EFFEMERIDI ASTRONOMICHE

DI MILANO

per l'anno bisestile 1848

CON

APPENDICE.

MILANO

DALL' IMPERIALE REGIA STAMPERIA

1847.

INDICE.

APPENDICE.

AVVERTIMENTO.

I luoghi del Sole e dei Pianeti vennero calcolati dal Sacerdote *Giovanni Capelli*, quelli della Luna dal signor *Nicola Piazzi* sotto la direzione del signor *Roberto Stambucchi.*

Gli Eclissi, le congiunzioni, le occultazioni ecc., ecc., dai signori, *Sacerdote Giovanni Capelli* e *Nicola Piazzi.*

Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.	Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.
	° ′ ″	″		° ′ ″	″
0	23 27 23,3	+ 2,0	190	23 27 23,2	− 0,9
10	23,3	2,2	200	23,3	0,6
20	23,5	2,4	210	23,5	0,5
30	23,7	2,3	220	23,6	0,7
40	23,8	2,1	230	23,9	1,0
50	24,1	1,7	240	24,1	1,3
60	24,2	1,2	250	24,2	1,8
70	24,3	0,7	260	24,2	2,3
80	24,3	+ 0,1	270	24,2	3,0
90	24,2	− 0,5	280	24,2	3,6
100	24,1	1,0	290	24,0	4,2
110	24,0	1,5	300	23,8	4,5
120	23,7	1,8	310	23,6	4,8
130	23,5	1,9	320	23,4	4,9
140	23,4	2,0	330	23,3	4,9
150	23,3	1,9	340	23,2	4,6
160	23,2	1,6	350	23,1	4,3
170	23,1	1,4	360	23,1	3,9
180	23,1	1,1	370	23,2	3,6

SPIEGAZIONE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIATURE.

SEGNI DEL ZODIACO.		PIANETI.	
♈	Ariete.	☿	Mercurio.
♉	Toro.	♀	Venere.
♊	Gemelli.	♁	Terra.
♋	Cancro.	♂	Marte.
♌	Leone.	⚳	Cerere.
♍	Vergine.	⚴	Pallade.
♎	Libra.	⚵	Giunone.
♏	Scorpione.	⚶	Vesta.
♐	Sagittario.	♃	Giove.
♑	Capricorno.	♄	Saturno.
♒	Aquario.	♅	Urano.
♓	Pesci.		

☉ Sole. ☽ Luna.

g indica	Giorni.	M indica	Mattina.
h	Ore.	S	Sera.
s	Segni.	A	Australe.
°	Gradi.	B	Boreale.
′	Minuti.	diff.	Differenza.
″	Secondi.	dist. min.	Distanza minima.
☌	Congiunzione.	imm.	Immersione.
☍	Opposizione.	em.	Emersione.
☊	Nodo ascendente.	AR.	Ascensione retta.
☋	Nodo discendente.	Lat.	Latitudine.

FESTE MOBILI.

Settuagesima			20	Febbrajo.
Giorno delle Ceneri			8	Marzo,
Pasqua di Risurrezione			23	Aprile.
Litanie alla Romana	29	30	31	Maggio.
Ascensione del Signore			1	Giugno.
Litanie all'Ambrosiana	5	6	7	Giugno.
Pentecoste			11	Giugno.
Santissima Trinità			18	Giugno.
Corpus Domini			22	Giugno.
Avvento all'Ambrosiana			12	Novembre.
Avvento alla Romana			3	Dicembre.

NUMERI DELL' ANNO.

Numero d'Oro	6.
Ciclo Solare	9.
Epatta	XXV.
Indizione Romana	6.
Lettera Domenicale	B. A.

QUATTRO TEMPORA.

Di Primavera	15	17	18	Marzo.
D' Estate	14	16	17	Giugno.
D' Autunno	20	22	23	Settembre.
D' Inverno	20	22	23	Dicembre.

ECLISSI DELL' ANNO 1848 IN TEMPO MEDIO.

5 Marzo.	Eclisse parziale di Sole invisibile a Milano.
	Congiunzione vera della Luna col Sole a $1^h\ 55'$.
19 Marzo.	Eclisse totale di Luna visibile a Milano.
. . . . . .	Principio dell' Eclisse a $7^h\ 53'$.
	Fine dell'Eclisse a $11^h\ 44'$.
. . . . .	Quantità dell' Eclisse digiti 19 minuti 13.
3 Aprile.	Eclisse parziale di Sole invisibile a Milano.
. . . . .	Congiunzione vera della Luna col Sole a $11^h\ 48'$.
28 Agosto.	Eclisse parziale di Sole invisibile a Milano.
. . . . . .	Congiunzione vera della Luna col Sole a $7^h\ 40'$.
12 Settem.	Eclisse totale di Luna in parte visibile a Milano.
. . . . . .	Principio dell' Eclisse a $17^h\ 8'$.
. . . . . .	Tramonta la Luna a $17^h\ 34'$.
. . . . . .	Fine dell'Eclisse a $20^h\ 44'$.
. . . . .	Quantità dell' Eclisse digiti 20 minuti 25.
26 Settem.	Eclisse parziale di Sole invisibile a Milano.
. . . . .	Congiunzione vera della Luna col Sole a $22^h\ 12'$.
8 e 9 Novem.	Passaggio di Mercurio sul disco del Sole visibile in parte.
	Primo contato esterno nell' immersione a $23^h\ 38'\ 25''$.
. . .	Contato interno . . . . $23^h\ 40'\ 3''$.
	Contato esterno nell'emers. a $5^h\ 2'\ 51''$. Sole sotto l'orizzonte.
. . . . . .	L'entrata di Mercurio sul disco del Sole avrà luogo al lembo orientale a 111° dall' estremità superiore del diametro verticale del Sole.

Occultazioni delle principali stelle dietro la Luna per l'anno 1848 a Milano.

