10h 24'
	7	4 1 32	5 38	8 10	14 21	20 4	3 7	10 10
	13	4 4 12	5 16	8 21	14 5	19 52	2 54	9 56
	19	4 6 53	4 58	8 32	13 45	19 40	2 41	9 42
	25	4 9 35	4 39	8 43	13 22	19 30	2 29	9 28
Luglio	1	4 12 17	4 22	8 54	12 56	19 18	2 16	9 14
	7	4 14 46	4 7	9 4	12 27	19 8	2 3	8 58
	13	4 17 30	3 51	9 15	11 56	18 57	1 50	8 43
	19	4 20 1	3 37	9 25	11 22	18 47	1 37	8 27
	25	4 22 46	3 22	9 36	10 46	18 36	1 24	8 12
	31	4 25 18	3 7	9 46	10 8	18 25	1 10	7 55
Agosto	6	4 27 50	2 53	9 56	9 28	18 15	0 57	7 39
	12	5 0 38	2 38	10 7	8 47	18 5	0 44	7 23
	18	5 3 12	2 26	10 17	8 4	17 54	0 30	7 6
	24	5 5 46	2 15	10 27	7 21	17 43	0 16	6 49
	30	5 8 7	2 4	10 36	6 36	17 32	0 2	6 32

Posizioni di Vesta di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Dicem.	1	3 27 31	0 27A	7 58	20 13B	7 44	15 16	22 48
	7	3 27 0	0 15	7 56	20 33	7 19	14 53	22 27
	13	3 26 15	0 1	7 53	20 54	6 49	14 24	21 59
	19	3 25 14	0 17B	7 49	21 23	6 22	13 57	21 35
	25	3 24 0	0 34	7 44	21 53	5 47	13 28	21 9
	31	3 22 33	0 51	7 38	22 25	5 15	12 58	20 41

Posizioni di Giove di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	4 21 36	0 54 B	9 37	15 10 B	7 47	14 54	22 1
	13	4 20 28	0 57	9 33	15 34	6 52	14 1	21 10
	25	4 19 5	0 59	9 28	16 2	5 58	13 9	20 20
Febbrajo	6	4 17 32	1 1	9 22	16 33	5 1	12 16	19 29
	18	4 15 59	1 1	9 15	17 2	4 6	11 22	18 38
Marzo	2	4 14 35	1 2	9 9	17 27	3 11	10 29	17 47
	14	4 13 29	1 2	9 5	17 46	2 17	9 37	16 57
	26	4 12 47	1 0	9 2	17 58	1 26	8 47	16 8
Aprile	7	4 12 30	1 0	9 1	18 1	0 38	7 59	15 20
	19	4 12 42	0 58	9 2	17 57	23 51	7 12	14 33
Maggio	1	4 13 20	0 57	9 5	17 45	23 8	6 27	13 46
	13	4 14 20	0 56	9 8	17 26	22 26	5 44	13 2
	25	4 15 42	0 55	9 13	17 2	21 46	5 2	12 18
Giugno	6	4 17 22	0 54	9 20	16 30	21 7	4 21	11 35
	18	4 19 17	0 54	9 28	15 54	20 30	3 41	10 52
	30	4 21 25	0 53	9 36	15 13	19 55	3 3	10 11
Luglio	12	4 23 43	0 53	9 45	14 28	19 21	2 25	9 29
	24	4 26 9	0 53	9 54	13 39	18 46	1 47	8 48
Agosto	5	4 28 40	0 53	10 4	12 46	18 12	1 9	8 6
	17	5 1 14	0 54	10 14	11 52	17 39	0 32	7 25
	29	5 3 52	0 54	10 24	10 56	17 5	23 54	6 43
Settem.	10	5 6 26	0 55	10 34	10 0	16 32	23 17	6 1
	22	5 9 0	0 56	10 44	9 4	15 59	22 39	5 19
Ottobre	4	5 11 30	0 58	10 53	8 9	15 25	22 1	4 37
	16	5 13 47	0 59	11 2	7 16	14 50	21 23	3 56
	28	5 16 0	1 1	11 10	6 27	14 15	20 44	3 13
Novem.	9	5 18 1	1 3	11 18	5 40	13 38	20 4	2 30
	21	5 19 44	1 6	11 24	5 4	12 59	19 23	1 47
Dicem.	3	5 21 10	1 8	11 29	4 33	12 18	18 40	1 2
	15	5 22 11	1 11	11 33	4 11	11 37	17 57	0 17
	27	5 22 51	1 15	11 36	3 59	10 53	17 12	23 31

Posizioni di Saturno di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	11 19 59	2 9A	23 26	5 57A	23 3	4 42	10 21
	13	11 20 54	2 8	23 30	5 34	22 17	3 58	9 38
	25	11 22 0	2 6	23 34	5 6	21 33	3 15	8 57
Febb.	6	11 23 16	2 4	23 38	4 35	20 48	2 32	8 16
	18	11 24 37	2 4	23 43	4 2	20 3	1 50	7 37
Marzo	2	11 26 1	2 3	23 48	3 28	19 19	1 8	6 57
	14	11 27 27	2 3	23 54	2 53	18 34	0 26	6 18
	26	11 28 56	2 3	23 59	2 17	17 50	23 44	5 38
Aprile	7	0 0 28	2 5	0 5	1 43	17 6	23 2	4 58
	19	0 1 54	2 6	0 10	1 10	16 22	22 20	4 18
Maggio	1	0 3 13	2 7	0 15	0 40	15 38	21 38	3 38
	13	0 4 27	2 9	0 20	0 13	14 55	20 55	2 57
	25	0 5 31	2 12	0 24	0 11B	14 9	20 12	2 15
Giugno	6	0 6 26	2 15	0 27	0 30	13 23	19 28	1 33
	18	0 7 10	2 18	0 30	0 44	12 37	18 43	0 49
	30	0 7 41	2 20	0 32	0 53	11 51	17 58	0 5
Luglio	12	0 7 55	2 23	0 33	0 57	11 5	17 12	23 19
	24	0 7 57	2 27	0 33	0 54	10 18	16 25	22 32
Agosto	5	0 7 45	2 31	0 33	0 46	9 31	15 37	21 43
	17	0 7 18	2 34	0 31	0 33	8 43	14 48	20 53
	29	0 6 40	2 36	0 28	0 15	7 55	13 59	20 3
Settem.	10	0 5 53	2 37	0 25	0 5A	7 5	13 8	19 11
	22	0 4 58	2 38	0 22	0 28	6 16	12 17	18 18
Ottobre	4	0 4 1	2 39	0 19	0 50	5 27	11 27	17 27
	16	0 3 8	2 38	0 16	1 11	4 39	10 37	16 35
	28	0 2 21	2 37	0 13	1 28	3 49	9 46	15 43
Novem.	9	0 1 45	2 36	0 10	1 41	3 0	8 56	14 52
	21	0 1 21	2 33	0 9	1 48	2 12	8 8	14 4
Dicem.	3	0 1 13	2 30	0 8	1 50	1 24	7 20	13 16
	15	0 1 19	2 27	0 9	1 44	0 37	6 33	12 29
	27	0 1 40	2 24	0 10	1 33	23 50	5 47	11 44

Posizioni di Urano di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	0 18 22	0 37 A	1 9	6 38 B	23 55	6 25	12 55
	13	0 18 30	0 37	1 9	6 41	23 8	5 38	12 8
	25	0 18 47	0 36	1 10	6 46	22 20	4 51	11 22
Febb.	6	0 19 7	0 36	1 11	6 55	21 33	4 5	10 37
	18	0 19 32	0 36	1 13	7 6	20 48	3 20	9 52
Marzo	2	0 20 4	0 35	1 15	7 18	20 1	2 34	9 7
	14	0 20 40	0 35	1 17	7 32	19 15	1 49	8 23
	26	0 21 18	0 35	1 20	7 47	18 29	1 4	7 39
Aprile	7	0 22 0	0 35	1 22	8 2	17 44	0 20	6 56
	19	0 22 41	0 35	1 25	8 17	16 58	23 35	6 12
Maggio	1	0 23 22	0 35	1 27	8 32	16 12	22 50	5 28
	13	0 24 0	0 35	1 30	8 47	15 26	22 5	4 44
	25	0 24 34	0 35	1 32	9 0	14 40	21 20	4 0
Giugno	6	0 25 4	0 35	1 34	9 11	13 54	20 35	3 16
	18	0 25 32	0 35	1 36	9 20	13 7	19 49	2 31
	30	0 25 55	0 35	1 37	9 28	12 21	19 3	1 45
Luglio	12	0 26 10	0 35	1 38	9 33	11 34	18 17	1 0
	24	0 26 17	0 36	1 38	9 36	10 47	17 30	0 13
Agosto	5	0 26 17	0 36	1 38	9 36	10 0	16 43	23 26
	17	0 26 12	0 36	1 38	9 34	9 12	15 55	22 38
	29	0 26 1	0 36	1 37	9 29	8 25	15 7	21 49
Settem.	10	0 25 41	0 37	1 36	9 23	7 37	14 19	21 1
	22	0 25 17	0 37	1 35	9 14	6 49	13 30	20 11
Ottobre	4	0 24 50	0 37	1 33	9 4	6 1	12 41	19 21
	16	0 24 22	0 37	1 31	8 53	5 12	11 52	18 32
	28	0 23 53	0 37	1 29	8 42	4 24	11 3	17 42
Novem.	9	0 23 25	0 36	1 28	8 32	3 36	10 14	16 52
	21	0 23 2	0 36	1 26	8 23	2 48	9 25	16 2
Dicem.	3	0 22 43	0 36	1 25	8 16	1 59	8 36	15 13
	15	0 22 30	0 36	1 24	8 12	1 11	7 48	14 25
	27	0 22 23	0 35	1 23	8 10	0 23	7 0	13 37

Giorni		Fenomeni ed osservazioni.
Gennajo	6	☾ perigea.
	8	♂ □ ☉.
	8	☿ ☌ super. col ☉.
	16	☿ nella massima lat. A.
	18	☾ apogea.
	20	☉ entra in ♒ a 15^h 14′
Febbrajo	3	☾ perigea.
	4	♀ in ☊.
	4	☿ in ☊.
	5	♃ ☍ ☉.
	8	☿ nella mass. elong. orient.
	9	☿ nel perielio.
	15	☾ apogea.
	18	☉ entra in ♓ a 5^h 53.′
	29	☿ nella massima lat. B.
	23	☿ ☌ inf. col ☉.
	28	☾ perigea.
Marzo	1	♀ nella mass. elong. orient.
	9	♀ nel perielio.
	15	☿ in ☋.
	15	☾ apogea.
	18	♄ ☌ ☉.
	20	☉ entra in ♈ a 5^h 49′.
	21	♀ nel suo massimo splendore.
	22	☿ nella mass. elong. occid.
	25	☿ nell' afelio.
	27	☾ perigea.
	31	♀ nella massima lat. B.

Giorni		Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	9	♂ ☌ ☉.
	11	☾ apogea.
	14	☿ nella massima lat. A.
	19	☉ entra in ♉ a 18^h 0′.
	23	☾ perigea.
Maggio	3	☿ ☌ superiore col ☉.
	3	♃ □ ☉.
	3	☿ in ☊.
	8	☿ nel perielio.
	9	☾ apogea.
	11	♂ nella massima lat. A.
	12	♀ ☌ inf. col ☉.
	18	☿ nella massima lat. B.
	20	☉ entra in ♊ a 18^h 10′.
	22	☾ perigea.
	27	♀ in ☋.
Giugno	3	☿ Nella mass. elongaz. orient.
	4	♂ nel perielio.
	5	☾ apogea.
	11	☿ in ☋.
	16	⚴ ☍ ☉.
	19	☾ perigea.
	21	☉ entra in ♋ a 2^h 43′.
	27	⚳ ☍ ☉.
	29	♃ □ ☉.
	29	☿ ☌ inferiore col ☉.
	30	♀ nell' afelio.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Luglio	1	♀ nel suo mass. splendore or.
	2	☾ apogea.
	11	☿ nella massima latitud. A.
	18	♂ □ ☉.
	18	☾ perigea.
	21	☿ nella massima elong. occid.
	21	♀ nella mass. elongaz. occid.
	22	♀ nella massima latitud. A.
	22	☉ entra in ♌ a 13^h 35′.
	30	☿ in ☊.
	30	☾ apogea.
Agosto	4	☿ nel perielio.
	14	☿ nella massima latitud. B.
	15	☾ perigea.
	16	☿ ☌ sup. col ☉.
	22	☉ entra in ♍ a 20^h 2′.
	26	♃ ☌ ☉.
	27	☾ apogea.
Settembre	7	☿ in ☊.
	10	♂ □ ☉.
	11	☾ perigea.
	17	♀ in ☊.
	17	☿ nell' afelio.
	22	☉ entra in ♎ a 16^h 40′.
	23	☾ apogea.
	27	♄ ☍ ☉.
	30	☿ nella mass. elong. orient.
Ottobre	6	♂ in ☊.
	7	☿ nella massima latitud. A.
	17	♅ ☍ ☉.
	20	☿ nel perielio.
	21	☾ apogea.
	23	☉ entra in ♏ a 0^h 53′.
	24	☿ ☌ inf. col ☉.
	26	☿ in ☊.
	31	♀ nel perielio.
Novembre	2	☾ perigea.
	9	☿ nella massima elong. occid.
	10	☿ nella massima latitud. B.
	11	♀ nella massima latitud. B.
	18	☾ apogea.
	21	☉ entra in ♐ a 21^h 29′.
	30	☾ perigea.
Dicembre	4	☿ in ☋.
	13	♃ □ ☉.
	14	☿ nell' afelio.
	15	☾ apogea.
	17	♂ ☍ ☉.
	18	☿ ☌ sup. col ☉.
	21	☉ entra in ♑ a 10^h 18′.
	21	♄ □ ☉.
	29	☾ perigea.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

dell' anno 1849.

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI PARZIALI

DI PRIMO ORDINE

FRA UN NUMERO QUALUNQUE DI VARIABILI

DI

PAOLO FRISIANI.

INTRODUZIONE.

Questo opuscolo può riguardarsi come un seguito della Memoria pubblicata l'anno 1847 nell'Appendice alle Effemeridi astronomiche di Milano, avendone in molte parti un'immediata dipendenza. Quì però mi occupo soltanto delle soluzioni complete delle equazioni differenziali parziali di 1.° ordine, ma ne presento quegli sviluppi che mancano nella citata Memoria e quelle modificazioni a cui vanno soggetti i metodi in alcuni casi speciali. Così nei tre primi articoli di questo scritto distinguo i diversi accidenti che presentano tali equazioni quando vi manchi o la variabile principale, o una differenziale parziale, od una variabile indipendente e quando più di queste quantità manchino contemporaneamente. Da questi apparirà manifesto il vantaggio cbe si ha nell'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, o se non altro l'arbitrio di poter presentare tali integrali sotto forme particolari e comode in molti casi, quando il sistema possa esso stesso ridursi ad una forma speciale in forza della quale coesiste insieme ad esso un' equazione differenziale parziale che vi è intimamente legata e che ne deriva con tutta facilità. La ricerca di una soluzione completa di un' equazione differenziale parziale fu sempre congiuntamente trattata colla ricerca degl' integrali di quel sistema di equazioni differenziali ordinarie che vi è intimamente connesso.

Il caso in cui l' equazione differenziale parziale mancante della variabile principale fosse omogenea rispetto alle differenziali parziali fu trattato separatamente nel IV articolo tanto per la ricerca di soluzioni complete contenenti i valori iniziali, come per l' indagine di quelle contenenti le costanti nate dall' immediata integrazione del sistema.

Non era da omettersi il caso in cui le variabili indipendenti comprese in un' equazione differenziale parziale fossero legate da equazioni di condizione, ed era parimente da mostrarsi come l' integrazione di un sistema speciale di equazioni differenziali ordinarie accompagnato da equazioni di condizione potesse farsi dipendere dalla soluzione completa di un' equazione differenziale parziale. In questa ricerca si è trattato pure delle modificazioni che le formole subiscono quando, essendo proposta un' equazione differenziale parziale priva della variabile principale, ed in cui una differenziale parziale sia espressa da due termini l' uno funzione delle sole variabili indipendenti, l'altro delle sole restanti differenziali parziali, si ammetta l' ipotesi che ciascun termine sia funzione omogenea delle quantità che esso contiene e le equazioni di condizione pur esse funzioni omogenee delle variabili indipendenti. Nell' articolo V, in cui trovasi trattata l' attuale questione, ho mostrato parimente come il metodo della variazione delle costanti arbitrarie e le formole da cui dipende la soluzione, quando un termine compreso nella proposta equazione possa riguardarsi come una funzione perturbatrice, derivino spontanee da queste teoriche.

Ho riguardato nell' articolo VI come caso particolare di una equazione differenziale parziale qualunque di 1.° ordine quello di un'equazione differenziale parziale lineare e riprodotto con altro processo il principio dell'ultimo moltiplicatore. In fine del citato articolo, oltre un teorema risultante dall'omogeneità dei coefficienti delle differenziali parziali, si vedrà esposta la soluzione per serie di una qualunque equazione differenziale parziale lineare, ammesso che la condizione della convergenza sia verificata.

Un sistema di equazioni differenziali ordinarie del 2.° ordine potendosi sempre ridurre ad un sistema di un doppio numero di equazioni di 1.° ordine, ho mostrato quali condizioni debbano aver luogo acciò possa con esso sussistere una equazione differenziale parziale priva della variabile principale, nel qual caso una delle equazioni del relativo sistema fornisce la soluzione completa espressa per un integrale definito, che sotto tal forma prende il nome di *funzione caratteristica*. Le precedenti dottrine esposte nel VII articolo hanno un' immediata applicazione alle formole generali della dinamica. Oltre i noti teoremi spettanti a questa scienza risulta dalle istituite applicazioni che la funzione caratteristica è quella stessa che nella meccanica analitica deve divenire un *maximum* od un *minimum*, e che l' equazione differenziale parziale che coesiste col sistema delle equazioni differenziali del moto de' liquidi è quella stessa che si era già da gran tempo presentata nella questione dell' idrodinamica. A schiarimento dei metodi che si sono esposti, oltre quelle applicazioni che si trovano quà e là sparse, ho dato in fine di questo articolo VII alcuni esempi desunti per la maggior parte dall' astronomia teorica.

Per non distrarre l'attenzione del lettore colla parte storica di queste ricerche non ho richiamati i metodi da altri seguiti, nè citati i nomi degli autori che in tale argomento hanno il precipuo merito di aver contribuito ai progressi di questo ramo d'analisi. Chiunque conosce le Memorie dell'astronomo di Dublino signor William Hamilton inserite nelle transazioni filosofiche di Londra, quelle del signor Jacobi nel giornale di Crelle e del signor Cauchy in varj numeri dei *Comptes rendus* dell'Accademia di Parigi potrà facilmente ravvisare l'origine di queste ricerche e le varie modificazioni cui andarono soggette e riconoscere in questo lavoro non solo compenetrati per la massima parte i risultati ottenuti dai citati autori, ma in qualche parte estesi o modificati dietro un sol punto di vista i metodi stessi a complemento di questo ramo d'analisi.

Nell'esposizione delle surriferite dottrine divise nei seguenti sette articoli si troverà per avventura una soverchia ripetizione di formole che avrebbero potuto essere semplicemente citate col richiamo del relativo numero, e minute particolarità che potevano di leggieri essere supplite dalla perspicacia del lettore. Ma non ostante questo ho preferito meglio peccare di prolissità che correre il rischio di divenire oscuro per effetto di soverchia concisione. Al lettore intelligente d'altronde potrà spesso bastare il succinto enunciato delle proposizioni che espressamente fu posto in principio di ciascun paragrafo.

I.

Relazione fra un' equazione differenziale parziale di primo ordine ed un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

1. Sia proposta fra la variabile principale x, le variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν e le differenziali parziali di x rispetto ad esse un'equazione

$$\varphi\left\{x\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_\nu\,,\ \left(\frac{dx}{dx_1}\right),\ \left(\frac{dx}{dx_2}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)\right\}=0$$

che verrà espressa o con

$$\varphi = 0 \qquad (1)$$

o con

$$\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F} \qquad (2)$$

quando si intenda dalla (1) cavata la differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)$. Ciò premesso, indicando con ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν nuove variabili, se per tutti i valori di $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu - 1$ si pone

$$\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = \xi_j \qquad (3)$$

il sistema di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione completa della (2) e quindi della (1) sarà dato da

$$\left.\begin{array}{ll}
d\xi_1 - \left\{\dfrac{dF}{dx_1} + \xi_1\dfrac{dF}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, & dx_1 + \dfrac{dF}{d\xi_1}dx_\nu = 0 \\
d\xi_2 - \left\{\dfrac{dF}{dx_2} + \xi_2\dfrac{dF}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, & dx_2 + \dfrac{dF}{d\xi_2}dx_\nu = 0 \\
\vdots & \vdots \\
d\xi_{\nu-1} - \left\{\dfrac{dF}{dx_{\nu-1}} + \xi_{\nu-1}\dfrac{dF}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, & dx_{\nu-1} + \dfrac{dF}{d\xi_{\nu-1}}dx_\nu = 0
\end{array}\right\} \quad (4)$$

$$dx + \left\{ \frac{dF}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dF}{d\xi_2}\xi_2 \;\ldots\ldots + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1} - F \right\} dx_\nu = 0 \qquad (5)$$

ove F è ciò che diventa $\mathfrak{F}$ quando alle differenziali siano sostituite le ξ_i date dalla (3) ed ove all'equazione (5) potrà sostituirsi la

$$dx - \left\{ \xi_1\, dx_1 + \xi_2\, dx_2 \;\ldots\ldots + \xi_{\nu-1}\, dx_{\nu-1} + F dx_\nu \right\} = 0 \qquad (6)$$

Infatti, dietro quanto ho mostrato all'art. VIII della Memoria pubblicata nel 1847 ed inserita nell'Appendice alle Effemeridi astronomiche di Milano, la soluzione completa della (2) dipende dal sistema di $2\nu - 1$ equazioni differenziali ordinarie i cui integrali soddisfino la (6) che tien luogo della proposta equazione (2) e che è un'equazione differenziale ordinaria fra le 2ν variabili x, ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$, x_1, x_2, ... x_ν. Il sistema in discorso risulterà quindi dalle equazioni (13), (14) del § 7, art. citato quando alle variabili indicate ivi dalle lettere

$$x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\ldots\; x_{i-1}\,,\; p_i\,,\; x_i\,,\; x_{i+1}\,,\; x_{i+2}\,,\; \ldots\ldots\; x_{2i} \qquad (7)$$

si sostituiscano rispettivamente le

$$\xi_1\,,\; \xi_2\,,\; \ldots\ldots\; \xi_{\nu-1}\,,\; \xi_\nu\,,\; x\,,\; x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\ldots\; x_\nu \qquad (8)$$

I valori di N, θ ivi ottenuti risulteranno nel caso attuale

$$N = e^{\int \theta}\,, \qquad \theta = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx_\nu \qquad (9)$$

Ottenuti dal sistema (4), (5) i suoi $2\nu - 1$ integrali, sia col metodo generalmente in uso, sia colla determinazione di $2\nu - 1$ valori di f fra loro indipendenti che soddisfino all'equazione differenziale parziale e lineare che si desume dal sistema stesso (4), (5) dietro i precetti del § 12, art. III, (Mem.ª cit.ª) da porsi eguali alle costanti α_1, α_2, ... $\alpha_{2\nu-1}$, gl' integrali del sistema saranno espressi da

$$\alpha_1 = f_1 \,, \quad \alpha_2 = f_2 \,, \ldots\ldots\ldots \alpha_{2\nu-1} = f_{2\nu-1} \tag{10}$$

ove i secondi membri saranno funzioni delle 2ν variabili

$$x \,, \quad x_1 \,, \quad x_2 \,, \ldots\ldots\ldots x_\nu \,, \quad \xi_1 \,, \quad \xi_2 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1}.$$

Siccome alle costanti arbitrarie si possono sempre sostituire delle funzioni di altre arbitrarie in numero eguale od anche maggiore di esse, così gl' integrali stessi (10) potranno esprimersi colle

$$f_1 = f_1^0 \,, \quad f_2 = f_2^0 \,, \ldots\ldots\ldots f_{2\nu-1} = f_{2\nu-1}^0 \tag{11}$$

ove i secondi membri sono ciò che diventano i primi quando alle 2ν variabili in esse comprese si sostituiscano rispettivamente le 2ν costanti

$$x^0 \,, \quad x_1^0 \,, \quad x_2^0 \,, \ldots\ldots\ldots x_\nu^0 \,, \quad \xi_1^0 \,, \quad \xi_2^0 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1}^0$$

una delle quali essendo soprannumeraria potrà farsi zero od eguale a qualsivoglia valore τ. Adotteremo sempre nel seguito che quella variabile di cui tutte le altre s' intendono funzioni, ossia quella affetta dall' indice più grande sarà essa da porsi eguale ad un valore arbitrario τ, che potrà farsi zero. Le altre costanti assumeranno il nome di *valori iniziali* delle rispettive variabili.

Se dalle equazioni (11) s' intendono cavate le $2\nu-1$ quantità

$$x \,, \quad \xi_1 \,, \quad \xi_2 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1} \,, \quad \xi_1^0 \,, \quad \xi_2^0 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1}^0$$

espresse per le altre, si avrà

$$x = \phi \,, \quad \left.\begin{array}{l} \xi_1 = \phi_1 \,, \quad \xi_2 = \phi_2 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1} = \phi_{\nu-1} \\ \xi_1^0 = \psi_1 \,, \quad \xi_2^0 = \psi_2 \,, \ldots\ldots\ldots \xi_{\nu-1}^0 = \psi_{\nu-1} \end{array}\right\} \tag{12}$$

ove i secondi membri saranno funzioni delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e de' valori iniziali

$$x^0 \,,\; x_1^0 \,,\; x_2^0 \,, \ldots\ldots\, x_{\nu-1}^0 \qquad \text{e di } \tau \qquad (13)$$

Il sistema di quest' integrali soddisfa alla (6) e la

$$x = \phi \qquad (14)$$

espressa per le ν variabili indipendenti, e per ν costanti rappresentate dai valori iniziali x_1^0, x_2^0, ... $x_{\nu-1}^0$ è la soluzione completa della (2).

Nel citato art. VIII si è pure avvertito che se colle $2\nu-1$ equazioni (10) si eliminano le $\nu-1$ variabili ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ e colle ν restanti equazioni si eliminano altre $\nu-1$ costanti arbitrarie scelte per tal modo che dalla loro eliminazione si ottenga un'equazione fra le variabili x, x_1, x_2, ... x_ν e le ν costanti residue che s'indicheranno con β_1, β_2, ... β_ν, la risultante equazione che, cavata la x, indicheremo con

$$x = \psi\,(x_1 \,,\; x_2 \,, \ldots\ldots\, x_\nu \,,\; \beta_1 \,,\; \beta_2 \,, \ldots\ldots\, \beta_\nu) \qquad (15)$$

espressa per un numero ν di costanti introdotte dall'immediata integrazione sarà una soluzione completa della (2).

Siccome nei primi membri delle relazioni

$$\alpha_1 = f_1^0 \,,\quad \alpha_2 = f_2^0 \,, \ldots\ldots\, \alpha_{2\nu-1} = f_{2\nu-1}^0$$

sono comprese quelle costanti che vennero designate con β_1, β_2, ... β_ν, così la (15) che esprimeremo compendiosamente con $x = \psi$ si cambierà in $x = \phi$ quando alle costanti in essa comprese si sostituiscano le relative f^0 che sono funzioni delle

$$x^0 \,,\; x_1^0 \,,\; x_2^0 \,, \ldots\ldots\, x_\nu^0 \,,\; \xi_1^0 \,,\; \xi_2^0 \,, \ldots\ldots\, \xi_{\nu-1}^0$$

Tale sostituzione farà scomparire le ξ_1^0, ξ_2^0, ... $\xi_{\nu-1}^0$. Parimente cavati dalle (16) i valori di

$$x^0\,,\quad x_1^0\,,\quad x_2^0\,,\ \dots\dots\ x_{\nu-1}^0\,,\quad \xi_1^0\,,\quad \xi_2^0\,,\ \dots\dots\ \xi_{\nu-1}^0$$

essi risulteranno funzioni delle x_ν^0, α_1, α_2, ... $\alpha_{2\nu-1}$. Se quindi nella $x = \phi$ si sostituiscono i trovati valori di x^0, x_1^0, x_2^0, ... $x_{\nu-1}^0$ essa verrà cambiata in $x = \psi$, scomparendo colla sostituzione oltre la x_ν^0 altre $\nu - 1$ costanti. Quelle che rimangono saranno le stesse indicate con β_1, β_2, ... β_ν.

2. Essendo proposta l'equazione differenziale parziale (1), ossia la

$$\varphi = 0 \qquad (1)$$

e chiamata P ciò che diventa φ quando alle differenziali parziali $\left(\frac{dx}{dx_j}\right)$ si sostituiscano le ξ_j per tutti i valori di $j = 1, 2, 3, \dots\dots \nu$, il sistema da cui dipende la soluzione completa della $\varphi = 0$ sarà dato da 2ν equazioni fra $2\nu + 1$ variabili, rappresentate da

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_1 + \left\{\frac{dP}{dx_1} + \xi_1\frac{dP}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, \quad \frac{dP}{d\xi_\nu}dx_1 - \frac{dP}{d\xi_1}dx_\nu = 0\\
&\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_2 + \left\{\frac{dP}{dx_2} + \xi_2\frac{dP}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, \quad \frac{dP}{d\xi_\nu}dx_2 - \frac{dP}{d\xi_2}dx_\nu = 0\\
&\vdots\\
&\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_{\nu-1} + \left\{\frac{dP}{dx_{\nu-1}} + \xi_{\nu-1}\frac{dP}{dx}\right\}dx_\nu = 0\,, \quad \frac{dP}{d\xi_\nu}dx_{\nu-1} - \frac{dP}{d\xi_{\nu-1}}dx_\nu = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_\nu + \left\{\frac{dP}{dx_\nu} + \xi_\nu\frac{dP}{dx}\right\}dx_\nu = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{dP}{d\xi_\nu}dx - \left\{\frac{dP}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dP}{d\xi_2}\xi_2 + \ldots\ldots + \frac{dP}{d\xi_\nu}\xi_\nu\right\}dx_\nu = 0 \qquad (18)$$

Un integrale di questo sistema risulterà dalla stessa (1) ridotta alla

$$P = 0 \qquad (19)$$

La soluzione cercata risulterà quindi dai seguenti processi:

1.° Ottenuti dal precedente sistema altri $2\nu - 1$ integrali con $2\nu - 1$ costanti α_1, α_2, ... $\alpha_{2\nu-1}$ si avranno colla (19) 2ν equazioni finite colle quali eliminate le ν variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν si otterrà un sistema di ν equazioni fra le variabili x, x_1, x_2, ... x_ν e le $2\nu - 1$ costanti. Se con queste si eliminano $\nu - 1$ costanti opportunamente scelte, l'equazione risultante fra la variabile principale x, le variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν e le restanti ν arbitrarie che indicheremo ancora con β_1, β_2, ... β_ν, sarà una soluzione completa della proposta (1);

2.° Se coi $2\nu - 1$ integrali ottenuti si determinano le $2\nu - 1$ costanti α_1, α_2, ... $\alpha_{2\nu-1}$ pei 2ν valori iniziali

$$x^0, \quad x_1^0, \ldots\ldots\ldots x_{\nu-1}^0, \quad \xi_1^0, \quad \xi_2^0, \ldots\ldots\ldots \xi_\nu^0$$

competenti ad $x_\nu = x_\nu^0 = \tau$, si avranno $2\nu - 1$ equazioni finite fra le variabili ed i valori iniziali. Se quindi ad esse si uniscono le due equazioni $P = 0$, $P^0 = 0$, essendo P^0 il valore di P per $x_\nu = \tau$ e si eliminano col sistema di queste $2\nu + 1$ equazioni, le 2ν quantità

$$\xi_1, \quad \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi_\nu, \quad \xi_1^0, \quad \xi_2^0, \ldots\ldots\ldots \xi_\nu^0,$$

si avrà un'equazione espressa per τ e per valori iniziali che sarà una soluzione completa della proposta (1)

Le soluzioni complete che si ottengono sia dalla $\dfrac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$, sia dalla $\varphi = 0$ saranno identiche quando queste stesse equazioni differenziali parziali non differiscano che per la forma.

A dimostrare le enunciate proposizioni si supponga espressa la $\varphi = 0$ sotto la forma $\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$, la cui soluzione completa dipenderà dal sistema (4), (5) dell'antecedente paragrafo. Ma dal § 8, art. VIII (Mem.ª cit.ª), avuto riguardo alla sostituzione delle quantità (8) in luogo della (7), si deducono le relazioni

$$\frac{dF}{dx_j} = -\frac{dP}{dx_j} : \frac{dP}{d\xi_\nu}, \quad \frac{dF}{d\xi_j} = -\frac{dP}{d\xi_j} : \frac{dP}{d\xi_\nu}, \quad \frac{dF}{dx} = -\frac{dP}{dx} : \frac{dP}{d\xi_\nu} \tag{20}$$

per tutti i valori di $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots \nu$. Col mezzo delle (20) e colla $F = \xi_\nu$ le equazioni (4), (5) del precedente paragrafo si cambiano nelle equazioni (16), (18).

Se inoltre le equazioni della 1.ª colonna delle (16) si moltiplicano rispettivamente per dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ e quelle della 2.ª colonna si moltiplicano rispettivamente per $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_{\nu-1}$ e si sommano, sottratto il secondo aggregato dal primo, si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dx_1} dx_1 + \frac{dP}{dx_2} dx_2 \cdots\cdots\cdots + \frac{dP}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \\ + \frac{dP}{d\xi_1} d\xi_1 + \frac{dP}{d\xi_2} d\xi_2 \cdots\cdots\cdots + \frac{dP}{d\xi_{\nu-1}} d\xi_{\nu-1} \\ + \frac{dP}{dx} \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \cdots\cdots\cdots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} \right\} \end{array}\right\} = 0 \tag{21}$$

Ma insieme all'equazione $\varphi = 0$ sussistendo la $P = 0$, se di questa si prende la differenziale rispetto a tutte le variabili che essa contiene, si vedrà che alle due prime linee della (21) potrà sostituirsi l'espressione

$$-\left\{\frac{dP}{dx}dx+\frac{dP}{dx_\nu}dx_\nu+\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_\nu\right\}$$

Se inoltre si sostituiscono nella (18) i valori di

$$\frac{dP}{d\xi_1},\ \frac{dP}{d\xi_2},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{dP}{d\xi_{\nu-1}}$$

cavati dalla seconda colonna delle (16), essa si ridurrà alla

$$dx=\xi_1 dx_1+\xi_2 dx_2+\ldots\ldots+\xi_{\nu-1}dx_{\nu-1}+\xi_\nu dx_\nu \qquad (22)$$

e risulterà quindi che al fattore della $\frac{dP}{dx}$ della terza linea della (21) potrà sostituirsi l'espressione $dx-\xi_\nu dx_\nu$. Con tali sostituzioni l'equazione (21) si cambierà nella (17). Dimostrata l'esistenza del sistema (16), (17), (18), se di nuovo si moltiplicano le equazioni della 1.ª colonna delle (16) per dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ e dal loro aggregato si sottrae la somma delle equazioni della 2.ª colonna delle (16) moltiplicate rispettivamente per $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_{\nu-1}$ e vi si aggiunga la (17) moltiplicata per dx_ν, l'aggregato totale si ridurrà a $dP=0$, il cui integrale $P=c$ dovendo coincidere cull'equazione che si deduce dalla (1) quando alle differenziali parziali si sostituiscono le variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν risulterà $c=0$. Uno adunque degl'integrali del sistema (16), (17), (18) da cui dipende la soluzione completa non conterrà costante arbitraria e sarà dato dalla (19).

Quando l'equazione $\varphi=0$ si riduce alla $\frac{dx}{dx_\nu}-\mathcal{F}=0$ ove la $\mathcal{F}$ manca della $\frac{dx}{dx_\nu}$, si avrà $P=\xi_\nu-F$, onde

$$\frac{dP}{d\xi_\nu}=1,\qquad \frac{dP}{dx_j}=-\frac{dF}{dx_j},\qquad \frac{dP}{d\xi_j}=-\frac{dF}{d\xi_j}$$

per tutti i valori di $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu-1$. Con tale sostituzione il sistema trovato, ommessa la (17) che diventa superflua in quanto la F non contiene la ξ_ν, si ridurrà come era da aspettarsi al sistema (4), (5) del precedente paragrafo.

Il sistema (16), (17), (18) può anche ottenersi da quello che si avrebbe quando fosse proposta l' equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dx_{\nu+1}} = \mathcal{F} \qquad (23)$$

nell' ipotesi che la $\mathcal{F}$ fosse la stessa funzione $\mathcal{P}$ data sopra non contenente la nuova variabile $x_{\nu+1}$ e si supponesse a soluzione eseguita

$$\frac{dx}{dx_{\nu+1}} = \mathcal{F} = 0 \qquad (24)$$

Infatti il sistema da cui dipende la soluzione della (23) sarà dato dalle (4), (5), § 1 in cui si cambii la F in P e la ν in $\nu+1$ e che colla $dx_\nu + \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_{\nu+1} = 0$ si elimini dalle altre equazioni, la $dx_{\nu+1}$ e nell' equazione che contiene dx s' introduca la condizione (24).

Giova avvertire che le espressioni (9), § 1, nel caso che la proposta è la (1) divengono

$$N = e^{\int\theta}, \quad \theta = -\left\{\frac{dP}{dx} : \frac{dP}{d\xi_\nu}\right\} dx_\nu \qquad (25)$$

Si riterrà nel seguito che se un integrale di un sistema di equazioni differenziali ordinarie è rappresentato da un' equazione della forma $\psi = \beta$, la ψ essendo funzione delle variabili senza la costante β, la differenziale totale $d\psi = 0$ sarà identicamente avverata quando vi si pongano i valori delle differenziali dx_1, dx_2, ... delle variabili dipendenti desunti dal sistema stesso.

3. Trovata in qualsivoglia modo un'equazione $x=\phi$ contenente i valori iniziali ed esprimente una soluzione completa, sia della $\Phi=0$, sia della sua equivalente $\frac{dx}{dx_\nu}=\mathcal{F}$, gli integrali del sistema (4), (5) del § 1 saranno espressi dalle $2\nu-1$ equazioni

$$x=\phi \qquad (26)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dx}{dx_1}\right)=\xi_1\,, \quad \left(\frac{dx}{dx_2}\right)=\xi_2\,, \;\ldots\ldots\ldots\; \left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right)=\xi_{\nu-1} \\ \left(\frac{dx}{dx_1^0}\right)=-\xi_1^0\left(\frac{dx}{dx_0}\right),\; \left(\frac{dx}{dx_2^0}\right)=-\xi_2^0\left(\frac{dx}{dx^0}\right),\ldots\left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}^0}\right)=-\xi_{\nu-1}^0\left(\frac{dx}{dx_0}\right)\end{array}\right\} \quad (27)$$

Queste stesse equazioni (26), (27) unite alla $P=0$ od all'una o all'altra delle equivalenti relazioni $\xi_\nu-F=0$, $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)=\xi_\nu$ forniranno gl'integrali del sistema (16), (17), (18) del § 2.

Infatti la (26) dovendo coincidere colla 1.ª delle (12) che è un integrale del sistema, sarà per essa uno degl'integrali del sistema in discorso. Richiamata quindi l'equazione (8) dell'art. I, (Mem.ª cit.ª) si vedrà che, avuto riguardo alla sostituzione delle quantità (8) in luogo delle (7), si ridurrà essa nel caso attuale alla

$$\left.\begin{array}{l}-\delta x+\xi_1\,\delta x_1+\xi_2\,\delta x_2\,\ldots\ldots\ldots+\xi_{\nu-1}\,\delta x_{\nu-1} \\ =N\left\{-\delta x^0+\xi_1^0\,\delta x_1^0+\xi_2^0\,\delta x_2^0\,\ldots\ldots\ldots+\xi_{\nu-1}^0\,\delta x_{\nu-1}^0\right\}\end{array}\right\} \quad (28)$$

Se dell'equazione $\phi-x=0$ si prende la variata, riguardandovi variabili anche le arbitrarie in essa comprese, ed osservando essere $\delta x_\nu=0$, si avrà

$$\left.\begin{array}{l}-\delta x+\left(\frac{dx}{dx_1}\right)\delta x_1+\left(\frac{dx}{dx_2}\right)\delta x_2\,\ldots\ldots+\left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right)\delta x_{\nu-1} \\ +\left(\frac{dx}{dx^0}\right)\delta x^0+\left(\frac{dx}{dx_1^0}\right)\delta x_1^0+\left(\frac{dx}{dx_2^0}\right)\delta x_2^0\,\ldots\ldots+\left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}^0}\right)\delta x_{\nu-1}^0\end{array}\right\}=0 \quad (29)$$

Eliminata la δx dalle due ottenute equazioni ed ordinata la risultante per le variazioni arbitrarie

$$\delta x_1 \;,\quad \delta x_2 \;,\; \ldots\ldots\ldots \; \delta x_{\nu-1} \;,\quad \delta x_1^0 \;,\quad \delta x_2^0 \;,\; \ldots\ldots\ldots \; \delta x_{\nu-1}^0$$

si otterranno le (27) ponendo a zero i coefficienti delle variazioni stesse, ed eliminando la N col mezzo della $N = \left(\frac{dx}{dx^0}\right)$. Inoltre siccome la $x = \phi$ è una soluzione completa tanto della $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$, quanto della $\varphi = 0$, che non ne differisce che per la forma, così le relazioni (26), (27) saranno pure equazioni integrali del sistema (16), (17), (18) il quale contenendo una variabile di più, cioè la ξ_ν, esige un altro integrale, che, come si disse al § 2, è la stessa $P = 0$, ovvero, sott'altra forma, la $\xi_\nu - F = 0$.

4. Essendo data una soluzione completa $x = \psi$ espressa per le costanti β_1, β_2, ... β_ν che soddisfa la $\varphi = 0$, ovvero la $\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$, gl'integrali del sistema (4), (5) del § 1 saranno espressi dalle

$$x = \psi \qquad (30)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1 \;,\quad \left(\frac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2 \;,\; \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) = \xi_{\nu-1} \\
&\left(\frac{dx}{d\beta_1}\right) = h_1\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) ,\; \left(\frac{dx}{d\beta_2}\right) = h_2\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) ,\; \ldots \left(\frac{dx}{d\beta_{\nu-1}}\right) = h_{\nu-1}\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right)
\end{aligned}\right\} (31)$$

essendo h_1, h_2, ... $h_{\nu-1}$ altre costanti arbitrarie. Gl'integrali del sistema (16), (17), (18) saranno gli stessi (30), (31), aggiuntavi l'equazione $P = 0$, ovvero la $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu$ come nel paragrafo antecedente.

Infatti se nella $x = \psi$ le β_1, β_2, ... β_ν s'intendono funzioni delle

$$x^0 \;,\quad x_1^0 \;,\quad x_2^0 \;,\; \ldots\ldots\; x_\nu^0 \;,\quad \xi_1^0 \;,\quad \xi_2^0 \;,\; \ldots\ldots\; \xi_{\nu-1}^0$$

le ξ_1^o, ξ_2^o, ... $\xi_{\nu-1}^o$ scompajono, come si è avvertito in fine al § 1. Se si prende adunque della $\psi - x = o$ la variata rispetto alle

$$x\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-1}\,,\quad x^o\,,\quad x_1^o\,,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-1}^o$$

si avrà

$$\left.\begin{array}{l}
-\delta x + \left(\dfrac{dx}{dx_1}\right)\delta x_1 + \left(\dfrac{dx}{dx_2}\right)\delta x_2 \ldots\ldots + \left(\dfrac{dx}{dx_{\nu-1}}\right)\delta x_{\nu-1} \\
+\left\{\dfrac{dx}{d\beta_1}\cdot\dfrac{d\beta_1}{dx^o} + \dfrac{dx}{d\beta_2}\cdot\dfrac{d\beta_2}{dx^o}\ldots\ldots\ldots + \dfrac{dx}{d\beta_\nu}\cdot\dfrac{d\beta_\nu}{dx^o}\right\}\delta x^o \\
+\sum\limits_{j=1}^{j=\nu}\left\{\dfrac{dx}{d\beta_1}\cdot\dfrac{d\beta_1}{dx_j^o} + \dfrac{dx}{d\beta_2}\cdot\dfrac{d\beta_2}{dx_j^o}\ldots\ldots + \dfrac{dx}{d\beta_\nu}\cdot\dfrac{d\beta_\nu}{dx_j^o}\right\}\delta x_j^o
\end{array}\right\} = o$$

Se con questa e colla (28), § 3, si elimina la δx e si pongono a zero i coefficienti delle variazioni arbitrarie, si avranno le equazioni della 1.ª linea delle (31) oltre le seguenti

$$\frac{dx}{d\beta_1}\cdot\frac{d\beta_1}{dx^o} + \frac{dx}{d\beta_2}\cdot\frac{d\beta_2}{dx^o} + \ldots\ldots\ldots + \frac{dx}{d\beta_\nu}\cdot\frac{d\beta_\nu}{dx^o} = N$$

$$\frac{dx}{d\beta_1}\cdot\frac{d\beta_1}{dx_1^o} + \frac{dx}{d\beta_2}\cdot\frac{d\beta_2}{dx_1^o} + \ldots\ldots\ldots + \frac{dx}{d\beta_\nu}\cdot\frac{d\beta_\nu}{dx_1^o} = -N\xi_1^o$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx}{d\beta_1}\cdot\frac{d\beta_1}{dx_{\nu-1}^o} + \frac{dx}{d\beta_2}\cdot\frac{d\beta_2}{dx_{\nu-1}^o} + \ldots\ldots\ldots + \frac{dx}{d\beta_\nu}\cdot\frac{d\beta_\nu}{dx_{\nu-1}^o} = -N\xi_{\nu-1}^o$$

In queste ν equazioni, considerate le $\dfrac{dx}{d\beta_1}$, $\dfrac{dx}{d\beta_2}$, ... $\dfrac{dx}{d\beta_\nu}$ come incognite, i loro valori saranno espressi sotto la forma

$$\left(\frac{dx}{d\beta_1}\right) = Nk_1\,,\quad \left(\frac{dx}{d\beta_2}\right) = Nk_2\,,\ \ldots\ldots\ldots,\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) = Nk_\nu$$

ove le k_1, k_2, ... k_ν essendo funzioni dei coefficienti costanti delle incognite stesse, e delle ξ_1^0, ξ_2^0, ... $\xi_{\nu-1}^0$ saranno pur esse quantità costanti. Quindi eliminata dalle precedenti equazioni la N col mezzo dell' ultima che fornisce

$$N = \frac{1}{k_\nu}\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) \text{ e posto } \frac{k_1}{k_\nu} = h_1\,, \quad \frac{k_1}{k_\nu} = h_2 \,\ldots\ldots\, \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} = h_{\nu-1}$$

si otterranno le equazioni della 2.ª linea delle (31).