Giorni del mese.	Astri occultati.	Tempo medio dell' immer.	Tempo medio dell' emers.	Distanza dal punto più alto della ☽ nell' em.	Cong. appar. sull' orbita.	Distanza minima dal lembo della ☽.
		h ′	h ′	°	h ′	′ ″
Genn. 16	α ♉ 1.ª	......	......	.....	4 37	(1) 0 0 A
21	ο ♌ 4.	......	......	.....	19 2	3 0 A
29	θ ♎ 4. 5.	14 36	15 38	95	.....	......
Febb. 12	α ♉ 1.	12 7	12 55	123	.....	......
15	λ ♊ 4. 5.	7 11	7 59	126	.....	......
15	k ♊ 5.	15 56	16 41	58	.....	......
Marzo 10	γ ♉ 3. 4.	......	......	.....	11 33	10 20 B
13	λ ♊ 4. 5.	14 30	15 7	15	.....	......
16	ο ♌ 4.	6 35	7 58	118	.....	......
Apr. 6 e 7	α ♉ 1.	23 37	0 45	118	.....	......
12	ο ♌ 4.	......	......	.....	14 52	3 45 B
20	θ ♎ 4. 5.	13 2	14 12	57	.....	......
24	ρ¹ ♐ 5.	14 17	15 29	124	.....	......
Maggio 7	k ♊ 5.	11 17	11 47	8	.....	......
11	d ♌ 5.	13 7	13 32	9	.....	......
31	α ♉ 1.	20 33	21 33	62	.....	......
Luglio 11	θ ♎ 4. 5.	9 55	10 23	15	.....	......
25	α ♉ 1.	......	......	.....	13 27	(2) 0 0 B
Agosto 18	μ ♓ 5.	12 55	13 26	159	.....	......
21	γ ♉ 3. 4.	11 48	12 46	125	.....	......
21	α ♉ 1.	20 17	21 31	62	.....	......
24	λ ♊ 4. 5.	13 36	14 4	80	.....	......
Sett. 15	ξ¹ Balena 5.	......	......	.....	15 27	2 0 A
29	k ♍ 4. 5.	......	......	.....	6 35	2 15 B
Nov. 11	α ♉ 1.	20 35	21 14	84	.....	......
22	90 k ♍ 4.	16 11	17 16	85	.....	......
Dicem. 9	α ♉ 1.	5 54	6 34	167	.....	......

(1) Tangente il lembo della Luna.

(2) Tangente il lembo della Luna.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
6	Luna nuova	$0^h 44'$
13	Primo quarto	0 23
20	Luna piena	0 41
28	Ultimo quarto	0 35

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	38 γ ♎ 4. 5.ª	22 33
2	46 θ ♎ 4. 5.ª	7 45
2	7 χ Ofiuco 5.ª	23 30
3	24 ♏ 5.ª	5 50
8	13 ν ♒ 5.ª	3 33
12	80 e ♓ 5.ª	13 0
16	61 δ^1 ♉ 4.ª	0 31
16	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	0 58
16	68 δ^3 ♉ 5.ª	1 35
16	Aldebaran 1.ª	5 31
16	104 m ♉ 5.ª	18 45
19	54 λ ♊ 4. 5.ª	1 27
19	68 k ♊ 5.ª	8 15
21	5 ξ ♌ 5.ª	13 20
21	14 o ♌ 4.ª	18 17
27	98 κ ♍ 4.ª	13 39
29	38 γ ♎ 4. 5.ª	7 11
29	44 η ♎ 4. 5.ª	11 36
29	46 θ ♎ 4. 5.ª	16 29
30	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	9 47

	GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
		I. SATELLITE.			
		h	'	''	
	1	3	3	22	imm.
	2	21	31	52	
	4	16	0	23	
*	6	12	42	22	em.
*	8	7	10	59	
	10	1	44	31	
	11	20	8	7	
*	13	14	36	41	
*	15	9	5	19	
	17	3	33	54	
	18	22	2	32	
	20	16	31	8	
*	22	10	59	50	
	24	5	28	27	
	25	23	57	7	
	27	18	25	45	
*	29	12	54	28	
*	31	7	23	8	
		II. SATELLITE.			
*	1	8	16	52	imm.
	4	21	34	51	
*	8	13	43	18	em.
	12	3	1	20	
*	15	16	20	11	
	19	5	38	15	
	22	18	57	2	
*	26	8	15	7	
	29	21	33	42	
		III. SATELLITE.			
*	3	13	42	16	imm.
	10	20	53	29	em.
	18	0	53	12	
	25	4	53	37	
		IV. SATELLITE.			
	11	19	25	22	em.
*	28	10	19	29	imm.
*	28	13	35	54	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
1	1	Sab.	0 3 35,27	18 44 35,94	18 41 0,08	7 39	4 21
2	2	Dom.	0 4 3,75	18 49 1,05	18 44 56,64	7 38	4 22
3	3	Lun.	0 4 31,91	18 53 25,85	18 48 53,20	7 38	4 22
4	4	Mart.	0 4 59,71	18 57 50,28	18 52 49,75	7 37	4 23
5	5	Merc.	0 5 27,10	19 2 14,31	18 56 46,31	7 37	4 23
6	6	Giov.	0 5 54,07	19 6 37,91	19 0 42,87	7 36	4 24
7	7	Ven.	0 6 20,58	19 11 1,05	19 4 39,42	7 35	4 25
8	8	Sab.	0 6 46,62	19 15 23,71	19 8 35,98	7 34	4 26
9	9	Dom.	0 7 12,13	19 19 45,85	19 12 32,53	7 34	4 26
10	10	Lun.	0 7 37,08	19 24 7,41	19 16 29,09	7 33	4 27
11	11	Mart.	0 8 1,45	19 28 28,40	19 20 25,64	7 32	4 28
12	12	Merc.	0 8 25,21	19 32 48,79	19 24 22,19	7 32	4 28
13	13	Giov.	0 8 48,35	19 37 8,55	19 28 18,75	7 31	4 29
14	14	Ven.	0 9 10,85	19 41 27,66	19 32 15,30	7 30	4 30
15	15	Sab.	0 9 32,68	19 45 46,10	19 36 11,86	7 29	4 31
16	16	Dom.	0 9 53,79	19 50 3,83	19 40 8,42	7 28	4 32
17	17	Lun.	0 10 14,20	19 54 20,85	19 44 4,98	7 26	4 34
18	18	Mart.	0 10 33,90	19 58 37,18	19 48 1,54	7 25	4 35
19	19	Merc.	0 10 52,87	20 2 52,75	19 51 59,10	7 24	4 36
20	20	Giov.	0 11 11,12	20 7 7,61	19 55 54,66	7 23	4 37
21	21	Ven.	0 11 28,62	20 11 21,71	19 59 51,21	7 22	4 38
22	22	Sab.	0 11 45,35	20 15 35,03	20 3 47,77	7 21	4 39
23	23	Dom.	0 12 1,30	20 19 47,59	20 7 44,32	7 20	4 40
24	24	Lun.	0 12 16,48	20 23 59,38	20 11 40,88	7 18	4 42
25	25	Mart.	0 12 30,89	20 28 10,36	20 15 37,43	7 17	4 43
26	26	Merc.	0 12 44,53	20 32 20,63	20 19 33,99	7 16	4 44
27	27	Giov.	0 12 57,40	20 36 30,08	20 23 30,54	7 15	4 45
28	28	Ven.	0 13 9,45	20 40 38,71	20 27 27,10	7 14	4 46
29	29	Sab.	0 13 20,70	20 44 46,54	20 31 23,65	7 13	4 47
30	30	Dom.	0 13 31,15	20 48 53,58	20 35 20,21	7 12	4 48
31	31	Lun.	0 13 40,81	20 52 59,82	20 39 16,76	7 11	4 49

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	9 10 14 46,4	23 3 37,4	+ 0,20	+ 0,55	9,9926615
2	9 11 15 57,3	22 58 40,9	0,22	0,63	9,9926644
3	9 12 17 8,3	22 53 16,9	0,24	0,70	9,9926692
4	9 13 18 19,4	22 47 25,6	0,25	0,75	9,9926759
5	9 14 19 30,5	22 41 6,9	0,27	0,77	9,9926843
6	9 15 20 41,5	22 34 21,4	0,29	0,75	9,9926943
7	9 16 21 52,3	22 27 9,1	0,31	0,71	9,9927059
8	9 17 23 2,8	22 19 30,2	0,33	0,65	9,9927191
9	9 18 24 12,9	22 11 24,9	0,35	0,53	9,9927340
10	9 19 25 22,4	22 2 53,6	0,36	0,41	9,9927508
11	9 20 26 31,4	21 53 56,4	0,38	0,28	9,9927695
12	9 21 27 39,7	21 44 33,6	0,40	0,15	9,9927902
13	9 22 28 47,5	21 34 45,7	0,41	0,01	9,9928129
14	9 23 29 54,4	21 24 32,7	0,43	− 0,12	9,9928379
15	9 24 31 0,5	21 13 55,1	0,45	− 0,22	9,9928653
16	9 25 32 5,8	21 2 53,0	0,47	− 0,30	9,9928951
17	9 26 33 10,3	20 51 26,9	0,48	− 0,36	9,9929274
18	9 27 34 14,8	20 39 37,1	0,50	− 0,41	9,9929623
19	9 28 35 17,0	20 27 23,9	0,51	− 0,41	9,9929998
20	9 29 36 19,1	20 14 47,4	0,53	− 0,38	9,9930401
21	10 0 37 20,6	20 1 48,3	0,55	− 0,32	9,9930832
22	10 1 38 21,2	19 48 26,7	0,56	− 0,24	9,9931240
23	10 2 39 21,4	19 34 42,9	0,58	− 0,13	9,9931776
24	10 3 40 20,9	19 20 37,5	0,59	− 0,01	9,9932288
25	10 4 41 19,5	19 6 10,7	0,61	+ 0,12	9,9932825
26	10 5 42 17,8	18 51 22,8	0,62	0,27	9,9933384
27	10 6 43 15,3	18 36 14,3	0,63	0,39	9,9933966
28	10 7 44 12,0	18 20 45,6	0,65	0,50	9,9934570
29	10 8 45 8,1	18 4 56,8	0,67	0,60	9,9935193
30	10 9 46 3,4	17 48 48,7	0,68	0,68	9,9935834
31	10 10 46 58,1	17 32 21,4	0,69	+ 0,73	9,9936492

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna: a mezzodì medio.	Longitudine della Luna: a mezzanotte media.	Latitudine della Luna: a mezzodì medio.	Latitudine della Luna: a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Sab.	7 11 37 46	7 17 39 26	3 1 8B	3 25 33B	20 39
2	Dom.	7 23 44 27	7 29 53 15	3 47 50	4 7 41	21 26
3	Lun.	8 6 6 10	8 12 23 29	4 24 49	4 38 55	22 17
4	Mart.	8 18 45 20	8 25 11 48	4 49 43	4 56 58	23 9
5	Merc.	9 1 42 50	9 8 18 21	5 0 25	4 59 56	* *
6	Giov.	9 14 58 5	9 21 41 47	4 55 23	4 46 39	0 2
7	Ven.	9 28 29 3	10 5 19 31	4 33 47	4 16 52	0 56
8	Sab.	10 12 12 45	10 19 8 17	3 56 5	3 31 41	1 50
9	Dom.	10 26 5 42	11 3 4 37	3 3 59	2 33 23	2 42
10	Lun.	11 10 4 41	11 17 5 35	2 0 21	1 25 24	3 34
11	Mart.	11 24 7 6	0 1 9 2	1 49 3	0 11 53	4 26
12	Merc.	0 8 11 16	0 15 13 41	0 25 30A	1 2 33A	5 18
13	Giov.	0 22 16 11	0 29 18 42	1 38 39	2 13 13	6 10
14	Ven.	1 6 21 7	1 13 23 19	2 45 46	3 15 45	7 3
15	Sab.	1 20 25 9	1 27 26 24	3 42 44	4 6 17	7 57
16	Dom.	2 4 26 48	2 11 26 3	4 26 3	4 41 47	8 53
17	Lun.	2 18 23 46	2 25 19 35	4 53 16	5 0 21	9 50
18	Mart.	3 2 13 3	3 9 3 45	5 3 1	5 1 19	10 46
19	Merc.	3 15 51 14	3 22 35 9	4 55 20	4 45 15	11 40
20	Giov.	3 29 15 6	4 5 50 50	4 31 21	4 13 56	12 32
21	Ven.	4 12 22 9	4 18 48 55	3 53 20	3 29 56	13 22
22	Sab.	4 25 11 7	5 1 28 49	3 4 7	2 36 18	14 9
23	Dom.	5 7 42 11	5 13 51 29	2 6 53	1 36 14	14 54
24	Lun.	5 19 57 2	5 25 59 15	1 4 45	0 32 46	15 37
25	Mart.	6 1 58 37	6 7 55 41	0 0 39	0 31 18B	16 20
26	Merc.	6 13 51 3	6 19 45 19	1 2 47B	1 33 31	17 3
27	Giov.	6 25 39 9	7 1 33 15	2 3 14	2 31 39	17 46
28	Ven.	7 7 28 17	7 13 24 57	2 58 32	3 23 35	18 31
29	Sab.	7 19 23 54	7 25 25 47	3 46 34	4 7 13	19 17
30	Dom.	8 1 31 12	8 7 40 45	4 25 17	4 40 29	20 6
31	Lun.	8 13 54 53	8 20 14 4	4 52 34	5 1 14	20 57