5. Dalle precedenti cose risulta che, dato un sistema della forma (4), (5), § 1 ed ottenuto un numero $=\nu$ d' integrali contenenti le variabili x, x_1, x_2, ... x_ν, ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ e ν costanti arbitrarie β_1, β_2, ... β_ν se si potrà coll' eliminazione delle ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ ottenere la x in funzione delle altre variabili e costanti, gli altri $\nu-1$ integrali del sistema stesso saranno dati dalla 2.ª linea delle (31). Infatti insieme al proposto sistema sussisterà l' equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$ la cui soluzione completa sarà il valor trovato di x, e perciò la 2.ª linea delle (31) fornirà gli altri integrali del sistema.

II.

Equazione differenziale parziale priva,
o della variabile principale,
o di una variabile indipendente, o di una differenziale parziale.

1. Se nell' equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$ manca la variabile principale x, il sistema di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione completa si riduce a

$$\left.\begin{array}{ll} d\xi_1 - \left(\frac{dF}{dx_1}\right)dx_\nu = 0\,, & dx_1 + \left(\frac{dF}{d\xi_1}\right)dx_\nu = 0 \\ d\xi_2 - \left(\frac{dF}{dx_2}\right)dx_\nu = 0\,, & dx_2 + \left(\frac{dF}{d\xi_2}\right)dx_\nu = 0 \\ \vdots & \vdots \\ d\xi_{\nu-1} - \left(\frac{dF}{dx_{\nu-1}}\right)dx_\nu = 0\,, & dx_{\nu-1} + \left(\frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\right)dx_\nu = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$dx + \left\{\frac{dF}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dF}{d\xi_2}\xi_2 \ldots\ldots\ldots + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1} - F\right\}dx_\nu = 0 \quad (2)$$

ove all' ultima equazione potrà sostituirsi la

$$x = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ F - \left(\frac{dF}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dF}{d\xi_2}\xi_2 \ldots\ldots\ldots + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1}\right)\right\} dx_\nu \quad (3)$$

Quando coi $2\nu - 2$ integrali del sistema (1) siansi espresse tutte le variabili

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ x_{\nu-1}\,;\quad \xi_1\,,\quad \xi_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ \xi_{\nu-1}$$

in funzione di x_ν e de' loro valori competenti ad $x_\nu = x_\nu^0$, si otterrà la x dalla (3) con una semplice quadratura. La soluzione completa sarà ciò che risulta dall' ottenuto valore di x, quando cogl' integrali del sistema venga egli espresso in funzione delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν e de' valori x_1^0, x_2^0, ... $x_{\nu-1}^0$ e di x_ν^0.

Siccome la (2) col mezzo delle equazioni della 2.ª colonna delle (1) si riduce a

$$dx = \xi_1\,dx_1 + \xi_2\,dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1}\,dx_{\nu-1} + F\,dx_\nu \quad (4)$$

così risulterà la x espressa anche da

$$x = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} + F\,dx_\nu\right\} + x^0 \quad (5)$$

Coi $2\nu-2$ integrali del sistema (1) ottenuti i valori delle ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle x°_1, x°_2, ...,.. $x^\circ_{\nu-1}$, x°_ν la quantità sotto il segno $\int$ divenendo una differenziale esatta, si avrà, come è noto, il valore di x per semplici quadrature che sarà una soluzione completa della proposta.

La soluzione che si ottiene, sia dalla (3), sia dalla (5), espressa per valori iniziali, verrà d'ora innanzi indicata in compendio con

$$x = \phi + x^\circ \qquad (6)$$

Ma se dal sistema (1) si ottengono anche soli $\nu-1$ integrali con $\nu-1$ costanti arbitrarie β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$, ma di tal modo che si possa col loro mezzo determinare le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ in funzione delle variabili e delle accennate costanti, la soluzione completa si avrà dalla

$$x = \int \left\{ \xi_1\, dx_1 + \xi_2\, dx_2 \cdots\cdots + \xi_{\nu-1}\, dx_{\nu-1} + F\, dx_\nu \right\} + \beta_\nu$$

integrata per semplici quadrature.

Una soluzione contenente le costanti dell'immediata integrazione sarà d'ora innanzi contrassegnata dalla

$$x = \psi + \beta_\nu .$$

Una regola semplice per ottenere le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ espresse nel modo suindicato verrà esposta al § 10, art. III.

Le equazioni date quì derivano spontanee da quelle dell'antecedente articolo quando si ammette che la $\mathcal{F}$ non contenga la x.

Giova avvertire che il sistema (1) rimane invariato quando la $\mathcal{F}$ si cambiasse in $\mathcal{F}+\beta$, essendo β un'arbitraria qualunque, la sola equazione (2) venendo per tale supposizione alterata.

2. Se l'equazione differenziale parziale proposta mancante della variabile principale x è della forma

$$\varphi = 0 \qquad (9)$$

il sistema da cui dipende la soluzione completa è dato da

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_1 + \frac{dP}{dx_1} dx_\nu = 0 \,, &\quad& \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_1 - \frac{dP}{d\xi_1} dx_\nu = 0 \\
&\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_2 + \frac{dP}{dx_2} dx_\nu = 0 \,, && \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_2 - \frac{dP}{d\xi_2} dx_\nu = 0 \\
&\vdots && \vdots \\
&\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_{\nu-1} + \frac{dP}{dx_{\nu-1}} dx_\nu = 0 \,, && \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_{\nu-1} - \frac{dP}{d\xi_{\nu-1}} dx_\nu = 0 \\
&\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_\nu + \frac{dP}{dx_\nu} dx_\nu = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\frac{dP}{d\xi_\nu} dx - \left\{ \frac{dP}{d\xi_1} . \xi_1 + \frac{dP}{d\xi_2} . \xi_2 \,\ldots\ldots + \frac{dP}{d\xi_\nu} . \xi_\nu \right\} dx_\nu = 0 \qquad (11)$$

Quando siansi ottenuti i $2\nu - 1$ integrali del sistema (10), di cui uno sarà $P = 0$ senza costante arbitraria, una soluzione completa $x = \phi + x^0$ si avrà da una o dall'altra delle due espressioni

$$x = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dP}{d\xi_1} \xi_1 + \frac{dP}{d\xi_2} \xi_2 \ldots\ldots + \frac{dP}{d\xi_\nu} \xi_\nu \right) : \frac{dP}{d\xi_\nu} \right\} dx_\nu + x^0 \qquad (12)$$

$$x = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} + \xi_\nu dx_\nu \right\} + x^0 \qquad (13)$$

Quando poi, oltre l'integrale $P = 0$, siansi ottenuti altri $\nu - 1$ integrali del sistema (10) colle costanti $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}$ in modo che si possa determinare con essi le $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_\nu$

in funzione delle variabili e delle costanti, la soluzione completa $x = \psi + \beta_\nu$ sarà data da

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} + \xi_\nu dx_\nu \right\} + \beta_\nu \qquad (14)$$

Le equazioni quì esposte sono una conseguenza delle formole del § 2, articolo precedente.

Si osserverà poi, come nell'antecedente paragrafo, che qui il totale sistema (10), (11) rimane invariato quando la proposta si cambii nelle $\mathcal{P} - \beta = 0$ essendo β un'arbitraria qualunque.

3. Di un'equazione differenziale parziale $\mathcal{P} = 0$ mancante della variabile principale x essendo nota una soluzione completa espressa dalla $x = \phi + x$, ovvero dalla $x = \psi + \beta_\nu$, gl'integrali del sistema (10) saranno nel 1.° caso espressi da

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1 \;,\; \left(\dfrac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2 \ldots\ldots \left(\dfrac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) = \xi_{\nu-1} \;,\; \left(\dfrac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\[2ex] \left(\dfrac{dx}{dx_1^0}\right) = -\xi_1^0 \;,\; \left(\dfrac{dx}{dx_2^0}\right) = -\xi_2^0 \ldots\ldots \left(\dfrac{dx}{dx_{\nu-1}^0}\right) = -\xi_{\nu-1}^0\end{array}\right\} \quad (15)$$

e nel 2.° caso da

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1 \;,\; \left(\dfrac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2 \ldots\ldots \left(\dfrac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) = \xi_{\nu-1} \;,\; \left(\dfrac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\[2ex] \left(\dfrac{dx}{d\beta_1}\right) = h_1 \;,\; \left(\dfrac{dx}{d\beta_2}\right) = h_2 \ldots\ldots \left(\dfrac{dx}{d\beta_{\nu-1}}\right) = h_{\nu-1}\end{array}\right\} \quad (16)$$

Se l'equazione differenziale parziale proposta mancante della x è della forma $\left(\dfrac{dx}{dx_\nu}\right) - \mathcal{F} = 0$, di cui si conosca una soluzione completa della forma $x = \phi + x^0$, ovvero della forma $x = \psi + \beta_\nu$, gl'integrali del relativo sistema (1) saranno dati nel 1.° caso dalle (15), ommessa la $\left(\dfrac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu$, e nel

2.° caso dalle (16), ommessavi la stessa equazione.

Tali equazioni derivano dalle (27) e (31) dell'articolo precedente, osservando che nell'ipotesi attuale essendo $\theta = 0$ sarà $\left(\frac{dx}{dx^0}\right) = N = 1$ e $\frac{dx}{d\beta_\nu} = 1.$

Una rimarchevole conseguenza delle equazioni (16) si è che ottenuta la soluzione completa $x = \psi + \beta_\nu$ derivata, come si disse in fine al paragrafo precedente, da un numero $\nu - 1$ soltanto d'integrali del sistema, gli altri integrali del sistema stesso sono forniti dalla 2.ª linea delle (16).

4. Sia proposta un'equazione differenziale parziale mancante della variabile principale x ed espressa dall'una o dall'altra delle due forme

$$\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) - \mathcal{F} = 0\,, \qquad \mathcal{P} = 0$$

Se del sistema (1) che compete alla 1.ª forma si ottengono $\nu - 1$ integrali con $\nu - 1$ costanti arbitrarie $\beta_1\,,\ \beta_2\,, \ldots \beta_{\nu-1}\,,$ ovvero se si ottengono del sistema (10) che si riferisce alla 2.ª forma un numero ν d'integrali colle costanti $\beta_1\,,\ \beta_2\,, \ldots \beta_{\nu-1}$ fra le quali è compreso l'integrale $P = 0$, e siano gli ottenuti integrali di tal natura che col loro mezzo possano determinarsi le $\xi_1\,,\ \xi_2\,, \ldots\ \xi_{\nu-1}$ nel 1.° caso e le $\xi_1\,,\ \xi_2\,, \ldots\ \xi_\nu$ nel 2.° in funzione dalle variabili $x_1\,,\ x_2\,, \ldots\ x_\nu$ e delle accennate $\nu - 1$ costanti, gli altri $\nu - 1$ integrali del sistema (1) saranno dati dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left\{\frac{d\xi_1}{d\beta_1}dx_1 + \frac{d\xi_2}{d\beta_1}dx_2 \cdots\cdots + \frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_1}dx_{\nu-1} + \frac{dF}{d\beta_1}dx_\nu\right\} = h_1\\
&\int\left\{\frac{d\xi_1}{d\beta_2}dx_1 + \frac{d\xi_2}{d\beta_2}dx_2 \cdots\cdots + \frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_2}dx_{\nu-1} + \frac{dF}{d\beta_2}dx_\nu\right\} = h_2\\
&\quad\vdots\\
&\int\left\{\frac{d\xi_1}{d\beta_{\nu-1}}dx_1 + \frac{d\xi_2}{d\beta_{\nu-1}}dx_2 \cdots\cdots + \frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_{\nu-1}}dx_{\nu-1} + \frac{dF}{d\beta_{\nu-1}}dx_\nu\right\} = h_{\nu-1}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

ove le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ ed F s'intenderanno espresse per le trovate funzioni delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle costanti, e gli altri $\nu-1$ integrali del sistema (10) saranno espressi dalle stesse (17) ove si sostituisca la ξ_ν alla F.

I polinomj sotto i segni integrali espressi in funzione delle variabili saranno altrettante differenziali esatte i cui integrali si otterranno per semplici quadrature. Infatti la soluzione completa della $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$ è data dalla (7) in cui il polinomio sotto il segno $\int$ deve ridursi ad una differenziale esatta quando cogl'integrali ottenuti siansi espresse le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$, F in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$. Tale polinomio non cesserà di essere una differenziale esatta quando si pigli la differenziale rispetto ad una qualsivoglia delle costanti che esso contiene. Ciò ritenuto, la 2.ª linea delle equazioni (16) fornirà le $\nu-1$ equazioni (17).
Parimente la soluzione completa della $\mathcal{P} = 0$ essendo data dalla (14), si otterranno pure dalla 2.ª linea delle (16) le formole che risultano dalle (17), quando in esse la F venga rimpiazzata dalla ξ_ν.
Il metodo poi con cui si ottiene l'integrazione di un'espressione differenziale esatta dipende, come è noto, da semplici quadrature.

5. Se la proposta equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) - \mathcal{F} = 0$ contenendo la variabile principale x, manca invece di una variabile indipendente x_j, la soluzione completa sarà data da

$$x_j = \psi\left(x\,,\; x_1\,,\; x_2\,, \ldots\ldots x_{j-1}\,,\; x_{j+1}\,, \ldots\ldots x_\nu\right) + \beta_\nu \qquad (18)$$

in cui la variabile implicita x si riguarderà ancora come variabile principale, ed ove la ψ sarà quella funzione delle variabili indipendenti, e delle $\nu-1$ costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$

che nasce dall' integrazione dell'espressione differenziale esatta

$$\frac{1}{\xi_j}dx - \frac{\xi_1}{\xi_j}dx_1 - \frac{\xi_2}{\xi_j}dx_2 - \dots\dots\dots - \frac{\xi_{\nu-1}}{\xi_j}dx_{\nu-1} - \frac{F}{\xi_j}dx_\nu$$

nella quale le ξ_1, ξ_2, ... ξ_j, ... $\xi_{\nu-1}$ siano determinate da $\nu - 1$ integrali del sistema (4), (5), art. I, ommessavi l' equazione che contiene la dx_j.

Infatti se invece della x si riguarda la x_j come la variabile principale, e sia α un indice qualunque, si avrà per tutti i valori di α diversi di j

$$\left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right) = -\left(\frac{dx_j}{dx_\alpha}\right) : \left(\frac{dx_j}{dx}\right), \qquad \left(\frac{dx}{dx_j}\right) = 1 : \frac{dx_j}{dx} \tag{19}$$

Se per tutti i valori di $\alpha = 0, 1, 2, \dots\dots \nu$ escluso il numero $= j$ si pone

$$\left(\frac{dx_j}{dx_\alpha}\right) = \zeta_\alpha \tag{20}$$

si avrà dalla (19)

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1 = -\zeta_1 : \zeta, \ \left(\dfrac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2 = -\zeta_2 : \zeta, \ \dots \\ \dots\dots \left(\dfrac{dx}{dx_j}\right) = \xi_j = 1 : \zeta, \ \dots \left(\dfrac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu = -\zeta_\nu : \zeta \end{array}\right\} \tag{21}$$

Con questi valori la proposta

$$\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}\left(\xi_1, \ \xi_2, \ \dots\dots \xi_j, \ \dots\dots \xi_{\nu-1}\right)$$

si trasforma nella

$$\left(\frac{dx_j}{dx_\nu}\right) = -\zeta\,\mathcal{F}\left(-\frac{\zeta_1}{\zeta}, \ -\frac{\zeta_2}{\zeta}, \dots \frac{1}{\zeta}, \dots -\frac{\zeta_{\nu-1}}{\zeta}\right)$$

Posto il 2.° membro eguale ad F_1, il sistema da cui dipenderebbe la soluzione completa della precedente in cui si ripongano per le diverse ζ i valori dati dalla (20) sarebbe espresso dal sistema (1) postovi F_1 per F e le ζ_1, ζ_2 .... per le analoghe ξ_1, ξ_2..... La soluzione x_j si otterrebbe quì dalle

$$dx_j = \zeta\, dx + \zeta_1\, dx_1 + \zeta_2\, dx_2 \ldots\ldots + \zeta_{\nu-1}\, dx_{\nu-1} + F_1\, dx_\nu$$

quando, ottenuti gl'integrali del sistema, vi si ponessero i valori delle ζ, ζ_1, ζ_2, ... $\zeta_{\nu-1}$ in funzione delle variabili e se ne pigliasse l'integrale. Ma per le (21) la precedente equazione, il cui 2.° membro non contenente x_j è una differenziale esatta, si cambia nella

$$dx_j = \frac{1}{\xi_j} dx - \frac{\xi_1}{\xi_j} dx_1 - \frac{\xi_2}{\xi_j} dx_2 \ldots\ldots - \frac{\xi_{\nu-1}}{\xi_j} dx_{\nu-1} - \frac{F}{\xi_j} dx_\nu$$

dalla cui integrazione si otterrà $x_j = \psi + \beta_\nu$. Un processo affatto analogo si dovrebbe seguire quando gl'integrali del sistema venissero espressi per valori iniziali.

6. Se di un'equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$ contenente la x, ma priva di una x_j, è nota una soluzione completa $x_j = \psi + \beta_\nu$, gl'integrali del sistema (4), (5), art. I, saranno dati dalle

$$x_j = \psi + \beta_\nu \qquad (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dx_j}{dx_1}\right) = -\frac{\xi_1}{\xi_j},\ \left(\frac{dx_j}{dx_2}\right) = -\frac{\xi_2}{\xi_j},\ \ldots\ \frac{dx_j}{dx_{\nu-1}} = -\frac{\xi_{\nu-1}}{\xi_j},\ \left(\frac{dx_j}{dx}\right) = \frac{1}{\xi_j} \\ \left(\frac{dx_j}{d\beta_1}\right) = h_1,\ \left(\frac{dx_j}{d\beta_2}\right) = h_2,\ \ldots\ \left(\frac{dx_j}{d\beta_j}\right) = h_j,\ \ldots \left(\frac{dx_j}{d\beta_{\nu-1}}\right) = h_{\nu-1} \end{array}\right\} (23)$$

Infatti se colla soluzione completa (22) s'intende espressa la variabile principale x in funzione delle altre variabili, gl'integrali del sistema (4), (5), art. I, saranno espressi dalle (31), art. I, aggiuntavi la (22). Ma dalla (22) si cava $\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = 1 : \left(\frac{dx_j}{dx}\right)$ e per tutti i valori di α diversi da j compresi da $\alpha = 1$ ad $\alpha = \nu - 1$ si deduce $\left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right) = -\left(\frac{dx_j}{dx_\alpha}\right) : \left(\frac{dx_j}{dx}\right)$.

Parimente per tutti i valori di $\alpha = 1, 2, \ldots\ldots j, \ldots\ldots \nu - 1$, si cava $\left(\frac{dx}{d\beta_\alpha}\right) = -\left(\frac{dx_j}{d\beta_\alpha}\right) : \left(\frac{dx_j}{dx}\right)$. Posti tali valori nelle citate equazioni (31), si otterranno per gl' integrali del sistema (4), (5), art. I, nell' ipotesi che la F manchi di x_j, le equazioni (23).

Con un processo analogo si otterrebbero gl' integrali del sistema citato quando la soluzione completa venisse espressa per valori iniziali.

7. Se l' equazione differenziale proposta contenente la x e mancante di x_j è della forma $\mathcal{P} = 0$, la soluzione completa sarà data da $x_j = \psi + \beta_\nu$ essendo

$$\psi = \int \left\{ \frac{1}{\xi_j} dx - \frac{\xi_1}{\xi_j} dx_1 \ldots - \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} dx_{j-1} - \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} dx_{j+1} \ldots\ldots - \frac{\xi_\nu}{\xi_j} dx_\nu \right\} \quad (24)$$

ove le ξ_1, ξ_2, ... ξ_j, ... ξ_ν saranno determinate in funzione delle variabili e delle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ con un numero ν di equazioni integrali, compresa la $P = 0$, desunte dal sistema (16), (17), (18), art. I, esclusavi l' equazione affetta dalla dx_j.

Viceversa, data una soluzione completa implicita $x_j = \psi + \beta_\nu$ della $\mathcal{P} = 0$, gl' integrali delle 2ν equazioni del citato sistema saranno espressi dalle equazioni (22), (23) del precedente paragrafo, alle quali si aggiunga la stessa $P = 0$, ovvero la $\left(\frac{dx_j}{dx_\nu}\right) = -\frac{\xi_\nu}{\xi_j}$, quest' ultima risultando dalla soluzione completa stessa che fornisce, oltre le già dette relazioni, la $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = -\left(\frac{dx_j}{dx_\nu}\right) : \left(\frac{dx_j}{dx}\right) = \xi_\nu$.

In generale è da ritenersi che se in un' equazione differenziale parziale contenente la variabile principale, espressa da una o dall'altra delle forme $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) - \mathcal{F} = 0$, $\mathcal{P} = 0$ mancasse più di una variabile indipendente, le conseguenze desunte dai precedenti §§ 5, 6 e 7 sussistono per una qualunque delle variabili che mancano.

8. Se l'equazione differenziale parziale $\varphi = 0$ contenente la variabile principale x e le variabili indipendenti manca invece di una differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_j}\right)$, stabilito il sistema (16), (17), (18), § 2, art. I, di cui un'integrale è la stessa $P = 0$, si ommetteranno le due equazioni omologhe

$$\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_j + \left\{\frac{dP}{dx_j} + \xi_j \frac{dP}{dx}\right\} dx_\nu = 0 \quad , \quad \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_j - \frac{dP}{d\xi_j} dx_\nu = 0 \qquad (25)$$

di cui la 2.ª dà $x_j = cost.^e$ Colle restanti $2\nu - 2$ equazioni del sistema, nelle quali si riguarderà x_j come una costante, si otterrà la soluzione completa della proposta in uno dei due seguenti modi:

1.° Ottenuti, oltre la $P = 0$, altri $2\nu - 3$ integrali, se con queste $2\nu - 2$ equazioni finite contenenti $2\nu - 3$ costanti si eliminano le $\nu - 1$ variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots \xi_\nu$ e colle risultanti $\nu - 1$ equazioni si eliminano inoltre $\nu - 2$ costanti opportunamente scelte, la risultante equazione fra la x_j riguardata come costante e le variabili

$$x \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; \ldots\ldots \; x_{j-1} \;,\; x_{j+1} \;,\; \ldots\ldots \; x_\nu$$

e le residue $\nu - 1$ costanti sarà la cercata soluzione completa.

2.° Se negli ottenuti $2\nu - 3$ integrali s'introducono in luogo delle costanti i valori iniziali e vi si uniscano le due equazioni $P = 0$, $P^0 = 0$, eliminate da queste $2\nu - 1$ equazioni le $2\nu - 2$ quantità

$$\xi_1 \;,\; \xi_2 \;,\; \ldots\ldots \; \xi_{j-1} \;,\; \xi_{j+1} \;,\; \ldots\ldots \; \xi_\nu$$

$$\xi^0_1 \;,\; \xi^0_2 \;,\; \ldots\ldots \; \xi^0_{j-1} \;,\; \xi^0_{j+1} \;,\; \ldots\ldots \; \xi^0_\nu$$

la risultante equazione espressa per le variabili e valori iniziali sarà la soluzione cercata.

Dall' integrazione della 1.ª delle (25) in cui le differenziali parziali della P siano espresse col mezzo degli ottenuti integrali in funzione o della x_ν e valori iniziali o della x_ν e costanti arbitrarie, si avrà nel 1.° caso

$$\xi_j = -N\int_{x_\nu^0}^{x_\nu}\left\{\frac{dP}{dx_j}:\frac{dP}{d\xi_\nu}\right\}\frac{dx_\nu}{N} + N\xi_j^0 \tag{26}$$

nel 2.° caso

$$\xi_j = -N\int\left\{\frac{dP}{dx_j}:\frac{dP}{d\xi_\nu}\right\}\frac{dx_\nu}{N} + Nh_j \tag{27}$$

nelle quali N ha il valore fornito dalle (25), art. I, le ξ_j^0, h_j avendo valori costanti.

Infatti alla proposta $\varphi = 0$ corrisponde il citato sistema del § 2, art. I, di cui un integrale è in generale dato da $P = 0$. Ma nel caso attuale un altro integrale si ha dalla $x_j = \beta_j$ che si desume dalla 2.ª delle (25). Se nel sistema si ommettono le equazioni (25) e si ritiene essere la x_j una costante $= \beta_j$, il sistema sarà ridotto a $2\nu - 2$ equazioni fra tutte le variabili, tranne le ξ_j, x_j ed un suo integrale sarà la $P = 0$ in cui sia $x_j = \beta_j$, ossia in cui si riguardi x_j come costante. Supposti ottenuti gli altri $2\nu - 3$ integrali, i metodi che forniscono una soluzione completa risultano immediatamente dal processo del § 2, art. I. Se inoltre la 1.ª delle (25) che non ha servito a questa ricerca si pone sotto la forma

$$\left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right)\frac{d\xi_j}{dx_\nu} + \left(\frac{dP}{dx}\right)\xi_j + \left(\frac{dP}{dx_j}\right) = 0$$

supposto $\left(\frac{dP}{dx}\right):\left(\frac{dP}{dx_\nu}\right) = \theta$, $\left(\frac{dP}{dx_j}\right):\left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right) = \lambda$, diverrà

$$\frac{d\xi_j}{dx_\nu} + \theta\xi_j + \lambda = 0 \qquad (28)$$

Se coi $2\nu - 2$ integrali ottenuti, compresovi $P = 0$, si intendono determinate le variabili

$$x\,,\quad x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_{j-1}\,,\quad x_{j+1}\,,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-1}$$

$$\xi_1\,,\quad \xi_2\,,\ \ldots\ldots\ \xi_{j-1}\,,\quad \xi_{j+1}\,,\ \ldots\ldots\ \xi_{\nu-1}\,,\quad \xi_\nu$$

in funzione della x_ν e delle $2\nu - 3$ costanti dell' integrazione, ovvero in funzione di x_ν e de' valori iniziali, la (28) sarà integrabile per quadrature. Pongasi infatti $\xi_j = Ny$ essendo $N = e^{-\int \theta dx_\nu}$ la (28) si trasforma nella

$$\frac{dy}{dx_\nu} = -\frac{\lambda}{N}\,, \qquad \text{da cui} \quad y = -\int \frac{\lambda}{N} dx_\nu + C \qquad \text{e quindi}$$

$$\xi_j = -N\int \frac{\lambda}{N} dx_\nu + NC \qquad (29)$$

la quale, posto il valore di λ e fatto $C = h_j$, fornisce la (27). Se nell' equazione (28) s' intendono essere le variabili espresse pei valori iniziali e chiamisi ξ_j^0 ciò che diventa ξ_j pel valore $x_\nu = x_\nu^0$, la (29), determinata la costante C dietro tale ipotesi, si cambia nella (26).

9. Essendo $x = \phi$ una soluzione completa della $\varphi = 0$ mancante della $\left(\frac{dx}{dx_j}\right)$ ed essendo ϕ espressa per valori iniziali, gl' integrali delle 2ν equazioni del relativo sistema (16), (17), (18) del § 2, art. I, da sostituirsi a quelli del § 3, art. I, saranno espressi da

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dx_1} = \xi_1\,, \quad \frac{dx}{dx_2} = \xi_2 \cdots\cdots \frac{dx}{dx_j} = \xi_j \cdots\cdots \frac{dx}{dx_{\nu-1}} = \xi_{\nu-1}\,, \quad \frac{dx}{dx_\nu} = \xi_\nu \\ \frac{dx}{dx_1^0} = -\xi_1^0 \frac{dx}{dx^0}\,, \quad \frac{dx}{dx_2^0} = -\xi_2^0 \frac{dx}{dx^0} \cdots\cdots x_j = x_j^0 \cdots\cdots \frac{dx}{dx_{\nu-1}^0} = -\xi_{\nu-1}^u \frac{dx}{dx^0}\,, \ \phi - x = 0 \end{array}\right\} (30)$$

ed in forza del valore di ξ_j dato dalla (26) si avrà l'una o l'altra delle espressioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dx_j} &= -N\int_{x_\nu^o}^{x_\nu}\left\{\frac{dP}{dx_j}:\frac{dP}{d\xi_\nu}\right\}\frac{dx_\nu}{N}\\ \frac{dx}{dx_j} &= -N\int_{x_\alpha^o}^{x_\alpha}\left\{\frac{dP}{dx_j}:\frac{dP}{d\xi_\alpha}\right\}\frac{dx_\alpha}{N}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Questa seconda espressione valendo per tutti i valori di α dà $\alpha = 1$ ad $\alpha = \nu - 1$ escluso $\alpha = j$, e la quantità sotto il segno integrale dovendosi intendere espressa in funzione della sola x_α e costanti.

Infatti pel caso generale gl'integrali del relativo sistema sarebbero dati dalle equazioni del § 3, art. I, le quali conterrebbero la $\frac{dx}{dx_j^o} = -\xi_j^o \frac{dx}{dx^o}$. Ma nel caso speciale che ci occupa, non potendo la soluzione completa $x = \phi$ contenere la x_j^o risulterà $\xi_j^o = 0$, ed in luogo di questa equazione che mancherebbe, si è sostituito l'integrale ottenuto $x_j = cost.^e$ che poniamo $= x_j^o$. In pari tempo la $\frac{dx}{dx_j} = \xi_j$ della 1.ª linea delle (30), postovi per ξ_j il trovato valore (26) ed avuto riguardo alla $\xi_j^o = 0$ fornisce la 1.ª delle relazioni (31). La 2.ª delle (31) risulta dall'eliminazione di dx_ν colla equazione

$$\frac{dP}{d\xi_\nu}dx_\alpha - \frac{dP}{d\xi_\alpha}dx_\nu = 0$$

che è l'equazione generica della 2.ª colonna delle (16), art. I.

Analoghe formole si avrebbero dalle equazioni (30), (31) del § 4, art. I, quando la soluzione completa della proposta $\mathfrak{P} = 0$ fosse espressa dalla $x = \psi$ contenente in luogo dei valori iniziali le costanti dell'integrazione. Stabiliti gli integrali in discorso, si troverebbe in luogo della (31) quella desunta dalla (27) del § 8.

Quando la proposta $\varphi = 0$ si riduce alla $\frac{dx}{dx_\nu} - \mathcal{F} = 0$ le espressioni (31), stante che si ha in tal caso $P = \xi_\nu - F$, diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dx_j} &= N\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \frac{dF}{dx_j} : N \right\} dx_\nu \\ \frac{dx}{dx_j} &= N\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \frac{dF}{dx_j} : \frac{dF}{d\xi_\alpha} \right\} \frac{dx_\alpha}{N} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

10. Di una qualunque equazione differenziale parziale contenente un'arbitraria β data sotto la forma $\varphi = 0$, ovvero sotto la forma $\frac{dx}{dx_\nu} - \mathcal{F} = 0$ essendo nota, sia col metodo dei §§ 1, 2, art. I, sia in tutt'altro modo, una soluzione completa $x = \phi$ si avrà per la 1.ª forma l'una o l'altra delle espressioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\beta} &= -N\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \frac{dP}{d\beta} : \frac{dP}{d\xi_\nu} \right\} \frac{dx_\nu}{N} \\ \frac{dx}{d\beta} &= -N\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \frac{dP}{d\beta} : \frac{dP}{d\xi_\alpha} \right\} \frac{dx_\alpha}{N} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

e per la 2.ª forma l'una o l'altra delle

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\beta} &= N\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \frac{dF}{d\beta} : N \right\} dx_\nu \\ \frac{dx}{d\beta} &= N\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \frac{dF}{d\beta} : \frac{dF}{d\xi_\alpha} \right\} \frac{dx_\alpha}{N} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Analoghe espressioni si avranno quando la soluzione completa sia data dalla $x=\psi$ espressa per le costanti arbitrarie. Infatti considerata l'equazione differenziale parziale proposta come un'equazione mancante della differenziale parziale $\left(\frac{dx}{d\beta}\right)$, come se la β tenesse luogo della variabile x_j, le formole (31), (32) in cui si cambii x_j in β daranno le (33), (34).

11. Un'equazione differenziale parziale di primo ordine contenente la variabile principale x e le sue differenziali parziali rispetto alle ν variabili indipendenti x_1, x_2, ...x_ν che essa contiene, data da

$$\varphi = 0 \tag{35}$$

potrà sempre trasformarsi in altra equazione differenziale parziale $\varphi_1 = 0$ espressa pei differenziali parziali di una nuova variabile z presi rispetto alle $\nu+1$ variabili x, x_1, x_2, ... x_ν e non contenente la variabile principale z. La trasformata $\varphi_1 = 0$ sarà omogenea rispetto alle differenziali parziali stesse. Ottenuta quindi dietro il processo del § 2 una soluzione completa della trasformata $\varphi_1 = 0$, che esprimerò con

$$z = \psi\left(x\ ,\ \ x_1\ ,\ \ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) + \gamma \tag{36}$$

ove la ψ indicherà una funzione delle $\nu+1$ variabili e di ν costanti β_1, β_2, ... β_ν, essendo γ un'altra costante, la soluzione completa della proposta (35) sarà data sotto forma implicita dalla

$$\psi\left(x\ ,\ \ x_1\ ,\ \ x_2\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) = 0 \tag{37}$$

Infatti la soluzione completa della proposta equazione sarà nella massima generalità espressa implicitamente da un'equazione contenente tutte le variabili x, x_1, x_2, ... x_ν e le ν costanti β_1 , β_2 , ... β_ν che rappresenteremo con

$$z\left(x \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; \ldots\ldots\; x_\nu \;,\; \beta_1 \;,\; \beta_2 \;,\; \ldots\ldots\; \beta_\nu\right) = 0 \qquad (38)$$

Riguardando in questa la x come funzione delle altre variabili, se si prende la differenziale della (38) rispetto ad una variabile indipendente generica x_j , si avrà

$$\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = -\left(\frac{dz}{dx_j}\right) : \left(\frac{dz}{dx}\right) \qquad (39)$$

La proposta (35), postivi i valori delle differenziali parziali che essa contiene, desunti dalla precedente (39) col dare a j tutti i valori $j = 1$, 2 , 3 , ... ν sarà trasformata in una equazione differenziale parziale $\varphi_1 = 0$ contenente le differenziali parziali di z rispetto alle variabili indipendenti x , x_1 , x_2 , ... x_ν senza la z. La stessa equazione, non contenendo che i rapporti di due differenziali parziali quali risultano dal 2.° membro della (39), sarà omogenea rispetto alle differenziali parziali stesse, ed il grado d'omogeneità sarà eguale a quello della differenziale parziale che nella proposta è affetta dal grado massimo.

Ottenuta una soluzione completa (36) dell'equazione trasformata, dovrà in forza delle (38) assumersi $\gamma = 0$ e porsi a zero la $\psi\left(x \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; \ldots\ldots\ldots\; x_\nu\right)$ che equivale alla $z\left(x \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; \ldots\; x_\nu \;,\; \beta_1 \;,\; \ldots\; \beta_\nu\right)$, e perciò si avrà la (37).

La trasformata in discorso essendo omogenea, l'equazione (11), § 2 che nel caso attuale, supposto $\dfrac{dz}{dx} = \xi$, diventa

$$dz = \left\{ \frac{dP_1}{d\xi}\xi + \frac{dP_1}{d\xi_1}\xi_1 \ldots\ldots + \frac{dP_1}{d\xi_\nu}\xi_\nu \right\} dx_\nu : \frac{dP_1}{d\xi_\nu}$$

fornisce $z = cost.^e$, cioè che una delle soluzioni complete è quella di supporre costante la z.

12. Quando di un' equazione differenziale parziale (35) contenente la variabile principale x è data od in qualsivoglia modo nota una soluzione completa espressa sotto forma implicita

$$\psi\left(x\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right)=0 \qquad (40)$$

quale si otterrebbe dalla soluzione della sua trasformata avuta col processo del precedente paragrafo, gl' integrali del sistema (16), (17), (18), art. I, saranno dati dalle equazioni

$$\psi=0 \qquad (41)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\psi}{dx_1}=-\xi_1\frac{d\psi}{dx},\quad \frac{d\psi}{dx_2}=-\xi_2\frac{d\psi}{dx}\ \ldots\ldots\ \frac{d\psi}{dx_{\nu-1}}=-\xi_{\nu-1}\frac{d\psi}{dx},\quad \frac{d\psi}{dx_\nu}=-\xi_\nu\frac{d\psi}{dx} \\ \frac{d\psi}{d\beta_1}=h_1\frac{d\psi}{d\beta_\nu},\quad \frac{d\psi}{d\beta_2}=h_2\frac{d\psi}{d\beta_\nu}\ \ldots\ldots\ \frac{d\psi}{d\beta_{\nu-1}}=h_{\nu-1}\frac{d\psi}{d\beta_\nu} \end{array}\right\} \quad (42)$$

In luogo dell' ultima equazione della 1.ª linea delle (42) potrà impiegarsi la stessa $P=0$, che pur essa è, come si disse, un integrale del sistema.

Quando la proposta (35) si riduce alla forma $\frac{dx}{dx_\nu}-\mathcal{F}=0$ la trasformata assumerà la forma $\frac{dz}{dx_\nu}=\mathcal{F}_1$, ove $\mathcal{F}_1$ non contenente la z sarà omogenea di 1.° grado. Per ottenere di questa la soluzione completa si dovrà ricorrere al sistema (1), (2) di quest' articolo, ed il processo ulteriore sarà lo stesso come il già esposto pel caso della (35). Ottenuta quindi la soluzione completa, gl' integrali del succitato sistema saranno dati dalle stesse (41), (42), ommessa l' ultima equazione della 1.ª linea delle (42).

È facile vedere come il metodo si modifichi nel caso in cui vogliasi ottenere una soluzione completa espressa per valori iniziali, e come da questa si ottengano gl' integrali del sistema.

III.

Equazione differenziale parziale priva della variabile principale e mancante o di una differenziale parziale, o di una variabile indipendente.

1. Se la proposta equazione differenziale parziale

$$\varphi = 0 \qquad (1)$$

manca della variabile principale x e di una differenziale parziale $\frac{dx}{dx_j}$, dovrà essa riguardarsi come un'equazione contenente una variabile di meno, giacchè la x_j dovrà in essa considerarsi come una costante, ed il sistema da cui dipenderà la soluzione completa della proposta si avrà dagl' integrali del sistema (10), art. II, in cui, ommesse le due equazioni omologhe

$$\frac{dP}{d\xi_\nu}d\xi_j + \frac{dP}{dx_j}dx_\nu = 0\,, \qquad \frac{dP}{d\xi_\nu}dx_j - \frac{dP}{d\xi_j}dx_\nu = 0 \qquad (2)$$

vi si consideri la x_j come una costante. Ottenuti gl' integrali del sistema in discorso, la soluzione completa x si otterrà dalla (13) o dalla (14) del § 2, art. II, nelle quali per essere $dx_j = 0$ mancherà il termine $\xi_j\, dx_j$.

Viceversa, essendo nota una soluzione completa $x = \phi + x^0$ della proposta equazione, i $2\nu - 3$ integrali del sistema a cui si riduce quello dato dalle (10), art. II, quando si ommettano le (2) e vi si consideri la x_j come costante, saranno espressi dalle $2\nu - 3$ equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dx_1} = \xi_1\,, \quad \frac{dx}{dx_2} = \xi_2 \cdots \frac{dx}{dx_{j-1}} = \xi_{j-1}\,, \quad \frac{dx}{dx_{j+1}} = \xi_{j+1} \cdots \frac{dx}{dx_{\nu-1}} = \xi_{\nu-1}\,, \quad \frac{dx}{dx_\nu} = \xi_\nu \\ \frac{dx}{dx_1^0} = -\xi_1^0\,, \quad \frac{dx}{dx_2^0} = -\xi_2^0 \cdots \frac{dx}{dx_{j-1}^0} = -\xi_{j-1}^0\,, \quad \frac{dx}{dx_{j+1}^0} = -\xi_{j+1}^0 \cdots \frac{dx}{dx_{\nu-1}^0} = -\xi_{\nu-1}^0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Si avranno poi dalle (31), art. II, le relazioni

$$\frac{dx}{dx_j} = -\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dP}{dx_j}\right) : \frac{dP}{d\xi_\nu} \right\} dx_\nu = -\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \left(\frac{dP}{dx_j}\right) : \left(\frac{dP}{d\xi_\alpha}\right) \right\} dx_\alpha \qquad (4)$$

che sussistono per qualsivoglia valore di α diverso da j. Nel caso che la $\mathcal{P}$ della (1) assuma particolari forme, avranno luogo le seguenti conseguenze.

1.° Se la (1) si riduce alla forma

$$\frac{dx}{dx_\nu} - \mathcal{F} = 0 \qquad (5)$$

si otterrà la soluzione completa quando cogl' integrali del sistema (1), art. II, in cui si ommettano le equazioni omologhe contenenti $d\xi_j$, dx_j, siano determinate le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ da porsi nell' equazione (5), ovvero nella (7) del citato art.° E parimente data una soluzione completa $x = \phi + x^0$ della (5), gl' integrali del sistema (1), art. II, in cui siano ommesse le due equazioni affette dalle $d\xi_j$, dx_j, si avranno dal sistema (3), in cui si ommetta l' ultima equazione della 1.ª linea. Esisteranno inoltre le relazioni

$$\frac{dx}{dx_j} = +\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left(\frac{dF}{dx_j}\right) dx_\nu = -\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \left(\frac{dF}{dx_j}\right) : \left(\frac{dF}{d\xi_\alpha}\right) \right\} dx_\alpha \qquad (6)$$

2.° Se la (1) si riduce alla forma

$$\mathcal{P}_1 - x_j = 0 \qquad (7)$$

ove la $\mathcal{P}_1$ manchi delle quantità x, x_j, $\left(\frac{dx}{dx_j}\right)$, gli integrali del sistema (10), art. II, in cui si ommettano le (2), saranno parimente espressi dal sistema (3); ma le (6) diverranno in tal caso

$$\frac{dx}{dx_j} = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ dx_\nu : \left(\frac{dP_1}{d\xi_\nu}\right) \right\} = \int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ dx_\alpha : \left(\frac{dP_1}{d\xi_\alpha}\right) \right\} \tag{8}$$

3.° Se la proposta equazione $\varphi = 0$ manca della sola variabile principale x e contiene un'arbitraria qualunque β, ottenuta di essa una soluzione completa $x = \phi + x^0$ espressa per valori iniziali, oltre le equazioni (15), art. II, avranno luogo anche le relazioni

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right) = -\int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dP}{d\beta}\right) : \left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right) \right\} dx_\nu = -\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ \left(\frac{dP}{d\beta}\right) : \left(\frac{dP}{d\xi_\alpha}\right) \right\} dx_\alpha \tag{9}$$

esistenti per tutti i valori di $\alpha = 1, 2, \ldots\ldots \nu$.

4.° Se la proposta manca della sola variabile principale x ed isolando l'arbitraria β si riduce alla forma

$$\varphi - \beta = 0,$$

le precedenti relazioni (9) si riducono a

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right) = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ dx_\nu : \left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right) \right\} = \int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha} \left\{ dx_\alpha : \left(\frac{dP}{d\xi_\alpha}\right) \right\} \tag{10}$$

Risulta dalle precedenti cose la proposizione che se una proposta equazione differenziale parziale, contenente o no, la variabile principale x, manca di una o più differenziali parziali, le corrispondenti variabili dovendosi considerare come altrettante costanti, la soluzione della stessa sarà ridotta alla soluzione di un'equazione differenziale parziale diminuita di tante variabili quant'è il numero delle differenziali parziali che mancano nella proposta.

2. Se l'equazione differenziale parziale proposta è della forma

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$$

e mancano in essa la variabile principale x, e la variabile indipendente x_ν, uno degl'integrali del sistema (1), art. II, da cui dipende la soluzione della proposta sarà dato da

$$F = \beta_j \qquad (11)$$

essendo β_j una costante.
Se del sistema che risulta dall'eliminazione di dx_ν col mezzo della

$$dx_\nu = -dx_j : \left(\frac{dF}{d\xi_j}\right) \qquad (12)$$

essendo j uno qualunque degl'indici 1, 2, ... $\nu-1$, si ottengono altri $\nu-2$ integrali, onde colle $\nu-1$ equazioni finite ottenute si possano determinare le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ in funzione delle variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e delle costanti β_1, β_2, ... β_j, ... $\beta_{\nu-1}$ gli altri $\nu-1$ integrali del sistema (1), art. II, saranno dati dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l}
\int\left\{\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_1}\right)dx_1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\beta_1}\right)dx_2 \cdots\cdots + \left(\frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_1}\right)dx_{\nu-1}\right\} = h_1 \\
\int\left\{\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_2}\right)dx_1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\beta_2}\right)dx_2 \cdots\cdots + \left(\frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_2}\right)dx_{\nu-1}\right\} = h_2 \\
\vdots \\
\int\left\{\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_j}\right)dx_1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\beta_j}\right)dx_2 \cdots\cdots + \left(\frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_j}\right)dx_{\nu-1}\right\} = h_j - x_\nu \\
\vdots \\
\int\left\{\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_{\nu-1}}\right)dx_1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\beta_{\nu-1}}\right)dx_2 \cdots\cdots + \left(\frac{d\xi_{\nu-1}}{d\beta_{\nu-1}}\right)dx_{\nu-1}\right\} = h_{\nu-1}
\end{array}\right\} (13)$$

e la soluzione completa x sarà espressa da

$$x = \int \left\{ \xi_1 \, dx_1 + \xi_2 \, dx_2 \cdots\cdots + \xi_{\nu-1} \, dx_{\nu-1} \right\} + \beta_j \, x_\nu + \beta_\nu \qquad (14)$$

Le espressioni sotto i segni integrali essendo altrettante differenziali esatte.

Si potrà alla (14) sostituire la

$$x = \beta_j x_\nu - \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dF}{d\xi_1}\right)\xi_1 + \left(\frac{dF}{d\xi_2}\right)\xi_2 \cdots\cdots + \left(\frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\right)\xi_{\nu-1} \right\} dx_\nu + x^0 \qquad (15)$$

ed all'equazione j^{ma} delle (13) còn cui si determina la x_ν sostituire la (12) che fornisce pel valore di x_ν la

$$x_\nu = h_j - \int \left\{ dx_j : \left(\frac{dF}{d\xi_j}\right) \right\} \qquad (16)$$

Quando le $\nu - 1$ quantità ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ ottenute dagli integrali, e le $\nu - 2$ variabili x_1, x_2, ... x_{j-1}, x_{j+1}, ... $x_{\nu-1}$ risultanti dalle equazioni (13), ommessa la j^{ma}, si esprimano in funzione della sola variabile x_j e delle costanti e si pongano nel 2.° membro della (16), si avrà da essa per una semplice quadratura il valore di x_ν, laddove l'equazione j^{ma} delle (13) esigerebbe per determinare x_ν l'integrazione di un'espressione differenziale esatta.

Infatti se le equazioni della 2.ª colonna del sistema (1), art. II, si moltiplicano, la 1.ª per $d\xi_1$, la 2.ª per $d\xi_2$, ... l'ultima per $d\xi_{\nu-1}$ e nell'aggregato di esse si pongano per le $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_{\nu-1}$ i valori dati dalle equazioni della 1.ª colonna del sistema stesso, si avrà dividendo per dx_ν

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dF}{d\xi_1} d\xi_1 + \dfrac{dF}{d\xi_2} d\xi_2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{dF}{d\xi_{\nu-1}} d\xi_{\nu-1} \\[2ex] + \dfrac{dF}{dx_1} dx_1 + \dfrac{dF}{dx_2} dx_2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{dF}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \end{array}\right\} = 0$$

La F per ipotesi non contenendo le variabili x, x_ν, la precedente sarà la differenziale totale $dF = 0$ della funzione F, onde integrando si avrà la (11).

Se inoltre colla (12) che è una delle equazioni del citato sistema (1), art. II, si elimina dalle altre equazioni la dx_ν, si avrà un sistema di $2\nu - 3$ equazioni differenziali fra le $2\nu - 2$ variabili

$$\xi_1\ ,\quad \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_{\nu-1}\ ,\quad x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-1}$$

ed ottenuti di esso $\nu - 2$ integrali contenenti le variabili ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ con questi e coll'ottenuto integrale $F - \beta_j = 0$ si determineranno le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ in funzione delle $\nu - 1$ variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e delle $\nu - 1$ costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$. Se i valori ottenuti s'intendono posti nella (17), art. II, ed alla F sostituita la β_j, siccome sarà in generale $\frac{dF}{d\beta_i} = \frac{d\beta_j}{d\beta_i} = 0$ per tutti i valori di i diversi da j, e sarà per $i = j$, $\frac{dF}{d\beta_j} = 1$, così scomparirà in ciascuna delle equazioni (17), art. II, il termine affetto da dx_ν, tranne da quella che contiene la $\frac{dF}{d\beta_j}$. Quindi, separato dal resto l'integrale $\int dx_\nu = x_\nu$, si otterranno le (13).

Posto parimente nelle (7), (3) dell'art. II, il valore $F = \beta_j$, si avranno da esse rispettivamente le (14), (15).

8. Se nella proposta equazione $\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$ mancano le variabili x, x_j essendo j uno qualunque degl' indici 1, 2, ... $\nu - 1$, uno degl' integrali del sistema (1), art. II, sarà dato da $\xi_j = \beta_j$ che risulta dalla 1.ª delle due equazioni omologhe

$$d\xi_j - \left(\frac{dF}{dx_j}\right)dx_\nu = 0\ ,\qquad dx_j + \left(\frac{dF}{d\xi_j}\right)dx_\nu = 0 \qquad (17)$$

del sistema stesso, ommesse le quali, il sistema sarà ridotto a $2\nu-4$ equazioni differenziali fra le $2\nu-3$ variabili

$$\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \ldots\ \xi_{j-1}\,,\ \xi_{j+1}\,,\ \ldots\ \xi_{\nu-1}\,,\quad x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x_{j-1}\,,\ x_{j+1}\,,\ \ldots\ x_\nu\,,$$

ove alla ξ_j siasi sostituita la costante β_j. Se di questo sistema si ottengono $\nu-2$ integrali onde si possano con essi e colla $\xi_j=\beta_j$ determinare le $\nu-1$ quantità ξ_1, ξ_2, ... ξ_j, ... $\xi_{\nu-1}$ in funzione delle variabili e delle costanti β_1, β_2, ... β_j, ... $\beta_{\nu-1}$, i restanti $\nu-1$ integrali del sistema totale saranno ciò che divengono le equazioni (13) del precedente paragrafo, quando al termine affetto da dx_j, sia nella 1.ª sostituito il termine $\frac{dF}{d\beta_1}dx_\nu$, nella 2.ª il termine $\frac{dF}{d\beta_2}dx_\nu$, e così di seguito sino all'ultima, ove sarà sostituito il termine $\frac{dF}{d\beta_{\nu-1}}dx_\nu$ ed inoltre quando nel 2.° membro della j^{ma} equazione siasi sostituito x_j alla x_ν.

Le equazioni (14), (15) saranno rimpiazzate dalle

$$x=\int\left\{\xi_1\,dx_1+\xi_2\,dx_2\,\cdots\cdots+\xi_{j-1}\,dx_{j-1}+\xi_{j+1}\,dx_{j+1}\,\cdots\cdots+F\,dx_\nu\right\}+\beta_j\,x_j+\beta_\nu \qquad (18)$$

$$x=\int\left\{F-\left(\frac{dF}{d\xi_1}\xi_1+\frac{dF}{d\xi_2}\xi_2\cdots+\frac{dF}{d\xi_{j-1}}\xi_{j-1}+\frac{dF}{d\xi_{j+1}}\xi_{j+1}\cdots+\frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1}\right)\right\}dx_\nu+\beta_j x_j+\beta_\nu \quad (19)$$

In pari tempo la x_j, in luogo di essere determinata dalla j^{ma} equazione del relativo sistema, potrà determinarsi colla 2.ª delle (17) che si riduce a

$$x_j=h_j-\int\left(\frac{dF}{d\xi_j}\right)dx_\nu \qquad (20)$$

il cui 2.° membro dipenderà da una semplice quadratura quando tutte le variabili in esso comprese siano espresse colle già ottenute equazioni in funzione della sola variabile x_ν.

4. Dalle cose precedenti deriva che si potrà seguire un processo analogo quando nella proposta equazione $\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}$, oltre la variabile principale x, mancassero più variabili indipendenti. Dalle formole, che in tale ipotesi si otterrebbero, risulterebbe evidente, che se la $\mathcal{F}$ fosse priva della variabile x e di tutte le variabili indipendenti, la più semplice fra le soluzioni complete della proposta che esprimeremo con

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F}\left(\frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dx_2}, \ldots\ldots \frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right)$$

sarà data da

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots\ldots + \beta_{\nu-1} x_{\nu-1} + F_1 x_\nu + \beta_\nu$$

essendo β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$, $\beta\nu$ altrettante costanti, ed $F_1 = F(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1})$.

Così, per esempio, se l'equazione differenziale parziale proposta fra le variabili x, y, υ si riducesse alla

$$\left(\frac{dz}{d\upsilon}\right) = \sqrt{\left\{h^2 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}$$

una soluzione completa sarebbe data da

$$z = \beta_1 x + \beta_2 y + \sqrt{\left\{h^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2\right\}}\,\upsilon + \beta_3$$

ciò che coincide con quanto si è trovato al § 12, art. VII, della citata Memoria.

5. Sia proposta l'equazione differenziale parziale

$$\varphi - \frac{dx}{dx_{\nu+1}} = 0 \qquad (21)$$

in cui la φ priva della variabile principale x sia funzione delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle differenziali parziali di x rispetto ad esse. La soluzione completa della (21) espressa per valori iniziali sarà data da

$$x = \beta\left(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1}\right) + z + x^0 \qquad (22)$$

essendo $z = \phi$ la soluzione completa espressa per valori iniziali e per β senza la costante addizionale dell'equazione differenziale parziale

$$\mathcal{P}_1 - \beta = 0 \qquad (23)$$

ove $\mathcal{P}_1$ non differisce da $\mathcal{P}$, se non in quanto vi si è posto z per x. La costante β, che entra nella (22) esplicitamente ed implicitamente in z, dovrà eliminarsi col mezzo della relazione $\left(\frac{d\phi}{d\beta}\right) = -(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1})$.

La soluzione completa della stessa (21) espressa per costanti arbitrarie sarà data da

$$x = \beta x_{\nu+1} + z + \beta_\nu \qquad (24)$$

essendo ora $z = \psi$ senza costante addizionale, la soluzione completa espressa per le $\nu - 1$ costanti arbitrarie β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ della stessa (23).

Infatti per ottenere la soluzione completa della (21) si deve stabilire il sistema di equazioni differenziali ordinarie, quale risulta dal sistema (1), art. II, in cui pongasi $\nu+1$ in luogo di ν e P in luogo di F. L'equazione (5) dello stesso articolo diverrà

$$x = \int_{x^0_{\nu+1}}^{x_{\nu+1}} \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \cdots\cdots + \xi_\nu dx_\nu + P dx_{\nu+1} \right\} + x^0$$

Ma pel § 2 uno degl'integrali del sistema è dato da $P - \beta = 0$, dunque il valore di x dato da quest' ultima formola, in cui pongasi β per P e si osservi essere

$$\int_{x_{\nu+1}^0}^{x_{\nu+1}} \beta \, dx_{\nu+1} = \beta(x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0)$$

fornirà cambiando i limiti agl' integrali

$$x = \beta(x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0) + \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \xi_1 \, dx_1 + \xi_2 \, dx_2 \ldots\ldots + \xi_\nu \, dx_\nu \right\} + x^0 \quad (25)$$

Ma se dal citato sistema, impiegando l' ultima delle sue equazioni ridotta alla forma

$$dx_{\nu+1} = - dx_\nu : \left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right) \qquad (26)$$

si elimina la $dx_{\nu+1}$, si otterrà un sistema di $2\nu - 1$ equazioni coincidente col sistema (10), art. II. Ma un tal sistema è quello che si avrebbe se, riguardata la $\varphi - \beta = 0$ come un' equazione differenziale parziale non contenente la variabile principale x, si trattasse di trovarne la soluzione completa. Se in questa, per non confondere una variabile principale coll' altra, si cambia x in z e s' intendono ottenuti del relativo sistema tutti i $2\nu - 1$ integrali compresovi l' integral $P - \beta = 0$ e con questi e colla $P^0 - \beta = 0$ si intendono eliminate le ν quantità ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_ν^0, si avranno ν equazioni con cui determinare le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, de' valori iniziali x_1^0, x_2^0, ... $x_{\nu-1}^0$ competenti ora al valore $x_\nu = x_\nu^0$, e della β, la soluzione completa senza costante addizionale sarà data da

$$z = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left(\xi_1 \, dx_1 + \xi_2 \, dx_2 \ldots\ldots + \xi_\nu \, dx_\nu \right) = \phi \, ,$$

onde la (25) diverrà $x = \beta(x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0) + \phi + x^0$ che è la (22).

Inoltre nella (23) essendo la β un'arbitraria qualunque, si avrà dietro il n.° 4.°, § 1

$$\left(\frac{dz}{d\beta}\right)=\int_{x_\nu^0}^{x_\nu}\left\{dx_\nu:\left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right)\right\}=\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha}\left\{dx_\alpha:\left(\frac{dP}{d\xi_\alpha}\right)\right\} \qquad (\alpha)$$

per tutti i valori di $\alpha=1,\ 2,\ \ldots\ \nu$. Postovi il valore di dx_ν cavato dalla (26), si avrà $\left(\frac{d\phi}{d\beta}\right)=-(x_{\nu+1}-x^0_{\nu+1})$, col qual valore si dovrà dalla (22) eliminare la β per avere x espressa tutta per soli valori iniziali.

La soluzione completa della proposta espressa per le costanti dell'integrazione si otterrà seguendo lo stesso processo e sopprimendo i limiti agli integrali. La soluzione $z=\psi$ della (28) ottenuta con soli ν integrali del relativo sistema risulterà funzione delle $\nu-1$ costanti arbitrarie $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_{\nu-1}$ e la soluzione completa della proposta data dalla (24) risulterà funzione di $\nu+1$ costanti arbitrarie $\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_\nu$.

6. Essendo proposto un sistema di 2ν equazioni differenziali fra $2\nu+1$ variabili $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{\nu+1},\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_\nu$ della forma

$$\left.\begin{array}{ll}
d\xi_1-\left(\frac{dP}{dx_1}\right)dx_{\nu+1}=0\,, & dx_1+\left(\frac{dP}{d\xi_1}\right)dx_{\nu+1}=0\\
d\xi_2-\left(\frac{dP}{dx_2}\right)dx_{\nu+1}=0\,, & dx_2+\left(\frac{dP}{d\xi_2}\right)dx_{\nu+1}=0\\
\vdots & \vdots\\
d\xi_\nu-\left(\frac{dP}{dx_\nu}\right)dx_{\nu+1}=0\,, & dx_\nu+\left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right)dx_{\nu+1}=0
\end{array}\right\} \qquad (27)$$

in cui sia P una funzione qualsivoglia di tutte le variabili, tranne di $x_{\nu+1}$, i 2ν integrali completi di questo sistema saranno quelli che risultano dall'eliminazione di β dalle $2\nu+1$ equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dz}{dx_1}\right)=\xi_1\ ,\quad \left(\frac{dz}{dx_2}\right)=\xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{dz}{dx_\nu}\right)=\xi_\nu\\[2ex] \left(\frac{dz}{dx_1^0}\right)=-\xi_1^0\ ,\quad \left(\frac{dz}{dx_2^0}\right)=-\xi_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{dz}{dx_\nu^0}\right)=-\xi_\nu^0\\[2ex] \qquad\qquad\left(\frac{dz}{d\beta}\right)=-\left(x_{\nu+1}-x_{\nu+1}^0\right)\end{array}\right\}\quad(28)$$

nelle quali la z indica la soluzione completa espressa per valori iniziali e per β dell'equazione differenziale parziale $\mathcal{P}-\beta=0$, essendo $\mathcal{P}$ ciò che diventa P, quando alle variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν si sostituiscano rispettivamente le differenziali parziali $\frac{dz}{dx_1}$, $\frac{dz}{dx_2}$, ... $\frac{dz}{dx_\nu}$.

Infatti il sistema proposto è quello che si avrebbe quando si cercasse la soluzione completa dell'equazione differenziale parziale $\mathcal{P}-\frac{dx}{dx_{\nu+1}}=0$ che pel paragrafo precedente verrebbe espressa da

$$x=\beta\left(x_{\nu+1}-x_{\nu+1}^0\right)+z+x^0 \qquad (29)$$

in questa essendo la z la soluzione completa della $\mathcal{P}-\beta=0$ espressa in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle costanti x_1^0, x_2^0, ... x_ν^0 e della β che nella (29) potrà riguardarsi funzione delle stesse quantità determinata dalla

$$\left(\frac{dz}{d\beta}\right)=-\left(x_{\nu+1}-x_{\nu+1}^0\right) \qquad (30)$$

Ottenuta l'espressione di x, in cui si riguardi la β qual funzione delle x_1, x_2, ... x_ν, $x_{\nu+1}$, x_1^0, x_2^0, ... x_ν^0, $x_{\nu+1}^0$

data dalla (30), gl' integrali del sistema proposto saranno, dietro il § 3, art. II, espressi dalle

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1\,, \quad \left(\frac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2\,, \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{dx}{dx_\nu} = \xi_\nu \\ \left(\frac{dx}{dx^0_1}\right) = -\xi^0_1\,, \quad \left(\frac{dx}{dx^0_2}\right) = -\xi^0_2\,, \;\ldots\ldots\; \frac{dx}{dx^0_\nu} = -\xi^0_\nu\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Ma dalla (29) si avrà per tutti i valori di $j = 1,\; 2,\; \ldots\ldots\; \nu$

$$\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = \frac{dz}{dx_j} + \frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dx_j} + \left(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1}\right)\frac{d\beta}{dx_j}\,,$$

$$\frac{dx}{dx^0_j} = \left(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1}\right)\frac{d\beta}{dx^0_j} + \frac{dz}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dx^0_j}$$

che in forza della relazione (30) si riducono a $\frac{dx}{dx_j} = \frac{dz}{dx_j}$, $\frac{dz}{dx^0_j} = \frac{dz}{dx^0_j}$. Dietro ciò il sistema (31) si cambierà nel sistema delle equazioni (28), l'ultima delle quali è la stessa (30). Volendosi ritenere la β nelle (28) si potrà in sua vece eliminare un'altra costante, per esempio, la ξ^0_ν.

È da notarsi che il dato sistema (27) compete, dietro quanto si è detto al § 1, art. II, tanto all'equazione differenziale parziale $\varphi - \frac{dx}{dx_{\nu+1}} = 0$, quanto alla $\varphi - \frac{dx}{dx_{\nu+1}} = \alpha$, essendo α un'arbitraria qualunque. Ma siccome la φ non contiene $x_{\nu+1}$, così, ritenuta quest'ultima espressione, si vedrebbe la α fondersi nella costante arbitraria β.

7. I 2ν integrali del sistema (27) saranno anche espressi dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx_1} = \xi_1\,, \quad \frac{dz}{dx_2} = \xi_2\,, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \frac{dz}{dx_\nu} = \xi_\nu \\ \frac{dz}{d\beta_1} = h_1\,, \quad \frac{dz}{d\beta_2} = h_2\,, \ldots\ldots \frac{dz}{d\beta_j} + x_{\nu+1} = h_j\,, \ldots\ldots \frac{dz}{d\beta_\nu} = h_\nu\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

nelle quali la z esprime la soluzione completa senza costante addizionale dell'equazione differenziale parziale $\varphi - \beta_j = o$ espressa in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, delle costanti β_1, β_2, ... β_{j-1}, β_{j+1}, ... β_ν e della β_j.

Infatti il sistema proposto è quello che compete all'equazione differenziale parziale $\varphi - \frac{dx}{dx_{\nu+1}} = o$, come si è detto indietro. La soluzione completa si avrà dalla solita espressione

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_\nu dx_\nu + P dx_{\nu+1} \right\} + \beta_{\nu+1}.$$

Ma uno degl' integrali del sistema sarà dato da $P - \beta_j = o$ indicando con j uno degl' indici compresi fra 1 e ν; sarà perciò

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_\nu dx_\nu \right\} + \beta\ x_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}.$$

Se in questa si rappresenta con z l' integrale contenuto nel 2.° membro, sarà

$$x = z + \beta_j x_{\nu+1} + \beta_{\nu+1} \tag{33}$$

Ma la z espressa dall' integrale è la soluzione completa senza costante addizionale della $\varphi - \beta_j = o$ in cui pongasi z in luogo di x. Ottenuta la soluzione completa $z = \psi$, sarà essa funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e di $\nu - 1$ costanti arbitrarie β_1, β_2, ... β_{j-1}, β_{j+1}, ... β_ν oltre la β_j che nell' espressione di x data dalla (33) sarà un' altra costante arbitraria. Avuto quindi riguardo agli integrali del sistema, quali risultano dal § 3, art. II, ed osservando essere

$\left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right) = \left(\frac{dz}{dx_\alpha}\right)$ per tutti i valori di $\alpha = 1$, 2, ... ν, e

$\left(\frac{dx}{d\beta_\alpha}\right) = \left(\frac{dz}{d\beta_\alpha}\right)$ per tutti i valori stessi di α, tranne per $\alpha = j$, nel qual caso è $\frac{dx}{d\beta_j} = \frac{dz}{d\beta_j} + x_{\nu+1} = h_j$ si avranno le (32).

8. Essendo proposto un sistema di $2\nu - 1$ equazioni differenziali fra 2ν variabili della forma

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_1 + \frac{dP}{dx_1} dx_\nu = 0 \,, & \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_1 - \frac{dP}{d\xi_1} dx_\nu = 0 \\
\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_2 + \frac{dP}{dx_2} dx_\nu = 0 \,, & \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_2 - \frac{dP}{d\xi_2} dx_\nu = 0 \\
\vdots & \vdots \\
\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_{\nu-1} + \frac{dP}{dx_{\nu-1}} dx_\nu = 0 \,, & \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_{\nu-1} - \frac{dP}{d\xi_{\nu-1}} dx_\nu = 0 \\
\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_\nu + \frac{dP}{dx_\nu} dx_\nu = 0 &
\end{array}\right\} \quad (34)$$

in cui sia P una funzione qualunque delle variabili stesse, tranne della x_ν, gl' integrali del sistema (34) contenenti $2\nu - 1$ costanti arbitrarie

$$\beta_1 \,,\ \beta_2 \,,\ \ldots\ldots\ \beta_\nu \,,\ h_1 \,,\ h_2 \,,\ \ldots\ldots\ h_{\nu-1}$$

saranno espressi dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dz}{dx_1} = \xi_1 \,,\quad \frac{dz}{dx_2} = \xi_2 \,,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{dz}{dx_{\nu-1}} = \xi_{\nu-1} \,,\quad \beta_{\nu-1} = \xi_\nu \\
\frac{dz}{d\beta_1} = h_1 \,,\quad \frac{dz}{d\beta_2} = h_2 \,,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{dz}{d\beta_{\nu-1}} = -x_\nu + h_{\nu-1}
\end{array}\right\} \quad (35)$$

essendo $z = \psi$ la soluzione completa senza costante addizionale dell' equazione differenziale parziale $\mathfrak{P} - \beta_\nu = 0$, ove $\mathfrak{P}$ è ciò che diventa la P quando vi si ponga

$$\xi_1 = \frac{dz}{dx_1} \,,\quad \xi_2 = \frac{dz}{dx_2} \,,\ \ldots\ldots\ldots\ \xi_{\nu-1} = \frac{dz}{dx_{\nu-1}} \,,\quad \xi_\nu = \beta_{\nu-1} \quad (36)$$

Infatti il sistema (34) può riguardarsi come quello da cui dipende la soluzione completa di un'equazione differenziale parziale $\varphi = 0$ o più generalmente, dietro i riflessi del § 2, art. II, di un'equazione differenziale parziale $\varphi = \beta_\nu$, essendo β_ν un'arbitraria qualunque e la φ ciò che diventa P quando vi si ponga

$$\xi_1 = \left(\frac{dx}{dx_1}\right), \quad \xi_2 = \left(\frac{dx}{dx_2}\right), \ldots\ldots \xi_{\nu-1} = \left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right), \quad \xi_\nu = \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)$$

La soluzione completa dipenderà dalla

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_\nu dx_\nu \right\} + C.$$

Ma l'ultima della 1.ª colonna delle (34) si riduce a $d\xi_\nu = 0$, onde $\xi_\nu = \beta_{\nu-1}$, essendo $\beta_{\nu-1}$ una costante. Onde sarà

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} \right\} + \beta_{\nu-1} x_\nu + C \qquad (37)$$

Se coll'ultima della 2.ª colonna delle (34) si elimina la dx_ν dalle altre equazioni nelle quali si ponga per ξ_ν il trovato valore $\beta_{\nu-1}$, si avrà un sistema di $2\nu - 3$ equazioni che rappresenterà quello stesso sistema da cui dipenderebbe la soluzione completa della $\varphi - \beta_\nu = 0$, intendendo che φ è ciò che diventa P, quando vi si pongano i valori dati dalle (36). La soluzione in discorso si avrebbe dalla

$$z = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \ldots\ldots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} \right\}$$

quando per le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ s'intendano posti i loro valori cavati dai $\nu - 1$ integrali del relativo sistema fra i quali è compreso l'integrale $P - \beta = 0$ e che risulteranno funzioni delle variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e delle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-2}$, β_ν. Quindi la (37) diverrà

$$x = z + \beta_{\nu-1} x_\nu + C \qquad (38)$$

e gl'integrali del sistema (34) saranno dati dalle (16), art. II, che in forza della (38) e delle equazioni

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \beta_{\nu-1} = \xi_\nu \;, \qquad \frac{dx}{d\beta_{\nu-1}} = \frac{dz}{d\beta_{\nu-1}} + x_\nu = h_{\nu-1}$$

diventano le (35).

9. Il processo del § 5 si estende al caso in cui sia proposta un'equazione differenziale parziale $\varphi = 0$ contenente le differenziali parziali di x rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots. x_\nu$ e mancante della variabile principale x e di una qualunque x_j. La soluzione completa sarà espressa in tal caso da

$$x = \beta(x_j - x_j^0) + z + x^0$$

essendo z la soluzione completa dell'equazione differenziale parziale che nasce dalla $\varphi = 0$ quando in questa si ponga, z in luogo di x e β in luogo di $\left(\frac{dz}{dx_j}\right)$.
Parimente il processo del § 8 servirà a trovare gl'integrali completi di un sistema di equazioni differenziali della forma (34) nell'ipotesi che la P sia funzione delle variabili ξ_α per tutti i valori di $\alpha = 1, 2, \ldots\ldots \nu$ e delle variabili x_α per gli stessi valori di α tranne per $\alpha = j$.

Risulta in generale che in un'equazione differenziale parziale mancante della variabile principale e di una qualsivoglia variabile x_j, dovendo rimpiazzarsi la $\left(\frac{dx}{dx_j}\right)$ per una costante, la sua soluzione completa dipende dalla soluzione completa di un'equazione differenziale parziale contenente una variabile di meno.

Ciò valendo rispetto ad un numero qualunque di variabili che mancassero nella proposta, la cui soluzione dipenderebbe da quella di un'equazione differenziale parziale fra un minor numero di variabili, si è naturalmente condotti alla seguente proposizione:

10. Essendo proposta un' equazione differenziale parziale

$$\varphi = 0$$

fra le variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν e le differenziali parziali rispetto ad esse di una variabile principale x che manchi nella funzione φ, la soluzione completa si avrà dal seguente processo, che presenta in generale maggiori facilitazioni nella ricerca degl' integrali da cui la soluzione stessa dipende.

Stabilito il sistema (10), art. II, si cerchi oltre l' integrale dato dall' equazione

1.ª $$P = 0$$

un altro integrale del sistema espresso con

2.ª $$\Pi_1 = \beta_1$$

essendo β_1 la costante arbitraria. Si cavi dalla 1.ª una delle variabili x_1, x_2, ... che, per seguire un certo ordine, supporremo essere l' ultima di esse, cioè la x_ν. Sia $P_1 = \beta_1$ ciò che diventa la 2.ª quando vi si ponga il trovato valore di x_ν. Ritenuta nella P_1 la ξ_ν come una costante, si pongano per ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ le corrispondenti differenziali parziali, con che la $P_1 = \beta_1$ diverrà una nuova equazione differenziale parziale $\varphi_1 = \beta_1$ fra un numero $\nu - 1$ di variabili indipendenti x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$.
Sia

3.ª $$\Pi_2 = \beta_2$$

un integrale del sistema relativo alla $\varphi_1 = \beta_1$. Cavato dalla $P_1 = \beta_1$ il valore di $x_{\nu-1}$ e posto nella 3.ª divenga essa $P_2 = \beta_2$. Ritenute in questa le ξ_ν, $\xi_{\nu-1}$ come costanti, si pongano per le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-2}$ le corrispondenti differenziali parziali, onde abbiasi l' equazione differenziale parziale $\varphi_2 = \beta_2$.
Sia

4.ª $$\Pi_3 = \beta_3$$

un integrale del sistema relativo alla $\varphi_2 = \beta_2$. Cavata la variabile $x_{\nu-3}$ dalla $P_2 = \beta_2$ e posta nella 4.ª, si avrà una $P_3 = \beta_3$, dalla quale, ritenute le ξ_ν, $\xi_{\nu-1}$, $\xi_{\nu-2}$ come costanti, si passerà all' equazione differenziale parziale $\varphi_3 = \beta_3$. Si procederà in questo modo sino a che si giunga ad un' equazione differenziale parziale $\varphi_{\nu-2} = \beta_{\nu-2}$ la quale, ritenute le ξ_ν, $\xi_{\nu-1}$, $\xi_{\nu-2}$, ... ξ_3 come costanti, sarà un' equazione fra due sole variabili indipendenti x_1, x_2 e fra le due differenziali parziali di x rispetto ad esse. Stabilito il relativo sistema che consterà di tre equazioni fra le quattro variabili x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, si cercherà un integrale che sarà il ν^{mo} espresso dall' equazione

ν.ª $$\Pi_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}$$

Colle ν equazioni 1.ª, 2.ª, ... ν.ª si determineranno le ν quantità ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν, le quali risulteranno funzioni delle ν variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle $\nu - 1$ costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$. Posti gli ottenuti valori nella

$$x = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \cdots\cdots + \xi_\nu dx_\nu \right\} + \beta_\nu$$

ed eseguita l' integrazione, ottenibile con semplici quadrature, dell' espressione differenziale esatta che ne risulta, si giungerà alla soluzione completa $x = \psi + \beta_\nu$ della proposta equazione differenziale parziale $\varphi = 0$.

Per convincersi dell'esattezza dell'enunciato metodo si rifletterà che se $\Pi = \beta$ è un integrale del sistema della forma di quello dato dalle (34), che per simetria di formole intenderemo completato coll' equazione identica $\frac{dP}{d\xi_\nu} dx_\nu - \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_\nu = 0$ aggiunta alla 2.ª colonna del citato sistema, sussisterà anche il sistema che dallo stesso deriva quando si rimpiazzi la P colla Π. O, ciò che è lo stesso, rappresentando il sistema in questione colle due equazioni omologhe generiche

$$\frac{dP}{d\xi_\nu} d\xi_j + \frac{dP}{dx_j} dx_\nu = 0\ , \qquad \frac{dP}{d\xi_\nu} dx_j - \frac{dP}{d\xi_j} dx_\nu = 0 \qquad (39)$$

per tutti i valori di $j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \nu$, sussisterà anche il sistema di cui le omologhe generiche saranno le

$$\frac{d\Pi}{d\xi_\nu} d\xi_j + \frac{d\Pi}{dx_j} dx_\nu = 0\ , \qquad \frac{d\Pi}{d\xi_\nu} dx_j - \frac{d\Pi}{d\xi_j} dx_\nu = 0 \qquad (40)$$

Infatti dietro il § 14, art. VII, (Mem.ª cit.ª) più ampiamente riprodotto all'art. VI di questo scritto, risulta che i $2\nu - 1$ integrali del citato sistema equivalgono alle equazioni che nascono dai $2\nu - 1$ valori di f fra loro indipendenti, che soddisfano l'equazione differenziale parziale lineare

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dP}{d\xi_1}\right)\frac{df}{dx_1} + \left(\frac{dP}{d\xi_2}\right)\frac{df}{dx_2} + \ldots\ldots + \left(\frac{dP}{d\xi_\nu}\right)\frac{df}{dx_\nu} \\ - &\left(\frac{dP}{dx_1}\right)\frac{df}{d\xi_1} - \left(\frac{dP}{dx_2}\right)\frac{df}{d\xi_2} - \ldots\ldots - \left(\frac{dP}{dx_\nu}\right)\frac{df}{d\xi_\nu} \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (41)$$

quando tali valori pongansi rispettivamente eguali alle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{2\nu-1}$. Se quindi la $\Pi = \beta$ è un integrale del sistema, sarà soddisfatta la (41) in cui pongasi la Π in luogo di f. Ma in tal caso se si considera l'equazione risultante come un'equazione differenziale parziale lineare, in cui si riguardi ora la P come la variabile principale e, cambiati i segni, si sostituisca la f alla P, essa diverrà ciò che diventa la (41), in cui si rimpiazzi la Π per la P. A questa nuova equazione differenziale parziale lineare corrisponderà quel sistema di equazioni che nascono dalle omologhe (39), cambiatovi P in Π, ossia sussisterà il sistema di cui le omologhe generiche sono le (40).
Ciò ritenuto, un integrale del sistema corrispondente alla proposta $\mathcal{P} = 0$ essendo dato da $P = c$, se si ottiene

un secondo integrale $\Pi_1 = \beta_1$ e s' intende posto in questo il valor di x_ν dato dal primo, con che si riduce a $P_1 = \beta_1$, sarà pur questo, sebbene sott' altra forma, un integrale del sistema. Per ciò che si è dimostrato sussisterà dunque anche il sistema che deriva dalle generiche omologhe

$$\left(\frac{dP_1}{d\xi_\nu}\right) d\xi_j + \left(\frac{dP_1}{dx_j}\right) dx_\nu = 0\ , \quad \frac{dP_1}{d\xi_\nu} dx_j - \frac{dP_1}{d\xi_j} dx_\nu = 0 \qquad (42)$$

e per ottenere gli ultimi integrali si potrà sostituire al proposto sistema quello che risulta dalle (42). Ma se nella 1.ª delle (42) si suppone $j = \nu$, si ha $d\xi_\nu = 0$, $\xi_\nu = cost.^e$, e se nella 2.ª si suppone $j = \nu - 1$ si ha

$$dx_\nu = \left\{ \left(\frac{dP_1}{d\xi_\nu}\right) : \left(\frac{dP_1}{d\xi_{\nu-1}}\right) \right\} dx_{\nu-1} \qquad (43)$$

Se quindi un tal valore di dx_ν si pone nelle altre equazioni del sistema stesso, si avrà un nuovo sistema, di cui le generiche omologhe saranno espresse da

$$\left(\frac{dP_1}{d\xi_{\nu-1}}\right) d\xi_j + \left(\frac{dP_1}{dx_j}\right) dx_{\nu-1} = 0\ , \quad \left(\frac{dP_1}{d\xi_{\nu-1}}\right) dx_j - \left(\frac{dP_1}{d\xi_j}\right) dx_{\nu-1} = 0 \qquad (44)$$

ove la j avrà quì la sola escursione da $j = 1$ a $j = \nu - 1$. Questo sistema, da cui dipendono gli ulteriori integrali, non contenente la x_ν e dove la ξ_ν è da considerarsi come una costante è quello stesso che compete all'equazione differenziale parziale $\varphi_1 = \beta_1$ contenente le variabili indipendenti x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e le differenziali parziali di x rispetto ad esse, ed in cui la ξ_ν è da ritenersi costante. Se quindi si ottiene dal sistema (44) un integrale $\Pi_2 = \beta_2$ si potrà ripetere su dì esso lo stesso discorso ed ottenersi l' analoga trasformazione in altro sistema che si proverebbe egualmente essere quello che compete ad una equazione differenziale parziale $\varphi_2 = \beta_2$ contenente le variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-2}$ e le differenziali parziali di x rispetto ad esse, ed in cui le ξ_ν, $\xi_{\nu-1}$ sarebbero da riguardarsi come costanti. Ripetendo successivamente un tale discorso, si giungerà ad ottenere l'ultimo integrale $\Pi_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}$ di un sistema che consterà di sole tre equazioni fra le quattro variabili x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, tutte le restanti quantità che esso contiene dovendosi riguardare come costanti.

11. Nel processo indicato nel precedente paragrafo giunti ad un'equazione differenziale parziale $\varphi_\alpha = \beta_\alpha$ si potrà, se si vuole, ridurla alla forma $\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = \mathcal{F}$, nel qual caso il relativo sistema di equazioni differenziali ordinarie consta di una equazione di meno. Così, per esempio, all'ultima equazione differenziale parziale $\varphi_{\nu-2} = \beta_{\nu-2}$ ridotta alla forma $\left(\frac{dx}{dx_2}\right) = \mathcal{F}$ competerà un sistema di due sole equazioni differenziali ordinarie fra le tre variabili x_1, x_2, ξ_1 in luogo di tre, come si è ottenuto indietro.

Se una tale trasformazione s'intendesse eseguita non solo sulla proposta equazione differenziale parziale, ma su tutte le successive dipendenti equazioni, il processo allora verrebbe a coincidere con quello che si è indicato al § 13, art. VII, (Mem.ª cit.ª)

12. Essendo proposto da integrarsi un sistema di $2\nu - 1$ equazioni differenziali ordinarie fra 2ν variabili x_1, x_2, ... x_ν, ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν riducibile alla forma (34), nel quale la P sia ora funzione di tutte le anzidette variabili, gl'integrali del sistema proposto saranno dati dalle $2\nu - 1$ equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right) = \xi_1\,,\quad \left(\frac{d\psi}{dx_2}\right) = \xi_2\,, \ldots\ldots \left(\frac{d\psi}{dx_{\nu-1}}\right) = \xi_{\nu-1}\,,\quad \left(\frac{d\psi}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\ \left(\frac{d\psi}{d\beta_1}\right) = h_1\,,\quad \left(\frac{d\psi}{d\beta_2}\right) = h_2\,, \ldots\ldots \left(\frac{d\psi}{d\beta_{\nu-1}}\right) = h_{\nu-1}\end{array}\right\} \quad (45)$$

essendo $x = \psi + \beta_{\nu+1}$ la soluzione completa dell' equazione differenziale parziale $\mathfrak{P} - \beta_\nu = 0$, ove β_ν è una costante arbitraria e $\mathfrak{P}$ ciò che diventa la P, quando alle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν si sostituiscano le differenziali parziali di una nuova variabile x rispetto alle x_1, x_2, ... x_ν. Tale soluzione completa si otterrà con vantaggio seguendo il metodo del § 10, in cui si rimpiazzi la $\mathfrak{P}$ colla $\mathfrak{P} - \beta_\nu$. I valori di ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν che verranno determinati dagli integrali ottenuti col citato metodo e che risulteranno espressi in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle ν costanti arbitrarie β_1, β_2, ... β_ν dovranno coincidere coi valori delle stesse ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν dati dalla 1.ª linea delle (45). Ma la 2.ª linea delle stesse (45) esprimerà gli altri $\nu - 1$ integrali del sistema che rimanevano a trovarsi. A questi $\nu - 1$ integrali della 2.ª linea potranno sostituirsi le $\nu - 1$ equazioni date dalle (17), § 4, art. II.

Se si ottiene la soluzione completa della $\mathfrak{P} - \beta_\nu = 0$ espressa per valori iniziali coll' adottata forma $x = \phi + x^0$, non seguendo il metodo del § 10, ma determinando tutti gl' integrali del sistema proposto in cui tutte le costanti β_1, β_2, ... β_ν siano espresse per valori iniziali, gl' integrali stessi del sistema potranno essere espressi sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d\phi}{dx_1}\right) = \xi_1, \ \left(\frac{d\phi}{dx_2}\right) = \xi_2, \ \cdots\cdots \left(\frac{d\phi}{dx_{\nu-1}}\right) = \xi_{\nu-1}, \ \left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\ &\left(\frac{d\phi}{dx_1^0}\right) = -\xi_1^0, \quad \left(\frac{d\phi}{dx_2^0}\right) = -\xi_2^0, \ \cdots\cdots\cdots\cdots \left(\frac{d\phi}{dx_{\nu-1}^0}\right) = -\xi_{\nu-1}^0 \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

13. Se il sistema proposto da integrarsi consta di $2\nu - 2$ equazioni differenziali ordinarie fra $2\nu - 1$ variabili x_1, x_2, ... x_ν, ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ riducibile alla forma (1) dell' articolo II, si dovrà considerare un tal sistema come quello che competerebbe ad un' equazione differenziale parziale della

forma $\mathcal{F} - \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = 0$ senza costante aggiunta in quanto scomparirebbe essa nel risultato finale, essendo la $\mathcal{F}$ ciò che diventa la F, quando alle ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ si sostituiscano le differenziali parziali di x rispetto alle x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$. Ottenuto un integrale $\Pi_1 = \beta_1$ del proposto sistema e colla $F - \xi_\nu = 0$ eliminata dalla $\Pi_1 = \beta_1$ la x_ν, in modo che divenga $P_1 = \beta_1$ e poste in P_1 le differenziali parziali di x in luogo delle ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$, si tratterà l' equazione differenziale parziale $\mathcal{P}_1 = \beta_1$ collo stesso processo impiegato al § 10. Quindi dalle ν equazioni

$$F = \xi_\nu\ ,\quad \Pi_1 = \beta_1\ ,\quad \Pi_2 = \beta_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \Pi_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}$$

eliminata la ξ_ν si avranno le $\nu - 1$ equazioni necessarie alla determinazione delle ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ da porsi nella equazione (7), § 1, art. II, e nella stessa F, onde ottenere la soluzione completa $x = \psi + \beta_\nu$. Il complesso totale di integrali del sistema proposto sarà dato dalle (45) in cui si ommetta la $\left(\frac{d\psi}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu$.

Se del sistema proposto si cercano gl' integrali, onde ottenere la soluzione completa $x = \phi + x^0$ espressa per valori iniziali, allora gl' integrali stessi del sistema saranno espressi sotto la forma (46), in cui si ommetta l'ultima equazione della prima linea, cioè la $\left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu$.

IV.

Casi particolari di equazioni differenziali parziali.

1. Essendo proposta l' equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{P}$ nella quale, essendo $\mathcal{P} = P_1 + \mathcal{P}_2$, sia P_1 una funzione delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν, $x_{\nu+1}$

e la φ_2 funzione delle sole differenziali parziali di x rispetto alle x_1, x_2, ... x_ν, chiamato al solito P_2 ciò che diventa φ_2, quando alle differenziali parziali in essa comprese si sostituiscano le nuove variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν il sistema da cui dipende la soluzione completa della

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = P_1 + \varphi_2 \qquad (1)$$

sarà dato da

$$\left.\begin{array}{ll} d\xi_1 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_1}\right) dx_{\nu+1}, & dx_1 = -\left(\dfrac{dP_2}{d\xi_1}\right) dx_{\nu+1} \\ d\xi_2 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_2}\right) dx_{\nu+1}, & dx_2 = -\left(\dfrac{dP_2}{d\xi_2}\right) dx_{\nu+1} \\ \vdots & \vdots \\ d\xi_\nu = \left(\dfrac{dP_1}{dx_\nu}\right) dx_{\nu+1}, & dx_\nu = -\left(\dfrac{dP_2}{d\xi_\nu}\right) dx_{\nu+1} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

e la x che non entra nelle precedenti (2) sarà determinata dalla

$$dx = \left\{ P_1 + P_2 - \left(\frac{dP_2}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dP_2}{d\xi_2}\xi_2 \;..... + \frac{dP_2}{d\xi_\nu}\xi_\nu \right) \right\} dx_{\nu+1} \qquad (3)$$

Le equazioni (2), (3) derivano infatti dal sistema (1), (2) dell'art. II, in cui pongasi $\nu + 1$ in luogo di ν e $P_1 + P_2$ in luogo di F ed abbiasi riguardo all' assunta ipotesi sulle P_1, P_2.

2. Nella stessa assunta ipotesi se nella (1) manca la variabile $x_{\nu+1}$, la soluzione completa sarà, dietro il § 5, art. III, espressa da una o dall'altra delle due formole

$$x = \beta_j(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1}) + z + x^0 , \qquad x = \beta_j x_{\nu+1} + z + \beta \qquad (4)$$

essendo β_j , β due costanti arbitrarie e la z esprimendo la soluzione completa senza costante addizionale espressa per valori iniziali nella 1.ª delle (4) e per costanti nella 2.ª dell'equazione differenziale parziale

$$\beta_j - (P_1 + \mathfrak{P}_2) = 0 \qquad (5)$$

ove nella $\mathfrak{P}_2$ siasi sostituito z alla x. La stessa z in forza della (12), art. II, diverrà in questo caso espressa da

$$z = \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dP_2}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dP_2}{d\xi_2}\xi_2 \ldots\ldots + \frac{dP_2}{d\xi_\nu}\xi_\nu \right) : \left(\frac{dP_2}{d\xi_\nu} \right) \right\} dx_\nu \qquad (6)$$

3. Le cose essendo come ne' precedenti paragrafi, se la $\mathfrak{P}_2$ è una funzione omogenea di grado $= \omega$ rispetto alle differenziali parziali che essa contiene si avrà

$$z = \omega \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} \left\{ P_2 : \left(\frac{dP_2}{d\xi_\nu} \right) \right\} dx_\nu = \omega \int_{x_j^0}^{x_j} \left\{ P_2 : \left(\frac{dP_2}{d\xi_j} \right) \right\} dx_j \qquad (7)$$

Infatti la 1.ª di queste relazioni risulta immediatamente dalla (6) avuto riguardo alla nota proprietà delle funzioni omogenee, e la 2.ª risulta dalla 1.ª col porvi per dx_ν il valore

$$dx_\nu = \left\{ \left(\frac{dP_2}{d\xi_\nu} \right) : \left(\frac{dP_2}{d\xi_j} \right) \right\} dx_j$$

cavato dall'espressione generica delle equazioni della 2.ª colonna del sistema (10), art. II, competente all'equazione differenziale parziale (5), ossia in cui pongasi $P = P_1 + P_2$.

4. Se oltre le precedenti ipotesi si suppone che anche la P_1 sia una funzione omogenea di grado $= \varepsilon$ rispetto alle variabili che essa contiene, si avrà

$$z = \frac{\omega}{\omega + \varepsilon} \left\{ C + \Sigma + \varepsilon \beta_j \int_{x_j^0}^{x_j} \left\{ dx_j : \left(\frac{dP_2}{d\xi_j} \right) \right\} \right\} \qquad (8)$$

essendo per abbreviazione

$$\Sigma = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi_\nu x_\nu . \qquad (9)$$

Infatti se le equazioni della 1.ª colonna del sistema (2) si moltiplicano rispettivamente per x_1, x_2, ... x_ν e quelle della 2.ª rispettivamente per ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν e si sommino, il 1.° membro dell'equazione risultante sarà la differenziale totale della Σ ed il 2.° membro si ridurrà per la nota proprietà delle funzioni omogenee a

$$\varepsilon P_1 \; dx_{\nu+1} - \omega P_2 dx_{\nu+1} .$$

Uno degl'integrali del sistema essendo la $\beta_j - P_1 - P_2 = 0$ sarà

$$d\Sigma = \left\{ \varepsilon\beta_j - (\omega + \varepsilon) P_2 \right\} dx_{\nu+1} .$$

Ma l'equazione generica della 2.ª colonna del sistema (2) essendo espressa da

$$dx_{\nu+1} = - dx_j : \frac{dP_2}{d\xi_j} \qquad (10)$$

si avrà integrando e chiamando C la costante

$$\Sigma + C = (\omega + \varepsilon) \int \left\{ P_2 : \frac{dP_2}{d\xi_j} \right\} dx_j - \varepsilon\beta_j \int \left\{ dx_j : \frac{dP_2}{d\xi_j} \right\}$$

Se il valore di $\int \left\{ P_2 : \frac{dP_2}{d\xi_j} \right\} dx_j$ cavato da questa si pone nella 2.ª delle relazioni (7), si avrà la (8).

5. Tutto essendo come ne' precedenti paragrafi, se si indica con Σ^0 ciò che diventa Σ quando alle variabili

$$x_1 \; , \quad x_2 \; , \ldots\ldots \; x_\nu \; , \quad \xi_1 \; , \quad \xi_2 \; , \ldots\ldots \; \xi_\nu \qquad (11)$$

in esso comprese si sostituiscono le rispettive

$$x_1^0 \; , \quad x_2^0 \; , \ldots\ldots \; x_\nu^0 \; , \quad \xi_1^0 \; , \quad \xi_2^0 \; , \ldots\ldots \; \xi_\nu^0 \qquad (12)$$

ed essendo j uno qualunque degl' indici $1, 2, \ldots\ldots \nu$ si chiamino H, K, ciò che diventano le quantità

$$\Sigma - \Sigma^{\circ}\,, \qquad \int_{x_j}^{x_j} \left\{ dx_j : \left(\frac{dP_2}{d\xi_j}\right) \right\}$$

quando cogl' integrali del totale sistema relativo all' equazione differenziale parziale (5) siansi espresse in funzione delle

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_\nu\,,\quad x_1^{\circ}\,,\quad x_2^{\circ}\,,\ \ldots\ldots\ x_\nu^{\circ}\,,\quad \beta_j$$

la soluzione completa z della stessa (5) senza costante addizionale sarà espressa da una o dall' altra delle due formole

$$z = \frac{\omega}{\omega + \varepsilon}\left(H + \varepsilon\beta_j K\right) \tag{13}$$

$$z = -\frac{1}{\varepsilon}\,\beta_j^{\frac{\omega+\varepsilon}{\varepsilon\omega}} \int \left\{ H \beta_j^{-\left(1 + \frac{\omega+\varepsilon}{\omega\varepsilon}\right)} \right\} d\beta_j \tag{14}$$

Infatti se nell' espressione

$$\Sigma + C = \varepsilon \int P_1\, dx_{\nu+1} - \omega \int P_2\, dx_{\nu+1}$$

ottenuta nel paragrafo precedente si determina la C, definendo gl' integrali fra i limiti $x_{\nu+1}^{\circ}$, $x_{\nu+1}$, risulterà $C = -\Sigma^{\circ}$, onde la (8) diverrà

$$z = \frac{\omega}{\omega + \varepsilon}\left\{ \Sigma - \Sigma^{\circ} + \varepsilon\beta_j \int_{x_j^{\circ}}^{x_j} \left(dx_j : \frac{dP}{d\xi_j} \right) \right\} \tag{15}$$

Quindi chiamati al solito P_1°, P_2° ciò che diventano P_1, P_2, quando alle variabili (11) si sostituiscono le quantità (12), se coi $2\nu - 1$ integrali del sistema (10), art. II, che compete alla (5), quando vi si ponga in luogo di P' la

$P_1 + P_2$, uno degl' integrali stessi essendo la $P_1 + P_2 - \beta_j = 0$ e colla relazione $P_1^0 + P_2^0 - \beta_j = 0$ si determinano le 2ν quantità

$$\xi_1\ ,\quad \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu\ ,\quad \xi_1^0\ ,\quad \xi_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu^0 \qquad (16)$$

che risulteranno funzioni delle

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\ ,\quad x_1^0\ ,\quad x_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu^0\ ,\quad \beta_j \qquad (17)$$

e si pongono nella $\Sigma - \Sigma^0$ che diverrà funzione delle (17), si sarà ottenuto ciò che si è chiamato H.