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a		Diametro orizzontale della Luna a		Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
			mezzo dì medio.	mezza notte media.	mezzo dì medio.	mezza notte media.		
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	15 23	14 43A	54 32	54 43	29 46	29 52	15 30	1 6
2	16 14	16 49	54 56	55 11	29 59	30 8	16 29	1 41
3	17 9	18 7	55 37	55 44	30 17	30 26	17 27	2 20
4	18 5	18 27	56 2	56 21	30 35	30 45	18 22	3 6
5	* *	* *	56 40	56 58	30 56	31 6	19 12	3 57
6	19 3	17 43	57 16	57 33	31 16	31 25	19 58	4 55
7	20 1	15 55	57 49	58 4	31 34	31 42	20 39	5 59
8	20 59	13 8	58 17	58 29	31 49	31 56	21 18	7 7
9	21 55	9 31	58 39	58 48	32 2	32 6	21 50	8 14
10	22 51	5 18	58 55	59 0	32 10	32 13	22 24	9 26
11	23 47	0 46	59 5	59 7	32 15	32 16	22 58	10 37
12	0 43	3 50B	59 9	59 9	32 17	32 17	23 32	11 47
13	1 39	8 12	59 9	59 7	32 17	32 16	* *	12 58
14	2 36	12 4	59 4	59 1	32 15	32 13	0 9	14 8
15	3 35	15 11	58 56	58 50	32 10	32 7	0 46	15 17
16	4 35	17 20	58 43	58 34	32 3	31 58	1 30	16 21
17	5 35	18 20	58 24	58 13	31 53	31 47	2 20	17 21
18	6 35	18 11	58 1	57 48	31 40	31 33	3 16	18 14
19	7 34	16 54	57 33	57 17	31 25	31 16	4 14	19 0
20	8 30	14 40	57 1	56 44	31 7	30 58	5 15	19 41
21	9 24	11 41	56 26	56 8	30 49	30 39	6 19	20 16
22	10 15	8 12	55 50	55 33	30 29	30 20	7 22	20 48
23	11 4	4 25	55 18	55 3	30 11	30 3	8 24	21 16
24	11 51	0 32	54 49	54 37	29 56	29 49	9 22	21 45
25	12 38	3 20A	54 28	54 20	29 44	29 40	10 20	22 12
26	13 25	7 1	54 15	54 12	29 37	29 35	11 19	22 40
27	14 12	10 24	54 12	54 14	29 35	29 36	12 18	23 8
28	15 1	13 22	54 19	54 26	29 39	29 43	13 17	23 41
29	15 51	15 46	54 35	54 48	29 48	29 55	14 14	* *
30	16 44	17 27	55 3	55 20	30 3	30 12	15 12	0 16
31	17 39	18 16	55 38	55 59	30 22	30 34	16 9	0 57

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$11^h 44'$	*Occidente*
1	.4 1. 2.	○	.3
2	.4 .3	○	.1 .2
3	.4 .1	○	3. .2
4	3.	○	.4,1.2.
5	2. 3. .1	○	.4
6	●1 .3 .2	○	.4
7		○	.1.3 .2 .4
8	●2 1.	○	.3 .4
9	2.	○	.1 3. 4.
10	1.	○	3. .2 4.
11	3.	○	.1 2. 4.
12	3. 2. .1	○	4.
13	3,4. .2	○	1.
14	4.	○	.3 .2 10
15	4. 1.	○	2. .3
16	4. 2.	○	.1 3.
17	.4 1.	○	2,3.
18	.4 .3	○	1. 2.
19	.4☌3 2. .1	○	
20	.3 2☌4	○	1.
21	.1.3	○	.4 .2
22	1.	○	2. .3.4
23	2.	○	.1 .3 .4
24	02 1.	○	3. .4
25	3.	○	.1,2. .4
26	3. 1☌2.	○	4.
27	.3 .2	○	1. 4.
28	.3.1	○	.2,4.
29	●1 4.	○	2. .3
30	4.2.	○	.1 .3
31	4. 1. .2	○	3.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
4	Luna nuova	$14^h\,19'$
11	Primo quarto	8 32
18	Luna piena.	16 33
26	Ultimo quarto	20 58

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	44 ρ^1 ♐ 5.ª	13 37
3	9 β ♑ 3. 4.ª	15 8
4	13 ν ♒ 4. 5.ª	12 18
5	43 θ ♒ 4. 5.ª	16 41
8	80 e ♓ 5.ª	18 57
12	61 δ^1 ♉ 4.ª	6 1
12	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	6 27
12	68 δ^3 ♉ 5.ª	7 8
12	Aldebaran 1.ª	11 7
13	104 m ♉ 5.ª	0 30
15	54 λ □ 4. 5.ª	8 22
15	68 k □ 5.ª	15 12
18	14 o ♌ 4.ª	2 10
19	58 d ♌ 5.ª	18 0
23	82 m ♍ 5.ª	5 39
23	94 ♍ 5.ª	17 24
23	98 $\varkappa$ ♍ 4.ª	21 27
25	38 γ ♎ 4. 5.ª	15 12
26	46 θ ♎ 4. 5.ª	0 43
26	8 ϕ Ofiuco 5.ª	18 16