Se inoltre coi $2\nu - 1$ integrali stessi si determinano le $2\nu - 1$ variabili

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_{j-1}\ ,\qquad\qquad x_{j+1}\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu$$

$$\xi_1\ ,\quad \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_{j-1}\ ,\quad \xi_j\ ,\quad \xi_{j+1}\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu$$

esse risulteranno funzioni della sola variabile x_j e delle costanti

$$x_1^0\ ,\quad x_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ x_j^0\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu^0\ ,\quad \xi_1^0\ ,\quad \xi_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_j^0\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu^0\ ,\quad \beta_j$$

i cui valori posti nell' integrale che entra nella (15) verrà esso determinato per una semplice quadratura. Riposti nel risultato i valori di ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_ν^0 in funzione delle (17) risulterà esso funzione delle stesse (17) e sarà il valore che si è indicato con K, onde la (15) darà la (13).

Inoltre se nella relazione (a) data al § 5, art. III, si suppone $\alpha = j$, $\beta = \beta_j$, e P_2 si pone in luogo di P, si avrà

$$\int_{x_j^0}^{x_j} \left\{ dx_j : \left(\frac{dP_2}{d\xi_j}\right) \right\} = \left(\frac{dz}{d\beta_j}\right),$$

onde la (15) diverrà un' equazione differenziale fra le due variabili z e β_j espressa da

$$\frac{dz}{d\beta_j} - \frac{\omega + \varepsilon}{\omega\varepsilon\beta_j} z + \frac{H}{\varepsilon\beta_j} = 0 \qquad (18)$$

il cui integrale senza costante addizionale espresso in funzione di β_j sarà dato dalla (14).

6. Tutto essendo come ne' precedenti paragrafi, se nella Σ s'immaginano posti i valori delle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν risultanti dalla $\beta_j = P_1 + P_2$ e da altri $\nu - 1$ integrali del sistema (10), art. II, in cui pongasi $P = P_1 + P_2$, valori che risulteranno funzioni delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle arbitrarie β_1, β_2, ... β_j, ... β_ν, la β_j essendo la stessa che entra nella (5), la soluzione completa espressa per le anzidette costanti della proposta equazione (1) sarà data da

$$x = \frac{\omega}{\omega + \varepsilon} \Sigma + \left(1 - \frac{\omega\varepsilon}{\omega + \varepsilon}\right)\beta_j x_{\nu+1} + \beta \qquad (19)$$

e la soluzione completa espressa per valori iniziali sarà quella che risulta dall'eliminazione di β_j delle due espressioni

$$x = z + \beta_j\left(x_{\nu+1} - x^0_{\nu-1}\right) + x^0 \qquad (20)$$

$$x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1} = \frac{1}{\varepsilon\beta_j}\left(H - \frac{\omega + \varepsilon}{\omega} z\right) \qquad (21)$$

attribuendo alla variabile z l'uno o l'altro dei due valori (13), (14).

Infatti se nella 2.ª delle relazioni (4) si pone il valore di z dato dalla (8) e si osservi che per la (10) si ha

$$\int\left\{dx_j : \frac{dP_2}{d\xi_j}\right\} = -\int dx_{\nu+1} = -x_{\nu+1} + C' \qquad (22)$$

si otterrà la (19) qualora s'intenda fusa nella β la quantità costante $\frac{\omega}{\omega + \varepsilon}\left(C + \varepsilon\beta_j C'\right)$. Parimente si avrà la (20) dalla 1.ª delle (4) e la (21) risulterà dalla (18) del paragrafo precedente quando si sostituisca alla $\frac{dz}{d\beta_j}$ il trovato valore $\frac{dz}{d\beta_j} = -\left(x_{\nu+1} - x^0_{\nu+1}\right)$ come risulta dall'equazione (30), § 6, art. III.

È da avvertirsi che all'integrale compreso nel valore di z espresso dal 1.° membro della (22) si è potuto sostituire l'espressione $-x_{\nu+1} + C'$, stante la dipendenza della soluzione completa cercata x dell'equazione (1) dalla soluzione completa z dell'equazione (5). Quando la soluzione z della (5) non ha alcuna dipendenza dal sistema che compete alla (1), dovrà allora l'integrale in discorso essere espresso col mezzo degl'integrali del relativo sistema in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν.

7. Essendo proposto da integrarsi il sistema (2) fatto di 2ν equazioni differenziali ordinarie fra $2\nu + 1$ variabili, ed in cui sia P_1 una funzione omogenea di grado $= \varepsilon$ delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν e P_2 una funzione omogenea di grado $= \omega$ delle sole variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν, se colle equazioni (10) dell'art. II si stabilisce il sistema relativo all'equazione differenziale parziale

$$\mathfrak{P}_2 = \beta_j - P_1 \qquad (23)$$

ove $\mathfrak{P}_2$ sarà ciò che diventa P_2, quando alle variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν si sostituiscano le differenziali parziali $\frac{dx}{dx_1}$, $\frac{dx}{dx_2}$, ... $\frac{dx}{dx_\nu}$ e si ottengano di questo sistema, oltre l'integrale $P_2 + P_1 = \beta_j$, altri $\nu - 1$ integrali con cui determinare le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν e delle arbitrarie β_1, β_2, ... β_j, ... β_ν gli altri ν integrali del proposto sistema che ne completano l'integrazione saranno dati da

$$\left.\begin{array}{l}
x_1\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_1}\right)+x_2\left(\frac{d\xi_2}{d\beta_1}\right)\cdots\cdots\cdots+x_\nu\left(\frac{d\xi_\nu}{d\beta_\nu}\right)=h_1\\
x_1\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_2}\right)+x_2\left(\frac{d\xi_2}{d\beta_2}\right)\cdots\cdots\cdots+x_\nu\left(\frac{d\xi_\nu}{d\beta_2}\right)=h_2\\
\vdots \\
x_1\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_j}\right)+x_2\left(\frac{d\xi_2}{d\beta_j}\right)\cdots\cdots\cdots+x_\nu\left(\frac{d\xi_\nu}{d\beta_j}\right)=h_j-\mu x_{\nu+1}\\
\vdots \\
x_1\left(\frac{d\xi_1}{d\beta_\nu}\right)+x_2\left(\frac{d\xi_2}{d\beta_\nu}\right)+\cdots\cdots+x_\nu\left(\frac{d\xi_\nu}{d\beta_\nu}\right)=h_\nu
\end{array}\right\}\quad(24)$$

ove h_1 , h_2 , ... h_j , ... h_ν sono costanti e $\mu = 1 - \omega + \frac{\varepsilon}{\omega}$. In pari tempo i valori di ξ_1 , ξ_2 , ... ξ_ν saranno eguali ai primi membri delle (24) in cui alle differenziali parziali rispetto alle β_1 , β_2 , ... β_ν si sostituiscano le differenziali parziali rispetto alle variabili x_1 , x_2 ...... x_ν.

Infatti al proposto sistema (2) competerà l'equazione differenziale parziale (1) del § 1. Trovata la sua soluzione completa espressa dalla (19) del § 6, in cui siano posti per ξ_1 , ξ_2 , ... ξ_ν i loro valori espressi per le variabili x_1 , x_2 , ... x_ν e per le costanti β_1 , β_2 , ... β_j , ... β_ν desunti dai ν integrali del sistema competente alla (23), risulterà x espressa per quest'ultime quantità e per la $x_{\nu+1}$ e fornirà la soluzione completa dell'equazione differenziale parziale (1) del § 1. Quindi colle equazioni

$$\frac{dx}{d\beta_1}=h_1\ ,\quad \frac{dx}{d\beta_2}=h_2\ \cdots\cdots\ \frac{dx}{d\beta_j}=h_j\ \cdots\cdots\ \frac{dx}{d\beta_\nu}=h_\nu$$

risultanti dal solito teorema si troveranno le (24), quando il

numero $\frac{\omega+\varepsilon}{\omega}$ si intenda fuso nelle costanti arbitrarie dei 2.[i] membri e pongasi nella j^{ma} equazione $1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\omega}=\mu$.
I valori poi delle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν ottenuti dagl' integrali potranno anche essere espressi dalle

$$\frac{dx}{dx_1}=\xi_1\,,\qquad \frac{dx}{dx_2}=\xi_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{dx}{dx_\nu}=\xi_\nu$$

i cui primi membri corrispondono, in forza dell' ottenuto valore di x, ai primi membri delle (24), in cui alle β_1, β_2, ... β_ν si sostituiscano sotto il simbolo d le x_1, x_2, ... x_ν.

8. Essendo il sistema (2) soggetto alle stesse condizioni espresse nel precedente paragrafo, se col processo del § 6 s' intende determinato il valore di z con una o coll' altra delle espressioni (13), (14), i 2ν integrali completi del sistema (2) potranno esprimersi colla solita forma

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dz}{dx_1}=\xi_1\,,\qquad \dfrac{dz}{dx_2}=\xi_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \dfrac{dz}{d\xi_\nu}=\xi_\nu \\[2ex]
\dfrac{dz}{dx_1^0}=-\,\xi_1^0\,,\quad \dfrac{dz}{dx_2^0}=-\,\xi_2^0\,,\ \ldots\ldots\ \dfrac{dz}{dx_\nu^0}=-\,\xi_\nu^0 \\[2ex]
\qquad\qquad\dfrac{dz}{d\beta_j}=-\left(x_{\nu+1}-x_{\nu+1}^0\right)
\end{array}\right\}\qquad(25)$$

l' ultima delle quali è quella con cui eliminare dalle precedenti la β_j, onde non contengano che valori iniziali.
Ciò non abbisogna di dimostrazione risultando evidentemente da quanto è detto al § 1, art. III.

Se si adotta il valore di z dato dall' equazione (14) del § 5 e si pone per abbreviazione $\frac{\omega+\varepsilon}{\omega\varepsilon}=a$, le superiori equazioni (25) si riducono alle

$$\left.\begin{array}{l}
\int\left(\frac{dH}{dx_1}\right)\beta_j^a d\beta_j = -\varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_1 \;, \quad \int\left(\frac{dH}{dx_1^0}\right)\beta_j^a d\beta_j = \varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_1^0 \\
\int\left(\frac{dH}{dx_2}\right)\beta_j^a d\beta_j = -\varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_2 \;, \quad \int\left(\frac{dH}{dx_2^0}\right)\beta_j^a d\beta_j = \varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_2^0 \\
\vdots \\
\int\left(\frac{dH}{dx_\nu}\right)\beta_j^a d\beta_j = -\varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_\nu \;, \quad \int\left(\frac{dH}{dx_\nu^0}\right)\beta_j^a d\beta_j = \varepsilon\beta_j^{-(1+a)}\xi_\nu^0 \\
\qquad x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0 = \frac{1}{\beta_j}(H - \varepsilon a z)
\end{array}\right\} \quad (26)$$

V.

Equazione differenziale parziale accompagnata da equazioni di condizione e variazione delle costanti arbitrarie.

1. Il processo seguito nell'art. I della citata Memoria onde ottenere i sistemi ausiliarj da cui dipende, in forza della fondamentale trasformazione, l'integrazione di una qualsivoglia equazione differenziale ordinaria

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \cdots\cdots + X_{2i} dx_{2i} = 0 \qquad (1)$$

si riduce in ultima analisi ad un problema del calcolo delle variazioni. Si riduce cioè alla ricerca dei valori delle variabili che rendono massimo o minimo il 1.° membro della (1), colla condizione che debba avverarsi l'equazione

$$X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 \cdots\cdots + X_{2i-1} \delta x_{2i-1} = 0 \qquad (2)$$

Dietro i principj di un tal calcolo dovrà essere

$$\delta\left\{X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \cdots\cdots + X_{2i} dx_{2i}\right\} = 0 \qquad (3)$$

sussistendo fra le variazioni arbitrarie δx_1, δx_2, ... δx_{2i-1} l'equazione di condizione (2). Infatti essendo proposta da integrarsi la (1), trattavasi nel citato processo di trovare per le variabili x_1, x_2, ... x_{2i-1} tali funzioni di x_{2i} e di altre $2i-1$ arbitrarie, per le quali fosse soddisfatta la (1) tanto nella supposizione che le suddette arbitrarie si riguardassero come costanti quanto nella supposizione che fossero pur esse funzioni di x_{2i} ed altre arbitrarie. Adottando, come si è fatto, che il simbolo d si riferisca alla differenziale rispetto ad x_{2i} esplicita e la δ rispetto alla x_{2i} implicita nelle arbitrarie e. $D = d + \delta$, la (1) divenendo

$$X_1 Dx_1 + X_2 Dx_2 \cdots + X_{2i} Dx_{2i} =$$

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \cdots + X_{2i} dx_{2i} + \left(X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 \cdots + X_{2i-1} \delta x_{2i-1}\right) = 0$$

dovranno le arbitrarie essere tali funzioni di x_{2i} da soddisfare la

$$X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 \cdots\cdots + X_{2i-1} \delta x_{2i-1} = 0 \qquad (4)$$

Ma se i valori di x_1, x_2, ... x_{2i-1} in funzione di x_{2i} ed arbitrarie quali si otterranno da opportune equazioni che stabiliremo in seguito, si pongono nella (1), sarà essa verificata qualunque siano le arbitrarie stesse. Dunque la differenziale di essa rispetto alle arbitrarie, ossia la (3) dovrà essere verificata insieme alla (4) che vincola le variazioni arbitrarie stesse.

Se si riguarda la (2) come un'equazione di condizione e si indichi con θ un coefficiente indeterminato, si avrà dietro il calcolo delle variazioni

$$\left.\begin{array}{l} \delta\left\{X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots\cdots + X_{2i} dx_{2i}\right\} \\ + \theta\left\{X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 \cdots\cdots\cdots + X_{2i-1} \delta x_{2i-1}\right\} \end{array}\right\} = 0 \qquad (5)$$

Se col processo indicato al § 2, art. I, (Mem.ª cit.ª) si sviluppa la variazione

$$\delta\left\{X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \cdots\cdots + X_{2i} dx_{2i}\right\}$$

e si ritiene per P_1, P_2, ... P_{2i-1} le stesse significazioni adottate nel citato paragrafo, la (3) diverrà

$$P_1\delta x_1 + P_2\delta x_2 \cdots + P_{2i-1}\delta x_{2i-1} + d\left\{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \cdots + X_{2i-1}\delta x_{2i-1}\right\} = 0 \qquad (6)$$

e la (5), avuto riguardo all' equazione (3), si ridurrà alla

$$(P_1 + \theta X_1)\delta x_1 + (P_2 + \theta X_2)\delta x_2 \cdots\cdots + (P_{2i-1} + \theta X_{2i-1})\delta x_{2i-1} = 0$$

Stabilite le equazioni che nascono dal porre a zero i coefficienti delle variazioni affatto arbitrarie, si avrà come nel citato paragrafo per 1.° sistema ausiliario le seguenti equazioni

$$P_1 = -\theta X_1 \,, \quad P_2 = -\theta X_2 \,, \ldots\ldots\ldots P_{2i-1} = -\theta X_{2i-1}\,.$$

Posti questi valori nella (6), si avrà

$$\frac{d\left\{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \cdots\cdots + X_{2i-1}\delta x_{2i-1}\right\}}{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \cdots\cdots + X_{2i-1}\delta x_{2i-1}} = \theta$$

dalla quale si ottiene

$$X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \cdots\cdots + X_{2i-1}\delta x_{2i-1} = e^{\int\theta}\left\{X'_1\delta x'_1 + X'_2\delta x'_2 \cdots\cdots + X'_{2i-1}\delta x'_{2i-1}\right\} \qquad (7)$$

che è l' equazione (8) del citato paragrafo da cui dipende la voluta trasformazione della proposta equazione (1).

2. Tutto essendo come nel precedente paragrafo, se si ammette, che insieme alla proposta (1) sussista un' equazione di condizione

$$L_1 = 0 \qquad (8)$$

essendo L_1 una funzione di tutte le variabili, il 1.° sistema ausiliario sarà dato da

$$P_1 + \theta X_1 + \theta_1\frac{dL_1}{dx_1} = 0\,, \quad P_2 + \theta X_2 + \theta_1\frac{dL_1}{dx_2} = 0 \cdots P_{2i-1} + \theta X_{2i-1} + \theta_1\frac{dL_1}{dx_{2i-1}} = 0 \qquad (9)$$

essendo θ_1 un coefficiente indeterminato, e l'equazione (7) rimarrà la stessa come prima.

Infatti insieme alla (8) sussisterà l'equazione variata

$$\frac{dL_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL_1}{dx_2}\delta x_2 \ldots\ldots + \frac{dL_1}{dx_{2i-1}}\delta x_{2i-1} = 0$$

che esprimeremo con

$$Y_1\delta x_1 + Y_2\delta x_2 \ldots\ldots + Y_{2i-1}\delta x_{2i-1} = 0 \qquad (10)$$

Considerata questa, non altrimenti che la (2), come un'equazione di condizione che fra loro vincola le variazioni δx_1, δx_2, ... dovrà, dietro i noti principj, moltiplicarsi per un coefficiente indeterminato θ_1, ed aggregarsi all'equazione (5). Se in tale aggregato si sostituisce lo sviluppo della variazione che in esso entra e si pongono a zero i coefficienti delle variazioni δx_1, δx_2, ... ridotte per tal modo affatto arbitrarie ed indipendenti, si avranno le (9).

Se inoltre i valori di P_1, P_2, ... P_{2i-1} cavati dalle (9) si pongono nella (6) e si abbia riguardo alla (10), si otterrà ancora la (7).

Di quì si vede che un tale processo è generale e vale per un numero qualunque di equazioni di condizione

$$L_1 = 0\ , \quad L_2 = 0\ , \ \ldots\ldots\ldots\ L_\pi = 0 \qquad (11)$$

che avessero luogo insieme alla proposta.

Si vede inoltre che volendo procedere alla determinazione de' successivi sistemi ausiliarj dovrà considerarsi la

$$X_1^1 dx_1^1 + X_2^1 dx_2^1 \ldots\ldots X_{2i-1}^1 dx'_{2i-1} = 0\ ,$$

come un'equazione fra le nuove variabili x_1^1, x_2^1, ... x_{2i-1}^1 rappresentanti i valori iniziali e trattarsi collo stesso processo seguito per la (1). L'equazione di condizione $L_1 = 0$ diverrà in questo caso $L'_1 = 0$, essendo L'_1 ciò che diventa L_1, quando supposto $x_{2i} = x'_{2i}$, che si riguarderà come costante, si pongano gli apici alle x_1, x_2, ... x_{2i-1} che si riguarderanno come nuove variabili legate dalla condizione $L'_1 = 0$.

3. Essendo proposta come nel § 1, art. 1, un' equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F} \qquad (12)$$

e sussistendo con essa le equazioni di condizione

$$L_1 = 0\,, \quad L_2 = 0\,, \,\ldots\ldots\ldots\, L_\pi = 0 \qquad (13)$$

che vincolano le variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν, il sistema di equazioni differenziali ordinarie fra le anzidette variabili, e le ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ considerate come nuove variabili, dal quale dipende la soluzione completa della proposta, sarà dato in questo caso da

$$\left.\begin{array}{l}
d\xi_1 - \left\{\dfrac{dF}{dx_1} + \xi_1\dfrac{dF}{dx} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2\dfrac{dL_2}{dx_1} \cdots\cdots + \lambda_\pi\dfrac{dL_\pi}{dx_1}\right\}dx_\nu = 0 \\[2ex]
d\xi_2 - \left\{\dfrac{dF}{dx_2} + \xi_2\dfrac{dF}{dx} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dx_2} + \lambda_2\dfrac{dL_2}{dx_2} \cdots\cdots + \lambda_\pi\dfrac{dL_\pi}{dx_2}\right\}dx_\nu = 0 \\
\vdots \\
d\xi_{\nu-1} - \left\{\dfrac{dF}{dx_{\nu-1}} + \xi_{\nu-1}\dfrac{dF}{dx} + \lambda_1\dfrac{dL_1}{dx_{\nu-1}} + \lambda_2\dfrac{dL_2}{dx_{\nu-1}} \cdots\cdots + \lambda_\pi\dfrac{dL_\pi}{dx_{\nu-1}}\right\}dx_\nu = 0 \\[2ex]
\qquad\qquad dx_1 + \dfrac{dF}{d\xi_1}dx_\nu = 0 \\[2ex]
\qquad\qquad dx_2 + \dfrac{dF}{d\xi_2}dx_\nu = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad dx_{\nu-1} + \dfrac{dF}{d\xi_{\nu-1}}dx_\nu = 0
\end{array}\right\} (14)$$

$$dx + \left\{ \frac{dF}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dF}{d\xi_2}\xi_2 \;\cdots\cdots + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}}\xi_{\nu-1} - F \right\} dx_\nu = 0 \qquad (15)$$

Infatti per ridurre la questione trattabile colle formole date ne' precedenti paragrafi supporremo che alle quantità comprese nella prima linea delle

$$\left.\begin{array}{llllllll} \xi_1\,, & \xi_2\,,\;\cdots\cdots & \xi_{\nu-1}\,, & \xi_\nu\,, & x\,, & x_1\,, & x_2\,,\;\cdots\cdots & x_\nu \\ x_1\,, & x_2\,,\;\cdots\cdots & x_{i-1}\,, & p_i\,, & x_i\,; & x_{i+1}\,, & x_{i+2}\,,\;\cdots\cdots & x_{2i} \end{array}\right\} \quad (16)$$

siano risostituite quelle della 2.ª linea, le L_1, L_2, ... L_π delle (13) risulteranno funzioni delle sole variabili x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_{2i} e la proposta (12) diverrà $\frac{dx_i}{dx_{2i}} = \mathcal{F}$, ove in $\mathcal{F}$ intenderemo fatta l' accennata sostituzione.
A questa, dietro i riflessi del § 6, art. VII, (Mem.ª cit.ª) competerà l' equazione differenziale ordinaria

$$-dx_i + x_1\,dx_{i+1} + x_2\,dx_{i+2} \;\cdots\cdots + F\,dx_{2i} = 0 \qquad (17)$$

Suppongasi ora che l'equazione generale (1) trattata al § 1 si riduca a questa, sussistendo le equazioni di condizione (13) considerate come funzioni delle x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_{2i}. Il sistema (9) esteso ad un numero π di equazioni di condizione diverrà

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + \theta X_1 + \theta_1 Y_1 + \theta_2 Z_1 \;\cdots\cdots + \theta_\pi \psi_1 = 0 \\ P_2 + \theta X_2 + \theta_1 Y_2 + \theta_2 Z_2 \;\cdots\cdots + \theta_\pi \psi_2 = 0 \\ \vdots \\ P_{2i-1} + \theta X_{2i-1} + \theta_1 Y_{2i-1} + \theta_2 Z_{2i-1} \;\cdots\cdots + \theta_\pi \psi_{2i-1} = 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

Osservando quindi essere

$$\begin{array}{l} Y_1 = Y_2 = \cdots\cdots = Y_i = 0 \\ Z_1 = Z_2 = \cdots\cdots = Z_i = 0 \\ \vdots \\ \psi_1 = \psi_2 = \cdots\cdots = \psi_i = 0 \end{array}$$

il sistema delle prime $i-1$ equazioni delle (18), postivi i valori di P_1, P_2, ... fornirà le stesse equazioni come nel caso in cui non eranvi equazioni di condizione, cioè fornirà, come nel sistema (11) del citato articolo, le ultime $\nu-1$ equazioni delle (14) quando abbiasi riguardo alla risostituzione dei valori (16). Da questo sistema e dalla (17) risulterà la (15).

Inoltre il sistema (12) del § 6, art. VII, (Mem.^{a} cit.^{a}) si ridurrà alle equazioni

$$\frac{dF}{dx_i}dx_{2i} = \theta$$

$$dx_1 - \frac{dF}{dx_{i+1}}dx_{2i} = \theta x_1 + \theta_1 Y_{i+1} + \theta_2 Z_{i+1} \cdots\cdots + \theta_\pi \psi_{i+1}$$

$$dx_2 - \frac{dF}{dx_{i+2}}dx_{2i} = \theta x_2 + \theta_1 Y_{i+2} + \theta_2 Z_{i+2} \cdots\cdots + \theta_\pi \psi_{i+2}$$

$$\vdots$$

$$dx_{i-1} - \frac{dF}{dx_{2i-1}}dx_{2i} = \theta x_{i-1} + \theta_1 Y_{2i-1} + \theta_2 Z_{2i-1} \cdots\cdots + \theta_\pi \psi_{2i-1}$$

dalle quali eliminata colla prima di esse la θ e posti i valori

$$Y_{i+1} = \frac{dL_1}{dx_{i+1}}, \quad Y_{i+2} = \frac{dL_1}{dx_{i+2}}, \;\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_{i+1} = \frac{dL_2}{dx_{i+1}}, \quad Z_{i+2} = \frac{dL_2}{dx_{i+2}}, \;\ldots\ldots\ldots$$

$$\vdots$$

$$\psi_{i+1} = \frac{dL_\pi}{dx_{i+1}}, \;\ldots\ldots\ldots$$

quindi sostituite alle arbitrarie θ_1, θ_2, ... θ_π rispettivamente le $\lambda_1 dx_{2i}$, $\lambda_2 dx_{2i}$, ... $\lambda_\pi dx_{2i}$ ed avuto riguardo alla solita sostituzione delle (16) si avranno le prime $\nu - 1$ equazioni del sistema (14).

4. Essendo

$$x = \phi + x^0 \qquad (19)$$

una soluzione completa espressa per valori iniziali dell' equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F} \qquad (20)$$

insieme a cui sussistano fra le variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν le equazioni di condizione

$$L_1 = 0\,,\quad L_2 = 0\,, \ldots\ldots\, L_\pi = 0 \qquad (21)$$

per determinar gl' integrali del sistema (14), (15) del precedente paragrafo si avranno, oltre la (19), le relazioni

$$\left.\begin{array}{l}
-\xi_1 + \dfrac{dx}{dx_1} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_1} \ldots\ldots + \lambda_\pi \dfrac{dL_\pi}{dx_1} = 0 \\[2ex]
-\xi_2 + \dfrac{dx}{dx_2} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_2} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_2} \ldots\ldots + \lambda_\pi \dfrac{dL_\pi}{dx_2} = 0 \\
\vdots \\
-\xi_{\nu-1} + \dfrac{dx}{dx_{\nu-1}} + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_{\nu-1}} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx_{\nu-1}} \ldots\ldots + \lambda_\pi \dfrac{dL_\pi}{dx_{\nu-1}} = 0
\end{array}\right\} (22)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_1^0 \dfrac{dx}{dx^0} + \dfrac{dx}{dx_1^0} + \lambda_1^0 \dfrac{dL_1^0}{dx_1^0} + \lambda_2^0 \dfrac{dL_2^0}{dx_1^0} \ldots\ldots + \lambda_\pi^0 \dfrac{dL_\pi^0}{dx_1^0} = 0 \\[2ex]
\xi_2^0 \dfrac{dx}{dx^0} + \dfrac{dx}{dx_2^0} + \lambda_1^0 \dfrac{dL_1^0}{dx_2^0} + \lambda_2^0 \dfrac{dL_2^0}{dx_2^0} \ldots\ldots + \lambda_\pi^0 \dfrac{dL_\pi^0}{dx_2^0} = 0 \\
\vdots \\
\xi_{\nu-1}^0 \dfrac{dx}{dx^0} + \dfrac{dx}{dx_{\nu-1}^0} + \lambda_1^0 \dfrac{dL_1^0}{dx_{\nu-1}^0} + \lambda_2^0 \dfrac{dL_2^0}{dx_{\nu-1}^0} \ldots\ldots + \lambda_\pi^0 \dfrac{dL_\pi^0}{dx_{\nu-1}^0} = 0
\end{array}\right\} (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 0\,, \quad L_2 = 0\,, \ldots\ldots\, L_\pi = 0 \\ L_1^0 = 0\,, \quad L_2^0 = 0\,, \ldots\ldots\, L_\pi^0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (24)$$

ove una qualsivoglia L_α^0 è ciò che diventa L_α quando vi si ponga $x_\nu = x_\nu^0$.

Infatti ripreso il processo del § 3, art. I, insieme alla variata

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dx}{dx_1} - \xi_1\right)\delta x_1 + \left(\frac{dx}{dx_2} - \xi_2\right)\delta x_2 \cdots\cdots + \left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}} - \xi_{\nu-1}\right)\delta x_{\nu-1} \\ \left(\frac{dx}{dx^0} - N\right)\delta x^0 + \left(\frac{dx}{dx_1^0} + N\xi_1^0\right)\delta x_1^0 + \left(\frac{dx}{dx_2^0} + N\xi_2^0\right)\delta x_2^0 \cdots\cdots + \left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}^0} + N\xi_{\nu-1}^0\right)\delta x_{\nu-1}^0 \end{array}\right\} = 0$$

che risulta sottraendo la (28) dalla (29) del citato paragrafo, sussisteranno le variate delle equazioni di condizione (21) e di quelle che ne dipendono facendovi $x_\nu = x_\nu^0$. Tali variate saranno quelle che risultano dalle generiche

$$\frac{dL_\alpha}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL_\alpha}{dx_2}\delta x_2 \cdots\cdots\cdots + \frac{dL_\alpha}{dx_{\nu-1}}\delta x_{\nu-1} = 0$$

$$\frac{dL_\alpha^0}{dx_1^0}\delta x_1^0 + \frac{dL_\alpha^0}{dx_2^0}\delta x_2^0 \cdots\cdots\cdots + \frac{dL_\alpha^0}{dx_{\nu-1}^0}\delta x_{\nu-1}^0 = 0$$

per tutti i valori di $\alpha = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\ \pi$. Dietro il noto metodo delle variazioni, moltiplicate queste rispettivamente per coefficienti indeterminati che indicheremo ancora con

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\,,\quad \lambda_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda^\pi \\ \lambda_1^0\,,\quad \lambda_2^0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda_\pi^0 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

ed aggregate alla trovata variazione, posti a zero i coefficienti delle variazioni arbitrarie ed avuto riguardo essere $N = \frac{dx}{dx^0}$, si avranno le (22), (23) alle quali dovranno congiungersi e la relazione stessa $x = \phi + x^0$ che è pure un integrale del sistema proposto e le relazioni determinate dalle (24).

5. I $2\nu-1$ integrali del sistema (14), (15), sussistendo le equazioni di condizione (13) o le (21), saranno quelle equazioni che risultano

1.° Dalla stessa (19) che è un integrale del sistema.

2.° Dalle $\nu-1+\pi$ equazioni provenienti dall' eliminazione delle π indeterminate λ_1, λ_2, ... λ_π dalle (22).

3.° Dal sistema delle π equazioni date dalle equazioni di condizione (21).

4.° Dalle $\nu-1$ equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_1^0\left(\frac{dx}{dx^0}+1\right)+\frac{dx}{dx_1^0}-\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^0=0\\
&\xi_2^0\left(\frac{dx}{dx^0}+1\right)+\frac{dx}{dx_2^0}-\left(\frac{dx}{dx_2}\right)^0=0\\
&\qquad\vdots\\
&\xi_{\nu-1}^0\left(\frac{dx}{dx^0}+1\right)+\frac{dx}{dx_{\nu-1}^0}-\left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right)^0=0
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

che derivano dalla combinazione delle (22), (23). Esisteranno poi fra i valori iniziali x_1^0, x_2^0, ... $x_{\nu-1}^0$ competenti ad $x_\nu=x_\nu^0$ le relazioni date dalla 2.ª linea delle (24).

Infatti le λ_1^0, λ_2^0, ... λ_π^0 si potranno riguardare come i valori iniziali delle stesse λ_1, λ_2, ... λ_π quali risulterebbero determinate dalle formole (22) facendovi $x_\nu=x_\nu^0$. Dietro ciò il complesso dei termini

$$\lambda_1^0\frac{dL_1^0}{dx_\alpha^0}+\lambda_2^0\frac{dL_2^0}{\delta x_\alpha^0}\ \dots\dots\dots\dots\dots+\lambda_\pi^0\frac{dL_\pi^0}{dx_\alpha^0}$$

che entrano nell'equazione generica delle (23) risulterà dal porre $x_\nu=x_\nu^0$ nell'equazione generica delle (22). Tal aggregato di termini per tutti i valori di α compresi fra 1, e $\nu-1$

risulterà $= - \xi^0_\alpha + \left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right)^0$ essendo $\left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right)^0$ ciò che diventa la $\left(\frac{dx}{dx_\alpha}\right)$ quando le variabili in essa comprese assumano i valori competenti ad $x_\nu = x^0_\nu$, e perciò il sistema (23) si cambierà nel sistema (26).

La totalità delle accennate equazioni sarà di un numero $= 2\nu - 1$ e conterranno i valori iniziali x^0_1, x^0_2, ... ξ^0_1, ξ^0_2, ... ma fra i primi valori esisteranno π relazioni date dalla 2.ª linea delle (24), con che il numero di valori iniziali sarà diminuito, come dev' essere, di un numero π.

6. Gl' integrali del sistema (14), (15) ottenuti col processo dell'antecedente paragrafo possono essere rappresentati dalle stesse (19), (22), (23) quando in esse si pongano i valori delle λ_1, λ_2, ... λ_π, λ^0_1, λ^0_2, ... λ^0_π determinati nel seguente modo.

Sia $L_\alpha = 0$ una qualunque delle equazioni di condizione. Se nella sua differenziale totale si pongono i valori delle dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ desunti dalle ultime delle equazioni (14) si avrà fra le variabili x_1, x_2, ... x_ν, ξ_1, ξ_2, ... $\xi_{\nu-1}$ l'equazione finita

$$\frac{dL_\alpha}{dx_1} \cdot \frac{dF}{dx_1} + \frac{dL_\alpha}{dx_2} \cdot \frac{dF}{dx_2} \ldots\ldots + \frac{dL_\alpha}{dx_{\nu-1}} \cdot \frac{dF}{dx_{\nu-1}} - \frac{dL_\alpha}{dx_\nu} = 0$$

che verrà rappresentata con $\Pi = 0$.

Se nella differenziale totale

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\Pi}{dx_1} dx_1 + \dfrac{d\Pi}{dx_2} dx_2 \ldots\ldots + \dfrac{d\Pi}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \\[2ex] \dfrac{d\Pi}{d\xi_1} d\xi_1 + \dfrac{d\Pi}{d\xi_2} d\xi_2 \ldots\ldots + \dfrac{d\Pi}{d\xi_{\nu-1}} d\xi_{\nu-1} \end{array}\right\} + \frac{d\Pi}{dx_\nu} dx_\nu = 0$$

si pongano i valori delle differenziali dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$, $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_{\nu-1}$ dati dalle (14) si otterrà un'equazione

lineare fra le λ_1, λ_2, ... λ_π. Di tali equazioni se ne avrà quindi un numero π a seconda dei diversi valori di α, colle quali verranno determinate le λ_1, λ_2, ... λ_π da porsi nelle (22). Avuto riguardo poi che insieme al sistema (14) sussiste quello che ne deriva dal porvi $x_\nu = x^\circ_\nu$, si otterranno le λ°_1, λ°_2, ... λ°_ν eseguendo sulla $L^\circ_\alpha = 0$ lo stesso processo seguito per la $L_\alpha = 0$, ed i valori ottenuti saranno da porsi nelle (23). Questi valori si sarebbero anche immediatamente ottenuti dagli stessi valori λ_1, λ_2, ... λ_π facendovi $x_\nu = x^\circ_\nu$.
Gl' integrali pertanto del sistema (14), (15) saranno dati dalle (19), (22), (23), ammessi i trovati valori e sussistendo le relazioni (24).

Giova notare che se la F che entra nel sistema (14), (15) manca della variabile x, essendo in tal caso $N = 1$ risulterà $\frac{dx}{dx^\circ} = 1$, il qual valore posto nel sistema (23) e fondendo le ξ°_1, ξ°_2, ... $\xi^\circ_{\nu-1}$ nelle altre costanti, il sistema stesso si ridurrà a

$$\frac{dx}{dx^\circ_1} = h_1\,,\quad \frac{dx}{dx^\circ_2} = h_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{dx}{dx^\circ_{\nu-1}} = h_{\nu-1} \qquad (27)$$

essendo h_1, h_2, ... $h_{\nu-1}$ altrettante costanti date in funzione dei valori iniziali.

7. Essendo

$$x = \psi + \beta_\nu \qquad (28)$$

una soluzione completa espressa per le costanti β_1, β_2 .... $\beta_{\nu-1}$ dell' equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \mathcal{F}$ mancante della variabile x ed accompagnata dalle equazioni di condizione (21), gl'integrali del sistema

$$\left.\begin{aligned}
&d\xi_1 - \left\{\frac{dF}{dx_1} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1}\right\} dx_\nu = 0\,, \qquad dx_1 + \frac{dF}{d\xi_1} dx_\nu = 0 \\
&d\xi_2 - \left\{\frac{dF}{dx_2} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_2}\right\} dx_\nu = 0\,, \qquad dx_2 + \frac{dF}{d\xi_2} dx_\nu = 0 \\
&\vdots \\
&d\xi_{\nu-1} - \left\{\frac{dF}{dx_{\nu-1}} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_{\nu-1}}\right\} dx_\nu = 0\,, \quad dx_{\nu-1} + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}} dx_1 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

a cui si riduce nell'attuale ipotesi il sistema (14) saranno dati dalle

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{dx_1}\right) + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1} = \xi_1\,, \qquad \left(\frac{dx}{d\beta_1}\right) = k_1 \\
&\left(\frac{dx}{dx_2}\right) + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1} = \xi_2\,, \qquad \left(\frac{dx}{d\beta_2}\right) = k_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\left(\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_{\nu-1}} = \xi_{\nu-1}\,, \quad \left(\frac{dx}{d\beta_{\nu-1}}\right) = k_{\nu-1}
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

essendo k_1, k_2, ... $k_{\nu-1}$ nuove costanti arbitrarie, la sommatoria Σ dovendo estendersi al solito da $i = 1$ ad $i = \pi$.

Infatti, avuto riguardo alla conclusione accennata in fine al § 1, art. I, se negl'integrali del sistema (39) espressi per le costanti dell'integrazione si pone $x_\nu = x^0_\nu$, le costanti stesse verranno espresse pei valori iniziali; se quindi i valori ottenuti delle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ si pongono nella funzione ψ si cambierà questa in ϕ rimanendovi i soli valori iniziali x^0_1, x^0_2, ... x^0_ν. Se, viceversa, si pongono nella ϕ pei valori iniziali che essa contiene le loro espressioni per le costanti, la ϕ si cambierà in ψ. Ciò ammesso, gli $\nu - 1$

integrali del sistema (29) saranno espressi dalla 1.ª colonna delle (30) risultanti dalle (22), in cui i valori iniziali siano espressi per le costanti. Gli altri $\nu - 1$ integrali si otterranno dalle (27) che si riducono alle

$$\frac{d\phi}{dx_1^0} = h_1\ ,\quad \frac{d\phi}{dx_2^0} = h_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{d\phi}{dx_{\nu-1}^0}\ h_{\nu-1}$$

Infatti se si moltiplicano rispettivamente per

$$\frac{dx_1^0}{d\beta_j}\ ,\quad \frac{dx_2^0}{d\beta_j}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{dx_{\nu-1}^0}{d\beta_j}$$

e si sommano, il 1.° membro si ridurrà a $\frac{d\psi}{d\beta_j}$ ed il 2.° membro essendo una funzione di quantità costanti potrà egualiarsi ad una nuova costante k_j. Quindi dalla generica $\frac{d\psi}{d\beta_j} = k_j$, ossia dalla $\left(\frac{dx}{d\beta_j}\right) = k_j$ si dedurranno pei diversi valori di $j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ldots\ \nu - 1$ gli altri $\nu - 1$ integrali del citato sistema che coincideranno colle equazioni della 2.ª colonna delle (30).

8. Essendo proposta l'equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dx_\nu} = \mathcal{F} \qquad (31)$$

accompagnata dalle π equazioni di condizione

$$L_1 = 0\ ,\quad L_2 = 0\ ,\ \ldots\ldots\ L_\pi = 0$$

se nelle funzioni $\mathcal{F}$, L_1, L_2, ... L_π mancano le variabili x, x_ν un integrale del sistema (29) da cui dipende la soluzione completa sarà dato, come nel caso in cui non esistono equazioni di condizione trattato al § 2, art. III, dalla equazione

$$F = \beta_j \qquad (32)$$

Infatti se le $\nu - 1$ equazioni della 1.ª colonna delle (29) si moltiplicano rispettivamente per dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ e quelle della 2.ª rispettivamente per $d\xi_1$, $d\xi_2$, ... $d\xi_{\nu-1}$ e dall'aggregato di quest'ultime si sottrae l'aggregato delle prime, si avrà

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dF}{d\xi_1} d\xi_1 + \frac{dF}{d\xi_2} d\xi_2 \cdots\cdots + \frac{dF}{d\xi_{\nu-1}} d\xi_{\nu-1} \\
+ \frac{dF}{dx_1} dx_1 + \frac{dF}{dx_2} dx_2 \cdots\cdots + \frac{dF}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \\
+ \lambda_1 \left\{ \frac{dL_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dL_1}{dx_2} dx_2 \cdots\cdots + \frac{dL_1}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \right\} \\
+ \lambda_2 \left\{ \frac{dL_2}{dx_1} dx_1 + \frac{dL_2}{dx_2} dx_2 \cdots\cdots + \frac{dL_2}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \right\} \\
\vdots \\
+ \lambda_\pi \left\{ \frac{dL_\pi}{dx_1} dx_1 + \frac{dL_\pi}{dx_2} dx_2 \cdots\cdots + \frac{dL_\pi}{dx_{\nu-1}} dx_{\nu-1} \right\}
\end{array}\right\} = 0$$

Le funzioni F, L_1, L_2, ... L_π non contenendo x_ν, i coefficienti delle λ_1, λ_2, ... saranno zero, essendo le differenziali totali delle equazioni di condizione ed il polinomio che rimane si ridurrà alla differenziale totale $dF = 0$ da cui $F = \beta_j$, essendo β_j la costante dell'integrazione. Seguendo i processi dell'art. III, è facile dedurre quali modificazioni subiranno le formole dei precedenti paragrafi quando in esse, oltre mancare la variabile principale, manchi, od una differenziale parziale, od una variabile indipendente.

9. Siccome l'equazione (15), e la

$$dx = \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \cdots\cdots + \xi_{\nu-1} dx_{\nu-1} + F dx_\nu = 0$$

che ne tien luogo rimangono le stesse, comunque esistano o no equazioni di condizione, così la soluzione completa x che da esse risulterà, a seconda delle diverse ipotesi stabilite sul valore di $\mathcal{F}$, cioè le soluzioni (14), (15) del § 2, art. III, rimarranno invariate comunque esistano equazioni di condizione. Riprese le diverse ipotesi sul valore di $\mathcal{F}$ stabilite all'art. IV, sarà facile persuadersi delle proposizioni dei seguenti §§ 10, 11, 12, 13.

10. Sia proposta un'equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dx_{\nu+1}} = P_1 + \mathcal{P}_2 \tag{33}$$

essendo P_1 una funzione delle sole variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu+1}$ e la $\mathcal{P}_2$ funzione delle sole differenziali parziali di x rispetto alle x_1, x_2, ... x_ν e sianvi fra le variabili stesse e la $x_{\nu+1}$ le equazioni di condizione

$$L_1 = 0\,, \quad L_2 = 0\,, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ L_\pi = 0 \tag{34}$$

Il sistema da cui dipende la soluzione completa della proposta sarà dato da

$$\left.\begin{array}{ll}
d\xi_1 - \left\{\dfrac{dP_1}{dx_1} + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_1}\right\} dx_{\nu+1} = 0\,, & dx_1 + \dfrac{dP_2}{d\xi_1} dx_{\nu+1} = 0 \\
d\xi_2 - \left\{\dfrac{dP_1}{dx_2} + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_2}\right\} dx_{\nu+1} = 0\,, & dx_2 + \dfrac{dP_2}{d\xi_2} dx_{\nu+1} = 0 \\
\vdots & \\
d\xi_\nu - \left\{\dfrac{dP_1}{dx_\nu} + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_\nu}\right\} dx_{\nu+1} = 0\,, & dx_\nu + \dfrac{dP_2}{d\xi_\nu} dx_{\nu+1} = 0
\end{array}\right\} \tag{35}$$

$$dx = \left\{ P_1 + P_2 - \left(\frac{dP_2}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dP_2}{d\xi_2}\xi_2 \ldots\ldots + \frac{dP_2}{d\xi_\nu}\xi_r \right) \right\} dx_{\nu+1} \tag{36}$$

ove la sommatoria Σ dovrà estendersi da $i = 1$ ad $i = \pi$.

11. Le cose essendo come nella proposizione precedente, se nella P_1 e nelle equazioni di condizione manca la variabile $x_{\nu+1}$, la soluzione completa della proposta sarà data da

$$x = \beta_j(x_{\nu+1} - x^{\circ}_{\nu+1}) + z + x^{\circ} \tag{37}$$

essendo z la soluzione completa senza costante addizionale ed espressa per valori iniziali della nuova equazione differenziale parziale

$$\beta_j - (P_1 - \mathcal{P}_2) = 0 \tag{38}$$

accompagnata dalle equazioni di condizione (34) e dove nella $\mathcal{P}_2$ sarà sostituito z alla x. Quest'ultima soluzione poi dipenderà dal sistema

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{dP_2}{d\xi_\nu} d\xi_1 + \left\{ \frac{dP_1}{dx_1} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1} \right\} dx_\nu = 0\,, & \frac{dP_2}{d\xi_\nu} dx_1 - \frac{dP_2}{d\xi_1} dx_\nu = 0 \\
\frac{dP_2}{d\xi_\nu} d\xi_2 + \left\{ \frac{dP_1}{dx_2} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_2} \right\} dx_\nu = 0\,, & \frac{dP_2}{d\xi_\nu} dx_2 - \frac{dP_2}{d\xi_2} dx_\nu = 0 \\
\vdots & \vdots \\
\frac{dP_2}{d\xi_\nu} d\xi_{\nu-1} + \left\{ \frac{dP_1}{dx_{\nu-1}} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_{\nu-1}} \right\} dx_\nu = 0\,, & \frac{dP_2}{d\xi_\nu} dx_{\nu-1} - \frac{dP_2}{d\xi_{\nu-1}} dx_\nu = 0 \\
\frac{dP_2}{d\xi_\nu} d\xi_\nu + \left\{ \frac{dP_1}{dx_\nu} + \Sigma\lambda_i \frac{dL_i}{dx_\nu} \right\} dx_\nu = 0 &
\end{array}\right\} \tag{39}$$

$$z = \int_{x^{\circ}_\nu}^{x_\nu} \left\{ \left(\frac{dP_2}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dP_2}{d\xi_2}\xi_2 \,\ldots\ldots + \frac{dP_2}{d\xi_\nu}\xi_\nu \right) : \frac{dP_2}{d\xi_\nu} \right\} dx_\nu \tag{40}$$

ove la sommatoria Σ sarà ancora estesa da $i = 1$ ad $i = \pi$.

12. Tutto essendo come nelle antecedenti proposizioni, se la P_1 è funzione omogenea di grado $= \varepsilon$, la P_2 funzione omogenea di grado $= \omega$ e le equazioni di condizione

sono rispettivamente omogenee de' gradi γ_1, γ_2, ... γ_π rispetto alle variabili di cui le anzidette quantità sono funzioni, la soluzione completa x della proposta, espressa per valori iniziali, sarà quella che risulta dall' eliminazione di β_j dalle due equazioni (20), (21) del § 6, art. IV, avendo la z uno o l'altro dei valori (13), (14), art. IV, in cui H, K dipenderanno, nell' attuale ipotesi, dagl' integrali del sistema (39) del precedente paragrafo.

13. Essendo proposto da integrarsi il sistema (35) fatto di 2ν equazioni differenziali ordinarie, e sussistendo le equazioni di condizione

$$L_1 = 0\,, \quad L_2 = 0\,, \;\dots\dots\dots\; L_\pi = 0 \tag{41}$$

fra le sole variabili x_1, x_2, ... x_ν, se la P_1 è funzione omogenea di grado $=\varepsilon$ delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, la P_2 funzione omogenea di grado $=\omega$ delle variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν e le funzioni L_i sono omogenee di grado γ_i delle variabili che esse contengono, i 2ν integrali espressi per valori iniziali del sistema dato saranno quelli che risultano dall' eliminazione di β_j fra le equazioni

$$\left.\begin{array}{ll}
\left(\dfrac{dz}{dx_1}\right) + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_1} = \xi_1\,, & \left(\dfrac{dz}{dx_1^0}\right) = -2\xi_1^0 + \left(\dfrac{dz}{dx_1}\right)^0 \\
\left(\dfrac{dz}{dx_2}\right) + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_2} = \xi_2\,, & \left(\dfrac{dz}{dx_2^0}\right) = -2\xi_2^0 + \left(\dfrac{dz}{dx_2}\right)^0 \\
\vdots & \vdots \\
\left(\dfrac{dz}{dx_\nu}\right) + \Sigma\lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_\nu} = \xi_\nu\,, & \left(\dfrac{dz}{dx_\nu^0}\right) = -2\xi_\nu^0 + \left(\dfrac{dz}{dx_\nu}\right)^0 \\
\multicolumn{2}{c}{\left(\dfrac{dz}{d\beta_j}\right) = -\left(x_{\nu+1} - x_{\nu+1}^0\right)}
\end{array}\right\} \tag{42}$$

il valore di z essendo dato da una o dall'altra delle espressioni (13), (14), art. IV, nelle quali H, K dipendono ora dagl'integrali del sistema (39), ammessa l'esistenza delle equazioni di condizione (41).

Se si adotta il valore di z dato dalla citata (14), e si pongono nelle (42) i valori delle differenziali parziali di z, si avranno formole analoghe a quelle date dalle (26) del § 8, art. IV.

14. Ai metodi esposti sin quì per ottenere una soluzione completa di un'equazione differenziale parziale, sia isolata, sia accompagnata da equazioni di condizione, si deve aggiungere quello che risulta dalla variazione delle costanti arbitrarie, come si pratica nella teoria delle soluzioni particolari delle equazioni differenziali ordinarie.

Sia proposta un'equazione differenziale parziale priva della variabile principale riducibile alla forma

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F} + \mathcal{E} \tag{43}$$

in cui $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ sono due funzioni distinte delle variabili indipendenti x_1, x_2, ... $x_{\nu+1}$ e delle differenziali parziali di x rispetto alle prime ν variabili. La soluzione completa della (43) espressa per valori iniziali sarà ottenibile col seguente processo:

1.° Si cerchi col metodo del § 1, art. II, la soluzione completa

$$x = \phi + x^0 \tag{44}$$

dell'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F} \tag{45}$$

Gl'integrali del sistema che han servito alla ricerca della (44) saranno espressi, in forza delle proposizioni del § 3, art. II, dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\right) &= \xi_1\,, \quad \left(\frac{d\phi}{dx_2}\right) = \xi_2\,, \ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\ \left(\frac{d\phi}{dx^0_1}\right) &= -\xi^0_1\,, \quad \left(\frac{d\phi}{dx^0_2}\right) = -\xi^0_2\,, \ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\phi}{dx^0_\nu}\right) = -\xi^0_\nu\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

2.° Si chiami E ciò che diventa $\mathcal{E}$ quando alle differenziali parziali che essa contiene siansi sostituite le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν e sia E_1 ciò che diventa E quando alle

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ x_\nu\,,\quad \xi_1\,,\quad \xi_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ \xi_\nu \qquad (47)$$

siano sostituiti i loro valori in funzione delle

$$x_{\nu+1}\,,\quad x^0_1\,,\quad x^0_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ x^0_\nu\,,\quad \xi^0_1\,,\quad \xi^0_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ \xi^0_\nu \qquad (48)$$

cavati dalle (46). Sia finalmente $\mathcal{E}_1$ ciò che diventa E_1 quando alle ξ^0_1, ξ^0_2, ... ξ^0_ν siansi sostituite le differenziali parziali della x^0 rispetto alle x^0_1, x^0_2, ... x^0_ν. S' indichi al solito con

$$x^0 = \phi_0 + x^{00} \qquad (49)$$

la soluzione completa espressa per nuovi valori iniziali indicati con 00 all' esponente dell' equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx^0}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{E}_1 \qquad (50)$$

in cui le x^0_1, x^0_2, ... x^0_ν, $x_{\nu+1}$ si riguardino come le variabili indipendenti, e la x^0, di cui manca la $\mathcal{E}_1$, come la variabile principale.

3.° La soluzione completa della proposta (43) sarà data da

$$x = \phi + \phi_0 + x^{00} \qquad (51)$$

quando nelle funzioni ϕ, ϕ_0 s'intendano posti i valori delle x_1^0, x_2^0, ... x_ν^0 in funzione delle

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \dots\dots\ x_\nu\ ,\quad x_{\nu+1}\ ,\quad x_1^{00}\ ,\quad x_2^{00}\ ,\ \dots\dots\ x_\nu^{00}$$

cavati dalle ν equazioni

$$\left(\frac{d\phi}{dx_1^0}\right)=-\left(\frac{d\phi_0}{dx_1^0}\right),\ \left(\frac{d\phi}{dx_2^0}\right)=-\left(\frac{d\phi_0}{dx_2^0}\right),\ \dots\dots\ \left(\frac{d\phi}{dx_\nu^0}\right)=-\left(\frac{d\phi_0}{dx_\nu^0}\right)\quad (52)$$

Infatti insieme alla proposta equazione (43) sussiste l'equazione differenziale ordinaria

$$-dx+\xi_1 dx_1+\xi_2 dx_2\ \dots\dots+\xi_\nu dx_\nu+(F+E)dx_{\nu+1}=0\qquad (53)$$

Ma se si stabilisce il sistema di equazioni differenziali ordinarie risultante dalle generiche

$$d\xi_j-\frac{dF}{dx_j}dx_{\nu+1}=0\ ,\qquad dx_j+\frac{dF}{d\xi_j}dx_{\nu+1}=0\qquad (54)$$

pei valori di $j=1$, 2, ... ν cogl'integrali del qual sistema la

$$dx+\left\{\frac{dF}{d\xi_1}\xi_1+\frac{dF}{d\xi_2}\xi_2\ \dots\dots+\frac{dF}{d\xi_\nu}\xi_\nu-F\right\}dx_{\nu+1}=0\qquad (55)$$

fornisce la soluzione completa della (45), l'espressione

$$-dx+\xi_1 dx_1+\xi_2 dx_2\ \dots\dots+\xi_\nu dx_\nu+F dx_{\nu+1}$$

subisce, in forza degl'integrali ottenuti, quella fondamentale trasformazione che la riduce a

$$N\left\{-dx^0+\xi_1^0 dx_1^0\ \dots\dots\dots+\xi_\nu^0 dx_\nu^0\right\}$$

ove sarà $N=1$, in quanto F non contiene la x. Dietro ciò, introdotti nella E i valori delle variabili (47) cavati dalle (46) che rimpiazzano gl' integrali del citato sistema (54), la (52) diverrà

$$-dx^0+\xi_1^0 dx_1^0+\xi_2^0 dx_2^0 \ldots\ldots\ldots +\xi_\nu^0 dx_\nu^0+E_1 dx_{\nu+1}=0$$

Sarà questa un'equazione da integrarsi fra le nuove variabili

$$x^0\;,\quad x_1^0\;,\quad x_2^0\;,\;\ldots\ldots\ldots\; x_\nu^0\;,\quad x_{\nu+1}\;,\quad \xi_1^0\;,\quad \xi_2^0\;,\;\ldots\ldots\ldots\;\xi_\nu^0\,.$$

Ma a questa potrà sostituirsi l'equazione differenziale parziale (50), di cui si dovrà cercare la soluzione completa (49). La ricerca di tal soluzione dipenderà dagl' integrali del sistema generico

$$d\xi_j^0-\frac{dE_1}{dx_j^0}dx_{\nu+1}=0\;,\qquad dx_j+\frac{dE_1}{d\xi_j^0}dx_{\nu+1}=0$$

$$dx^0+\left\{\frac{dE_1}{d\xi_1^0}\xi_1^0+\frac{dE_1}{d\xi_2^0}\xi_2^0\ldots\ldots\ldots+\frac{dE_1}{d\xi_\nu^0}\xi_\nu^0-E_1\right\}dx_{\nu+1}=0$$

analogo al sistema (54), (55), e dalla ottenuta soluzione completa (49) si avranno le relazioni

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_1^0}\right)=\xi_1^0\;,\quad\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_2^0}\right)=\xi_2^0\;,\;\ldots\ldots\ldots\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_\nu^0}\right)=\xi_\nu^0\\[2ex]\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_1^{00}}\right)=-\xi_1^{00}\;,\;\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_2^{00}}\right)=-\xi_2^{00}\;,\;\ldots\ldots\left(\dfrac{d\phi_0}{dx_\nu^{00}}\right)=-\xi_\nu^{00}\end{array}\right\}\quad(56)$$

Confrontando le equazioni della 2.ª linea delle (46) con quelle della 1.ª linea di queste, risulteranno le equazioni (52) da cui dipenderà la determinazione delle x_1^0, x_2^0, ... x_ν^0 in funzione delle variabili originarie x_1, x_2, ... x_ν, $x_{\nu+1}$ e de' nuovi valori iniziali x_1^{00}, x_2^{00}, ... x_ν^{00}. Posti tali valori nelle ϕ, ϕ_0 delle (44), (49) ed eliminata la x^0, si avrà la cercata soluzione (51).

15. La soluzione precedentemente ottenuta dovendo coincidere con quella che direttamente si avrebbe, quando posto

$F + E = H$ si stabilisce il sistema

$$\left.\begin{array}{ll} d\xi_1 - \dfrac{dH}{dx_1} dx_{\nu+1} = 0 \;, & dx_1 + \dfrac{dH}{d\xi_1} dx_{\nu+1} = 0 \\ d\xi_2 - \dfrac{dH}{dx_2} dx_{\nu+1} = 0 \;, & dx_2 + \dfrac{dH}{d\xi_2} dx_{\nu+1} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ d\xi_\nu - \dfrac{dH}{dx_\nu} dx_{\nu+1} = 0 \;, & dx_\nu + \dfrac{dH}{d\xi_\nu} dx_{\nu+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (57)$$

$$dx + \left\{ \frac{dH}{d\xi_1}\xi_1 + \frac{dH}{d\xi_2}\xi_2 \ldots\ldots + \frac{dH}{d\xi_\nu}\xi_\nu - H \right\} dx_{\nu+1} = 0 \quad (58)$$

ne deriva che se fosse proposto invece della (43) il sistema (57) da integrarsi col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, si dovrà prima integrare il sistema parziale

$$\left.\begin{array}{ll} d\xi_1 - \dfrac{dF}{dx_1} dx_{\nu+1} = 0 \;, & dx_1 + \dfrac{dF}{d\xi_1} dx_{\nu+1} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ d\xi_\nu - \dfrac{dF}{dx_\nu} dx_{\nu+1} = 0 \;, & dx_\nu + \dfrac{dF}{d\xi_\nu} dx_{\nu+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (59)$$

che deriva dal proposto, supponendovi $E = 0$. Cogl' integrali del sistema (59) determinati i valori delle variabili

$$x_1 \;,\; x_2 \;, \ldots\ldots\; x_\nu \;,\; \xi_1 \;,\; \xi_2 \;, \ldots\ldots\; \xi_\nu \qquad (60)$$

in funzione della $x_{\nu+1}$ e de' valori iniziali

$$x_1^0 \;,\; x_2^0 \;, \ldots\ldots\; x_\nu^0 \;,\; \xi_1^0 \;,\; \xi_2^0 \;, \ldots\ldots\; \xi_\nu^0 \;,$$

si porranno nella E onde ottenere la funzione E_1. Quindi stabilito il nuovo sistema

$$\left.\begin{aligned}
&d\xi_1^0 - \frac{dE_1}{dx_1^0}\,dx_{\nu+1} = 0\ , \qquad && dx_1^0 + \frac{dE_1}{d\xi_1^0}\,dx_{\nu+1} = 0 \\
&d\xi_2^0 - \frac{dE_1}{dx_2^0}\,dx_{\nu+1} = 0\ , \qquad && dx_2^0 + \frac{dE_1}{d\xi_2^0}\,dx_{\nu+1} = 0 \\
&\vdots && \vdots \\
&d\xi_\nu^0 - \frac{dE_1}{dx_\nu^0}\,dx_{\nu+1} = 0\ , \qquad && dx_\nu^0 + \frac{dE_1}{d\xi_\nu^0}\,dx_{\nu+1} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

si determineranno co' suoi integrali le

$$x_1^0\ ,\quad x_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu^0\ ,\quad \xi_1^0\ ,\quad \xi_2^0\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu^0$$

divenute variabili, in funzione di $x_{\nu+1}$ e de' nuovi valori iniziali

$$x_1^{00}\ ,\quad x_2^{00}\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu^{00}\ ,\quad \xi_1^{00}\ ,\quad \xi_2^{00}\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu^{00}.$$

Le variabili originarie (60) espresse per questi nuovi valori iniziali saranno gl' integrali del proposto sistema (57).

16. Sia di nuovo proposto il sistema (57). Se negl' integrali del 1.° sistema (59) si ritengono le costanti introdotte dall' immediata integrazione espresse da

$$\alpha_1\ ,\quad \alpha_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha_{2\nu}\ ,$$

il 2.° sistema da integrarsi, onde avere le costanti stesse in funzione di $x_{\nu+1}$ e di altre 2ν arbitrarie, sarà dato da quello che risulta pei diversi valori di $i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ldots\ 2\nu$ dall' equazione generica

$$d\alpha_i = \left\{(\alpha_i\,,\,\alpha_1)\frac{dE'}{d\alpha_1} + (\alpha_i\ ,\ \alpha_2)\,\frac{dE'}{d\alpha_2}\ \cdots\cdots + (\alpha_i\,,\,\alpha_{2\nu})\frac{dE'}{d\alpha_{2\nu}}\right\}dx_{\nu+1} \qquad (62)$$

ove la E' è ciò che diventa la E quando alle variabili $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\ ,\ \xi_1\ ,\ \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu$ siansi sostituiti i loro valori in funzione di $x_{\nu+1}$ e delle costanti $\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ldots\ \alpha_{2\nu}$

determinati dagl' integrali del 1.° sistema (69), ed ove il coefficiente generico (α_i , x_j) di una qualunque differenziale parziale $\frac{dE'}{d\alpha_j}$ sarà determinato dalla

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_i , \alpha_j) = &\left(\frac{d\alpha_i}{dx_1^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{d\xi_1^0} - \frac{d\alpha_i}{d\xi_1^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{dx_1^0}\right) \\ &+ \left(\frac{d\alpha_i}{dx_2^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{d\xi_2^0} - \frac{d\alpha_i}{d\xi_2^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{dx_2^0}\right) \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &+ \left(\frac{d\alpha_i}{dx_\nu^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{d\xi_\nu^0} - \frac{d\alpha_i}{d\xi_\nu^0} \cdot \frac{d\alpha_j}{dx_\nu^0}\right)\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Per ottenere il 2.° membro della (62) espresso in funzione delle sole $x_{\nu+1}$, α_1 , α_2 , ... $\alpha_{2\nu}$ si dovranno determinare le costanti stesse in funzione de' valori iniziali, ponendo negl' integrali del 1.° sistema $x_{\nu+1} = x_{\nu+1}^0$. Ottenute le differenziali parziali delle α rispetto ai valori iniziali da porsi nel 2.° membro dell' espressione (63), si dovranno riporre pei valori iniziali le loro espressioni in funzione delle costanti α_1 , α_2 , ... $\alpha_{2\nu}$ date dalle citate relazioni che esistono fra le costanti ed i valori iniziali stessi.

Per dimostrare l' enunciata proposizione si osservi che la E' si cambia in E_1 quando alle costanti si sostituiscano le loro funzioni per valori iniziali. Si avrà quindi pei diversi valori di $j = 1 , 2 , \ldots\ldots \nu$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dE_1}{dx_j^0} &= \frac{dE'}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dx_j^0} + \frac{dE'}{d\alpha_2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dx_j^0} \cdots\cdots + \frac{dE'}{d\alpha_{2\nu}} \cdot \frac{d\alpha_{2\nu}}{dx_j^0} \\ \frac{dE_1}{d\xi_j^0} &= \frac{dE'}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\xi_j^0} + \frac{dE'}{d\alpha_2} \cdot \frac{d\alpha_2}{d\xi_j^0} \cdots\cdots + \frac{dE'}{d\alpha_{2\nu}} \cdot \frac{d\alpha_{2\nu}}{d\xi_j^0}\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Inoltre una qualunque α_i riguardata come funzione dei valori iniziali fornisce

$$\left.\begin{aligned} d\alpha_i = \frac{d\alpha_i}{dx_1^0}dx_1^0 + \frac{d\alpha_i}{dx_2^0}dx_2^0 \ldots\ldots + \frac{d\alpha_i}{dx_\nu^0}dx_\nu^0 \\ + \frac{d\alpha_i}{d\xi_1^0}d\xi_1^0 + \frac{d\alpha_i}{d\xi_2^0}d\xi_2^0 \ldots\ldots + \frac{d\alpha_i}{d\xi_\nu^0}d\xi_\nu^0 \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Se in questa si pongano i valori delle differenziali

$$dx_1^0 \ , \quad dx_2^0 \ , \ \ldots\ldots \ dx_\nu^0 \ , \quad d\xi_1^0 \ , \quad d\xi_2^0 \ , \ \ldots\ldots \ d\xi_\nu^0$$

dati dalle equazioni (61), e per le differenziali parziali $\left(\frac{dE_1}{dx_j^0}\right)$, $\left(\frac{dE_1}{d\xi_j^0}\right)$ che vengono così introdotte si pongono i loro valori dati dalle (64), e quindi, ordinata l'equazione risultante per le differenziali parziali

$$\frac{dE'}{d\alpha_1} \ , \quad \frac{dE'}{d\alpha_2} \ , \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \frac{dE'}{d\alpha_{2\nu}} \ ,$$

abbiasi riguardo all'espressione simbolica data dalla (63), si otterrà la (62). Da questa pei diversi valori di $i = 1, 2, \ldots\ldots 2\nu$ si avrà il sistema totale di 2ν equazioni, che espresse, come si è detto, per le sole costanti senza valori iniziali, forniranno colla loro integrazione le stesse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2\nu}$ espresse per $x_{\nu+1}$ e per altre 2ν arbitrarie.

17. Seguendo pure il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, si potranno ottenere sotto forme più semplici gl' integrali del sistema (57) nel seguente modo.

Sia

$$x = \psi + \beta_{\nu+1} \qquad (66)$$

la soluzione completa espressa per le costanti $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_\nu$ dell' equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F} \qquad (67)$$

Si otterrà tal soluzione cogl' integrali del 1.° sistema (59) seguendo i precetti del § 1, art. II. Gl' integrali del sistema stesso siano rappresentati, come al § 3, art. II, dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dx}{dx_1}\right) = \xi_1 , \quad \left(\frac{dx}{dx_2}\right) = \xi_2 , \;\ldots\ldots\ldots\; \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu \\ \left(\frac{dx}{d\beta_1}\right) = h_1 , \quad \left(\frac{dx}{d\beta_2}\right) = h_2 , \;\ldots\ldots\ldots\; \left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) = h_\nu \end{array}\right\} \quad (68)$$

ove le β_1 , β_2 , ... β_ν , h_1 , h_2 , ... h_ν saranno le costanti arbitrarie.

Fra le stesse costanti riguardate come variabili si stabilisca il 2.° sistema

$$\left.\begin{array}{ll} dh_1 - \left(\frac{d\Pi}{d\beta_1}\right) dx_{\nu+1} = 0 , & d\beta_1 + \left(\frac{d\Pi}{dh_1}\right) dx_{\nu+1} = 0 \\ dh_2 - \left(\frac{d\Pi}{d\beta_2}\right) dx_{\nu+1} = 0 , & d\beta_2 + \left(\frac{d\Pi}{dh_2}\right) dx_{\nu+1} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ dh_\nu - \left(\frac{d\Pi}{d\beta_\nu}\right) dx_{\nu+1} = 0 , & d\beta_\nu + \left(\frac{d\Pi}{dh_\nu}\right) dx_{\nu+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (69)$$

in cui la Π è ciò che diventa la E quando le x_1 , x_2 , ... x_ν , ξ_1 , ξ_2 , ... ξ_ν che essa contiene siano espresse col mezzo delle equazioni (68) in funzione di

$$x_{\nu+1} , \quad \beta_1 , \quad \beta_2 , \ldots\ldots \beta_\nu , \quad h_1 , \quad h_2 , \ldots\ldots h_\nu .$$

Gl' integrali del proposto sistema (57) saranno dati dalle equazioni (68), quando le costanti β_1 , β_2 , ... β_ν , h_1 , h_2 , ... h_ν in esse comprese siano espresse, cogl' integrali del sistema (69), in funzione di $x_{\nu+1}$ e di altre 2ν costanti arbitrarie.

Infatti supponiamo aver prima trovata la risoluzione di tal questione col metodo del § 13 in cui s'intendono introdotti i valori iniziali. In tal caso gl' integrali del sistema (59) espressi per valori iniziali saranno dati dalle (46). Ma se nel sistema (67) si pone $x_{\nu+1} = \overset{\circ}{x}_{\nu+1}$ si avranno per determinare le costanti β_1, β_2, ... β_ν, h_1, h_2, ... h_ν in funzione de' valori iniziali le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{dx^\circ}{dx_1^\circ}\right) = \xi_1^\circ , \quad \left(\dfrac{dx^\circ}{dx_2^\circ}\right) = \xi_2^\circ , \;\ldots\ldots\; \left(\dfrac{dx^\circ}{dx_\nu^\circ}\right) = \xi_\nu^\circ \\[2ex] \left(\dfrac{dx^\circ}{d\beta_1}\right) = h_1 , \quad \left(\dfrac{dx^\circ}{d\beta_2}\right) = h_2 , \;\ldots\ldots\; \left(\dfrac{dx^\circ}{d\beta_\nu}\right) = h_\nu \end{array}\right\} \quad (70)$$

ove la x° sarà ciò che diventa il valore di x dato dalla (66) quando, postovi $x_{\nu+1} = \overset{\circ}{x}_{\nu+1}$, si sostituiscano alle variabili i loro valori iniziali. Il sistema (68) espresso per valori iniziali col mezzo degl' introdotti valori delle β_1, β_2, ... β_ν, h_1, h_2, ... h_ν cavati dalle (70) dovrà coincidere col sistema (66). Ma dallo stesso § 13 risulta che il 2.° sistema sarà quello che compete all'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx^\circ}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{E}_1 \qquad (71)$$

Se quindi si chiama G ciò che diventa E_1 quando alle x_1°, x_2°, ... x_ν°, ξ_1°, ξ_2°, ... ξ_ν° si sostituiscano i loro valori in funzione delle β_1, β_2, ... β_ν, h_1, h_2, ... h_ν cavati dalle (70) e sia, come al solito, $\mathcal{G}$ ciò che diventa G quando alle h_1, h_2, ... h_ν che essa contiene si sostituiscano le differenziali parziali di x° date dai primi membri della 2.ª linea delle (70), l'equazione (71) verrà trasformata nella

$$\left(\frac{dx^\circ}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{G} \qquad (72)$$

Sarà questa un'equazione differenziale parziale fra le variabili indipendenti β_1, β_2, ... β_ν, $x_{\nu+1}$ e le differenziali parziali della variabile principale x^0. La soluzione completa della (72) dipenderà quindi dagl'integrali del sistema

$$\left.\begin{array}{ll} dh_1 - \left(\frac{dG}{d\beta_1}\right) dx_{\nu+1} = 0\,, & d\beta_1 + \left(\frac{dG}{dh_1}\right) dx_{\nu+1} = 0 \\ dh_2 - \left(\frac{dG}{d\beta_2}\right) dx_{\nu+1} = 0\,, & d\beta_2 + \left(\frac{dG}{dh_2}\right) dx_{\nu+1} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ dh_\nu - \left(\frac{dG}{dh_\nu}\right) dx_{\nu+1} = 0\,, & d\beta_\nu = \left(\frac{dG}{dh_\nu}\right) dx_{\nu+1} + 0 \end{array}\right\} \quad (73)$$

Ma in questo sistema la funzione G è identica colla Π del sistema (69), giacchè entrambe derivano dalla stessa funzione proposta E, la 1.ª colla sostituzione dei valori delle variabili originarie

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_\nu\,,\quad \xi_1\,,\quad \xi_2\,,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu \qquad (74)$$

espressi in funzione dei valori iniziali, e questi in funzione delle

$$\beta_1\,,\quad \beta_2\,,\ \ldots\ldots\ \beta_\nu\,,\quad h_1\,,\quad h_2\,,\ \ldots\ldots\ h_\nu \qquad (75)$$

e la 2.ª colla immediata sostituzione delle stesse variabili originarie (74) in funzione delle (75) quali risultano dalle equazioni (68). Posta quindi nel sistema (73) la Π in luogo di G si avrà il sistema (69) i cui integrali forniranno i valori delle costanti β_1, β_2, ... β_ν, h_1, h_2, ... h_ν divenute variabili in funzione di $x_{\nu+1}$ e di altre 2ν arbitrarie.

La proposizione qui enunciata riposa esclusivamente sulla forma rimarchevole con cui, per mezzo della soluzione completa dell'equazione differenziale parziale (67), sono espressi, mediante le (68), gl'integrali del 1.° sistema.

Se, a scanso di confusione, si sostituisce nella (72) la z alla x^0 e s'intende ottenuta la soluzione completa $z = \chi + \gamma_{\nu+1}$ espressa per le costanti γ_1, γ_2, ... γ_ν, gl'integrali del sistema (73), o del suo equivalente (69), saranno espressi sotto forma simile alle (68) dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{dz}{d\beta_1}\right) = h_1\ , \quad \left(\dfrac{dz}{d\beta_2}\right) = h_2\ , \ \ldots\ldots \left(\dfrac{dz}{d\beta_\nu}\right) = h_\nu \\ \left(\dfrac{dz}{d\gamma_1}\right) = k_1\ , \quad \left(\dfrac{dz}{d\gamma_2}\right) = k_2\ , \ \ldots\ldots \left(\dfrac{dz}{d\gamma_\nu}\right) = k_\nu \end{array}\right\} \qquad (76)$$

ove le k_1, k_2, ... k_ν saranno le altre ν costanti arbitrarie.

18. Sia ora proposta un'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F} + \mathcal{E} \qquad (77)$$

mancante della x ed accompagnata dalle equazioni di condizione

$$L_1 = 0\ , \quad L_2 = 0\ , \ \ldots\ldots\ L_\pi = 0 \qquad (78)$$

Se vuolsi la soluzione completa col metodo della variazione delle costanti, in luogo del sistema che deriva dalle generiche omologhe

$$\left.\begin{array}{r} d\xi_j - \left(\dfrac{d(F+E)}{dx_j} + \Sigma \lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_j}\right) dx_{\nu+1} = 0 \\ dx_j + \dfrac{d(F+E)}{d\xi_j}\, dx_{\nu+1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (79)$$

pei valori $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu$ da cui dipenderebbe col metodo ordinario la soluzione in discorso, si cercherà invece la soluzione completa $x = \phi + x^0$ della

$$\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F} \qquad (80)$$

accompagnata dalle equazioni di condizione (78), integrando, come nei §§ 3, 4, 5, 6, il sistema di cui le generiche omologhe sono le

$$\left.\begin{aligned} d\xi_j - \left(\frac{dF}{dx_j} + \Sigma\lambda_i\frac{dL_i}{dx_j}\right)dx_{\nu+1} &= 0 \\ dx_j + \frac{dF}{d\xi_j}dx_{\nu+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

pei valori $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu$, la sommatoria Σ essendo estesa da $i = 1$ ad $i = \pi$.

Si cercherà quindi, come al § 14 in cui non esistevano equazioni di condizione, la soluzione completa $x^0 = \varphi_0 + x^{00}$ dell'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx^0}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{E}_1 \qquad (82)$$

accompagnata dalle equazioni di condizione

$$L_1^0 = 0, \quad L_2^0 = 0, \ldots\ldots L_\pi^0 = 0 \qquad (83)$$

integrando il sistema di cui le generiche omologhe per gli accennati valori di j ed i, sono le

$$\left.\begin{aligned} d\xi_j^0 - \left(\frac{dE_1}{dx_j^0} + \Sigma\lambda_i^0\frac{dL_i^0}{dx_j^0}\right)dx_{\nu+1} &= 0 \\ dx_j^0 + \frac{dE_1}{dx_j^0}dx_{\nu+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

seguendo quì pure i processi dei §§ 3 .... 6. I valori iniziali divenuti variabili quali risultano dagl'integrali del precedente sistema saranno quelli da cui, seguendo il processo del § 14, si dedurrà la soluzione cercata.

19. Viceversa, essendo proposto il sistema (79) da integrarsi col metodo della variazione delle costanti, sussistendo le equazioni di condizione (78), si dovrà prima integrare il sistema (81) introducendovi i valori iniziali. Questi stessi valori considerati come variabili saranno poi espressi in funzione di $x_{\nu+1}$ e di altre 2ν arbitrarie col mezzo degl'integrali del sistema (83).

Inoltre se si conosce una soluzione completa $x = \phi + x^0$ dell'equazione (80) sussistendo le (78), gl'integrali del sistema (81) saranno espressi, dietro il processo del § 5, dalle equazioni (22), (23), (24), ove si cambi ν in $\nu + 1$. Conosciuta parimente una soluzione completa $x^0 = \phi_0 + x^{00}$ dell'equazione differenziale parziale (82) accompagnata dalle equazioni di condizione (83), gl'integrali del sistema (84) si dedurranno, come nel citato § 5, dalle stesse (22), (23), (24) in cui, cambiato ν in $\nu + 1$, si apponga l'indice zero a tutte le quantità che ne sono prive, e due zero a quelle che ne sono già affètte.

20. Essendo di nuovo proposto da integrarsi colla variazione delle costanti il sistema (57) di cui le generiche omologhe sono le (79) accompagnate dalle equazioni di condizione (78), combinando le proposizioni dei §§ 7, 17, il seguente metodo d'integrazione ne deriverà per sè manifesto.

Con un numero ν d'integrali del sistema, di cui le generiche sono le (81), ottenute le variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione di x_1, x_2, ... x_ν, $x_{\nu+1}$ e delle costanti β_1, β_2, ... β_ν si cercherà la soluzione completa

$$x = \psi + \beta_{\nu+1} \qquad (85)$$

dell'equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{F}$. I 2ν integrali del citato sistema saranno, come al § 7, espressi dalle

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{dx}{dx_1}\right)=\xi_1-\Sigma\lambda_i\frac{dL_i}{dx_1}\,, & \left(\frac{dx}{d\beta_1}\right)=k_1\\ \left(\frac{dx}{dx_2}\right)=\xi_2-\Sigma\lambda_i\frac{dL_i}{dx_2}\,, & \left(\frac{dx}{d\beta_2}\right)=k_2\\ \vdots & \\ \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)=\xi_\nu-\Sigma\lambda_i\frac{dL_i}{dx_\nu}\,, & \left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right)=k_\nu\end{array}\right\}\quad(86)$$

ove k_1 , k_2 , ... k_ν saranno nuove costanti.

Riguardando ora le β_1 , β_2 , ... β_ν , k_1 , k_2 , ... k_ν come variabili, saranno esse determinabili in funzione di $x_{\nu+1}$ e di nuove 2ν arbitrarie cogl'integrali del sistema

$$\left.\begin{array}{ll}dk_1-\left\{\frac{d\Pi}{d\beta_1}+\Sigma\mu_i\frac{dM_i}{d\beta_1}\right\}dx_{\nu+1}=0\,, & d\beta_1+\frac{d\Pi}{dk_1}dx_{\nu+1}=0\\ dk_2-\left\{\frac{d\Pi}{d\beta_2}+\Sigma\mu_i\frac{dM_i}{d\beta_2}\right\}dx_{\nu+1}=0\,, & d\beta_2+\frac{d\Pi}{dk_2}dx_{\nu+1}=0\\ \vdots & \\ dk_\nu-\left\{\frac{d\Pi}{d\beta_\nu}+\Sigma\mu_i\frac{dM_i}{d\beta_\nu}\right\}dx_{\nu+1}=0\,, & d\beta_\nu+\frac{d\Pi}{dk_\nu}dx_{\nu+1}=0\end{array}\right\}\quad(87)$$

ove le quantità Π , M_i sono ciò che diventano le E , L_i quando alle variabili in esse comprese siansi costituiti i loro valori espressi in funzione delle $x_{\nu+1}$, β_1 , β_2 , ... β_ν , k_1 , k_2 , ... k_ν cavati dalle equazioni (86), nelle quali un qualunque coefficiente indeterminato λ_i sarà determinato col processo del § 6. Eliminati dalle (87) i coefficienti indeterminati μ_i , coi $2\nu-\pi$ integrali congiunti alle equazioni

$$M_1=0\,,\quad M_2=0\,,\ \ldots\ldots\ M_\pi=0$$

si potranno determinare le costanti in funzione di $x_{\nu+1}$ e di altre 2ν arbitrarie da porsi nelle (86), le quali così completate forniranno gl'integrali del proposto sistema (57) di cui le generiche sono le (79).

Se inoltre con ν integrali del sistema (87) si trova al solito la soluzione completa $x = \psi + \gamma_{\nu+1}$ espressa per le costanti γ_1, γ_2, ... γ_ν dell'equazione differenziale parziale $\left(\frac{dx}{dx_{\nu+1}}\right) = \mathcal{G}$, ove la $\mathcal{G}$ è: 1.° ciò che diventa la E quando le x_1, x_2, ... x_ν, ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν siano espresse in funzione delle β_1, β_2, ... β_ν, k_1, k_2, ... k_ν; 2.° ciò il risultato diventa quando alle k_1, k_2, ... k_ν vengano sostituite le differenziali parziali date dalla 2.ª colonna delle (86), gl'integrali del sistema stesso (87) saranno espressi, analogamente alle (86), dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\beta_1}\right) &= k_1 - \Sigma\,\omega_i \frac{dN_i}{d\beta_1}\,, & \left(\frac{dx}{d\gamma_1}\right) &= l_1 \\
\left(\frac{dx}{d\beta_2}\right) &= k_2 - \Sigma\,\omega_i \frac{dN_i}{d\beta_2}\,, & \left(\frac{dx}{d\gamma_2}\right) &= l_2 \\
&\vdots \\
\left(\frac{dx}{d\beta_\nu}\right) &= k_\nu - \Sigma\,\omega_i \frac{dN_i}{d\beta_\nu}\,, & \left(\frac{dx}{d\gamma_\nu}\right) &= l_\nu
\end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

ove le l_1, l_2, ... l_ν saranno le altre ν costanti arbitrarie che colle γ_1, γ_2, ... γ_ν completano gl'integrali del sistema (87), le ω_i, N_i essendo le quantità analoghe alle μ_i, M_i.

Le formole date in questi ultimi paragrafi in cui si riguardi la E come una funzione perturbatrice trovano un'applicazione a diverse questioni della Meccanica Celeste, stante la dipendenza che le equazioni differenziali del moto hanno con un'equazione differenziale parziale, come verrà mostrato nel VII articolo, dopo la seguente digressione sulle equazioni differenziali parziali lineari.

VI.

Digressione sulle equazioni differenziali parziali lineari.

1. Quando l'equazione differenziale parziale $\mathcal{P} = 0$ data al § 2, art. I, si riduce alla forma lineare ed omogenea rispetto alle differenziali parziali espressa da

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \cdots\cdots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \qquad (1)$$

in cui ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν sono funzioni qualunque della variabile principale x e delle variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν, il sistema delle equazioni differenziali ordinarie dato dalle (16), (17), (18), art. I, da cui dipende la soluzione della proposta, avuto riguardo essere

$$P = \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 \cdots\cdots \phi_\nu \xi_\nu = 0 \qquad (2)$$

si ridurrà al sistema

$$\left.\begin{aligned} \phi_\nu d\xi_1 + \left(\frac{dP}{dx_1} + \xi_1 \frac{dP}{dx}\right) dx_\nu &= 0 \\ \phi_\nu d\xi_2 + \left(\frac{dP}{dx_2} + \xi_2 \frac{dP}{dx}\right) dx_\nu &= 0 \\ &\vdots \\ \phi_\nu d\xi_\nu + \left(\frac{dP}{dx_\nu} + \xi_\nu \frac{dP}{dx}\right) dx_\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_\nu dx_1 - \phi_1 dx_\nu &= 0 \\ \phi_\nu dx_2 - \phi_2 dx_\nu &= 0 \\ &\vdots \\ \phi_\nu dx_{\nu-1} - \phi_{\nu-1} dx_\nu &= 0 \\ dx &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Seguendo la regola generale, sarebbero da cercarsi gl' integrali del sistema (3), (4) e da essi coll' eliminazione delle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν e di altrettante costanti, ottenersi l' equazione da cui dipende la soluzione cercata x. Ma nel caso speciale della proposta equazione (1) il sistema delle equazioni (4) da integrarsi, essendo già per sè indipendente dalle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν che sarebbero da eliminarsi dalla totalità degl' integrali, sarà esso esclusivamente quello da cui dipenderà la soluzione cercata x, e nel caso attuale diverrà superfluo il sistema dato dalle equazioni (3). Dietro ciò si stabilirà la seguente proposizione.

2. Sia proposta l' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea rispetto alle differenziali parziali, espressa da

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \dots\dots\dots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \tag{5}$$

in cui ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν siano funzioni della variabile principale x e delle variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν. Se gl' integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\left.\begin{aligned} \phi_\nu\, dx_1 &= \phi_1\, dx_\nu \\ \phi_\nu\, dx_2 &= \phi_2\, dx_\nu \\ &\vdots \\ \phi_\nu\, dx_{\nu-1} &= \phi_{\nu-1}\, dx_\nu \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

nelle quali si riguardi la x come costante, si pongono sotto la forma

$$\beta_1 = \mathrm{f}_1\,, \quad \beta_2 = \mathrm{f}_2\,, \dots\dots\dots \beta_{\nu-1} = \mathrm{f}_{\nu-1} \tag{7}$$

i 2.i membri essendo indipendenti dalle costanti arbitrarie β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ introdotte dalle integrazioni, le soluzioni particolari che soddisfano la proposta (5), oltre il valore $x = \beta_\nu$, saranno date dalle equazioni implicite

$$x - f_1 = 0 \,, \quad x - f_2 = 0 \,, \,\ldots\ldots\, x - f_{\nu-1} = 0 \qquad (8)$$

e la soluzione generale dall' equazione implicita

$$x - \Pi\Big(f_1 \,,\; f_2 \,, \,\ldots\ldots\, f_{\nu-1}\Big) = 0 \qquad (9)$$

che, per essere Π una funzione arbitraria, potrà anche esprimersi colla

$$\Pi\Big(x \,,\; f_1 \,,\; f_2 \,, \,\ldots\ldots\, f_{\nu-1}\Big) = 0 \qquad (10)$$

Per dimostrare l'esposto convien prima riflettere che se si indica con $\beta_i = f_i$ uno qualsivoglia degl' integrali (7), essendo quest' equazione un' integrale del sistema (4), la sua differenziale totale

$$\frac{df_i}{dx}\,dx + \frac{df_i}{dx_1}\,dx_1 + \frac{df_i}{dx_2}\,dx_2 \,\ldots\ldots + \frac{df_i}{dx_\nu}\,dx_\nu = 0$$

dev' essere identicamente avverata, quando vi si pongano i valori di dx, dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ desunti dal sistema (4), ossia dev' essere identicamente avverata la

$$\phi_1\,\frac{df_i}{dx_1} + \phi_2\,\frac{df_i}{dx_2} \,\ldots\ldots + \phi_\nu\,\frac{df_i}{dx_\nu} = 0 \qquad (11)$$

Se si rappresenta compendiosamente la (11) colla $E_i = 0$, dovranno essere avverate le equazioni

$$E_1 = 0 \,, \quad E_2 = 0 \,, \,\ldots\ldots\, E_{\nu-1} = 0 \qquad (12)$$

Ciò posto, sia

$$x - f_i = 0 \qquad (13)$$

una qualunque delle equazioni (8). Riguardando in questa la x come funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν la differenziale parziale di x rispetto ad una qualunque variabile indipendente x_j sarà espressa da

$$\frac{dx}{dx_j} = H \frac{d\mathfrak{f}_i}{dx_j} \qquad (14)$$

essendo $H = 1 : \left(1 - \frac{d\mathfrak{f}_i}{dx}\right)$. Posti nella (5) i valori delle differenziali parziali di x desunti dalla (13) pei diversi valori di $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu$ ed avuto riguardo che la H è indipendente da j, essa si ridurrà alla (11). L'equazione (13) soddisfa adunque alla proposta (5) e ne è perciò una soluzione. Pei diversi valori di $i = 1, 2, \ldots\ldots \nu - 1$ si avranno dalla (13) le $\nu - 1$ soluzioni particolari (8).
Parimente la equazione (9) soddisfa alla (5). Infatti la differenziale parziale di x rispetto ad una variabile generica x_j desunta dalla stessa (9), sarà espressa da

$$\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = K \left\{ \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_1} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_1}{dx_j} + \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_2} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_2}{dx_j} \ldots\ldots + \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_{\nu-1}} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_{\nu-1}}{dx_j} \right\} \qquad (15)$$

essendo

$$K = 1 : \left\{ 1 - \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_1} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_1}{dx} - \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_2} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_2}{dx} - \ldots\ldots - \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_{\nu-1}} \cdot \frac{d\mathfrak{f}_{\nu-1}}{dx} \right\}$$

Se nella proposta (5) si pongono i valori delle differenziali parziali desunti dalla (15) pei diversi valori di $j = 1, 2, \ldots\ldots \nu$ e si rifletta che la K rimane invariata, la proposta stessa ordinata per le

$$\frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_1}, \quad \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_{\nu-1}}$$

e divisa per K si ridurrà a

$$\frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_1} E_1 + \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_2} E_2 + \ldots\ldots + \frac{d\Pi}{d\mathfrak{f}_{\nu-1}} E_{\nu-1} = 0$$

che è soddisfatta in forza delle equazioni (12) qualunque siasi la funzione Π. La equazione implicita (9) è dunque una soluzione della proposta, e siccome contiene la funzione Π affatto arbitraria, ne è dessa la soluzione generale.

Ciò che si è fatto rispetto alla (9) potrà ripetersi rispetto alla (10). L'equazione (9) può anche considerarsi come quella che risulta dalla (10) cavandovi la x esplicita nella Π, giacchè essendo la Π una funzione arbitraria, la soluzione può essere espressa tanto per l'equazione (10) quanto per la (9). Si osserverà inoltre che alle soluzioni date dalle (8) si potranno anche sostituire le soluzioni particolari

$$x - f_1 = \alpha_1 \ , \quad x - f_2 = \alpha_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ x - f_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1}$$

ed alla (9) sostituirsi la

$$x - \alpha_\nu = \Pi\left(f_1 - \alpha_1 \ , \ f_2 - \alpha_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ f_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\right)$$

essendo le α_1, α_2, ... α_ν costanti arbitrarie.

3. Le equazioni implicite

$$f_1 - \alpha_1 = 0 \ , \quad f_2 - \alpha_2 = 0 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ f_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1} = 0 \qquad (16)$$

saranno parimente soluzioni particolari della proposta (5) e l'equazione

$$\Pi\left(f_1 \ , \ f_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ f_{\nu-1}\right) = 0 \qquad (17)$$

ne sarà pure una soluzione dotata di una generalità più ristretta di quella dell'equazione (10), essendo la (17) un caso più limitato, quello cioè in cui manchi nella (10) una delle quantità che essa comprende.

Il processo che si è seguito per stabilire la (9), ovvero la (10), rimarrebbe lo stesso se in luogo delle f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ vi si sostituissero le $f_1 - \alpha_1$, $f_2 - \alpha_2$, ... $f_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}$, essendo α_1, α_2, ... $\alpha_{\nu-1}$ costanti, e ne deriverebbe quindi essere la

$$\Pi\left(f_1 - \alpha_1 \ , \ f_2 - \alpha_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ f_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\right) = 0$$

una soluzione della proposta (5). Si potrà quindi limitare la funzione arbitraria Π non solo ad essere funzione unicamente della $f_1 - \alpha_1$ o della $f_2 - \alpha_2$, e così di seguito, ma anche ad essere rappresentata dalle singole equazioni (16).

Se la funzione arbitraria Π si particolarizza in modo da contenere il voluto numero di costanti arbitrarie, si potranno dalla soluzione generale derivare tutte le soluzioni complete della proposta.

4. Se nella proposta equazione (5) la x non entra nelle ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν le sue soluzioni saranno pure espresse dalle (8), e la soluzione generale dalla (9), ma in tal caso le f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ saranno indipendenti dalla x.

È d'uopo riflettere che gl'integrali del sistema, da cui dipende la soluzione in discorso, essendo fra loro indipendenti, anche le soluzioni particolari f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ saranno funzioni fra loro indipendenti, nè esisterà alcuna equazione fra esse, laddove la soluzione generale sarà dipendente dalle precedenti, essendo una funzione di esse.
Siccome poi la $x = \Pi$ è una soluzione della (5), così si avrà, come nella (11),

$$\phi_1 \frac{d\Pi}{dx_1} + \phi_2 \frac{d\Pi}{dx_2} \ldots\ldots\ldots + \phi_\nu \frac{d\Pi}{dx_\nu} = 0 \qquad (18)$$

5. Le soluzioni date ai §§ 2, 3 possono egualmente ottenersi dalle soluzioni di una nuova equazione differenziale parziale lineare ed omogenea in cui si trasforma la proposta ed in cui manchi la variabile principale, come si è accennato al § 11, art. II.