Giorni.	Ecclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
2	1h 51′ 50″ em.
3	20 20 30
5	14 49 15
* 7	9 17 57
9	3 46 41
10	22 15 23
12	16 44 11
* 14	11 12 54
16	5 41 40
18	0 10 24
19	18 39 13
* 21	13 7 58
* 23	7 36 46
25	2 5 31
26	20 34 22
* 28	15 3 8
	II. Satellite.
* 2	10 51 57 em.
6	0 10 38
* 9	13 28 43
13	2 47 20
16	16 5 26
20	5 23 58
23	18 42 2
* 27	8 0 30
	III. Satellite.
* 1	8 53 51 em.
* 8	12 54 37 em.
* 15	13 38 44 imm.
15	16 54 52 em.
22	17 38 15 imm.
22	20 55 5 em.
29	21 37 47 imm.
	IV. Satellite.
14	4 21 42 imm.
* 14	7 46 32 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
32	1	Mart.	0 13 49,66	20 57 5,25	20 43 13,32	7 9	4 51
33	2	Merc.	0 13 57,70	21 1 9,86	20 47 9,87	7 8	4 52
34	3	Giov.	0 14 4,92	21 5 13,66	20 51 6,43	7 6	4 54
35	4	Ven.	0 14 11,32	21 9 16,63	20 55 2,98	7 5	4 55
36	5	Sab.	0 14 16,89	21 13 18,77	20 58 59,54	7 3	4 57
37	6	Dom.	0 14 21,65	21 17 20,10	21 2 56,09	7 2	4 58
38	7	Lun.	0 14 25,59	21 21 20,60	21 6 52,65	7 1	4 59
39	8	Mart.	0 14 28,72	21 25 20,30	21 10 49,20	7 0	5 0
40	9	Merc.	0 14 31,03	21 29 19,17	21 14 45,76	6 58	5 2
41	10	Giov.	0 14 32,53	21 33 17,23	21 18 42,31	6 57	5 3
42	11	Ven.	0 14 33,23	21 37 14,50	21 22 38,87	6 55	5 5
43	12	Sab.	0 14 33,12	21 41 10,93	21 26 35,42	6 54	5 6
44	13	Dom.	0 14 32,23	21 45 6,60	21 30 31,98	6 53	5 7
45	14	Lun.	0 14 30,59	21 49 1,50	21 34 28,53	6 51	5 9
46	15	Mart.	0 14 28,19	21 52 55,64	21 38 25,09	6 49	5 11
47	16	Merc.	0 14 25,02	21 56 49,01	21 42 21,64	6 48	5 12
48	17	Giov.	0 14 21,13	22 0 41,66	21 46 18,18	6 46	5 14
49	18	Ven.	0 14 16,52	22 4 33,58	21 50 14,73	6 45	5 15
50	19	Sab.	0 14 11,22	22 8 24,83	21 54 11,28	6 43	5 17
51	20	Dom.	0 14 5,23	22 12 15,37	21 58 7,84	6 42	5 18
52	21	Lun.	0 13 58,56	22 16 5,22	22 2 4,40	6 40	5 20
53	22	Mart.	0 13 51,23	22 19 54,44	22 6 0,95	6 38	5 22
54	23	Merc.	0 13 43,28	22 23 43,04	22 9 57,51	6 37	5 23
55	24	Giov.	0 13 34,75	22 27 31,03	22 13 54,06	6 35	5 25
56	25	Ven.	0 13 25,62	22 31 18,43	22 17 50,62	6 34	5 26
57	26	Sab.	0 13 15,90	22 35 5,23	22 21 47,17	6 32	5 28
58	27	Dom.	0 13 5,63	22 38 31,49	22 25 43,72	6 31	5 29
59	28	Lun.	0 12 54,83	22 42 37,22	22 29 40,27	6 29	5 31
60	29	Mart.	0 12 43,50	22 46 22,42	22 33 36,82	6 28	5 32

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	10 11 47 51,8	17 15 35,4	+ 0,70	+ 0,75	9,9937166
2	10 12 48 44,6	16 58 31,1	0,72	0,74	9,9937855
3	10 13 49 36,4	16 41 8,9	0,73	0,70	9,9938557
4	10 14 50 26,9	16 23 29,3	0,74	0,64	9,9939271
5	10 15 51 16,5	16 5 32,7	0,75	0,53	9,9939998
6	10 16 52 4,7	15 47 19,5	0,76	0,41	9,9940737
7	10 17 52 51,4	15 28 50,1	0,77	0,28	9,9941489
8	10 18 53 36,7	15 10 5,1	0,78	0,15	9,9942253
9	10 19 54 20,4	14 51 4,8	0,79	0,02	9,9943030
10	10 20 55 2,5	14 31 49,6	0,80	− 0,10	9,9943821
11	10 21 55 43,0	14 12 19,9	0,81	− 0,22	9,9944627
12	10 22 56 21,9	13 52 36,3	0,82	− 0,31	9,9945449
13	10 23 56 58,9	13 32 39,2	0,83	− 0,37	9,9946288
14	10 24 57 34,2	13 12 29,0	0,84	− 0,42	9,9947145
15	10 25 58 7,8	12 52 5,9	0,85	− 0,43	9,9948021
16	10 26 58 39,6	12 31 30,3	0,86	− 0,41	9,9948917
17	10 27 59 9,7	12 10 42,9	0,86	− 0,36	9,9949833
18	10 28 59 38,1	11 49 44,0	0,88	− 0,29	9,9950769
19	11 0 0 4,9	11 28 34,0	0,88	− 0,18	9,9951726
20	11 1 0 30,3	11 7 13,1	0,89	− 0,06	9,9952703
21	11 2 0 53,6	10 45 42,0	0,89	+ 0,07	9,9953700
22	11 3 1 15,7	10 24 0,8	0,90	0,20	9,9954715
23	11 4 1 36,2	10 2 10,0	0,91	0,32	9,9955749
24	11 5 1 55,3	9 40 10,0	0,92	0,43	9,9956801
25	11 6 2 12,9	9 18 1,2	0,92	0,54	9,9957867
26	11 7 2 29,1	8 55 44,0	0,93	0,62	9,9958947
27	11 8 2 43,8	8 33 18,8	0,93	0,67	9,9960040
28	11 9 2 57,0	8 10 45,9	0,94	0,69	9,9961143
29	11 10 3 8,6	7 48 5,8	0,95	0,68	9,9962256

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Mart.	8 26 38 36	9 3 8 44	5 6 17B	5 7 28B	21 49
2	Merc.	9 9 44 35	9 16 26 9	5 4 37	4 57 35	22 43
3	Giov.	9 23 13 18	10 0 5 45	4 46 16	4 30 41	23 38
4	Ven.	10 7 3 7	10 14 4 54	4 10 54	3 47 5	* *
5	Sab.	10 21 10 30	10 28 19 16	3 19 32	2 48 38	0 32
6	Dom.	11 5 30 27	11 12 43 22	2 14 49	1 38 40	1 26
7	Lun.	11 19 57 17	11 27 11 30	1 0 49	0 21 54	2 20
8	Mart.	0 4 25 26	0 11 38 31	0 17 22A	0 56 20A	3 13
9	Merc.	0 18 50 17	0 26 0 20	1 34 18	2 10 39	4 6
10	Giov.	1 3 8 23	1 10 14 11	2 44 47	3 16 12	5 0
11	Ven.	1 17 17 31	1 24 18 17	3 44 27	4 9 8	5 54
12	Sab.	2 1 16 22	2 8 11 41	4 29 58	4 46 42	6 49
13	Dom.	2 15 4 10	2 21 53 47	4 59 11	5 7 19	7 44
14	Lun.	2 28 40 27	3 5 24 7	5 11 6	5 10 34	8 39
15	Mart.	3 12 4 45	3 18 42 16	5 5 46	4 56 55	9 33
16	Merc.	3 25 16 35	4 1 47 40	4 44 12	4 27 52	10 25
17	Giov.	4 8 15 28	4 14 39 54	4 8 13	3 45 35	11 14
18	Ven.	4 21 0 58	4 27 18 40	3 20 18	2 52 46	12 2
19	Sab.	5 3 33 3	5 9 44 10	2 23 22	1 52 29	12 48
20	Dom.	5 15 52 12	5 21 57 18	1 20 31	0 47 50	13 32
21	Lun.	5 27 59 42	6 3 59 42	0 14 49	0 18 11B	14 15
22	Mart.	6 9 57 37	6 15 53 53	0 50 48B	1 22 45	14 58
23	Merc.	6 21 48 52	6 27 43 6	1 53 43	2 23 25	15 41
24	Giov.	7 3 37 4	7 9 31 20	2 51 35	3 17 56	16 25
25	Ven.	7 15 26 27	7 21 23 1	3 42 14	4 4 16	17 10
26	Sab.	7 27 21 39	8 3 22 57	4 23 46	4 40 31	17 57
27	Dom.	8 9 27 32	8 15 36 0	4 54 16	5 4 49	18 46
28	Lun.	8 21 48 55	8 28 6 50	5 11 57	5 15 27	19 36
29	Mart.	9 4 30 12	9 10 59 28	5 15 7	5 10 48	20 28

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	18 36	18 6A	56 21	56 45	30 46	30 59	17 0	1 44
2	19 34	16 51	57 8	57 32	31 12	31 25	17 50	2 39
3	20 33	14 31	57 55	58 17	31 37	31 49	18 33	3 40
4	* *	* *	58 38	58 57	32 1	32 11	19 13	4 48
5	21 31	11 13	59 13	59 27	32 20	32 27	19 50	5 57
6	22 29	7 10	59 38	59 45	32 33	32 37	20 26	7 9
7	23 27	2 37	59 50	59 52	32 40	32 41	21 1	8 24
8	0 24	2 6B	59 52	59 48	32 41	32 39	21 34	9 35
9	1 21	6 39	59 42	59 34	32 36	32 31	22 11	10 48
10	2 19	10 45	59 25	59 14	32 26	32 20	22 49	12 0
11	3 18	14 8	59 2	58 49	32 14	32 7	23 31	13 8
12	4 17	16 35	58 35	58 22	31 59	31 52	* *	14 13
13	5 16	17 58	58 7	57 53	31 44	31 36	0 17	15 13
14	6 15	18 14	57 38	57 24	31 28	31 20	1 9	16 8
15	7 13	17 23	57 10	56 55	31 13	31 5	2 5	16 57
16	8 9	15 34	56 41	56 27	30 57	30 49	3 5	17 38
17	9 3	12 57	56 13	55 59	30 41	30 34	4 5	18 14
18	9 54	9 42	55 45	55 31	30 26	30 19	5 7	18 47
19	10 44	6 4	55 18	55 6	30 12	30 5	6 9	19 18
20	11 32	2 13	54 53	54 42	29 58	29 52	7 10	19 46
21	12 19	1 40A	54 32	54 24	29 46	29 42	8 8	20 14
22	13 6	5 26	54 17	54 11	29 38	29 35	9 7	20 42
23	13 54	8 56	54 7	54 5	29 33	29 32	10 7	21 9
24	14 41	12 4	54 6	54 9	29 32	29 34	11 5	21 41
25	15 30	14 41	54 14	54 21	29 36	29 40	12 2	22 14
26	16 22	16 40	54 31	54 43	29 46	29 53	12 59	22 52
27	17 14	17 52	54 59	55 16	30 1	30 10	13 55	23 36
28	18 9	18 11	55 37	55 59	30 22	30 34	14 48	* *
29	19 5	17 29	56 23	56 48	30 47	31 1	15 37	0 25

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	10^h 13′	*Occidente*
1	4. 3. 1.	○	2.
2	.4 3. 2.	○	.1
3	.4 .3 .2 1.	○	
4	.4 .3	○	1δ2
5	1. .4	○	2δ3
6	2.	○	1. .4 .3
7	1δ2	○	3. .4
8	●1 3.	○	.2 .4
9	●2 3.	○	.1 .4
10	.3 .2 1.	○	4.
11	.3	○	.2 .1 4.
12	.1	○	.3,2. 4.
13	2.	○	4δ1 .3
14	2,4δ1	○	3.
15	●3 4.	○	1. .2
16	4. 3.	○	2. 10
17	4. 3. 2. 1.	○	
18	.4 .3	○	.2 .1
19	.4 1.	○	.3 2.
20	.4 2.	○	1. .3
21	.4 .2δ1	○	3.
22		○	.43δ1 .2
23	3. .1	○	2. .4
24	3. 2. 1.	○	.4
25	02 .3	○	.1 .4
26	1.	○	.3 2. .4
27	2.	○	.1 .3 4.
28	.2δ1	○	3. 4.
29		○	1δ3. .2 4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Luna nuova	1h 54′
11	Primo quarto	17 18
19	Luna piena	9 47
27	Ultimo quarto	13 55