Infatti indicando con z una funzione delle variabili x, x_1, x_2, ... x_ν da determinarsi e con α_i una costante, si rappresenti con $\alpha_i - z = 0$ una soluzione della (5). Riguardando in questa soluzione la x come funzione delle x_1, x_2, ... x_ν si avrà

$$\left(\frac{dx}{dx_i}\right) = -\left(\frac{dz}{dx_i}\right) : \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

onde la (5) verrà trasformata nella

$$\phi_1 \frac{dz}{dx_1} + \phi_2 \frac{dz}{dx_2} \cdots\cdots\cdots + \phi_\nu \frac{dz}{dx_\nu} = 0 \qquad (19)$$

nella quale non entra la funzione incognita z. Siccome vi manca inoltre la differenziale parziale di z rispetto ad x, così, dietro il § 1, art. III, sarà da considerarsi la x come una costante. Ma pel § 4 le soluzioni particolari di questa sono comprese nelle espressioni nate dalle $z = f_i$ pei valori di $i = 1, 2, \ldots (\nu - 1)$ e la generale nella $z = \Pi\left(f_1, f_2, \ldots f_{\nu-1}\right)$. Dunque le soluzioni particolari della (5) si avranno dalla stessa $x_i - z = 0$ postovi per z le ottenute funzioni, e si giungerà così alle soluzioni date al § 3.

Se si ammette che la soluzione della (5) sia, in luogo della (13), rappresentata dalla

$$x - z = 0 \qquad (20)$$

essendo z una funzione da determinarsi delle variabili $x, x_1, x_2, \ldots x_\nu$, siccome pei valori di $j = 1, 2, \ldots \nu$ sarà $\frac{dx}{dx_j} = H \frac{dz}{dx_j}$ essendo $H = 1 : \left(1 - \frac{dz}{dx}\right)$, così la (5) verrà ancora trasformata nella (19), di cui le soluzioni particolari essendo comprese nella $z = f_i$ e la generale nella $z = \Pi\left(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{\nu-1}\right)$, le soluzioni particolari della (5) quali risultano dalla (20) saranno comprese, come si è già trovato al § 2, nella generica $x - f_i = 0$ e la generale nella $x - \Pi\left(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{\nu-1}\right) = 0$.

6. Dalle cose precedenti risulta che essendo viceversa proposto un sistema di equazioni differenziali ordinarie fra le variabili $x_1, x_2, \ldots\ldots x_\nu$ della forma

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\nu dx_1 = \phi_1 dx_\nu \\ \phi_\nu dx_2 = \phi_2 dx_\nu \\ \vdots \\ \phi_\nu dx_{\nu-1} = \phi_{\nu-1} dx_\nu \end{array}\right\} \qquad (21)$$

gl' integrali generali saranno dati dalle equazioni

$$\beta_1 = f_1 \ , \quad \beta_2 = f_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ \beta_{\nu-1} = f_{\nu-1} \qquad (22)$$

essendo le f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ le soluzioni particolari fra loro indipendenti dell' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0$$

Inoltre l' equazione

$$\beta_\nu = \Pi\left(f_1 \ , \ f_2 \ , \ \ldots\ldots \ f_{\nu-1}\right) \qquad (23)$$

sarà pure un integrale del sistema stesso, essendo β_ν una costante, e da esso potranno ottenersi tutti i precedenti integrali (22), riducendo la funzione arbitraria Π successivamente alle f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ e la costante β_ν rispettivamente alle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$. La 1.ª parte di questa proposizione è una conseguenza spontanea del § 4. Rispetto poi alla 2.ª, se della (23) si piglia la differenziale totale e vi si pongano per dx_1, dx_2, ... $dx_{\nu-1}$ i valori desunti dal sistema (21), si avrà la (18), la quale essendo verificata, dovrà la (23) appartenere ad un integrale del sistema proposto.

7. Sia proposta, in luogo della (5), un' equazione differenziale parziale lineare, ma non omogenea rispetto alle differenziali parziali, della forma

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = \psi \qquad (24)$$

in cui ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν, ψ sono funzioni qualunque delle variabili x_1, x_2, ... x_ν senza la x. Il sistema dei $\nu-1$ valori particolari fra loro indipendenti che soddisfano la (24), sarà dato da

$$x=f_1+\alpha_1+\mathcal{J}\,,\quad x=f_2+\alpha_2+\mathcal{J}\,,\,\ldots\ldots\; x=f_{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}+\mathcal{J} \qquad (25)$$

oltre il valore $x=\alpha_\nu+\mathcal{J}$, essendo α_1, α_2, ... α_ν costanti arbitrarie, e le f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ le stesse funzioni date nella (23), ossia essendo esse le soluzioni della proposta stessa in cui si faccia $\psi=0$. La soluzione generale sarà espressa da

$$x=\Pi\Big(f_1\,,\,f_2\,,\,\ldots\ldots\,f_{\nu-1}\,,\,\mathcal{J}\Big) \qquad (26)$$

ove alle quantità comprese nella Π si potranno aggiungere rispettivamente le costanti α_1, α_2, ... α_ν. La $\mathcal{J}$ che entra nelle precedenti equazioni sarà data da

$$\mathcal{J}=\int\chi\Big(y\,,\,f_1\,,\,f_2\,,\,\ldots\ldots\,f_{\nu-1}\Big)dy \qquad (27)$$

l'integrale essendo definito fra i limiti $y=\tau$, $y=x_\nu$. La χ che entra in questo integrale è ciò che diventa la $\dfrac{\psi}{\phi_\nu}$ quando, determinati colle equazioni (7) i valori di x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ in funzione di x_ν e delle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$, siano posti nell' anzidetto rapporto e cambiata la x_ν in y, vi siano risostituite le f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ in luogo delle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$.

Infatti trasportando la ψ nel 1.° membro della (24) che diverrà al solito $\mathcal{P}=0$ si avrà a risolvere questa equazione differenziale parziale non omogenea e priva della variabile x. Richiamando la formola (2) del § 1, diverrà

$$P=\phi_1\xi_1+\phi_2\xi_2\,\ldots\ldots\,+\phi_\nu\xi_\nu-\psi=0.$$

Si avranno parimente le equazioni del sistema (4) tranne l'ultima

$dx = 0$, la quale verrà rimpiazzata dalla $\phi_\nu dx = \psi dx_\nu$ che fornisce $x = \int \frac{\psi}{\phi_\nu} dx_\nu + \beta_\nu$ quale risulta dalla (11), art. II, avuto riguardo all'equazione $P = 0$ data sopra, ovvero quale risulta dalla (14), art. II, eliminandovi la $\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) = \xi_\nu$ col mezzo della stessa $P = 0$ ed avuto riguardo alle (22). Se nella quantità compresa sotto l'integrale s'intendono posti i valori di x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ espressi per x_ν cavati dalle (22) e si chiami $\chi\left(x_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}\right)$ ciò che diventa con tale sostituzione la quantità stessa, la

$$x = \int \chi\left(x_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}\right) dx_\nu + \beta_\nu$$

soddisferà la proposta.

Se pertanto si chiami τ il valore di x_ν, funzione in generale delle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$, pel quale risulti zero il valore di x, verrà determinata la costante β_ν e si avrà

$$x = \int \chi\left(x_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}\right) dx_\nu,$$

definito l'integrale fra i limiti $x_\nu = \tau$, $x_\nu = x_\nu$. Posto quindi y in luogo di x_ν, si avrà

$$x = \int \chi\left(y, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{\nu-1}\right) dy,$$

definito l'integrale fra $y = \tau$, $y = x_\nu$. Oltre l'indicato valore soddisferà pure la proposta quella espressione che risulta, sostituendo per β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ i loro valori f_1, f_2, ... $\mathrm{f}_{\nu-1}$, ossia la

$$x = \int \chi\left(y, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots\ldots \mathrm{f}_{\nu-1}\right) dy = \mathcal{J}$$

giacchè la $x = \Pi\left(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots\ldots \mathrm{f}_{\nu-1}\right)$ di cui la precedente è un caso particolare, cioè quello in cui si riguardi la $y = x_\nu$ come una costante, soddisfa alla proposta in cui si supponga $\psi = 0$. Se si riguarda invece come variabile, essa soddisferà alla proposta stante che si ha $\phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = \phi_\nu \frac{dy}{dx_\nu} = \psi$.

Per la stessa ragione uno qualunque dei valori di x dati dalle (25) che sono funzioni delle f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ soddisferà alla proposta, ed in generale vi soddisferà la (26), la quale contenendo una funzione arbitraria Π ne sarà la soluzione generale.

Quando la $\frac{\psi}{\phi_\nu}$ si riduce ad una funzione della sola x_ν, si avrà $y = \int \frac{\psi}{\phi_\nu} dx_\nu$, definito l'integrale fra τ ed x_ν. Un tal valore sarà da porsi nelle formole (25), (26). Se poi la $\frac{\psi}{\phi_\nu}$ si riduce ad una costante C, il valore da sostituirsi sarà dato da $y = C(x_\nu - \tau)$.

8. Le soluzioni dell'equazione non omogenea (24) possono pure ottenersi cercando le soluzioni della trasformata

$$\psi \frac{dz}{dx} + \phi_1 \frac{dz}{dx_1} + \phi_2 \frac{dz}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_\nu \frac{dz}{dx_\nu} = 0 \qquad (28)$$

che nasce introducendo una nuova variabile principale z col mezzo dell'espressione generica $\left(\frac{dx}{dx_i}\right) = -\left(\frac{dz}{dx_i}\right) : \left(\frac{dz}{dx}\right)$ data al § 5. La trasformata non conterrà nè la z, nè la x. Il sistema delle equazioni differenziali ordinarie da cui dipendono le soluzioni della (28) sarà dato dalle equazioni (21) aggiuntavi la

$$\phi_\nu dx = \psi dx_\nu \qquad (29)$$

Siccome le equazioni (21) non involgono la x, così da'suoi integrali si otterranno i valori delle variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ in funzione di x_ν e costanti da porsi nella (29) che diverrà $x = \int \frac{\psi}{\phi_\nu} dx_\nu + \beta_\nu$. Si dedurranno da questa, come precedentemente, i valori particolari che soddisfano alla proposta, e da questi si passerà alla soluzione generale.

9. Se le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν, ψ della proposta equazione (24) contengono la variabile x, si cercherà parimente la trasformata (28). Il sistema di equazioni differenziali ordinarie, da cui dipenderà la soluzione della trasformata stessa, sarà dato dal sistema (21), che non sarà più indipendente dalla x ed al quale si aggiungerà la (29). Espressi con

$$\beta_1 = f_1 \,, \quad \beta_2 = f_2 \,, \; \ldots\ldots \; \beta_\nu = f_\nu \qquad (30)$$

i ν integrali del citato sistema, le f_1, f_2, ... f_ν saranno altrettanti valori fra loro indipendenti che soddisfano la (28), e le stesse (30) daranno per x i valori che soddisfano la (24).

Infatti se nell'espressione generica $\beta_i = f_i$ si riguarda la x come funzione delle altre variabili, si avrà $\left(\frac{dx}{dx_i}\right) = -\frac{df_i}{dx_i} : \frac{df_i}{dx}$. Poste nella (24) le differenziali parziali date da questa pei diversi valori di $i = 1, 2, \ldots\ldots$ si troverà essere verificata. Inoltre siccome più generalmente si soddisfa alla (28) col valore di $\beta_{\nu+1}$ dato da

$$\beta_{\nu+1} = \Pi\left(f_1 \,, \; f_2 \,, \; \ldots\ldots \; f_\nu\right) \qquad (31)$$

così questa equazione implicita in x sarà la soluzione generale della (24).

Le soluzioni adunque di un'equazione lineare non omogenea dipendono da un'altra equazione lineare ed omogenea. È da avvertirsi che nella (31) la costante $\beta_{\nu+1}$ può fondersi nella stessa funzione arbitraria Π ed aversi per la soluzione generale la $\Pi\left(f_1 \,, \; f_2 \,, \; \ldots\ldots \; f_\nu\right) = 0$ ed inoltre che alle f_1, f_2, ... f_ν si possono sostituire le $f_1 + \alpha_1$, $f_2 + \alpha_2$, ... $f_\nu + \alpha_\nu$, essendo α_1, α_2, ... α_ν altrettante costanti.

10. Se nell'equazione (5) manca, oltre la variabile x, una delle variabili indipendenti che supporremo, per fissare le idee, essere la x_ν, le soluzioni fra loro indipendenti della proposta (5) saranno date da

$$x = f_1 \,, \quad x = f_2 \,, \,\ldots\ldots\, x = f_{\nu-2} \,, \quad x = F - x_\nu \,,$$

essendo f_1, f_2, ... $f_{\nu-2}$ i valori particolari che verificano l'equazione che risulta dalla proposta, supponendo $\phi_\nu = 0$ ed essendo

$$F = \int \chi\left(y \,, f_1 \,, f_2 \,, \ldots\ldots f_{\nu-1}\right) dy \,,$$

ove ad integrazione eseguita facciasi $y = x_{\nu-1}$. Il coefficiente di dy è ciò che diventa il rapporto $\frac{\phi}{\phi_{\nu-1}}$ quando vi si pongano i valori di x_1, x_2, ... $x_{\nu-2}$ espressi per $x_{\nu-1}$ e per le β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-2}$ desunte dalle equazioni

$$f_1 = \beta_1 \,; \quad f_2 = \beta_2 \,, \,\ldots\ldots\, f_{\nu-2} = \beta_{\nu-2}$$

che si ponga y in luogo di $x_{\nu-1}$ e quindi si sostituiscano alle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-2}$ le funzioni f_1, f_2, ... $f_{\nu-2}$, come si è fatto al § 7. La soluzione generale sarà data quindi dalla

$$x = \Pi\left(f_1 \,, f_2 \,, \ldots\ldots\, f_{\nu-2} \,, F - x_\nu\right)$$

Infatti si stabilisca il sistema (21) che potrà mettersi sotto la forma

$$\begin{aligned}
\phi_{\nu-1}\, dx_1 &= \phi_1\, dx_{\nu-1} \\
\phi_{\nu-1}\, dx_2 &= \phi_2\, dx_{\nu-1} \\
&\vdots \\
\phi_{\nu-1}\, dx_{\nu-2} &= \phi_{\nu-2}\, dx_{\nu-1} \\
\phi_\nu\, dx_{\nu-1} &= \phi_{\nu-1}\, dx_\nu \,.
\end{aligned}$$

Le prime $\nu - 2$ equazioni, non contenendo x_ν, potranno separatamente integrarsi. Siano i suoi integrali espressi da

$$f_1 = \beta_1 \,, \quad f_2 = \beta_2 \,, \,\ldots\ldots\, f_{\nu-2} = \beta_{\nu-2} \,.$$

Determinate con queste equazioni le x_1, x_2, ... $x_{\nu-2}$

in funzione di x_{y-1} e poste nell' ultima del citato sistema, sarà essa integrabile per semplice quadratura rispetto alla x_{y-1} e si avrà

$$\int \frac{\phi_y}{\phi_{y-1}} dx_{y-1} - x_y = \beta_{y-1}.$$

Se si chiama $\chi\left(x_{y-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{y-2}\right)$ ciò che diventa il rapporto $\frac{\phi_y}{\phi_{y-1}}$ dopo l' anzidetta sostituzione e postovi $x_{y-1} = y$ si ripongano per β_1, β_2, ... β_{y-2} i loro valori f_1, f_2, ... f_{y-2}, l' integrale anzidetto diverrà

$$\int \chi\left(y, f_1, f_2, \ldots\ldots f_{y-2}\right) dy$$

che posto $= F$, l' equazione surriferita diverrà

$$F - x_y = \beta_{y-1}.$$

Ma i valori delle costanti β_1, β_2, ... β_{y-1} sono i valori di x che soddisfano la proposta e quindi anche una funzione qualunque

$$x = \Pi\left(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{y-2}, F - x_y\right)$$

soddisferà la stessa e ne sarà la soluzione generale.

A seconda delle diverse forme che si attribuiranno alla funzione arbitraria Π si potranno dedurre quante soluzioni particolari si vogliano, quali sarebbero per esempio le

$$k e^{f_1} e^{F-x_y}, \quad k e^{f_2} e^{F-x_y}, \ldots\ldots\ldots\ldots k e^{f_{y-2}} e^{F-x_y}, \quad k e^{F-x_y},$$

ovvero quest' altre in cui si riguardino k, h, h_1 come costanti

$$k e^{h f_1 + h_1(F-x_y)}, \quad k e^{h f_2 + h_1(F-x_y)}, \ldots\ldots k e^{h f_{y-2} + h_1(F-x_y)}, \quad k e^{h_1(F-x_y)}.$$

Lo stesso dicasi di altre simili che potrebbero ottenersi.

11. Se nell' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea (5) le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν sono funzioni di una sola delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, ossia di una variabile generica x_j, il sistema (6) che potrà ridursi a

$$\left.\begin{aligned}
\phi_j\, dx_1 &= \phi_1\, dx_j \\
\phi_j\, dx_2 &= \phi_2\, dx_j \\
&\vdots \\
\phi_j\, dx_{\nu-1} &= \phi_{\nu-1}\, dx_j \\
\phi_j\, dx_\nu &= \phi_\nu\, dx_j
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

fornirà pel suo sistema integrale le $\nu - 1$ equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= x_1 - \int \frac{\phi_1}{\phi_j} dx_j = \mathrm{f}_1 \\
\beta_2 &= x_2 - \int \frac{\phi_2}{\phi_j} dx_j = \mathrm{f}_2 \\
&\vdots \\
\beta_{j-1} &= x_{j-1} - \int \frac{\phi_{j-1}}{\phi_j} dx_j = \mathrm{f}_{j-1} \\
\beta_{j+1} &= x_{j+1} - \int \frac{\phi_{j+1}}{\phi_j} dx_j = \mathrm{f}_{j+1} \\
&\vdots \\
\beta_\nu &= x_\nu - \int \frac{\phi_\nu}{\phi_j} dx_j = \mathrm{f}_\nu
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ed i valori di queste β_1, β_2, ... aggiuntevi, se si vuole, le costanti α_1, α_2, ... daranno le soluzioni particolari che soddisfano nell' attuale ipotesi la (5), la cui soluzione generale sarà data al solito dalla

$$x = \Pi\left(\mathrm{f}_1\ ,\ \mathrm{f}_2\ ,\ \ldots\ldots\ \mathrm{f}_{j-1}\ ,\ \mathrm{f}_{j+1}\ ,\ \ldots\ldots\ \mathrm{f}_\nu\right) \qquad (34)$$

ove le f_1 , f_2 , ... hanno i precedenti valori (33).

12. Se nell'equazione proposta (5) il coefficiente ϕ_j di una differenziale parziale generica $\frac{dx}{dx_j}$ è eguale ad una costante a_j e ciascuno degli altri coefficienti è funzione della sola variabile per la quale è presa la differenziale parziale che lo moltiplica, le soluzioni particolari della (5) ridotta in tal caso alla

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \ \ldots\ldots + a_j \frac{dx}{dx_j} \ \ldots\ldots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \qquad (35)$$

saranno date dalle $\nu - 1$ espressioni

$$x = \mathrm{f}_1 + \alpha_1\ ,\quad x = \mathrm{f}_2 + \alpha_2\ ,\ \ldots\ x = \mathrm{f}_{j-1} + \alpha_{j-1}\ ,\quad x = \mathrm{f}_{j+1} + \alpha_{j+1}\ ,\ \ldots\ x = \mathrm{f}_\nu + \alpha_\nu \qquad (36)$$

in cui una qualunque f_i sarà espressa da

$$\mathrm{f}_i = x_j - a_j \int \frac{dx_i}{\phi_i}$$

che vale per tutti i valori di $i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ j-1\ ,\ j+1\ ,\ \ldots\ \nu$ e la soluzione generale sarà data da

$$x = \Pi\left(\mathrm{f}_1\ ,\ \mathrm{f}_2\ ,\ \ldots\ldots\ \mathrm{f}_\nu\right) \qquad (37)$$

Infatti il sistema di equazioni differenziali ordinarie potrà ridursi alla forma (32) in cui sarà $\phi_j = a_j$. Quindi l'integrale di un'equazione generica $\phi_j\, dx_i = \phi_i\, dx_j$ di esso sistema sarà dato da $x_j - a_j \int \frac{dx_i}{\phi_i} = \beta_i$. Quindi il valore della costante generica β_i sarà il valore di f_i.

Se nella (35) si suppone $\phi_1 = a_1$, $\phi_2 = a_2$, ... $\phi_\nu = a_\nu$, le (36) si ridurranno alle

$$x = x_j - \frac{a_j}{a_1} x_1 + \alpha_1\ ,\quad x = x_j - \frac{a_j}{a_2} x_2 + \alpha_2\ ,\ \ldots\ldots\ x = x_j - \frac{a_j}{a_\nu} x_\nu + \alpha_\nu \qquad (38)$$

e la (37) si ridurrà alla

$$x = \Pi\left(x_j - \frac{a_j}{a_1}x_1\ ,\quad x_j - \frac{a_j}{a_2}x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_j - \frac{a_j}{a_\nu}x_\nu\right) \qquad (39)$$

13. Per dare qualche esempio, se nell' equazione differenziale parziale

$$\phi_1\frac{dx}{dx_1} + \phi_2\frac{dx}{dx_2}\ \ldots\ldots + \phi_{\nu-1}\frac{dx}{dx_{\nu-1}} + \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \qquad (40)$$

si suppone

$$\phi_1 = T_1X + t_1\ ,\quad \phi_2 = T_2X + t_2\ ,\ \ldots\ldots\ \phi_{\nu-1} = T_{\nu-1}X + t_{\nu-1}$$

essendo T_1 , T_2 , ... $T_{\nu-1}$, t_1 , t_2 , ... $t_{\nu-1}$

funzioni qualunque della variabile x_ν e la X determinata dalla

$$X = a_1x_1 + a_2x_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{\nu-1}x_{\nu-1}$$

essendo a_1 , a_2 , ... $a_{\nu-1}$ costanti, la soluzione della proposta (40) assoggettata alla condizione di ridursi a $CX + C_1$ pel valore particolare $x_\nu = \tau$ sarà data da

$$x = C\left\{Xe^{-\int F dx_\nu} - \int f e^{-\int F dx_\nu}\right\} + C_1 \qquad (41)$$

gl' integrali essendo definiti fra τ ed x_ν ed avendo posto per compendio

$$F = a_1T_1 + a_2T_2\ \ldots\ldots\ldots + a_{\nu-1}T_{\nu-1}$$

$$f = a_1t_1 + a_2t_2\ \ldots\ldots\ldots + a_{\nu-1}t_{\nu-1}$$

Infatti se si stabilisce la relazione

$$x = X\phi + \psi \qquad (42)$$

essendo ϕ, ψ due funzioni di x_ν da determinarsi, si avrà

$$\frac{dx}{dx_1} = a_1\phi\ ,\quad \frac{dx}{dx_2} = a_2\phi\ ,\ \ldots\ldots \frac{dx}{dx_{\nu-1}} = a_{\nu-1}\phi\ ,\quad \frac{dx}{dx_\nu} = X\frac{dx}{dx_\nu} + \frac{d\psi}{dx_\nu}.$$

Col mezzo di questi valori la proposta (40) diventa

$$X\left\{F\phi + \frac{d\phi}{dx_\nu}\right\} + \phi f + \frac{d\psi}{dx_\nu} = 0.$$

Si determini ora la funzione ϕ in modo che per $x_\nu = \tau$ risulti $\phi = C$. Posta l'equazione $F\phi + \frac{d\phi}{dx_\nu} = 0$ sarà $\phi = Ce^{-\int F dx_\nu}$, l'integrale essendo definito fra i limiti τ, x_ν. Ritenuto che sia C_1 il valore di ψ competente ad $x_\nu = \tau$, si avrà

$$\psi = -C\int fe^{-\int F dx_\nu} + C_1$$

con questi valori di ϕ e ψ la (42) fornirà la (41).

14. Se nella (40) si suppone invece

$$\phi_1 = X_1 + t_1\ ,\quad \phi_2 = X_2 + t_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \phi_{\nu-1} = X_{\nu-1} + t_{\nu-1}$$

essendo t_1, t_2, ... $t_{\nu-1}$ funzioni qualunque di x_ν, e la generica X_i determinata dalla

$$X_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 \ \ldots\ldots\ldots + \omega_i x_{\nu-1}$$

per tutti i valori di $i = 1, 2, \ldots\ldots (\nu-1)$, la soluzione della proposta equazione assoggettata a divenire $= X$, ossia eguale a

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ \ldots\ldots\ldots + \alpha_{\nu-1} x_{\nu-1}$$

pel valore $x_\nu = \tau$ sarà data da

$$x = Xe^{k(\tau - x_\nu)} - \int \Pi e^{k(\tau - x_\nu)}$$

i limiti dell'integrale essendo τ, x_ν, la k una costante e la Π determinata dalla

$$\Pi = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \;\cdots\cdots\cdots\cdots + \alpha_{\nu-1} t_{\nu-1}$$

Infatti supposto y una funzione di x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e z una funzione di x_ν, si stabilisca la relazione

$$x = y e^{k(\tau - x_\nu)} - \int z e^{k(\tau - x_\nu)}.$$

Si avrà

$$\frac{dx}{dx_1} = e^{k(\tau - x_\nu)} \frac{dy}{dx_1}, \quad \frac{dx}{dx_2} = e^{k(\tau - x_\nu)} \frac{dy}{dx_2}, \;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \frac{dx}{dx_{\nu-1}} = e^{k(\tau - x_\nu)} \frac{dy}{dx_{\nu-1}}, \quad \frac{dx}{dx_\nu} = - e^{k(\tau - x_\nu)} (ky + z)$$

Colla sostituzione di questi valori la proposta diventa

$$X_1 \frac{dy}{dx_1} + X_2 \frac{dy}{dx_2}, \;\cdots\cdots + X_{\nu-1} \frac{dy}{dx_{\nu-1}} - ky$$

$$= z - \left\{ t_1 \frac{dy}{dx_1} + t_2 \frac{dy}{dx_2} \;\cdots\cdots + t_{\nu-1} \frac{dy}{dx_{\nu-1}} \right\}$$

Dovendo z essere una funzione della sola x_ν, dovrà essere y una funzione lineare, acciò si possa determinare la z in modo che il 2.° membro si annulli. Fatto dunque $y = X$ risulterà

$$z = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \cdots\cdots + \alpha_{\nu-1} t_{\nu-1}$$

che porremo $= \Pi$. Si dovranno poi determinare le α_1, α_2, ... $\alpha_{\nu-1}$ in modo da annullare il 1.° membro. Ordinato lo stesso 1.° membro per le x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e posti a zero i loro coefficienti, si avrà

$$\begin{array}{l}
(a_1 - k)\alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 \cdots\cdots + a_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} = 0 \\
b_1 \alpha_1 + (b_2 - k)\alpha_2 + b_3 \alpha_3 \cdots\cdots + b_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} = 0 \\
\vdots \\
\omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2 + \omega_3 \alpha_3 \cdots\cdots + (\omega_{\nu-1} - k)\alpha_{\nu-1} = 0
\end{array}$$

Con queste equazioni eliminate le α_1, α_2, ... $\alpha_{\nu-1}$ si avrà una risultante in k di grado $= \nu - 1$ che fornirà $\nu - 1$ valori di k. Dietro ciò si otterranno i valori α_1, α_2, ... $\alpha_{\nu-1}$ da porsi nella X. Se quindi si vuole che la x si riduca alla X pel valor particolare $x_\nu = \tau$ si dovrà definire l'integrale che entra nel valore di x fra i limiti τ ed x_ν.

15. Se l'equazione proposta (5) mancante della x può ordinarsi in due polinomj

$$P + Q = 0 \qquad (43)$$

e ciascuno dei coefficienti delle differenziali parziali che entrano nel 1.° polinomio P sia funzione delle variabili rispetto a cui sono prese le differenziali parziali che entrano in esso, ritenuto per maggior semplicità che nella P sia compreso anche il termine $\phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu}$, le soluzioni particolari della (43) saranno date

1.° Dalle soluzioni particolari che soddisfano l'equazione differenziale parziale lineare ed omogenea, che supporremo di un numero $= j$ di termini, data da

$$P = 0$$

2.° Le $j - 1$ soluzioni della $P = 0$ poste eguali alle costanti β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ e determinato con queste equazioni un numero $j - 1$ di variabili in funzione della restante variabile che supporremo essere la x_ν si porranno nella ϕ_ν e nei coefficienti del polinomio Q che diverranno ϕ'_ν, Q'. Le restanti soluzioni particolari della (43) saranno date dalle soluzioni particolari della nuova equazione differenziale parziale lineare ed omogenea

$$Q' + \phi'_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0$$

purchè rimettansi in tali soluzioni in luogo delle β_1, β_2, ... $\beta_{\nu-1}$ le loro espressioni in funzione delle variabili.
Infatti il polinomio P consti, per fissare le idee, della somma dei primi termini consecutivi e dell'ultimo; abbiasi cioè

$$P = \phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \cdots\cdots + \phi_{j-1} \frac{dx}{dx_{j-1}} + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu}$$

ove ciascuno dei coefficienti ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_{j-1}, ϕ_ν sarà per ipotesi funzione delle sole variabili x_1, x_2, ... x_{j-1}, x_ν.
Il 2.° polinomio Q sarà dato da

$$Q = \phi_j \frac{dx}{dx_j} + \phi_{j+1} \frac{dx}{dx_{j+1}} \cdots\cdots + \phi_{\nu-1} \frac{dx}{dx_{\nu-1}}$$

ove i coefficienti delle differenziali parziali saranno in generale funzioni di tutte le variabili x_1, x_2, ... x_j, ... x_ν.
Il sistema di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione della proposta (43) è dato da

$$\left.\begin{array}{l} \phi_\nu dx_1 = \phi_1 dx_\nu, \quad \phi_\nu dx_2 = \phi_2 dx_\nu, \;\ldots\ldots\; \phi_\nu dx_{j-1} = \phi_{j-1} dx_\nu \\ \phi_\nu dx_j = \phi_j dx_\nu, \quad \phi_\nu dx_{j+1} = \phi_{j+1} dx_\nu, \;\ldots\ldots\; \phi_\nu dx_{\nu-1} = \phi_{\nu-1} dx_\nu \end{array}\right\} (44)$$

La 1.ª linea delle (44) costituisce un sistema di equazioni che potranno integrarsi indipendentemente dalle equazioni della 2.ª linea. Ma questi integrali si avranno col porre eguali alle costanti β_1, β_2, ... β_{j-1} quei valori di x fra loro indipendenti che soddisfano l'equazione differenziale parziale $P = 0$.
Se cogl'integrali ottenuti si determinano le x_1, x_2, ... x_{j-1} in funzione di x_ν, β_1, β_2, ... β_{j-1} e si pongono nei coefficienti differenziali delle equazioni della 2.ª linea delle (44), che indicheremo dopo tal sostituzione con un apice, si avrà un sistema di $\nu - j$ equazioni differenziali fra le $\nu - j + 1$ variabili x_j, x_{j+1}, ... $x_{\nu-1}$, x_ν, i cui

integrali introdurranno $\nu - j$ costanti β_j, β_{j+1} ...... $\beta_{\nu-1}$. Ma i valori di queste costanti espresse per le variabili saranno le soluzioni fra loro indipendenti dell'equazione differenziale parziale

$$\phi'_j \frac{dx}{dx_j} + \phi'_{j+1} \frac{dx}{dx_{j+1}} \text{ .... } + \phi'_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0$$

ossia della $$Q' + \phi'_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 .$$

Se pertanto nelle soluzioni stesse si rimettono per le β_1, β_2, ... β_{j-1} le loro espressioni per le variabili, i valori complessivi delle

$$\beta_1 , \beta_2 , \text{ ...... } \beta_j , \text{ ...... } \beta_{\nu-1}$$

espressi per sole variabili, essendo gl'integrali del sistema (44), saranno le soluzioni particolari della proposta (43). Un processo affatto simile avrebbe luogo quando non entrasse nel polinomio P il termine $\phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu}$. Si dovrebbe in tal caso scegliere per variabile indipendente una delle altre variabili comprese nel polinomio P, per esempio, una x_i e sostituire al sistema (44) un altro simile in cui la dx_i vi figurasse come la dx_ν figura nel sistema (44).
Lo stesso avrebbe luogo se i termini del polinomio P non presentassero indici successivi ma saltuarj.

Le medesime conseguenze potranno pure applicarsi quando la proposta equazione fornisse, in luogo di uno, più sistemi fra loro indipendenti di equazioni differenziali ordinarie.

16. Essendo proposto il sistema di equazioni differenziali ordinarie (21) e conoscendosi un integrale $f_1 = \beta_1$, il valore $x = f_1$ soddisferà, come si è veduto, all'equazione differenziale parziale

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \text{ .... } + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \qquad (45)$$

Se coll'integrale ottenuto e coll'ultima equazione del citato sistema si eliminano le x_ν, dx_ν, si avrà fra le sole variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ un altro sistema dato da

$$\left.\begin{aligned} \phi_{\nu-1}\, dx_1 &= \phi_1\, dx_{\nu-1} \\ \phi_{\nu-1}\, dx_2 &= \phi_2\, dx_{\nu-1} \\ &\vdots \\ \phi_{\nu-1}\, dx_{\nu-2} &= \phi_{\nu-2}\, dx_{\nu-1} \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Se $f_2 = \beta_2$ è un integrale di questo sistema, il valore $x = f_2$ sarà una soluzione dell'equazione differenziale parziale

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \cdots\cdots + \phi_{\nu-1} \frac{dx}{dx_{\nu-1}} = 0 \qquad (47)$$

Se coll'integrale ottenuto e coll'ultima equazione del precedente sistema si eliminano le $x_{\nu-1}$, $dx_{\nu-1}$, si avrà un altro sistema indipendente dalle variabili x_ν, $x_{\nu-1}$. Così progredendo, ottenuti $\nu - 2$ integrali, resterà per ultimo ad integrarsi un'equazione fra due sole variabili x_1, x_2 data da

$$\phi_2\, dx_1 = \phi_1\, dx_2 \qquad (48)$$

Vuolsi ora dimostrare che se si conosce una funzione delle variabili, che indicheremo con h_1, in forza della quale sia soddisfatta identicamente l'equazione

$$\frac{d(h_1\phi_1)}{dx_1} + \frac{d(h_1\phi_2)}{dx_2} \cdots\cdots + \frac{d(h_1\phi_\nu)}{dx_\nu} = 0 \qquad (49)$$

il moltiplicatore $h_{\nu-1}$ che rende la (48) una differenziale esatta sarà dato da

$$h_{\nu-1} = h_1 : \left(\frac{df_1}{dx_\nu}\right)\left(\frac{df_2}{dx_{\nu-1}}\right)\left(\frac{df_3}{dx_{\nu-2}}\right) \cdots\cdots \left(\frac{df_{\nu-2}}{dx_3}\right) \qquad (50)$$

ove il 2.° membro sia espresso per le sole variabili x_1, x_2 col mezzo dei $\nu-2$ integrali ottenuti. L'equazione (48) sarà quindi integrabile per quadrature.

Infatti eseguite le differenziazioni indicate nella (49) ed avuto riguardo al proposto sistema (21), si deduce

$$h_1 = e^{-\int \theta_1 dx_\nu} \tag{51}$$

essendo $$\theta_1 = \frac{1}{\phi_\nu}\left\{\frac{d\phi_1}{dx_1} + \frac{d\phi_2}{dx_2} \ldots\ldots + \frac{d\phi_\nu}{dx_\nu}\right\}$$

Se supponiamo che la x_ν compresa nelle ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν sia espressa, col mezzo dell'integrale $f_1 = \beta_1$, in funzione delle altre variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ e s'indichino con ϕ'_1, ϕ'_2, ... ϕ'_ν ciò che diventano le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν colla sostituzione del valore di x_ν, si avrà per tutti i valori di $j = 1$, 2, ... $(\nu-1)$

$$\frac{d\phi_j}{dx_j} = \frac{d\phi'_j}{dx_j} - \frac{d\phi_j}{dx_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{dx_j}$$

e quindi posto

$$\theta_2 = \frac{1}{\phi'_{\nu-1}}\left\{\frac{d\phi'_1}{dx_1} + \frac{d\phi'_2}{dx_2} \ldots\ldots + \frac{d\phi'_{\nu-1}}{dx_{\nu-1}}\right\}$$

ed osservando essere $\dfrac{\phi_{\nu-1}}{\phi_\nu} = \dfrac{dx_{\nu-1}}{dx_\nu}$, si avrà

$$\theta_1 dx_\nu = \theta_2 dx_{\nu-1} + \frac{dx_\nu}{\phi_\nu} H,$$

essendo

$$H = \frac{d\phi_\nu}{dx_\nu} - \frac{d\phi_1}{dx_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{dx_1} - \frac{d\phi_2}{dx_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{dx_2} \ldots\ldots - \frac{d\phi_{\nu-1}}{dx_\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{dx_{\nu-1}}.$$

Ma dalla $f_1 = \beta_1$ si deduce $\dfrac{dx_\nu}{dx_j} = -\dfrac{df_1}{dx_j} : \dfrac{df_1}{dx_\nu}$, onde posto $\dfrac{df_1}{dx_\nu} = p_1$, si avrà

$$\theta_1 dx_\nu = \theta_2 dx_{\nu-1} + \frac{dx_\nu}{p_1\phi_\nu} K ,$$

essendo

$$K = \frac{d\phi_1}{dx_\nu} \cdot \frac{df_1}{dx_1} + \frac{d\phi_2}{dx_\nu} \cdot \frac{df_1}{dx_2} \ldots\ldots + \frac{d\phi_\nu}{dx_\nu} \cdot \frac{df_1}{dx_\nu} .$$

Ma l'equazione (45), in cui pongasi $x = f_1$, essendo identicamente avverata, differenziata per x_ν, darà

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1 \dfrac{dp_1}{dx_1} + \phi_2 \dfrac{dp_1}{dx_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \phi_\nu \dfrac{dp_1}{dx_\nu} \\ + \dfrac{d\phi_1}{dx_\nu} \cdot \dfrac{df_1}{dx_1} + \dfrac{d\phi_2}{dx_\nu} \cdot \dfrac{df_1}{dx_2} \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{d\phi_\nu}{dx_\nu} \cdot \dfrac{df_1}{dx_\nu} \end{array}\right\} = 0$$

Sarà quindi

$$\theta_1 dx_\nu = \theta_2 dx_{\nu-1} - \frac{dx_\nu}{p_1\phi_\nu} \left\{ \phi_1 \frac{dp_1}{dx_1} + \phi_2 \frac{dp_1}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_\nu \frac{dp_1}{dx_\nu} \right\} .$$

Ma l'equazione generica del proposto sistema (21) fornisce $\phi_j = \dfrac{\phi_\nu}{dx_\nu} dx_j$, onde la precedente diverrà

$$\theta_1 dx_\nu = \theta_2 dx_{\nu-1} - \frac{1}{p_1} \left\{ \frac{dp_1}{dx_1} dx_1 + \frac{dp_1}{dx_2} dx_2 \ldots\ldots + \frac{dp_1}{dx_\nu} dx_\nu \right\} ;$$

ossia $\theta_1 dx_\nu = \theta_2 dx_{\nu-1} - d(lp_1)$, indicando con l il solito logaritmo. Perciò l'equazione (51) si ridurrà alla

$$h_1 = e^{-\int \theta_1 dx_\nu} = e^{-\int \{\theta_2 dx_{\nu-1} - d.lp_1\}} = p_1 e^{-\int \theta_2 dx_{\nu-1}}$$

Posto quindi $h_1 : p_1 = h_2$ sarà

$$h_2 = e^{-\int \theta_2 dx_{\nu-1}} ,$$

Se di questa si pigliano i logaritmi ed i differenziali ed abbiasi riguardo al sistema (46), si trasformerà essa, come si è fatto nel passaggio dalla (49) alla (51), nella analoga

$$\frac{d(h_2\phi'_1)}{dx_1}+\frac{d(h_2\phi'_2)}{dx_2}\,\ldots\ldots+\frac{d(h_2\phi'_{\nu-1})}{dx_{\nu-1}}=0$$

Nello stesso modo pertanto avendosi l' equazione (47), ed essendo $f_2=\beta_2$ un integrale del sistema (46), sarà verificata l' equazione

$$\frac{d(h_3\phi_1)}{dx_1}+\frac{d(h_3\phi_2)}{dx_2}\,\ldots\ldots+\frac{d(h_3\phi_{\nu-2})}{dx_{\nu-2}}=0$$

ove le x_ν, $x_{\nu-1}$ saranno espresse in funzione delle altre variabili ed ove sarà $h_3=\frac{h_2}{p_2}=\frac{h_1}{p_1p_2}$. Così progredendo, se supponiamo aver ottenuti gl' integrali

$$f_1=\beta_1\;,\quad f_2=\beta_2\;,\quad f_3=\beta_3\;,\;\ldots\ldots\; f_{\nu-2}=\beta_{\nu-2}\;,$$

si avrà

$$h_{\nu-1}=\frac{h_1}{p_1p_2\,\ldots\ldots\,p_{\nu-2}}\qquad(52)$$

e l' equazione che dovrà essere identicamente avverata sarà la

$$\frac{d(h_{\nu-1}\phi_1)}{dx_1}+\frac{d(h_{\nu-1}\phi_2)}{dx_2}=0\qquad(53)$$

Il sistema proposto (21) colle successive eliminazioni delle variabili sarà ridotto all'unica equazione

$$\phi_2\,dx_1-\phi_1\,dx_2=0\qquad(54)$$

fra le sole variabili x_1, x_2. Ne deriva pertanto che la funzione indicata con $h_{\nu-1}$, che ha la proprietà di rendere avverata la (53), sarà il moltiplicatore che rende la (54) una differenziale esatta, e perciò questa equazione sarà integrabile per semplici quadrature.

Questo teorema fu dal signor Iacobi chiamato il *Principio dell'ultimo moltiplicatore*.

Quando le funzioni ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν siano tali da verificare l'equazione

$$\frac{d\phi_1}{dx_1}+\frac{d\phi_2}{dx_2}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d\phi_\nu}{dx_\nu}=0$$

risulterà $h_1 = 1$. Tranne di questo caso la ricerca della funzione incognita h_1 sarà più difficile volendola desumere dalla soluzione completa dell'equazione differenziale parziale rispetto ad h_1 che risulta dallo sviluppo della (49), di quello che desumendola dalla soluzione dell'equazione differenziale parziale che risulta dallo sviluppo della stessa (53), dopo avervi sostituito il valore di $h_{\nu-1}$ dato dalla (52) in funzione di h_1.

17. Se i coefficienti di un'equazione differenziale parziale lineare ed omogenea privi della variabile principale sono funzioni omogenee dello stesso grado rispetto alle variabili in essi comprese, i valori fra loro indipendenti, che soddisfano tale equazione e che risultano dall'integrazione del relativo sistema di equazioni differenziali ordinarie, sono pur essi funzioni omogenee delle variabili stesse, ed una funzione arbitraria di questi valori ne fornisce la solita soluzione generale.

Infatti sia l'equazione in discorso rappresentata dalla

$$\phi_1\frac{dx}{dx_1}+\phi_2\frac{dx}{dx_2}\ldots\ldots\ldots+\phi_\nu\frac{dx}{dx_\nu}=0 \qquad (55)$$

ove le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν siano per ipotesi funzioni omogenee di grado $=\mu$ delle variabili indipendenti in esse comprese. Si rappresenti con

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_\nu)=\beta_j \qquad (56)$$

uno qualunque degl' integrali del sistema (21) da cui dipende la soluzione della proposta (55). Il valore

$$x = f\left(x_1 , x_2 , \ldots\ldots x_\nu\right) \qquad (57)$$

sarà un valore particolare generico che soddisfà la stessa (55). Se si pone

$$x_1 = t\xi_1 , \quad x_2 = t\xi_2 , \ldots\ldots x_\nu = t\xi_\nu \qquad (58)$$

essendo $\xi_1 , \xi_2 , \ldots\ldots \xi_\nu$ nuove variabili e la t una costante e si indichi con $\psi_1 , \psi_2 , \ldots\ldots \psi_\nu$ ciò che diventano con tal sostituzione le $\phi_1 , \phi_2 , \ldots\ldots \phi_\nu$, la proposta equazione sarà trasformata nella

$$\psi_1 \frac{dx}{d\xi_1} + \psi_2 \frac{dx}{d\xi_2} \ldots\ldots\ldots + \psi_\nu \frac{dx}{d\xi_\nu} = 0 \qquad (59)$$

Tale trasformazione deriva dalla relazione $\frac{dx}{d\xi_j} = \frac{dx}{dx_j} \cdot \frac{dx_j}{d\xi_j}$ che si riduce alla

$$\left(\frac{dx}{dx_j}\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{d\xi_j}\right) \qquad (60)$$

e che ha luogo per tutti i valori di j, da $j = 1$ a $j = \nu$. Il valore di x che soddisferà la (59) sarà dato dalla (57), avuto riguardo alle (58), ossia sarà dato da

$$x = f\left(t\xi_1 , t\xi_2 , \ldots\ldots t\xi_\nu\right) \qquad (61)$$

S'indichi ora con $\phi'_1 , \phi'_2 , \ldots\ldots \phi'_\nu$ ciò che diventano le $\phi_1 , \phi_2 , \ldots\ldots \phi_\nu$ quando vi si cambino le $x_1 , x_2 , \ldots\ldots x_\nu$ nelle $\xi_1 , \xi_2 , \ldots\ldots \xi_\nu$. Un coefficiente qualunque ψ_j della (59), per la nota proprietà delle funzioni omogenee, sarà dato dalla relazione $\psi_j = t^\mu \phi'_j$ che avrà luogo pei diversi valori di j, da $j = 1$ a $j = \nu$. Con tal sostituzione la (59) divisa per t^μ diverrà

$$\phi'_1 \frac{dx}{d\xi_1} + \phi'_2 \frac{dx}{d\xi_2} \cdots\cdots + \phi'_\nu \frac{dx}{d\xi_\nu} = 0 \qquad (62)$$

Ma quest'equazione è la proposta stessa (55) in cui alle variabili x_1, x_2, ... x_ν si sostituiscano rispettivamente le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν. Quindi il valore di x che soddisfa la (62) sarà il valore dato dalla (57) cambiatevi le x_1, x_2, ... x_ν nelle ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν o più generalmente sarà dato da

$$x = c\,\mathrm{f}\left(\xi_1\ ,\ \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu\right)$$

essendo c una costante. Tal valore dovrà essere coincidente col già trovato valore dato dalla (61). Si avrà quindi

$$\mathrm{f}\left(t\xi_1\ ,\ t\xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ t\xi_\nu\right) = c\,\mathrm{f}\left(\xi_1\ ,\ \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu\right).$$

Ne risulta che la f è una funzione omogenea delle variabili indipendenti e che la c dev'essere eguale al valore costante t^n, essendo n il grado di omogeneità della funzione f.

Una funzione arbitraria di tutti i valori particolari ed omogenei risultanti dalla (56) pei diversi valori di j e per diverse forme della f che soddisfano la proposta fornirà la soluzione generale, dietro ciò che si è stabilito negli antecedenti paragrafi.

18. Sia proposta, per un esempio, l'equazione differenziale parziale

$$(y+t+z)\frac{dz}{dx} + (x+t+z)\frac{dz}{dy} + (x+y+z)\frac{dz}{dt} = x+y+t \qquad (63)$$

che, contenendo alcuno de' casi contemplati ne' precedenti paragrafi, mostra nell'indagine della sua soluzione qual partito si può cavare dall'antecedente proposizione.