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	55 e² ♐ 5.ª	8 51
2	9 β ♑ 3. 4.ª	1 29
2	13 ν ♒ 5.ª	22 45
4	43 θ ♒ 4. 5.ª	2 55
7	80 e ♓ 5.ª	3 23
7	110 o ♓ 5.ª	19 11
10	54 γ ♉ 3. 4.ª	10 8
10	61 δ¹ ♉ 4.ª	11 56
10	64 δ² ♉ 4. 5.ª	12 22
10	68 δ³ ♉ 5.ª	13 4
10	Aldebaran 1.ª	17 0
13	λ ♋ 4. 5.ª	14 2
13	68 k ♋ 5.ª	20 48
16	14 o ♌ 4.ª	8 26
21	82 m ♍ 5.ª	12 36
22	98 κ ♍ 4.ª	4 25
24	44 η ♎ 4. 5.ª	2 47
24	46 θ ♎ 4. 5.ª	7 48
25	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	1 31
30	13 ν ♒ 5.ª	8 51

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	h ′ ″
* 1	9 31 58 imm.
3	4 0 44
4	22 29 36
6	16 58 24
* 8	11 27 15
10	5 56 2
12	0 24 56
13	18 53 44
* 15	13 22 36
* 17	7 51 24
19	2 20 18
20	20 49 7
22	15 18 0
* 24	9 46 49
26	4 15 44
27	22 44 33
29	17 13 27
* 31	11 42 16
	II. Satellite.
1	21 18 34 imm.
* 5	10 36 56
8	23 54 58
* 12	13 13 13
16	2 31 15
19	15 49 56
23	5 7 24
26	18 25 29
* 30	7 43 24
	III. Satellite.
1	0 55 17 em.
8	1 37 30 imm.
8	4 55 41 em.
15	5 57 33 imm.
* 15	8 56 42 em.
* 22	9 37 58 imm.
* 22	12 57 25 em.
* 29	13 38 28 imm.
29	16 58 34 em.
	IV. Satellite.
1	22 25 8 imm.
2	1 57 50 em.
18	16 28 16 imm.
18	20 8 21 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
61	1	Merc.	0 12 31,69	22 50 7,13	22 37 33,38	6 26	5 34
62	2	Giov.	0 12 19,39	22 53 51,34	22 41 29,93	6 25	5 35
63	3	Ven.	0 12 6,60	22 57 35,07	22 45 26,49	6 24	5 36
64	4	Sab.	0 11 53,35	23 1 18,33	22 49 25,03	6 22	5 38
65	5	Dom.	0 11 39,67	23 5 1,16	22 53 19,58	6 21	5 39
66	6	Lun.	0 11 25,56	23 8 43,55	22 57 16,13	6 19	5 41
67	7	Mart.	0 11 11,03	23 12 25,54	23 1 12,78	6 18	5 42
68	8	Merc.	0 10 56,11	23 16 7,13	23 5 9,23	6 16	5 44
69	9	Giov.	0 10 40,79	23 19 48,32	23 9 5,78	6 15	5 45
70	10	Ven.	0 10 25,12	23 23 29,16	23 13 2,33	6 13	5 47
71	11	Sab.	0 10 9,11	23 27 9,66	23 16 58,88	6 12	5 48
72	12	Dom.	0 9 52,78	23 30 49,83	23 20 55,43	6 10	5 50
73	13	Lun.	0 9 36,15	23 34 29,68	23 24 51,90	6 9	5 51
74	14	Mart.	0 9 19,21	23 38 9,26	23 28 48,53	6 7	5 53
75	15	Merc.	0 9 2,00	23 41 48,57	23 32 45,09	6 5	5 55
76	16	Giov.	0 8 44,57	23 45 27,65	23 36 41,64	6 4	5 56
77	17	Ven.	0 8 26,92	23 49 6,50	23 40 38,19	6 2	5 58
78	18	Sab.	0 8 9,06	23 52 45,14	23 44 34,74	6 1	5 59
79	19	Dom.	0 7 51,05	23 56 23,63	23 48 31,29	5 59	6 1
80	20	Lun.	0 7 32,89	0 0 1,98	23 52 27,85	5 58	6 2
81	21	Mart.	0 7 14,59	0 3 40,18	23 56 24,40	5 56	6 4
82	22	Merc.	0 6 56,21	0 7 18,30	0 0 20,95	5 54	6 6
83	23	Giov.	0 6 37,76	0 10 56,35	0 4 17,50	5 53	6 7
84	24	Ven.	0 6 19,26	0 14 34,33	0 8 14,05	5 51	6 9
85	25	Sab.	0 6 0,72	0 18 12,30	0 12 10,60	5 50	6 10
86	26	Dom.	0 5 42,17	0 21 50,26	0 16 7,15	5 48	6 12
87	27	Lun.	0 5 23,63	0 25 28,22	0 20 3,70	5 46	6 14
88	28	Mart.	0 5 5,15	0 29 6,24	0 24 0,25	5 45	6 15
89	29	Merc.	0 4 46,71	0 32 44,30	0 27 56,80	5 43	6 17
90	30	Giov.	0 4 28,34	0 36 22,43	0 31 53,36	5 41	6 19
91	31	Ven.	0 4 10,07	0 40 0,66	0 35 49,91	5 40	6 20