La proposta equazione essendo affetta dalla variabile principale z e, sebben lineare, non essendo omogenea rispetto alle differenziali parziali, potrà coll'introduzione di una nuova variabile principale ζ trasformarsi nella

$$(x+y+z)\frac{d\zeta}{dt}+(y+t+z)\frac{d\zeta}{dy}+(x+t+z)\frac{d\zeta}{dy}+(x+y+t)\frac{d\zeta}{dz}=0 \quad (64)$$

Essendo quest'equazione lineare ed omogenea ed i coefficienti delle differenziali parziali essendo funzioni omogenee di grado $\mu=1$ delle variabili indipendenti t, x, y, z, i valori di ζ fra loro indipendenti che soddisfano la (64) saranno, pel § 17, funzioni omogenee delle variabili stesse, il cui grado incognito indicheremo con n. Si avrà quindi la relazione dovuta all' omogeneità

$$t\frac{d\zeta}{dt}+x\frac{d\zeta}{dx}+y\frac{d\zeta}{dy}+z\frac{d\zeta}{dz}=n\zeta.$$

Aggiunta quest'equazione alla (64), si avrà per determinare la ζ l'equazione

$$\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\zeta}{dt}+\frac{d\zeta}{dz}=\frac{n\zeta}{x+y+t+z} \quad (65)$$

Si trasformerà questa stessa in un'altra equazione omogenea rispetto alle differenziali parziali, introducendo una nuova variabile principale ρ funzione delle variabili indipendenti x, y, t, ζ, z e si avrà finalmente

$$\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\rho}{dt}+\frac{n\zeta}{x+y+t+z}\cdot\frac{d\rho}{d\zeta}+\frac{d\rho}{dz}=0 \quad (66)$$

Stabilito il sistema (21) di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione della (66), risulterà $\nu=5$ e quindi posto

$$x_1 = x \;, \quad x_2 = y \;, \quad x_3 = t \;, \quad x_4 = \zeta \;, \quad x_5 = z$$

sarà $\quad \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_5 = 1 \;, \quad \phi_4 = \dfrac{n\zeta}{x+y+t+z}.$

Il sistema (21) si ridurrà a

$$dx = dz \;, \quad dy = dz \;, \quad dt = dz \;, \quad d\zeta = \frac{n\zeta}{x+y+t+z}\, dz \tag{67}$$

oltre l'equazione $d\rho = 0$.
Siccome cogl'integrali

$$z = x + \beta_1 \;, \quad z = y + \beta_2 \;, \quad z = t + \beta_3 \tag{68}$$

delle tre prime superiori equazioni l'ultima diventa

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{n\, dz}{4z - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}$$

così si avrà pel 4.° integrale delle (67) la

$$\zeta = \beta_4^{n:4} \left\{ 4z - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \right\}^{n:4}$$

la quale, posti i valori delle costanti date dalle (68), e messo β_4 in luogo di $\beta_4^{n:4}$, si riduce a

$$\beta_4 = \frac{\zeta}{(x+y+t+2)^{n:4}} \tag{69}$$

I valori pertanto delle costanti β_1, β_2, β_3, β_4 forniti dagl'integrali (68), (69) saranno, come si è detto altrove, i valori particolari di ρ che soddisfano la (66), oltre il valor costante $\rho = \beta_5$.
Supposto inoltre $\beta_5 = \Pi\big(\beta_1 \,, \beta_2 \,, \beta_3 \,, \beta_4\big)$, essendo Π una funzione arbitraria, la soluzione generale della (66) sarà data da

$$\rho = \Pi\left(z-x\ ,\ z-y\ ,\ z-t\ ,\ \frac{\zeta}{(x+y+t+z)^{n:4}}\right).$$

Quindi riponendo β_5 per la ρ e fondendo la costante β_5 nella funzione arbitraria, si avrà per determinare la ζ l'equazione

$$\Pi\left(z-x\ ,\ z-y\ ,\ z-t\ ,\ \frac{\zeta}{(x+y+t+z)^{n:4}}\right) = 0.$$

Fra tutte le forme della Π che una tale soluzione lascia arbitrarie si dovranno scegliere quelle che adempiono alla condizione di essere ζ una funzione omogenea di grado $= n$. Se fra queste forme si scelgono le seguenti

$$(z-x)^m - \frac{\zeta}{(x+y+t+z)^{n:4}} = 0$$

$$(z-y)^m - \frac{\zeta}{(x+y+t+z)^{n:4}} = 0$$

$$(z-t)^m - \frac{\zeta}{(x+y+t+z)^{n:4}} = 0$$

che sono pure fra loro indipendenti ed in cui si riguardi m come un numero da determinarsi, si caverà

$$\zeta = (z-x)^m (x+y+t+z)^{n:4}$$

$$\zeta = (z-y)^m (x+y+t+z)^{n:4}$$

$$\zeta = (z-t)^m (x+y+t+z)^{n:4}$$

Determinando m in modo che la ζ risulti di grado n, sarà $m = \frac{3n}{4}$. Quindi supposto

$$x+y+t+z = s\ ,\quad z-x = p\ ,\quad z-y = q\ ,\quad z-t = r$$

si avranno pei cercati valori particolari di ζ espressi per funzioni omogenee di grado $= n$ fra loro indipendenti, che soddisfano alla (65), e quindi alla (64), le espressioni

$$\zeta = (sp^3)^{n:4}\ ,\quad \zeta = (sq^3)^{n:4}\ ,\quad \zeta = (sr^3)^{n:4}$$

ed il valor generale di ζ che soddisfa alla (65) sarà dato pure da

$$\zeta = \Pi\left((sp^3)^{n:4}\ ,\ (sq^3)^{n:4}\ ,\ (sr^3)^{n:4}\right)$$

ossia per l'arbitrarietà della Π da

$$\zeta = \Pi\left(sp^3\ ,\ sq^3\ ,\ sr^3\right) \qquad (70)$$

Quindi, per ciò che si è detto altrove, il valore di z che soddisfa alla proposta equazione (63) sarà quello determinato implicitamente dall'espressione arbitraria

$$\Pi\left(sp^3\ ,\ sq^3\ ,\ sr^3\right) = 0 \qquad (71)$$

Questo risultato coincide con quello ottenuto da Lagrange negli Atti dell'Accademia di Berlino per l'anno 1779 e riprodotto dal signor Jacobi nel vol. 23 del Giornale di Matematica del signor Crelle.

Il valore $\zeta = \beta_4(x+y+t+z)^{n:4}$ cavato dalla (69) sarà un valor particolare che soddisfa la (65), come se questa fosse stata proposta da risolvere, e la n sarebbe una costante non avente alcun rapporto col grado di omogeneità di cui si è parlato. Ma lo stesso valore non potrà in pari tempo soddisfare alla (64), non essendo una funzione omogenea di grado $= n$, come si esige, acciò le funzioni di ζ che soddisfano alla (65) possano soddisfare anche alla (64), la quale, ammessa la condizione che la ζ sia una funzione omogenea, non differisce dalla (65) che apparentemente.

Limitando nella (71) la generalità della Π e riducendola successivamente alle semplici forme

$$sp^3 = 0\,, \quad sq^3 = 0\,, \quad sr^3 = 0$$

si avranno per z i valori particolari

$$z = -(x+y+t)\,, \quad z = x\,, \quad z = y\,, \quad z = t$$

aventi tutti la proprietà di soddisfare alla (63). La stessa proprietà competerà al valore di z cavato dalla forma particolare della Π data da

$$sp^3 + sq^3 + sr^3 = 0\,, \quad \text{ossia da} \quad p^3 + q^3 + r^3 = 0\,,$$

od anche a valori di z cavati da una qualsivoglia altra forma particolare attribuita alla Π.

19. Si è detto ne' precedenti paragrafi che essendo

$$x = \mathrm{f}_1\,, \quad x = \mathrm{f}_2\,, \ldots\ldots\, x = \mathrm{f}_{\nu-1}$$

le soluzioni particolari fra loro indipendenti di un' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea

$$\phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \cdots\cdots\cdots + \phi_\nu \frac{dx}{dx_\nu} = 0 \qquad (72)$$

fra le sole ν variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_ν, la soluzione generale era espressa da

$$x = \Pi\left(\mathrm{f}_1\,, \mathrm{f}_2\,, \ldots\ldots\, \mathrm{f}_{\nu-1}\right)$$

essendo Π una funzione arbitraria, e che potevano da questa ottenersi tutte le soluzioni particolari che la proposta (72) può ammettere. Ma la questione analitica nella sua generalità, lasciando affatto indeterminata la funzione Π, si potrà ne' diversi casi disporne onde adempire a qualche condizione voluta dalla natura particolare della questione che sia proposta da risolvere.

Così, per esempio, sia proposta la ricerca di una soluzione della (72) assoggettata alla condizione che per un valore di x_ν

eguale a zero od eguale ad una costante τ, o più generalmente, che per un valore di x_ν dato implicitamente in funzione delle altre variabili da un'equazione

$$F\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) = 0 \qquad (73)$$

la soluzione in discorso debba ridursi ad una determinata funzione

$$\Gamma\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-1}\ ,\ x_\nu\right) \qquad (74)$$

ove il valore di x_ν è dipendente dalla (73).
Per adempiere a tale condizione si determinino le variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ in funzione di x_ν e delle f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ col mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) \\ f_2 &= f_2\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) \\ &\vdots \\ f_{\nu-1} &= f_{\nu-1}\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) \end{aligned}$$

e posti i valori ottenuti nella (73), e cavato x_ν, risulti

$$x_\nu = \psi\left(f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right).$$

Colla sostituzione degli stessi valori la (74) diventi

$$\Gamma'\left(x_\nu\ ,\ f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right).$$

La soluzione cercata che adempie la condizione voluta sarà espressa da

$$x = \Pi\left(f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right) = \Gamma'\left(\psi\ ,\ f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right).$$

Infatti, essendo ψ una funzione di f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$, la $x = \Gamma'\left(\psi\ ,\ f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right)$ soddisferà alla proposta

(72) ed inoltre verificherà la voluta condizione, giacchè supposto $x_\nu = \psi$ la Γ' diventa

$$\Gamma'\left(x_\nu\ ,\ f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right) = F\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right).$$

Nella particolare ipotesi che la (73) si riduca semplicemente alla $x_\nu - \tau = 0$, sarà $\psi = \tau$, e quindi la chiesta soluzione assoggettata alla condizione di ridursi a

$$\Gamma\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right)\ ,\quad \text{ossia a}\quad \Gamma\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ \tau\right)$$

per $x_\nu = \tau$, sarà data da $x = \Gamma'\left(\tau\ ,\ f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ldots\ f_{\nu-1}\right)$.

20. Nell' ipotesi precedente in cui la soluzione x della (72) debba ridursi ad una nota funzione π delle variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$, quando la variabile x_ν sia legata dall'equazione $F\left(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\right) = 0$, ovvero determinata esplicitamente dalla $x_\nu = \tau$ in cui si riguardi la τ come funzione delle variabili x_1, x_2, ... $x_{\nu-1}$ riducibile nei casi speciali, o ad una determinata costante, od anche allo zero, si potrà allora indipendentemente dalla conoscenza delle soluzioni particolari f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ della (72), come era richiesto nell'antecedente paragrafo, ottenere la soluzione x espressa non più sotto forma finita, ma in serie.

Infatti la (72) può mettersi sotto la forma

$$x = -\int\left\{\left(\phi_1\frac{dx}{dx_1} + \phi_2\frac{dx}{dx_2}\ \ldots\ldots + \phi_{\nu-1}\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) : \phi_\nu\right\}dx_\nu + C.$$

Ma per $x_\nu = \tau$ dovendo essere $x = \pi$, la costante C sarà determinata e si avrà

$$x = \pi - \int_\tau^{x_\nu}\left\{\left(\phi_1\frac{dx}{dx_1} + \phi_2\frac{dx}{dx_2}\ \ldots\ldots + \phi_{\nu-1}\frac{dx}{dx_{\nu-1}}\right) : \phi_\nu\right\}dx_\nu.$$

Se si pone in generale

$$\int_{\tau}^{x_\nu} \left\{ \left(\phi_1 \frac{dy}{dx_1} + \phi_2 \frac{dy}{dx_2} \cdots\cdots + \phi_{\nu-1} \frac{dy}{dx_{\nu-1}} \right) : \phi_\nu \right\} dx_\nu = -\nabla y \qquad (75)$$

il precedente valore di x diventa

$$x = \pi + \nabla x.$$

Col metodo delle *funzioni involute* applicato alla risoluzione delle equazioni esposto al § 52 della Memoria *sui metodi d'approssimazione* ..... pubblicata nel 1846 nell'Appendice alle Effemeridi astronomiche di Milano, si avrà

$$x = \pi + \nabla \pi + \nabla^2 \pi + \nabla^3 \pi \cdots\cdots + \nabla^{n-1} \pi + \nabla^n x$$

ove una qualunque ∇^m è posta invece della funzione involuta

$$\nabla \{ \nabla \} \nabla \{ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

essendo la ∇ ripetuta un numero m di volte. Qualora le condizioni della convergenza siano adempite, per cui la $\nabla^n x$ decresca continuamente al crescere dell' indice n, il valore di x che soddisfa alla (72) e che adempie alla richiesta condizione sarà espresso dalla serie indefinita

$$x = \pi + \nabla \pi + \nabla^2 \pi + \text{ecc.} \qquad (76)$$

Dietro quanto si è più volte avvertito ne risulta che, essendo β_ν una costante, l'equazione

$$\beta_\nu = \pi + \nabla \pi + \nabla^2 \pi + \text{ecc.}$$

sarà un integrale generale del sistema (21) di equazioni differenziali ordinarie.

Se ora si esprime con Δy non più l' integrale compreso nella (75), ma la sola quantità sotto il segno $\int$, si avrà

$$\nabla y = -\int_{\tau}^{x_\nu} \Delta y \,.\, dx_\nu.$$

Se si ammette che i coefficienti ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν non contengano la x_ν e s'indichi, come sopra, con Δ^m la funzione involuta $\Delta \{ \Delta \{$ .... ripetuta un numero m di volte si avrà dalla (76), eseguendo le integrazioni,

$$x = \pi + \frac{(\tau - x_\nu)}{1} \Delta \pi + \frac{(\tau - x_\nu)^2}{1 \,.\, 2} \Delta^2 \pi + \text{ecc.} \qquad (77)$$

Questo valore di x sarà, nell'ammessa ipotesi, la soluzione cercata della (72), e la (77), sostituita la costante β_ν alla x, fornirà l'integrale generale del sistema (21).

21. Si supponga che l'equazione (72) non contenga x_ν e che le soluzioni particolari f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ e la generale $\Pi(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{\nu-1})$ si riducano rispettivamente alle f°_1, f°_2, ... $f^\circ_{\nu-1}$, π pel valore $x_\nu = \tau$, le τ, π ritenendo le stesse significazioni come nell'antecedente paragrafo. La serie data dall'espressione (77) coinciderà in tal caso col solito sviluppo Tayloriano della soluzione generale $x = \Pi(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{\nu-1})$.

Infatti se nelle f_1, f_2, ... $f_{\nu-1}$ contenute nella soluzione generale Π si pone $x_\nu = \tau + (x_\nu - \tau)$ e si sviluppa la Π per le potenze di $x_\nu - \tau$, avvertendo che per $x_\nu = \tau$ deve la Π coincidere colla π, si avrà

$$x = \Pi = \pi + \frac{d\pi}{d\tau}(x_\nu - \tau) + \frac{d^2\pi}{d\tau^2} \cdot \frac{(x_\nu - \tau)^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\ldots\ldots \qquad (78)$$

Ma se nell'equazione proposta (72) si pone $x_\nu = \tau$ sarà essa verificata pel valore $x = \pi$, onde si avrà

$$\phi_1 \frac{d\pi}{dx_1} + \phi_2 \frac{d\pi}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_{\nu-1} \frac{d\pi}{dx_{\nu-1}} + \phi_\nu \frac{d\pi}{d\tau} = 0 \qquad (79)$$

ossia

$$\frac{d\pi}{d\tau} = - \left\{ \phi_1 \frac{d\pi}{dx_1} + \phi_2 \frac{d\pi}{dx_2} \ldots\ldots + \phi_{\nu-1} \frac{d\pi}{dx_{\nu-1}} \right\} : \phi_\nu \qquad (80)$$

La quale, in forza della significazione attribuita al simbolo Δ, si ridurrà a $\frac{d\pi}{d\tau} = -\Delta\pi$. L'equazione (80) essendo identicamente avverata, avranno luogo le sue differenziali rispetto a τ. Siccome poi le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν, non contenenti x_ν, sono indipendenti da τ, così differenziando la (80) per τ, si avrà

$$\frac{d^2\pi}{d\tau^2} = -\left\{ \phi_1 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\pi}{dx_1}\right) + \phi_2 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\pi}{dx_2}\right) + \dots\dots\dots \right\} : \phi_\nu$$

$$= \left\{ \phi_1 \frac{d\Delta\pi}{dx_1} + \phi_2 \frac{d\Delta\pi}{dx_2} \dots\dots + \phi_{\nu-1} \frac{d\Delta\pi}{dx_{\nu-1}} \right\} : \phi_\nu$$

ossia $\frac{d^2\pi}{d\tau^2} = \Delta^2\pi$. Coi successivi differenziali si troverebbero parimente le relazioni

$$\frac{d^3\pi}{d\tau^3} = -\Delta^3\pi\ , \qquad \frac{d^4\pi}{d\tau^4}\ \Delta^4\pi\ , \qquad \frac{d^5\pi}{d\tau^5} = -\Delta^5\pi\ , \ \dots\dots\dots\dots$$

Colla sostituzione di tali valori l'equazione (77) verrà trasformata nella (78), ossia coinciderà collo sviluppo per le potenze di $x_\nu - \tau$ della soluzione generale assoggettata a ridursi alla funzione π pel valore $x_\nu = \tau$.

22. Ammesse le precedenti ipotesi, se la funzione π, cui è assoggettata a ridursi la soluzione x della (72) pel valore $x_\nu = \tau$, è una delle soluzioni dell'equazione

$$\left\{ \phi_1 \frac{dx}{dx_1} + \phi_2 \frac{dx}{dx_2} \dots\dots\dots + \phi_{\nu-1} \frac{dx}{dx_{\nu-1}} \right\} : \phi_\nu = kx \tag{81}$$

essendo k una costante, siccome dalla precedente per $x = \pi$, si avrà $\Delta\pi = k\pi$, e quindi $\Delta^2\pi = \Delta^3\pi = \dots\dots = \Delta\pi$, così l'espressione (77) si ridurrà alla

$$x = \pi\, e^{k(\tau - x_\nu)} \tag{82}$$

Sarà questa una soluzione della (72) e l'equazione

$$\beta_\nu = \pi \, e^{k(\tau - x_\nu)} \qquad (83)$$

sarà, nelle ammesse ipotesi, un integrale generale del sistema (21). La funzione π che verifica la (81) può desumersi dal processo del § 7. Infatti se la (81) si trasforma col porvi $x = e^y$, si avrà

$$\phi_1 \frac{dy}{dx_1} + \phi_2 \frac{dy}{dx_2} \cdots\cdots + \phi_{\nu-1} \frac{dy}{dx_{\nu-1}} = k\,\phi_\nu$$

la quale, postovi $k\phi_\nu = \psi$, trovasi coincidere coll'equazione (24) del § 7, ove pongasi $\nu - 1$ in luogo di ν. Se quindi si chiama in generale ρ una delle soluzioni trovate nel citato paragrafo, si avrà $\pi = e^\rho$. Quindi le equazioni (82), (83) diverranno

$$x = e^{\rho + k(\tau - x_\nu)} \,, \qquad \beta_\nu = e^{\rho + k(\tau - x_\nu)}$$

L'equazione (82) sviluppata per le potenze di $\tau - x_\nu$ fornisce, come era da aspettarsi, lo stesso sviluppo dato dalla (77).

VII.

Equazioni differenziali ordinarie di 2.° ordine; loro forma speciale ed applicazioni alla Dinamica ed all'Astronomia.

1. In luogo di un sistema di equazioni differenziali ordinarie di 1.° ordine, quali sono le equazioni (21) dell'articolo precedente, sia proposto un sistema di un numero $= \nu$ di equazioni differenziali ordinarie di 2.° ordine fra le variabili dipendenti

$$x_1 \,,\quad x_2 \,,\; \cdots\cdots\; x_\nu$$

e la variabile indipendente $x_{\nu+1} = t$. Sia un tal sistema riducibile alla forma

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \phi_1 \,, \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \phi_2 \,, \;\cdots\cdots\; \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \phi_\nu \qquad (1)$$

Per ottenere gl' integrali delle (1) si dovrà ad esse sostituire un sistema di 2ν equazioni differenziali di 1.° ordine fra le anzidette e fra le nuove variabili

$$\xi_1\ ,\quad \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ \xi_\nu$$

determinate dalle equazioni

$$dx_1 = \xi_1\, dt\ ,\qquad dx_2 = \xi_2\, dt\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ dx_\nu = \xi_\nu\, dt \qquad (2)$$

Indicate quindi con $\psi_1\ ,\ \psi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \psi_\nu$ ciò che divengono le $\phi_1\ ,\ \phi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \phi_\nu$, quando alle derivate $\frac{dx_1}{dt}\ ,\ \frac{dx_2}{dt}\ ,\ \ldots\ldots\ \frac{dx_\nu}{dt}$ si sostituiscono le $\xi_1\ ,\ \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu$ determinate dalle (2), il sistema dato (1) di ν equazioni di 2.° ordine si ridurrà ad un sistema di 2ν equazioni del 1.° fra un doppio numero di variabili dipendenti. Tal sistema sarà espresso da

$$\left.\begin{array}{ll}
d\xi_1 = \psi_1\, dt\ , & dx_1 = \xi_1\, dt \\
d\xi_2 = \psi_2\, dt\ , & dx_2 = \xi_2\, dt \\
\vdots & \vdots \\
d\xi_\nu = \psi_\nu\, dt\ , & dx_\nu = \xi_\nu\, dt
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

ove le $\psi_1\ \ \psi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \psi_\nu$ saranno in generale funzioni delle variabili

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_\nu\ ,\quad \xi_1\ ,\quad \xi_2\ ,\ \ldots\ldots\ \xi_\nu\ ,\quad t \qquad (4)$$

Dietro le cose dette nell' articolo antecedente gl' integrali generali del sistema (3) dipenderanno dalle 2ν soluzioni fra loro indipendenti dell' equazione differenziale parziale

$$\left.\begin{array}{l}
\psi_1 \frac{dx}{d\xi_1} + \psi_2 \frac{dx}{d\xi_2} \ldots\ldots + \psi_\nu \frac{dx}{d\xi_\nu} \\
+ \xi_1 \frac{dx}{dx_1} + \xi_2 \frac{dx}{dx_2} \ \ldots\ldots + \xi_\nu \frac{dx}{dx_\nu}
\end{array}\right\} + \frac{dx}{dt} = 0 \qquad (5)$$

la quale è lineare ed omogenea rispetto alle differenziali parziali della variabile principale x relative alle variabili indipendenti (4) di cui la x s' intende funzione.

Ottenuti i 2ν integrali generali delle (3), come si è detto nel citato articolo, ed eliminate con essi le variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν, si otterranno ν equazioni fra le sole variabili x_1, x_2, ... x_ν, t e le 2ν costanti α_1, α_2, ... α_ν, β_1, β_2, ... β_ν che saranno gl'integrali generali del proposto sistema (1) di equazioni di 2.° ordine. Ciò che quì si è detto relativamente ad un sistema di equazioni di 2.° ordine può egualmente applicarsi ad un sistema di equazioni differenziali di ordini superiori.

2. Se nel sistema proposto (1) le ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν sono funzioni delle sole variabili x_1, x_2, ... x_{ν}, t, si dovrà alle ψ_1, ψ_2, ... ψ_ν del sistema (3) sostituire le stesse ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν. Se inoltre queste funzioni sono rispettivamente eguali alle differenziali parziali di una stessa espressione P_1, prese rapporto alle variabili x_1, x_2, ... x_ν, sarà P_1 una funzione di queste variabili e della t. In tale ipotesi gl'integrali generali del sistema proposto (1) non solo potranno desumersi, come nell'antecedente paragrafo, dalle 2ν soluzioni fra loro indipendenti di un' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea fra $2\nu+1$ variabili indipendenti, ma potranno nell'assunta ipotesi ottenersi anche da un' equazione differenziale parziale non lineare, ma fra un numero $\nu+1$ soltanto di variabili indipendenti.

Tale equazione differenziale parziale è data dalla (1) dell'art. IV, la quale, postovi $x_{\nu+1}=t$, si riduce alla

$$\frac{dx}{dt}=P_1+\mathcal{P}_2 \qquad (6)$$

in cui sia

$$\mathcal{P}_2=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dx}{dx_2}\right)^2\cdots\cdots+\left(\frac{dx}{dx_\nu}\right)^2\right\} \qquad (7)$$

Ottenuta della (6) una soluzione completa $x = \phi + x^0$ contenente i valori iniziali, ovvero una soluzione completa $x = \psi + \beta_{\nu+1}$ contenente le costanti dell'integrazione, gl'integrali finiti del proposto sistema (1) di equazioni di 2.° ordine saranno dati nel 1.° caso dalla seconda linea delle (15), art. II, e nel 2.° caso dalla seconda linea delle (16), avuto riguardo di sostituire in esse $\nu + 1$ alla ν e la t alla $x_{\nu+1}$.

Ciò risulta evidentemente dall'osservare che in questo caso sarà

$$P_2 = -\tfrac{1}{2}\left\{ \xi_1^2 + \xi_2^2 \ldots\ldots + \xi_\nu^2 \right\}.$$

La questione dell'integrazione del sistema proposto di equazioni di 2.° ordine essendo per tal modo ridotta all'integrazione di un sistema di equazioni di 1.° ordine od alla ricerca di una soluzione completa dell'equazione differenziale parziale (6), tutte le conseguenze e tutti i processi esposti negli articoli che precedono il VI varranno pel caso di un sistema di equazioni di 2.° ordine, quando in esso si verifichino le sopra accennate condizioni rispetto alle ϕ_1, ϕ_2, ... ϕ_ν.

3. Sia più generalmente proposto un sistema di ν equazioni differenziali di 2.° ordine fra le variabili dipendenti x_1, x_2, ... x_ν e la variabile indipendente t, riducibile alla forma

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_1}\right) + \Sigma \left\{ \lambda_i \left(\frac{dL_i}{dx_1}\right) \right\} \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right) + \Sigma \left\{ \lambda_i \left(\frac{dL_i}{dx_2}\right) \right\} \\ &\vdots \\ m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_\nu}\right) + \Sigma \left\{ \lambda_i \left(\frac{dL_i}{dx_\nu}\right) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in cui essendo la sommatoria Σ estesa da $i = 1$ od $i = \pi$

siano le P_1, L_1, L_2, ... L_π funzioni qualunque delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, t, le λ_1, λ_2, ... λ_π siano coefficienti indeterminati da eliminarsi, ed m_1, m_2, ... m_ν quantità costanti. Cercasi il sistema integrale delle (8), nell' ipotesi che le variabili siano vincolate dalle equazioni di condizione

$$L_1 = 0\,, \quad L_2 = 0\,, \ldots\ldots\ldots L_\pi = 0 \qquad (9)$$

Si dimostrerà che se $x = \phi + x^\circ$ è una soluzione completa espressa per valori iniziali dell'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = P_1 + \mathcal{P}_2 \qquad (10)$$

essendo

$$\mathcal{P}_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{1}{m_i}\left(\frac{dx}{dx_i}\right)^2\right\}$$

gl' integrali primi del proposto sistema (8), ossia i valori delle ν derivate prime $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$ sono espressi dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{dx_1}{dt} &= \left(\frac{dx}{dx_1}\right) + \Sigma\left\{\lambda_i\left(\frac{dL_i}{dx_1}\right)\right\}\\
m_2\frac{dx_2}{dt} &= \left(\frac{dx}{dx_2}\right) + \Sigma\left\{\lambda_i\left(\frac{dL_i}{dx_2}\right)\right\}\\
&\vdots\\
m_\nu\frac{dx_\nu}{dt} &= \left(\frac{dx}{dx_\nu}\right) + \Sigma\left\{\lambda_i\left(\frac{dL_i}{dx_\nu}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

e gl' integrali finiti contenenti i valori che assumono le x_1, x_2, ... x_ν, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$ pel valor particolare

$t = \tau$ che verranno indicati al solito collo zero nell'esponente sono espressi dalle ν equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{dx^{\circ}_{1}}\right) + m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{\circ} + \Sigma \left(\lambda_i^{\circ} \frac{dL_i^{\circ}}{dx^{\circ}_{1}}\right) = 0 \\
&\left(\frac{dx}{dx^{\circ}_{2}}\right) + m_2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^{\circ} + \Sigma \left(\lambda_i^{\circ} \frac{dL_i^{\circ}}{dx_i^{\circ}}\right) = 0 \\
&\qquad \vdots \\
&\left(\frac{dx}{dx^{\circ}_{\nu}}\right) + m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^{\circ} + \Sigma \left(\lambda_i^{\circ} \frac{dL_i^{\circ}}{dx_i^{\circ}}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

I coefficienti indeterminati λ_1, λ_2, ... λ_π che entrano nelle (11) si determineranno col mezzo delle π equazioni lineari che nascono dalla generica

$$\left(\frac{dL_i}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{dL_i}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dt} \;\cdots\cdots + \left(\frac{dL_i}{dx_\nu}\right)\frac{dx_\nu}{dt} + \left(\frac{dL_i}{dt}\right) = 0 \quad (13)$$

pei valori di $i = 1, 2, \ldots\ldots \pi$, quando alle $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$ ch'esse contengono si sostituiscano i loro valori dati dalle (11) ed i coefficienti λ°_{1}, λ°_{2}, ... π°_{π} che entrano nelle (12) si determineranno colle stesse π equazioni che si sono derivate dalla (13) quando in esse si faccia $t = \tau$, per cui le λ_1, λ_2, ... λ_ν si cambiano nelle λ°_{1}, λ°_{2}, ... λ°_{ν}. Si dimostrerà inoltre che una soluzione completa della (10) è espressa da una o dall'altra delle seguenti forme

$$x = \int_\tau^t \left\{ P_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \right\} \right\} dt \quad (14)$$

$$x = \int_\tau^t \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \;\ldots\ldots + \xi_\nu dx_\nu + (P_1 + P_2)\, dt \right\} \quad (15)$$

La (15) può scriversi anche come segue

$$x = \int_{\tau}^{t} \left\{ m_1 \frac{dx_1}{dt} dx_1 + m_2 \frac{dx_2}{dt} dx_2 \,\ldots\ldots + m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} dx_\nu + (P_1 + P_2)\, dt \right\} \qquad (16)$$

in cui sarà

$$P_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ \frac{1}{m_i} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right\}.$$

L'espressione sotto il segno integrale nella (15) diverrà una differenziale esatta rispetto a tutte le variabili, ch'essa contiene, quando coi 2ν integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione completa della (10) espressi per valori iniziali eliminate le ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_ν^0, siansi determinate le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione di x_1, x_2, ... x_ν, t e de' loro valori iniziali.

Infatti il sistema proposto (8) si ridurrà, come si è fatto al § 1, ad un sistema di 2ν equazioni di 1.° ordine, introducendo le nuove variabili ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν, e si avrà

$$\left.\begin{aligned}
d\xi_1 &= \left\{ \left(\frac{dP_1}{dx_1} \right) + \Sigma \left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1} \right) \right\} dt, & dx_1 &= \frac{1}{m_1} \xi_1 dt = -\left(\frac{dP_2}{d\xi_1} \right) dt \\
d\xi_2 &= \left\{ \left(\frac{dP_1}{dx_2} \right) + \Sigma \left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_2} \right) \right\} dt, & dx_2 &= \frac{1}{m_2} \xi_2 dt = -\left(\frac{dP_2}{d\xi_2} \right) dt \\
&\vdots \\
d\xi_\nu &= \left\{ \left(\frac{dP_1}{dx_\nu} \right) + \Sigma \left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_\nu} \right) \right\} dt, & dx_\nu &= \frac{1}{m_\nu} \xi_\nu dt = -\left(\frac{dP_2}{d\xi_\nu} \right) dt
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

nelle quali sarà

$$P_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ \frac{1}{m_i} \xi_i^2 \right\}.$$

Un tal sistema coincide col sistema (35) dell' art. V, purchè in esso pongasi $x_{\nu+1} = t$. Il sistema (17) sarà dunque quel sistema da cui dipende la soluzione completa della (33), art. V, fattovi $x_{\nu+1} = t$ che in tal caso coincide colla (10). Ma, pel § 4, art. V, se la $x = \phi + x^0$ è una soluzione completa espressa per valori iniziali dell' equazione differenziale parziale (10), nell' ipotesi che debbano avverarsi le equazioni di condizione (9), gl' integrali del sistema (17) saranno dati dalle (22), (23) dell' art. V, in cui pongasi $\nu + 1$ in luogo di ν e $\frac{dx}{dx^0} = 1$ non entrando nella (10) la variabile principale x. Ma stante i valori di ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν dati dalla 2.ª colonna delle (17), ossia stanti le relazioni

$$\xi_1 = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad \xi_2 = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \; \ldots\ldots \; \xi_\nu = m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \tag{18}$$

$$\xi_1^0 = m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^0, \quad \xi_2^0 = m_2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^0, \; \ldots\ldots \; \xi_\nu^0 = m_\nu \left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)^0 \tag{19}$$

le citate equazioni (22), (23) diverranno rispettivamente le (11), (12).

Chiamando poi $L_i = 0$ una qualunque delle equazioni di condizione (9), avrà luogo anche la sua differenziale presa rapporto alla variabile indipendente t, e si avrà

$$\left(\frac{dL_i}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{dL_i}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dt} \;\ldots\ldots\; + \left(\frac{dL_i}{dx_\nu}\right)\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{dL_i}{dt} = 0.$$

Postivi i valori di $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$ espressi per λ_1, λ_2, ... λ_π dati dalle (11), si avranno π equazioni lineari colle quali determinare le λ_1, λ_2, ... λ_π. Se inoltre in queste stesse equazioni si fa $t = \tau$, per cui una qualunque $L_i = 0$ si cambia in una $L_i^0 = 0$, e le λ_1, λ_2, ... si cambiano in λ_1^0, λ_2^0, ..., si avranno le π equazioni necessarie alla determinazione di quest' ultime quantità.

Si vede finalmente che l'equazione (36), art. V, in cui pongasi $x_{\nu+1} = t$, diventa nel caso attuale

$$dx = \left(P_1 + P_2 + \frac{1}{m_1}\xi_1^2 - \frac{1}{m_2}\xi_2^2 \; \dots\dots + \frac{1}{m_\nu}\xi_\nu^2\right)dt$$

$$= \left\{P_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{1}{m_i}\xi_i^2\right) + \sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{1}{m_i}\xi_i^2\right)\right\}dt$$

$$= \left\{P_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{1}{m_i}\xi_i^2\right)\right\}dt.$$

Quindi, per essere $\xi_i = m_i \frac{dx_i}{dt}$, integrando e definendo fra $t = \tau$, $t = t$, si otterrà la (14).

Parimente se nell'equazione differenziale ordinaria

$$dx = \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \; \dots\dots + \xi_\nu dx_\nu + \left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

che rimpiazza, come si è più volte avvertito, l'equazione citata (36), art. V, si pone il valore di $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ dato dalla (10), ove alla φ_2 venga al solito sostituito P_2, si otterrà la (15), e se abbiasi riguardo ai valori di ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν dati dalle (18), si otterrà la (16).

Se con tutti gl'integrali del sistema (17), avuto riguardo alle condizioni (9), si determinano, come al § 1, art. II, le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_ν, t e dei loro valori iniziali, eliminando le ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_ν^0, e si pongono nell'espressione (15) che sarà una differenziale esatta, si avrà coll'integrazione la soluzione completa $x = \phi + x^0$.

4. Sussistendo le equazioni di condizione

$$L_1 = 0 \,, \quad L_2 = 0 \,, \ldots\ldots L_\pi = 0 \qquad (20)$$

sia proposto da integrarsi col metodo della variazione delle costanti arbitrarie un sistema della forma

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{d(P_1+E)}{dx_1} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_1} \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{d(P_1+E)}{dx_2} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_2} \\ &\vdots \\ m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} &= \frac{d(P_1+E)}{dx_\nu} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

in cui le quantità

$$P_1 \,, \quad E \,, \quad L_1 \,, \quad L_2 \,, \ldots\ldots L_\pi$$

siano funzioni delle sole variabili $x_1 \,, \; x_2 \,, \ldots\ldots x_\nu \,, \; t \,,$ e s'intenda la sommatoria Σ estesa da $i = 1$ ad $i = \pi$. Se si pone al solito $P_2 = -\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \xi_i^2$, la Σ essendo quì estesa da $i = 1$ ad $i = \nu$, il proposto sistema di equazioni del 2.° ordine si ridurrà ad un doppio numero di equazioni del 1.° espresso da

$$\left.\begin{aligned} d\xi_1 &= \left\{\frac{d(P_1+E)}{dx_1} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_1}\right\} dt \,, & dx_1 &= -\left(\frac{dP_2}{d\xi_1}\right) dt \\ d\xi_2 &= \left\{\frac{d(P_1+E)}{dx_2} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_2}\right\} dt \,, & dx_2 &= -\left(\frac{dP_2}{d\xi_2}\right) dt \\ &\vdots & &\vdots \\ d\xi_\nu &= \left\{\frac{d(P_\nu+E)}{dx_\nu} + \Sigma \lambda_i \frac{dL_i}{dx_\nu}\right\} dt \,, & dx_\nu &= -\left(\frac{dP_2}{d\xi_\nu}\right) dt \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Un tal sistema coincide con quello che deriva dalle equazioni generiche (79), art. V, ove si ponga $x_{\nu+1}=t$ ed $F=P_1+P_2$. Quindi riguardata nel sistema (21) la E come una funzione perturbatrice, si potrà integrare il sistema (21), e perciò le equazioni proposte (20) col metodo della variazione, sia delle costanti arbitrarie, sia dei valori iniziali, seguendo i processi dei §§ 18, 19, 20, ed avvertendo che nella determinazione dei coefficienti indeterminati λ_1, λ_2, ... λ_π si dovrà in questo caso seguire il metodo dato nell'antecedente paragrafo.

Quando le equazioni di condizione (19) non esistano, le formole ottenute pel caso generale si adatteranno a questo caso particolare ponendo $\lambda_i=0$ per tutti i valori di $i=1, 2, ... \pi$.

5. Per applicare le precedenti dottrine alle equazioni generali della dinamica si consideri un sistema di n punti le cui masse rispettive siano

$$m', \quad m'', \quad m''', \quad .... m^n$$

e le rispettive coordinate siano

$$(x', y', z'), \quad (x'', y'', z''), \quad ...... (x^n, y^n, z^n).$$

Suppongasi che fra queste coordinate debbano essere avverate le π equazioni di condizione

$$L_1=0, \quad L_2=0, \; .... L_\pi=0 \qquad (23)$$

nelle quali supporremo contenersi esplicitamente anche il tempo t.

Si sa dalla Meccanica che le equazioni differenziali del moto di tali punti materiali comunque soggetti a legami o leggi date dalle (23), che vincolano la loro assoluta libertà al moto, sono espresse dal sistema delle seguenti $3n$ equazioni

$$\left.\begin{aligned}
m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= m'X' + \Sigma\left\{\lambda_i\frac{dL_i}{dx'}\right\}\\
m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= m'Y' + \Sigma\left\{\lambda_i\frac{dL_i}{dy'}\right\}\\
m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= m'Z' + \Sigma\left\{\lambda_i\frac{dL_i}{dz'}\right\}\\
m''\frac{d^2x''}{dt^2} &= m''X'' + \Sigma\left\{\lambda_i\frac{dL_i}{dx''}\right\}\\
&\vdots\\
m^n\frac{d^2z^n}{dt^2} &= m^nZ^n + \Sigma\left\{\lambda_i\frac{dL_i}{dz^n}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

nelle quali le quantità generiche X^i, Y^i, Z^i rappresentano le componenti rettangolari della forza acceleratrice agente sul punto generico m^i alla fine del tempo t stimate secondo i semi-assi positivi delle coordinate x, y, z e le λ_1, λ_2, ... λ_π rappresentano coefficienti indeterminati, la sommatoria Σ estendendosi da $i = 1$ ad $i = \pi$.

Per rendere le precedenti formole analoghe a quelle già indietro esposte, onde servire all'uniformità e simetria, pongasi $3n = \nu$ e facciasi

$$\begin{array}{lll}
x' = x_1, & y' = x_2, & z' = x_3\\
x'' = x_4, & y'' = x_5, & z'' = x_6\\
 & \vdots & \\
x^n = x_{\nu-2}, & y^n = x_{\nu-1}, & z^n = x_\nu
\end{array}$$

Fatto egualmente

$$\begin{array}{lll} X' = X_1 \,, & Y' = X_2 \,, & Z' = X_3 \\ X'' = X_4 \,, & Y'' = X_5 \,, & Z'' = X_6 \\ & \vdots & \\ X^n = X_{\nu-2} \,, & Y^n = X_{\nu-1} \,, & Z^n = X_\nu \end{array}$$

e supposto

$$\begin{array}{c} m' = m_1 = m_2 = m_3 \\ m'' = m_4 = m_5 = m_6 \\ \vdots \\ m^n = m_{\nu-2} = m_{\nu-1} = m_\nu \end{array}$$

le equazioni (24) diverranno

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 X_1 + \Sigma \left\{ \lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_1} \right\} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 X_2 + \Sigma \left\{ \lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_2} \right\} \\ \vdots \\ m_\nu \dfrac{d^2 x_\nu}{dt^2} = m_\nu X_\nu + \Sigma \left\{ \lambda_i \dfrac{dL_i}{dx_\nu} \right\} \end{array}\right\} \quad (25)$$

Supposto che le X_1, X_2, ... X_ν siano funzioni delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν, t, se si ammette che l'espressione

$$m_1 X_1 dx_1 + m_2 X_2 dx_2 \,\ldots\ldots + m_\nu X_\nu dx_\nu = \sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ m_i X_i dx_i \right\}$$

sia una differenziale esatta rispetto alle variabili x_1, x_2, ... x_ν, ossia se si ammette che esista una certa funzione

$$P_1\left(x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots\ldots\ldots \, x_\nu \,,\, t\right)$$

di tal composizione che le sue differenziali parziali rispetto alle variabili x_1, x_2, ... x_ν siano rispettivamente eguali alle

$$m_1 X_1 \,, \quad m_2 X_2 \,, \; \ldots\ldots\ldots \; m_\nu X_\nu$$

le equazioni (25) diverranno

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_1}\right) + \Sigma\left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_1}\right) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right) + \Sigma\left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_2}\right) \\ &\vdots \\ m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} &= \left(\frac{dP_1}{dx_\nu}\right) + \Sigma\left(\lambda_i \frac{dL_i}{dx_\nu}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Nell' assunta ipotesi queste equazioni generali del moto coincidendo colle equazioni (8), le proposizioni relative a queste avranno egualmente luogo per le equazioni (26).

La variabile principale x, i cui differenziali parziali entrano nella (10) e che viene espressa sotto la forma (14), si chiamerà la *funzione caratteristica* e la P_1 la *funzione delle forze*.

6. Essendo proposte le equazioni differenziali del moto sotto la forma (26) e sussistendo le equazioni di condizione (23), se queste e la funzione delle forze designata con P_1 non contengono il tempo t, un integrale del sistema, come si è trovato indietro, sarà dato da

$$P_1 + P_2 = \beta_j \qquad (27)$$

ossia da

$$P_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \right\} = \beta_i$$

essendo β_j una costante arbitraria. Questo integrale dicesi in Meccanica l'*equazione delle forze vive*.

Stante la relazione (27), la (14) del § 3 si ridurrà all'una od all'altra delle due forme

$$x = 2\int_\tau^t P_1 dt - \beta_j(t-\tau) \qquad (28)$$

$$x = \beta_j(t-\tau) - 2\int_\tau^t P_2 dt = \beta_j(t-\tau) + \int_\tau^t \left\{ \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \right\} dt \qquad (29)$$

La soluzione completa della (10), da cui dipendono gl'integrali delle proposte equazioni (26), sarà come nel § 11, art. V, espressa da

$$x = \beta_j(t-\tau) + z + x^\circ \qquad (30)$$

essendo z una soluzione completa dell'equazione differenziale parziale

$$\beta_j - P_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ m_i \left(\frac{dz}{dx_i}\right)^2 \right\} = 0 \qquad (31)$$

accompagnata dalle equazioni di condizione (23). La soluzione cercata z dipenderà dal sistema (39), (40), art. V, ove dovrà farsi

$$P_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu} \left\{ \frac{1}{m_i} \xi_i^2 \right\}$$

se le quantità

$$P_1\,,\quad L_1\,,\quad L_2\,,\ \ldots\ldots\ L_\pi$$

sono funzioni omogenee rispettivamente di grado

$$\varepsilon\,,\quad \gamma_1\,,\quad \gamma_2\,,\ \ldots\ldots\ \gamma_\pi\,.$$

La P_2 essendo di già omogenea di grado $\omega = 2$, la soluzione completa x della (10) sarà quella che risulta dall'eliminazione di β_j dalle espressioni (20), (21), art. IV, che nel caso attuale si riducono alle

$$x = z + \beta_j (t - \tau) + x^0 \qquad (32)$$

$$t - \tau = \frac{1}{\varepsilon \beta_j}\left(H - \frac{\varepsilon + 2}{2} z\right) \qquad (33)$$

avendo la z l'uno o l'altro dei due valori

$$z = \frac{2}{2+\varepsilon}\left(H + \varepsilon \beta_j K\right) \qquad (34)$$

$$z = -\frac{1}{\varepsilon} \beta_j^{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \int H \beta_j^{-\frac{3\varepsilon+2}{2\varepsilon}} d\beta_j \qquad (35)$$

nelle quali i valori di H, K dipenderanno dagl' integrali del sistema (39), art. V.

Inoltre assumendo per z l'uno o l'altro degli anzidetti valori, gl' integrali primi e gl' integrali finiti delle equazioni del moto (26) si otterranno dalle (42), art. V, coll' eliminazione della β_j cavata dall' ultima di esse. Adottando per z il valore dato dalla (35), se nelle equazioni citate (42) si pongono i valori delle differenziali di z, si avranno formole analoghe a quelle espresse dalle (26) del § 8, art. IV.

7. Se i punti materiali cui sono applicate le forze godono di un' assoluta libertà al moto e la condizione relativa alle X_1, X_2, ... X_ν continua ad essere verificata, le equazioni di condizione (9) non avendo più luogo dovrà farsi $\lambda_i = 0$ per tutti i valori di $i = 1, 2, ... \pi$. Le equazioni differenziali del moto (26) si ridurranno alle

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \left(\frac{dP_1}{dx_1}\right), \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right), \ldots\ldots m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \left(\frac{dP_1}{dx_\nu}\right) \qquad (36)$$

Supposto quindi che $x = \phi + x^\circ$ sia una soluzione completa espressa per valori iniziali dell'equazione differenziale parziale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = P_1 + \mathfrak{P}_2 \qquad (37)$$

in cui è

$$\mathfrak{P}_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu}\left\{\frac{1}{m_i}\left(\frac{dx}{dx_i}\right)^2\right\}$$

gl'integrali primi delle (36), ossia i valori delle velocità rettangolari $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$, date dalle (11) si ridurranno alle

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{m_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\right), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m_2}\left(\frac{d\phi}{dx_2}\right), \; .... \; \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{d\phi}{dx_\nu}\right) \qquad (38)$$

e gl'integrali finiti da cui dipendono i valori delle coordinate dei diversi punti espresse pel tempo t e pei valori iniziali delle coordinate stesse e delle velocità competenti ad un valor particolare $t = \tau$ saranno espressi da

$$\left(\frac{d\phi}{dx^\circ_1}\right) = -\xi^\circ_1, \quad \left(\frac{d\phi}{dx^\circ_2}\right) = -\xi^\circ_2, \; .... \; \left(\frac{d\phi}{dx^\circ_\nu}\right) = -\xi^\circ_\nu \qquad (39)$$

le ξ°_1, ξ°_2, ... essendo determinate dalle (19) che contengono le velocità iniziali.

Una soluzione completa della (37) potrà, come nel § 3, essere espressa da una delle formole (14), (15), (16).

La soluzione completa $x = \phi + x^\circ$ potrà in generale desumersi da tutti i 2ν integrali delle (17), espressi per valori iniziali, ossia dai 2ν integrali delle

$$\left.\begin{aligned} d\xi_1 &= \left(\frac{dP_1}{dx_1}\right)dt, \quad d\xi_2 = \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right)dt, \; .... \; d\xi_\nu = \left(\frac{dP_1}{dx_\nu}\right)dt \\ dx_1 &= \frac{1}{m_1}\xi_1 dt, \quad dx_2 = \frac{1}{m_2}\xi_2 dt, \; .... \; d\xi_\nu = \frac{1}{m_\nu}\xi_\nu dt \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

quando, eliminate le ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_ν^0 e determinate le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione delle coordinate x_1, x_2, ... x_ν, de' loro valori iniziali x_1^0, x_2^0, ... x_ν^0, e del tempo t si pongano nell'espressione (15), che diverrà una differenziale esatta e fornirà coll'integrazione la soluzione $x = \phi + x^0$.

Ma se del sistema (40) si ottiene col metodo indicato al § 10, art. III, un numero d'integrali idonei e sufficienti a determinare le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν in funzione delle coordinate e del tempo colle costanti β_1, β_2, ... β_ν fornite dalla immediata integrazione, e si pongono i loro valori nella (15), o, ciò che è lo stesso, se coi ν integrali primi del sistema (36) si determinano i valori delle velocità $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_\nu}{dt}$ da porsi nella (16), e s'integri l'espressione derivata esatta sotto $\int$, si otterrà la soluzione completa che si è indietro indicata con $x = \psi + \beta_{\nu+1}$ espressa per le costanti dell'integrazione. Allora gl'integrali finiti delle (36) contenenti le 2ν costanti arbitrarie

$$\beta_1\ ,\quad \beta_2\ ,\ ....\ \beta_\nu\ ,\quad h_1\ ,\quad h_2\ ,\ ....\ h_\nu \tag{41}$$

saranno dati, come si è avvertito al § 3, art. II, dalle

$$\left(\frac{d\psi}{d\beta_1}\right) = h_1\ ,\quad \left(\frac{d\psi}{d\beta_2}\right) = h_2\ ,\ ....\ \frac{d\psi}{d\beta_\nu} = h_\nu \tag{42}$$

Con queste equazioni finite del moto di numero $\nu = 3n$ si determineranno le $3n$ coordinate in funzione del tempo e delle $6n$ costanti arbitrarie (41).

Alle equazioni (42) possono sostituirsi quelle che derivano dalle (17), art. II, postovi $\nu + 1$ in luogo di ν e t per $x_{\nu+1}$. Esse nel caso attuale si riducono alle

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_1}\right)dx_i+\left(\frac{dP_2}{d\beta_1}\right)dt\right\}=h_1\\
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_2}\right)dx_i+\left(\frac{dP_2}{d\beta_2}\right)dt\right\}=h_2\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_\nu}\right)dx_i+\left(\frac{dP_2}{d\beta_\nu}\right)dt\right\}=h_\nu
\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

ove le espressioni sotto i segni integrali sono derivate esatte.

Se supponiamo che la funzione P_1 delle forze non contenga il tempo t, gl' integrali finiti delle (36), quali risultano dalle (13), art. III, postovi $\nu+1$ in luogo di ν, e t per $x_{\nu+1}$ ed avuto riguardo all' equazione delle forze vive (27), saranno espressi dalle

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_1}\right)dx_i\right\}=h_1\\
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_2}\right)dx_i\right\}=h_2\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_j}\right)dx_i\right\}=h_j-t\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu}\left(\frac{d\xi_i}{d\beta_\nu}\right)dx_i\right\}=h_\nu
\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

nelle quali le ξ_1, ξ_2, ... ξ_ν saranno determinate dalla (27) e da altri $\nu - 1$ integrali del sistema che risulta dalle (40), eliminatavi la dt col mezzo dell'espressione generica $dt = \frac{m_j}{\xi_j} dx_j$. Questi integrali potranno essi stessi ottenersi col citato metodo del § 10, art. III, come si è detto rispetto al sistema (40).

La funzione P_1 delle forze non contenendo la t, avranno luogo le formole (28), (29), (30) del § 6 colle conseguenze ivi indicate, ommesse le equazioni di condizione.

Se inoltre la funzione P_1 è omogenea di grado $= \varepsilon$ avranno luogo le (32), (33), (34), (35) colle conseguenze ivi accennate, avuto riguardo di porre $\lambda_i = 0$ dovunque esso compare, per tutti i valori di $i = 1$, 2, ... π.

8. Quando le equazioni differenziali del moto possono presentarsi sotto la forma (21), sussistendo le equazioni di condizione (20) ed ammettendo che le P_1, E, L_1, L_2, ... L_π siano funzioni delle sole variabili x_1, x_2, ... x_ν, t, e vogliansi integrare col metodo della variazione delle costanti arbitrarie riguardandovi la E come una funzione perturbatrice, avranno luogo tutte le conseguenze accennate al § 4 che potranno letteralmente applicarsi a quelle questioni della Dinamica, nelle quali le equazioni del moto si riducono all'anzidetta forma ed in cui sono verificate le condizioni volute dal citato paragrafo, non adempite le quali le formole che ne derivano non avrebber più luogo.

9. Se nella funzione P_1 delle forze s'intendono comprese tutte quelle che agiscono sui punti materiali, potendo anche contenere esplicitamente il tempo t, la funzione caratteristica determinata dalla (14) che, postovi $x = S$, si riduce a

$$S = \int \left\{ P_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \right\} dt \qquad (45)$$

l'integrale essendo definito fra due dati valori del tempo

$t = \tau$, $t = \tau_1$ è quella funzione che in Meccanica deve divenire massima o minima sussistendo le equazioni di condizione (23) che vincolano le coordinate dei punti. Vale a dire che i valori delle variabili x_1, x_2, ... x_ν in funzione di t che rendono massimo o minimo il valore di S dato dalla (45) sono i valori delle coordinate dei varj punti del sistema soggetti a vincoli qualunque che risolvono le quistioni della Dinamica.

Infatti le equazioni differenziali da cui dipendono i valori delle variabili x_1, x_2, ... in funzione di t che rendono massima o minima la S si deducono dalla variata dell'espressione sotto il segno integrale, ossia dall'equazione variata

$$\delta P_1 + \frac{1}{2}\delta\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = 0 \qquad (46)$$

ed esistendo le equazioni di condizione (23) avranno luogo insieme alla (46) le equazioni variate

$$\delta L_1 = 0\,,\quad \delta L_2 = 0\,,\ \ldots\ldots\ \delta L_\pi = 0 \qquad (47)$$

Ma supposto $P_1 = U - \Omega$, ove la U contenente le forze applicate sia determinata dalla

$$\Sigma\{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\} = \delta U$$

e la Ω contenente le forze interne sia determinata dalla

$$\delta\Omega = H\delta h + K\delta k + \ldots\ldots\ldots$$

essendo H, K, ... le accennate forze funzioni delle rispettive distanze h, k, ... dei punti su cui agiscono, l'equazione (46), avuto riguardo alle (47), coincide coll'equazione generale della Meccanica analitica applicata al moto di punti dotati di masse disuguali agenti gli uni sugli altri e soggetti a forze applicate ed alle equazioni di condizione (23). Deriva da ciò che le quistioni di Meccanica si riducono, nelle ammesse ipotesi, ad una questione di calcolo delle variazioni. Tale verità risulta implicitamente dal modo con cui nell'art. V si è fatto dipendere dal calcolo delle variazioni la ricerca della soluzione completa di un'equazione differenziale parziale di 1.° ordine.

Quando la funzione P_1 non contiene esplicitamente il tempo t, nel qual caso ha luogo l'equazione delle forze vive

$$P_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \beta_j \qquad (48)$$

la funzione caratteristica S si riduce, come si è veduto altrove, ad una delle due espressioni (25), (26) del § 3, le quali nel caso attuale diventano

$$S = 2\int P_1 dt - \beta_j(\tau_1 - \tau)$$

$$S = \beta_j(\tau_1 - \tau) + \int\left\{\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2\right\}dt,$$

ove gl'integrali debbono essere estesi da $t = \tau$ a $t = \tau_1$. L'integrale adunque che deve divenire massimo o minimo fra i limiti anzidetti sarà in questo caso l'uno o l'altro dei seguenti

$$\int P_1 dt\,, \quad \int\left\{\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2\right\}dt \qquad (49)$$

Chiamando v_1, v_2, ... le velocità dei punti m_1, m_2, ..., siccome sarà

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = v_1^2$$

$$\left(\frac{dx_4}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_5}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_6}{dt}\right)^2 = v_2^2$$

$$\vdots$$

così l'equazione (48) diverrà

$$P_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \beta_j \qquad (50)$$

e la 2.ª espressione delle (49) si cambierà nella

$$\int \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} (m_i v_i^2)\, dt \right\} \qquad (51)$$

Osservando inoltre essere $ds = v\,dt$, la precedente espressione si ridurrà alla

$$\int \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i\, ds_i \right\}$$

nella quale, riguardando la velocità v_i come funzione dello spazio s_i, dovrà l'integrale rispetto ad s_i essere compreso fra due posizioni date, l'una corrispondente a $t = \tau$, l'altra a $t = \tau_1$.

Siccome la (51) può esprimersi anche con

$$\int \Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 dt = \int \sqrt{\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2} \sqrt{\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (52)$$

e l'equazione (50) con

$$P_1 - \frac{1}{2}\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 = \beta_j$$

da cui

$$\sqrt{\Sigma m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2} = \sqrt{P_1 - \beta_j}\sqrt{2}$$

così l'espressione (52) che deve divenire massima o minima si ridurrà alla

$$\int \sqrt{P_1 - \beta_j}\,.\,\Sigma \sqrt{m_i}\, ds_i \qquad (53)$$

Finalmente se si indicano con c_1, c_2, ... i valori delle velocità v_1, v_2, ... competenti a $t = \tau$ e con P_1^0 ciò che diventa P_1 quando alle variabili ch' esso contiene si sostituiscano i loro valori iniziali x_1^0, x_2^0, ... l'equazione delle forze vive (50) si ridurrà alla nota forma

$$2(P_1 - P_1^0) = \Sigma m_i v_i^2 - \Sigma m_i c_i^2 \tag{54}$$

10. Per discendere a più particolari applicazioni, si rappresentino con x, y, z le coordinate alla fine del tempo t di un elemento qualunque dm di una massa fluida supposta, per maggior semplicità, omogenea, e con Xdm, Ydm, Zdm le componenti rettangolari della forza motrice di dm a questo istante, ove X, Y, Z saranno in generale funzioni di x, y, z, t. Le equazioni del moto di dm sono date, come è noto in Meccanica, dalle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{dp}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{dp}{dz} \tag{55}$$

essendo p la pressione sul punto dm alla fine di t riferita all'unità di superficie. La pressione p funzione in generale di x, y, z, t essendo una quarta incognita, si dovrà far concorrere alla risoluzione delle equazioni (55) una quarta equazione. Tale equazione è quella che proviene dall'invariabilità dell'elemento dm, e che supposto al solito

$$\frac{dx}{dt} = \xi_1, \quad \frac{dy}{dt} = \xi_2, \quad \frac{dz}{dt} = \xi_3$$

è espressa, come è noto, dalla

$$\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\xi_2}{dy} + \frac{d\xi_3}{dz} = 0 \tag{56}$$

Supposta avverata la condizione data dall'equazione

$$X dx + Y dy + Z dz = dF \tag{57}$$

se si pone $F - p = P_1$, le precedenti (55) diventano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP_1}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dP_1}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dP_1}{dz}$$

La forma di queste coincidendo con quella delle equazioni (8) del § 3, in cui sia

$$\lambda_i = 0, \quad \nu = 3, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

le equazioni date nel citato paragrafo sussisteranno in questo caso particolare. Chiamata quindi S la funzione caratteristica ivi indicata con x, l'equazione differenziale parziale (10) diverrà

$$\frac{dS}{dt} = F - p - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right\} \tag{58}$$

e le (14), (15) forniranno rispettivamente le

$$S = \int \left\{ F - p + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)\right\} dt$$

$$S = \int \left\{ \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz + \left(F - p - \tfrac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\right) dt \right\}.$$

Se fosse nota la funzione p e si conoscesse l'integrale completo S dell'equazione differenziale parziale (58), gl'integrali primi del sistema (55) sarebbero pur noti ed espressi da

$$\frac{dS}{dx} = \xi_1, \quad \frac{dS}{dy} = \xi_2, \quad \frac{dS}{dz} = \xi_3, \tag{59}$$

e noti pure sarebbero gl'integrali finiti desunti dalle (38), ovvero dalle (42). Ma essendo incognita la pressione p si dovrà determinare la S col mezzo dell'equazione differenziale parziale del 2.° ordine

$$\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{d^2S}{dy^2} + \frac{d^2S}{dz^2} = 0 \tag{60}$$

che risulta dalla (56), avuto riguardo ai valori delle ξ_1, ξ_2, ξ_3 dati dalle (59). Conosciuta la S, la pressione p verrà determinata dalla (58).

Le trovate equazioni (58), (60) sono quelle stesse date a pag. 687 e 688 della Meccanica di Poisson, vol. II, senz'altra condizione introdotta, tranne quella del differenziale esatto espresso dalla (57).

Dalle equazioni (59) si deducono pure le relazioni fra le tre velocità $u = \xi_1$, $v = \xi_2$, $w = \xi_3$ espresse da

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$$

una delle quali è una conseguenza delle altre due.

Se la F non contiene il tempo esplicito t e si suppone che il moto del fluido sia stabilito, la pressione p sarà funzione delle sole coordinate x, y, z ed un integrale del sistema sarà dato dalla (27) che si riduce alla $F - p - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \beta_j$, ossia alla $\frac{1}{2}V^2 = F - p - \beta_j$, ove la V esprime la velocità dell'elemento in moto.

11. Cerchisi ora il moto in un piano di un punto soggetto a forze che emanano da due centri fissi, rappresentate da funzioni delle rispettive distanze del punto dai detti centri. Nel piano determinato dai due centri d'azione e dal punto mobile s'intendano collocati gli assi delle coordinate x, y. Siano p, q le distanze del punto dai centri fissi alla fine del tempo t e le azioni cui è soggetto il mobile siano rappresentate rispettivamente dalle $\frac{dP}{dp}$, $\frac{dQ}{dq}$. Posto $P + Q = -P_1$ si sa che le equazioni differenziali di un tal movimento sono date dalle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP_1}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dP_1}{dy}$$

ossia, posto $x = x_1$, $y = x_2$, dalle equazioni

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dP_1}{dx_1}, \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dP_1}{dx_2} \tag{61}$$

Tali equazioni sono della forma di quelle del sistema (8) in cui si supponga $\lambda_i = 0$, $\nu = 2$, $m_1 = m_2 = 1$. Il sistema (61) equivale al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\left.\begin{array}{ll} d\xi_1 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_1}\right) dt, & dx_1 = \xi_1 dt \\ d\xi_2 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_2}\right) dt, & dx_2 = \xi_2 dt \end{array}\right\} \tag{62}$$

Inoltre la funzione P_1 non contenendo la variabile t, un integrale del sistema (62) sarà dato dalla (27), che nel caso attuale si riduce a

$$-(P+Q) - \tfrac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \beta_j \tag{63}$$

Se dal sistema (62) si elimina la dt, esso diventa

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_2 d\xi_1 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_1}\right) dx_2, & \xi_2 dx_1 = \xi_1 dx_2 \\ \xi_2 d\xi_2 = \left(\dfrac{dP_1}{dx_2}\right) dx_2, & \end{array}\right\} \tag{64}$$

Se di questo sistema indipendente da t si ottiene un altro integrale espresso da

$$F\left(\xi_1, \xi_2, \beta_1\right) = 0 \tag{65}$$

quale fu trovato da Eulero in una Memoria inserita negli Atti dell'Accademia di Berlino pel 1760 nell'ipotesi che il mobile sia soggetto all'ordinaria legge d'attrazione, si otterranno dalle equazioni (63), (65) i valori di ξ_1, ξ_2 in funzione delle x_1, x_2, β_1, β_j. Si avranno quindi gl'integrali finiti del moto col mezzo delle (44) che nel caso attuale si riducono a

$$\left.\begin{array}{l} \int\left\{\dfrac{d\xi_1}{d\beta_1}dx_1+\dfrac{d\xi_2}{d\beta_1}dx_2\right\}=h_1 \\[2ex] \int\left\{\dfrac{d\xi_1}{d\beta_j}dx_1+\dfrac{d\xi_2}{d\beta_j}dx_2\right\}=h_j-t \end{array}\right\} \qquad (66)$$

La 1.ª di queste equazioni, essendo fra le sole coordinate variabili $x_1=x$, $x_2=y$, fornirà l'orbita descritta dal punto nel supposto piano, e la 2.ª darà la relazione fra il tempo t e le coordinate stesse. Quando nell'equazione (27), ossia nella (63), si assuma negativa la costante arbitraria β_j, si avrà nella 2.ª della (66) h_j+t in luogo di h_j-t.
Inoltre, dietro quanto si è osservato nell'art. III, la soluzione completa dell'equazione differenziale parziale

$$\frac{dx}{dt}=-(P+Q)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dx}{dx_2}\right)^2\right\}.$$

che compete al sistema (64) e che manca della variabile t sarà data da

$$x=z+\beta_j(t-\tau)+x^\circ$$

essendo z la soluzione completa dell'equazione differenziale parziale

$$P+Q+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx_2}\right)^2\right\}+\beta_j=0.$$

Ma dal § 7 del citato articolo risulta che essendo z una soluzione completa della precedente equazione, deve avverarsi la relazione $\dfrac{dz}{d\beta_j}=-t+h_j$ essendo h_j una costante. Ma la soluzione stessa essendo, come si è veduto, espressa da

$$z=\int\left\{\xi_1 dx_1+\xi_2 dx_2\right\}$$

ove ξ_1, ξ_2 hanno i valori che risultano da due integrali del sistema (64), uno de' quali è la stessa equazione (63), ne risulta

$$\frac{dz}{d\beta_j} = \int \left\{ \frac{d\xi_1}{d\beta_j} dx_1 + \frac{d\xi_2}{d\beta_j} dx_2 \right\} = -t + h_j$$

che coincide colla 2.ª delle (66), com'era da aspettarsi.

12. Qualora il mobile sia soggetto all'azione di un solo centro fisso, rappresentata dalla nota legge di attrazione, i due integrali delle equazioni del sistema da cui dipendono i valori delle velocità ξ_1, ξ_2 saranno dati dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) &= \beta_j \\ x_1\xi_2 - x_2\xi_1 &= \beta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

che risultano dai due principj delle *forze vive* e delle *aree*, ed in cui la μ rappresenta la forza attrattiva all'unità di distanza e la r il raggio vettore. Fatto per compendio

$$2\mu r - 2\beta_j r^2 - \beta_1^2 = X \qquad (68)$$

si caverà dalle (67)

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\beta_1 x_2}{r^2} \pm \frac{x_1}{r^2}\sqrt{X} \\ \xi_2 &= \frac{\beta_1 x_1}{r^2} \pm \frac{x_2}{r^2}\sqrt{X} \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Da queste ottenendosi

$$\frac{d\xi_1}{d\beta_1} = -\frac{x_2}{r^2} \mp \frac{x_1\beta_1}{r^2\sqrt{X}}, \qquad \frac{d\xi_1}{d\beta_j} = \mp \frac{x_1}{\sqrt{X}}$$

$$\frac{d\xi_2}{d\beta_1} = \frac{x_1}{r^2} \mp \frac{x_2\beta_1}{r^2\sqrt{X}}, \qquad \frac{d\xi_2}{d\beta_j} = \mp \frac{x_2}{\sqrt{X}}$$

i primi membri delle (66) diverranno rispettivamente

$$\int\left\{\left(-\frac{x_2}{r^2}\mp\frac{x_1\beta_1}{r^2\sqrt{X}}\right)dx_1+\left(\frac{x_1}{r^2}\mp\frac{x_2\beta_1}{r^2\sqrt{X}}\right)dx_2\right\},$$

$$\int\left\{\mp\left(\frac{x_1}{\sqrt{X}}dx_1+\frac{x_2}{\sqrt{X}}dx_2\right)\right\}.$$

Se quindi s'indica con ϕ l'angolo che il raggio vettore fa coll'asse delle x, sarà

$$x_1 = r\cos\phi\,,\qquad x_2 = r\sin\phi \tag{70}$$

e perciò

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= -r\sin\phi\, d\phi + \cos\phi\, dr \\ dx_2 &= \quad r\cos\phi\, d\phi + \sin\phi\, dr \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Dietro ciò i citati primi membri delle (66) diverranno

$$\int\left\{\frac{d\xi_1}{d\beta_1}dx_1+\frac{d\xi_2}{d\beta_1}dx_2\right\}=\int\left\{d\phi\mp\frac{\beta_1}{r\sqrt{X}}dr\right\}$$

$$\int\left\{\frac{d\xi_1}{d\beta_j}dx_1+\frac{d\xi_2}{d\beta_j}dx_2\right\}=\mp\int\frac{rdr}{\sqrt{X}}.$$

Quindi dalle stesse (66) si avrà

$$\int\left\{d\phi\mp\frac{\beta_1}{r\sqrt{X}}dr\right\}=h_1$$

$$\mp\int\frac{rdr}{\sqrt{X}}=-t+h_j$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \pm\int\frac{\beta_1 dr}{r\sqrt{\{2\mu r-2\beta_j r^2-\beta_1^2\}}} &= \phi-h_1 \\ \pm\int\frac{r\,dr}{\sqrt{\{2\mu r-2\beta_j r^2-\beta_1^2\}}} &= t-h_j \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

che coincidono colle note equazioni del moto elittico espresse per quadrature, e dalle quali si ottengono le espressioni finite.

I precedenti risultati possono pure ottenersi cercando prima la funzione z espressa per le variabili r, ϕ, determinando poscia le sue differenziali parziali rispetto alle costanti β_1, β_j. Infatti essendo $z = \int \{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 \}$, se si pongono per ξ_1, ξ_2 gli ottenuti valori e si esprima quindi la z per le nuove variabili ϕ, r, si otterrà

$$z = \int \left\{ \beta_1 d\phi \pm \frac{\sqrt{X}}{r} dr \right\} = \beta_1 \phi \pm \int \frac{\sqrt{X}}{r} dr$$

Dalle relazioni

$$\frac{dz}{d\beta_1} = h_1 \,, \qquad \frac{dz}{d\beta_j} = h_j - t$$

che debbono avverarsi si dedurranno le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \phi \mp \int \frac{\beta_1 dr}{r\sqrt{\{ 2\mu r - 2\beta_j r^2 - \beta_1^2 \}}} &= h_1 \\ \pm \int \frac{r\, dr}{\sqrt{\{ 2\mu r - 2\beta_j r^2 - \beta_1^2 \}}} &= h_j - t \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

che coincidono colle già ottenute espressioni (72).

Non sarà inutile mostrare come nell'attuale questione si possano in altro modo determinare i valori delle ξ_1, ξ_2 e giungere per altra via alla cercata soluzione. Infatti dalla 2.ª delle (67), avuto riguardo alle (70), (71), risulta

$$x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1 = \beta_1 = r^2 \frac{d\phi}{dr} \qquad (74)$$

Siccome le equazioni differenziali del moto si riducono alle

$$\left.\begin{aligned} d\xi_1 &= \frac{d\frac{\mu}{r}}{dx_1}dt = \frac{\mu x_1}{r^3}dt \\ d\xi_2 &= \frac{d\frac{\mu}{r}}{dx_2}dt = \frac{\mu x_2}{r^3}dt \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

così, divisa la prima per $r^2 d\phi = \beta_1 dt$, quale risulta dalla (74), si avrà

$$\frac{d\xi_1}{r^2 d\phi} = \frac{\mu x_1}{r^3 \beta_1} = \frac{\mu}{r^2 \beta_1} \cos\phi .$$

Fatto lo stesso rispetto alla 2.ª delle (75), si ridurranno esse alle

$$d\xi_1 = \frac{\mu}{\beta_1}\cos\phi\, d\phi \;, \qquad d\xi_2 = \frac{\mu}{\beta_1}\sin\phi\, d\phi$$

dalle quali, integrando, si otterrà

$$\xi_1 = \frac{\mu}{\beta_1}\sin\phi + a \;, \qquad \xi_2 = -\frac{\mu}{\beta_1}\cos\phi + b \;,$$

essendo a, b due costanti arbitrarie. Con questi valori di ξ_1, ξ_2 la 1.ª delle (67) si riduce a

$$r = \mu : \left\{ \beta_j + \frac{\mu^2}{2\beta_1^2} + \frac{\mu}{\beta_1}\left(a\sin\phi - b\cos\phi\right) + \frac{a^2 + b^2}{2} \right\} \qquad (76)$$

e la (74) integrata diventa

$$t = \frac{1}{\beta_1}\int r^2 d\phi + c \qquad (77)$$

Le equazioni (76), (77) sono gl' integrali completi delle equazioni del moto (75). Ma contenendo esse cinque costanti in luogo di quattro, una sarà soprannumeraria e potrà destinarsi a verificare l'equazione $\beta_j + \frac{a^2 + b^2}{2} = 0$ che farà scomparire la costante β_j dalla (76), che diverrà

$$r = \frac{2\beta_1^2}{\mu} : \left\{ 1 + \frac{2\beta_1}{\mu} \left(a \sin \varphi - b \cos \varphi \right) \right\} \tag{78}$$

Questa rappresenta, sotto altra forma, l'orbita stessa che si otterrebbe dalla 1.ª delle (72).

13. Se il processo seguito pel moto del punto in un piano si applica al moto nello spazio, si dovrà esprimere la funzione caratteristica $z = \int \left\{ \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \xi_3 dx_3 \right\}$ per le costanti dell'integrazione. A questo scopo le ξ_1, ξ_2, ξ_3 dovranno essere determinate in funzione delle coordinate x_1, x_2, x_3 e delle tre costanti β_j, β_1, β_2 col mezzo dell'equazione delle forze vive e di due delle equazioni date dalla legge delle aree. Ottenuto il valore di z, le equazioni finite del moto del punto nello spazio saranno date dalle

$$\frac{dz}{d\beta_1} = h_1 , \quad \frac{dz}{d\beta_2} = h_2 , \quad \frac{dz}{d\beta_j} = h_j - t \tag{79}$$

Le due prime equazioni indipendenti da t rappresenteranno le projezioni su due piani coordinati dell'orbita descritta dal mobile e la terza fornirà la relazione fra il tempo t e le altre variabili.

14. Ottenute le equazioni del moto di un punto attratto verso un centro fisso derivandole dalla soluzione completa espressa per le costanti dell'integrazione, rimane a trattarsi la stessa questione partendo dalla soluzione completa contenente i valori iniziali, onde fornire un esempio dell'applicazione delle formole (32), (33) ai casi speciali. Da quest'applicazione si vedranno mano a mano scaturire le formole date dal signor Hamilton nelle Transazioni filosofiche di Londra pel 1834-1835 e riprodotte dal signor Jacobi nel vol. 17 del Giornale del signor Crelle.

Ritenute le denominazioni stabilite indietro pel moto di un punto nello spazio e posto $\frac{1}{2}\beta$ in luogo della costante β, l'equazione delle forze vive sarà data da

$$\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right) = \frac{1}{2}\beta \tag{80}$$

essendo

$$\xi_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad \xi_2 = \frac{dy}{dt}, \qquad \xi_3 = \frac{dz}{dt}$$

La soluzione completa dell'equazione differenziale parziale

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2\right\} \tag{81}$$

a cui nell'attuale questione si riduce l'equazione (10), sarà quella che risulta dall'eliminazione di β dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} S &= \sigma + \frac{\beta}{2}(t-\tau) + cost \\ t-\tau &= \frac{1}{\beta}(\sigma - 2H) \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

che risultano dalle (32), (33) postovi S, σ in luogo di x, z, il valore di σ essendo dato da una o dall'altra delle espressioni

$$\sigma = 2H - \beta K\,, \qquad \sigma = \beta^{-\frac{1}{2}}\int H\beta^{-\frac{1}{2}}d\beta \tag{83}$$

che risultano nelle ammesse ipotesi dalle (34), (35).

Si è veduto che, quando voglionsi introdurre i valori iniziali, devono prima esser noti gl'integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la soluzione completa, e che il vantaggio derivante da tale soluzione consiste specialmente nella forma simetrica e per molti riguardi assai comoda con cui possono presentarsi gl'integrali stessi del sistema. Nell'attuale questione gl'integrali in discorso sono dati dalle note formole del moto elittico, le quali, esprimendo il semi-grand'asse a e la velocità angolare media n per la costante β dell'equazione delle forze vive col mezzo delle relazioni

$$a = \frac{\mu}{\beta}, \quad n = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mu} = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\mu} \tag{84}$$

si riducono alle

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\mu}{\beta}\left(1 - e\cos u\right) \\ t\beta^{\frac{3}{2}} &= \mu\left(u - e\sin u\right) \\ \tan\frac{1}{2}v &= \sqrt{\left\{\frac{1+e}{1-e}\right\}}\cdot\tan\frac{1}{2}u \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

ove le r, e, u, v rappresentano rispettivamente il raggio vettore, l'eccentricità, l'anomalia eccentrica e l'anomalia vera.

Se si adotta per σ il 2.° dei valori (83), si dovrà, per ottenerne l'espressione finita, determinare la H in funzione di β. Perciò se nella differenziale per t della 1.ª delle (84) si pone il valore di $\frac{du}{dt}$ cavato dalla differenziale della 2.ª, posto $\frac{dr}{dt} = r'$, si otterrà $rr' = \mu\beta^{-\frac{1}{2}}e\sin u$. Indicando al solito coll'indice zero ciò che divengono le funzioni di t pel valore $t = \tau$ ed avuto riguardo al § 4, art. IV, si avrà

$$H = \Sigma - \Sigma_0 = rr' - r_0r'_0 = \mu\beta^{-\frac{1}{2}}e\left(\sin u - \sin u_0\right)$$

ossia posto

$$u + u_0 = 2G, \quad u - u_0 = 2g, \quad e\cos G = \cos h \tag{86}$$

si avrà $$H = 2\mu\beta^{-\frac{1}{2}} \cos h \sin g \tag{87}$$

Ma dalla 1.ª delle (84), avuto riguardo alle (86), risulta

$$r + r_0 = \frac{2\mu}{\beta}\left(1 - \cos h \cos g\right) \tag{88}$$

e dalla combinazione delle stesse (84) si ha

$$r \sin v = \frac{\mu}{\beta}\sqrt{(1-e^2)}.\sin u \ , \qquad r \cos v = \frac{\mu}{\beta}\left(\cos u - e\right)$$

le quali, posto $e = \sin\phi$, diventano

$$r \sin v = \frac{\mu}{\beta}\sin u \cos\phi \ , \qquad r \cos v = \frac{\mu}{\beta}\left(\cos u - \sin\phi\right) \tag{89}$$

Se si suppongono collocati nel piano dell'orbita gli assi delle coordinate x, y coll'origine al centro fisso e si chiamino X, Y le coordinate dell'estremità della r ed X_0, Y_0 quelle dell'estremità della r_0 sarà

$$\rho^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 \tag{90}$$

essendo ρ la retta che ne congiunge le estremità stesse. Supposto inoltre che l'asse delle x passi pel perielio, siccome si avrà

$$X = r\cos v \ , \quad Y = r \sin v \ , \quad X_0 = r_0 \cos v_0 \ , \quad Y_0 = r_0 \sin v_0$$

così la (90) diverrà primieramente

$$\rho^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\left\{\cos v \cos v_0 + \sin v \sin v_0\right\}.$$

Posto in questa per r^2, r_0^2 i valori desunti dalla 1.ª delle (84) e per

$$r\cos v \ , \quad r_0 \cos v_0 \ , \quad r \sin v \ , \quad r_0 \sin v_0$$

quelli derivati dalle (89), si otterrà

$$\rho^2 = \frac{\mu^2}{\beta^2}\left\{\left(\cos u - \cos u_0\right)^2 + \cos^2\phi\left(\sin u - \sin u_0\right)^2\right\}$$

dalla quale, avuto riguardo alle (86), si passerà alla

$$\rho = \frac{2\mu}{\beta}\sin g \sin h \tag{91}$$

Se quindi si pone

$$r + r_0 + \rho = p\,, \qquad r + r_0 - \rho = q$$

da queste colla sostituzione dei valori di $r + r_0$, e di ρ dati dalle (88), (91) si caverà

$$\cos(h+g) = 1 - \frac{\beta p}{2\mu}\,, \qquad \cos(h-g) = 1 - \frac{\beta q}{2\mu} \tag{92}$$

da cui si deduce

$$\sin(h+g) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(p - \frac{\beta p^2}{4\mu}\right)}\,, \qquad \sin(h-g) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(q - \frac{\beta q^2}{4\mu}\right)} \tag{93}$$

Quindi dalla loro differenza risulta

$$2\cos h \sin g = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\mu}}\left\{\sqrt{\left(p - \frac{\beta p^2}{4\mu}\right)} - \sqrt{\left(q - \frac{\beta q^2}{4\mu}\right)}\right\}$$

e la (87) darà

$$H = \sqrt{\mu p}\sqrt{\left(1 - \frac{\beta p}{4\mu}\right)} - \sqrt{\mu q}\sqrt{\left(1 - \frac{\beta q}{4\mu}\right)} \tag{94}$$

Con questo valore di H la 2.ª delle (83) diverrà

$$\sigma = \frac{\sqrt{\mu p}}{\sqrt{\beta}}\int\sqrt{\left(1 - \frac{\beta p}{4\mu}\right)}\cdot\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\mu q}}{\sqrt{\beta}}\int\sqrt{\left(1 - \frac{\beta q}{4\mu}\right)}\cdot\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

Se in questa si pone

$$\frac{\beta p}{4\mu} = sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon \ , \qquad \frac{\beta q}{4\mu} = sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon_1 \qquad (95)$$

per cui si potrà porre nel 1.° integrale

$$\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} = 2\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} cos \frac{1}{2}\varepsilon\, d\varepsilon \quad \text{e nel 2.°} \quad \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} = 2\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{q}} cos \frac{1}{2}\varepsilon_1 d\varepsilon_1 ,$$

si avrà

$$\sigma = \frac{2\mu}{\sqrt{\beta}}\left\{\int cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon\, d\varepsilon - \int cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon_1\, d\varepsilon_1\right\}$$

da cui integrando si otterrà

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\beta}}\left\{\varepsilon + sin\,\varepsilon - \varepsilon_1 - sin\,\varepsilon_1\right\} \qquad (96)$$

Dietro le posizioni (95), l'equazione (94) diverrà

$$H = \frac{\mu}{\sqrt{\beta}}\left(sin\,\varepsilon - sin\,\varepsilon_1\right) \qquad (97)$$

e la 2.ª delle (82) coi valori precedenti di σ ed H si ridurrà alla

$$t - \tau = \mu\beta^{-\frac{3}{2}}\left(\varepsilon - sin\,\varepsilon + sin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\right) \qquad (98)$$

Se colla 1.ª delle (84) s'introduce in luogo di β il semi-grand'asse a, la precedente diventa

$$t - \tau = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\left(\varepsilon - sin\,\varepsilon + sin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\right) \qquad (99)$$

che è la nota espressione del tempo impiegato a descrivere un arco elittico.

L' espressione (98) si ottiene parimente dalla relazione $\frac{d\sigma}{d\beta_j} = -(t-\tau)$ che, come si è altrove rimarcato, deve sempre aver luogo. Infatti, avuto riguardo alla 2.ª delle (83), la precedente relazione diventa

$$t-\tau = -2\frac{d\sigma}{d\beta} = \beta^{-\frac{3}{2}}\int H\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} - \frac{2H}{\beta}$$

che si riduce a $t-\tau = \frac{\sigma - 2H}{\beta}$, la quale coincide con quella precedentemente impiegata, cioè colla 2.ª delle (82), con cui, mediante gli ottenuti valori di σ, H si è trovata la (90). Giova notare che dalle formole (92), (95) risulta

$$h+g=\varepsilon\,,\qquad h-g=\varepsilon_1 \tag{100}$$

e quindi dalle (93).

$$\left.\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \frac{\sqrt{\beta p}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(1-\frac{\beta p}{4\mu}\right)}\,, \qquad \cos\varepsilon = 1-\frac{\beta p}{2\mu} \\ \sin\varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{\beta q}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(1-\frac{\beta q}{4\mu}\right)}\,, \qquad \cos\varepsilon_1 = 1-\frac{\beta q}{2\mu} \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Ottenuta la funzione caratteristica σ, gl' integrali primi e gl' integrali finiti delle equazioni del moto espressi sotto la forma (25), art. IV, si avranno dalle differenziali parziali di σ rispetto alle coordinate finali ed iniziali x, y, z, x_0, y_0, z_0.

A questo scopo se si indica con ζ una qualsivoglia delle anzidette coordinate e si considerino le ε, ε_1 come funzioni di ζ, si avrà dalla (96)

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{2\mu}{\sqrt{\beta}}\left\{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{d\varepsilon}{d\zeta} - \cos^2\frac{1}{2}\varepsilon_1\cdot\frac{d\varepsilon_1}{d\zeta}\right\} \tag{102}$$

Ma dalle (95) combinate colle (101) si ha

$$\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon = 1 - \frac{\beta p}{4\mu} = \frac{\mu \sin \varepsilon}{\beta p}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon_1 = 1 - \frac{\beta q}{4\mu} = \frac{\mu \sin \varepsilon_1}{\beta q}.$$

Quindi, riguardando p, q come funzioni di ζ, si avrà

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = \frac{\beta}{2\mu \sin \varepsilon} \cdot \frac{dp}{d\zeta}, \qquad \frac{d\varepsilon_1}{d\zeta} = \frac{\beta}{2\mu \sin \varepsilon_1} \cdot \frac{dq}{d\zeta}$$

e la (102) diverrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{\mu}{\sqrt{\beta}} \left\{ \frac{\sin \varepsilon}{p} \cdot \frac{dp}{d\zeta} - \frac{\sin \varepsilon_1}{q} \cdot \frac{dq}{d\zeta} \right\} \tag{103}$$

Limitando la ζ a rappresentare soltanto una delle coordinate finali x, y, z, la precedente, stante i valori di p, q espressi per r, r_0, ρ, diverrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{\mu}{\sqrt{\beta}} \left\{ \left(\frac{\sin \varepsilon}{p} - \frac{\sin \varepsilon_1}{q} \right) \frac{dr}{d\zeta} + \left(\frac{\sin \varepsilon}{p} + \frac{\sin \varepsilon_1}{q} \right) \frac{d\rho}{d\zeta} \right\}$$

ed avuto riguardo alle (101) e posto

$$\sqrt{\left\{ \frac{1}{p} - \frac{\beta}{4\mu} \right\}} = P, \qquad \sqrt{\left\{ \frac{1}{q} - \frac{\beta}{4\mu} \right\}} = Q,$$

si avrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \sqrt{\mu} \left\{ (P - Q) \frac{dr}{d\zeta} + (P + Q) \frac{d\rho}{d\zeta} \right\} \tag{104}$$

ove il 2.° membro sarà espresso in funzione di β e delle coordinate iniziali e finali, avvertendo essere

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Quando si limiti la ζ a rappresentare, non più una delle x, y, z, ma una qualunque delle coordinate iniziali x_0, y_0, z_0, il valore della relativa differenziale parziale $\frac{d\sigma}{d\zeta}$ si avrà dalla stessa (104) cambiandovi r in r_0.

Se nella (104) vuolsi che i coefficienti delle differenziali parziali $\frac{dr}{d\zeta}$, $\frac{d\rho}{d\zeta}$ siano espressi per ε, ε_1, si dovrà sostituirvi i valori di p, q desunti dalle (95), con che la (104) diverrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\left\{\left(\cot\frac{1}{2}\varepsilon - \cot\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)\frac{dr}{d\zeta} + \left(\cot\frac{1}{2}\varepsilon + \cot\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)\frac{d\rho}{d\zeta}\right\}$$

nella quale le ε, ε_1 saranno determinate in funzione delle coordinate iniziali e finali col mezzo delle equazioni (101). Se si osserva poi essere $\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{2} = h$, $\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{2} = g$, la precedente equazione assumerà la forma

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{\sqrt{\beta}}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon_1}\left\{\sin h\frac{d\rho}{d\zeta} - \sin g\frac{dr}{d\zeta}\right\}$$

e siccome dalle (95) si ha

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{\beta}{4\mu}\sqrt{pq}$$

si avrà primieramente

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{2\mu}{\sqrt{\beta pq}}\left\{\sin h\frac{d\rho}{d\zeta} - \sin g\frac{dr}{d\zeta}\right\} \tag{105}$$

e per essere

$$\sqrt{pq} = \sqrt{\left\{(r+r_0)^2 - \rho^2\right\}}\,, \qquad r^2 + r_0^2 - \rho^2 = 2rr_0\cos 2f$$

essendo f l'angolo compreso fra i due raggi vettori r, r_0, per cui deriva $\sqrt{pq} = 2 \cos f \sqrt{r r_0}$, la precedente espressione diverrà per ultimo

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{\mu}{\sqrt{\beta}\sqrt{r r_0}\cos f}\left(\sin h \frac{d\rho}{d\zeta} - \sin g \frac{dr}{d\zeta}\right) \tag{106}$$

Se in questa si suppone la ζ successivamente eguale ad x, y, z e cambiatovi r in r_0, si suppone successivamente eguale ad x_0, y_0, z_0, si otterranno i valori delle 6 differenziali parziali di σ da porsi nelle equazioni

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{d\sigma}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right), & \dfrac{d\sigma}{dy} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right), & \dfrac{d\sigma}{dz} = \left(\dfrac{dz}{dt}\right) \\[2ex] \dfrac{d\sigma}{dx_0} = -\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^0, & \dfrac{d\sigma}{dy_0} = -\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^0, & \dfrac{d\sigma}{dz_0} = -\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^0 \\[2ex] & \dfrac{d\sigma}{d\beta} = -\dfrac{1}{2}(t-\tau) & \end{array}\right\} \tag{107}$$

che derivano dalle citate equazioni (25), art. IV, col porre $\nu = 3$, $\beta_j = \frac{1}{2}\beta$ e rimpiazzare le x, x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 rispettivamente colle σ, x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$.

Se coll'ultima delle precedenti equazioni si elimina dalle altre la costante β, si avranno dalla 1.ª linea gl'integrali primi od intermedj, e dalla 2.ª gl'integrali finiti delle equazioni differenziali del moto elittico espressi per le variabili e pei soli valori iniziali delle coordinate e delle velocità rettangolari.

Qualora la questione proposta si riduca a quella del moto parabolico, siccome in tal caso scompare, come è noto, la costante dall'equazione delle forze vive, così le equazioni (96), (98) si presteranno a fornire i relativi valori di σ e di $t-\tau$ facendovi $\beta = 0$. Ma i termini

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{\beta}}\,,\qquad \frac{\varepsilon}{\beta}\,,\qquad \frac{\sin\varepsilon_1}{\sqrt{\beta}}\,,\qquad \frac{\varepsilon_1}{\beta}$$

compresi nel 2.° membro della prima delle citate equazioni, ed i termini

$$\frac{\varepsilon-\sin\varepsilon}{\beta\sqrt{\beta}}\,,\qquad \frac{\varepsilon_1-\sin\varepsilon}{\beta\sqrt{\beta}}$$

compresi nella seconda si riducono, pel valore $\beta=0$, a $\frac{0}{0}$. Quindi col metodo noto dei differenziali presi rispetto alla β esplicita ed implicita nelle ε, ε_1, come risulta dalle equazioni (101), si otterrà facilmente

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{\beta}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\,,\qquad \frac{\sin\varepsilon_1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\mu}}\,,$$

$$\frac{\varepsilon-\sin\varepsilon}{\beta\sqrt{\beta}}=\frac{p\sqrt{p}}{6\mu\sqrt{\mu}}\,,\qquad \frac{\varepsilon_1-\sin\varepsilon_1}{\beta\sqrt{\beta}}=\frac{q\sqrt{q}}{6\mu\sqrt{\mu}}$$

Con questi valori le (96), (98) si ridurranno alle

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=2\sqrt{\mu}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\\ t-\tau&=\frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left(p\sqrt{p}-q\sqrt{q}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(108)$$

Inoltre, rappresentando ζ una qualunque delle x, y, z, si dedurrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta}=\sqrt{\mu}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dp}{d\zeta}-\frac{1}{\sqrt{q}}\cdot\frac{dq}{d\zeta}\right\}=\sqrt{\mu}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{dr}{d\zeta}+\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{d\rho}{d\zeta}\right\}$$

e rappresentando ζ una qualunque delle x_0, y_0, z_0, si avrà

$$\frac{d\sigma}{d\zeta}=\sqrt{\mu}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{dr_0}{d\zeta}+\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{d\rho}{d\zeta}\right\}$$

Da queste, per gl' indicati valori di ζ, si otterranno quelli delle differenziali parziali di σ da porsi nelle equazioni (107) che forniranno con tal sostituzione gl' integrali primi e gl' integrali finiti delle equazioni differenziali del moto parabolico espressi per valori iniziali, come nel caso del moto elittico superiormente trattato.

Per ultimo resterebbe a darsi, quale esempio della variazione delle costanti arbitrarie, l'applicazione menzionata al § 4 delle formole dei §§ 15 ..... 20, art. V, e specialmente di questo ultimo, a qualche caso speciale, quale sarebbe quello di un punto materiale attratto verso un centro fisso e soggetto a perturbazioni provenienti da altre masse moventisi pur esse intorno al comun centro attrattivo. Ma questo problema, che per sè solo comprende una parte rilevante della teoria del sistema del mondo, non potrebbe trovar luogo nell'attuale Memoria di già soverchiamente estesa.

INDICE DEGLI ARTICOLI.

Errata all'Appendice delle Effemeridi pel 1848.

A pagina 121 linee 5, 6, 7, 8 in luogo del segno — posto nei binomii fra le $\{ \quad \}$ si ponga +

Errata all'Appendice delle Effemeridi pel 1849.

Pag.	8	lin.	6	art. VIII	leggi	art. VII
»	10	»	9	*idem*	»	*idem*
»	13	»	6	*idem*	»	*idem*
»	17	»	21	gli stessi	»	le stesse