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	11 11 3 18,7	7 25 18,9	+ 0,95	+ 0,65	9,9963376
2	11 12 3 27,2	7 2 25,4	0,96	0,59	9,9964502
3	11 13 3 34,0	6 39 26,0	0,96	0,50	9,9965632
4	11 14 3 38,9	6 16 21,1	0,97	0,39	9,9966767
5	11 15 3 42,1	5 53 10,9	0,97	0,27	9,9967907
6	11 16 3 43,3	5 29 55,8	0,97	0,12	9,9969049
7	11 17 3 42,6	5 6 36,6	0,97	− 0,05	9,9970193
8	11 18 3 39,9	4 43 13,5	0,98	− 0,18	9,9971340
9	11 19 3 34,9	4 19 46,8	0,98	− 0,28	9,9972491
10	11 20 3 27,8	3 56 16,9	0,98	− 0,36	9,9973646
11	11 21 3 18,5	3 32 44,1	0,98	− 0,43	9,9974806
12	11 22 3 6,9	3 9 9,0	0,98	− 0,47	9,9975971
13	11 23 2 53,0	2 45 32,0	0,99	− 0,49	9,9977141
14	11 24 2 39,9	2 21 53,3	0,99	− 0,47	9,9978319
15	11 25 2 18,4	1 58 13,4	0,99	− 0,43	9,9979506
16	11 26 1 57,8	1 34 32,6	0,99	− 0,37	9,9980703
17	11 27 1 34,9	1 10 51,2	0,99	− 0,27	9,9981909
18	11 28 1 9,8	0 47 9,5	0,99	− 0,15	9,9983125
19	11 29 0 42,7	0 23 27,9	0,99	− 0,03	9,9984352
20	0 0 0 13,6	0 0 13,2	0,99	+ 0,10	9,9985588
21	0 0 59 42,3	0 23 53,3 Boreale	0,99	0,24	9,9986833
22	0 1 59 9,2	0 47 32,3	0,99	0,36	9,9988087
23	0 2 58 54,2	1 11 9,9	0,98	0,46	9,9989349
24	0 3 57 57,2	1 34 45,7	0,98	0,55	9,9990618
25	0 4 57 18,5	1 58 19,3	0,98	0,61	9,9991893
26	0 5 56 38,1	2 21 50,5	0,98	0,63	9,9993173
27	0 6 55 55,8	2 45 18,8	0,98	0,64	9,9994454
28	0 7 55 11,8	3 8 43,9	0,97	0,61	9,9995736
29	0 8 54 26,1	3 32 5,6	0,97	0,55	9,9997017
30	0 9 53 38,5	3 55 23,3	0,97	0,47	9,9998295
31	0 10 52 49,1	4 18 36,8	0,97	0,36	9,9999568

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Merc.	9 17 34 56	9 24 16 49	5 2 20B	4 49 38B	21 22
2	Giov.	10 1 5 12	10 8 0 3	4 32 41	4 11 30	22 16
3	Ven.	10 15 1 9	10 22 8 7	3 46 14	3 17 7	23 11
4	Sab.	10 29 20 28	11 6 37 32	2 44 31	2 8 51	* *
5	Dom.	11 13 58 30	11 21 22 31	1 30 43	0 50 48	0 6
6	Lun.	11 28 48 36	0 6 15 46	0 9 48	0 31 30A	1 0
7	Mart.	0 13 43 1	0 21 9 25	1 12 17A	1 51 45	1 56
8	Merc.	0 28 34 3	1 5 56 7	2 29 11	3 3 56	2 51
9	Giov.	1 13 14 56	1 20 29 55	3 35 23	4 3 6	3 47
10	Ven.	1 27 40 38	2 4 46 44	4 26 42	4 45 57	4 44
11	Sab.	2 11 48 0	2 18 44 19	5 0 40	5 10 48	5 40
12	Dom.	2 25 35 42	3 2 22 10	5 16 21	5 17 26	6 35
13	Lun.	3 9 3 53	3 15 40 59	5 14 9	5 6 44	7 29
14	Mart.	3 22 13 41	3 28 42 14	4 55 23	4 40 21	8 21
15	Merc.	4 5 6 52	4 11 27 51	4 21 57	4 0 29	9 11
16	Giov.	4 17 45 23	4 23 59 45	3 36 18	3 9 44	9 59
17	Ven.	5 0 11 9	5 6 19 48	2 41 7	2 10 50	10 44
18	Sab.	5 12 25 57	5 18 29 49	1 39 15	1 6 43	11 29
19	Dom.	5 24 31 36	6 0 31 30	0 33 37	0 0 18	12 13
20	Lun.	6 6 29 47	6 12 26 42	0 32 52B	1 5 32B	12 56
21	Mart.	6 18 22 32	6 24 17 52	1 37 24	2 8 8	13 39
22	Merc.	7 0 12 0	7 0 6 17	2 37 27	3 5 3	14 21
23	Giov.	7 12 0 45	7 17 55 45	3 30 41	3 54 6	15 6
24	Ven.	7 23 51 43	7 29 49 6	4 15 3	4 33 20	15 52
25	Sab.	8 5 48 19	8 11 49 54	4 48 44	5 1 3	16 39
26	Dom.	8 17 54 19	8 24 2 6	5 10 6	5 15 44	17 28
27	Lun.	9 0 13 46	9 6 29 50	5 17 46	5 16 4	18 18
28	Mart.	9 12 50 49	9 19 17 12	5 10 31	5 1 1	19 10
29	Merc.	9 25 49 24	10 2 27 49	4 47 30	4 29 57	20 2
30	Giov.	10 9 12 45	10 16 4 23	4 8 24	3 42 58	20 55
31	Ven.	10 23 2 47	11 0 7 51	3 13 50	2 41 17	21 49

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	20 3	15 45A	57 15	57 43	31 15	31 31	16 22	1 22
2	21 1	12 58	58 11	58 58	31 46	32 1	17 5	2 25
3	22 0	9 17	59 4	59 29	32 15	32 28	17 47	3 33
4	* *	* *	59 49	60 7	32 39	32 49	18 21	4 44
5	22 59	4 54	60 23	60 34	32 58	33 4	18 56	6 1
6	23 58	0 8	60 42	60 45	33 8	33 10	19 33	7 14
7	0 57	4 40B	60 43	60 38	33 9	33 6	20 9	8 29
8	1 57	9 8	60 30	60 18	33 2	32 55	20 47	9 44
9	2 57	12 55	60 2	59 46	32 47	32 38	21 30	10 56
10	3 57	15 47	59 26	59 6	32 27	32 16	22 15	12 5
11	4 58	17 33	58 44	58 22	32 4	31 52	23 6	13 9
12	5 57	18 10	58 0	57 39	31 40	31 28	* *	14 4
13	6 55	17 40	57 19	56 59	31 17	31 6	0 0	14 55
14	7 51	16 9	56 40	56 22	30 56	30 46	0 59	15 37
15	8 45	13 49	56 5	55 49	30 37	30 28	1 59	16 16
16	9 37	10 49	55 35	55 22	30 21	30 14	3 0	16 50
17	10 27	7 22	55 9	54 57	30 7	30 0	4 0	17 20
18	11 15	3 37	54 47	54 37	29 54	29 49	5 1	17 49
19	12 3	0 14A	54 28	54 20	29 44	29 40	6 1	18 17
20	12 50	4 3	54 13	54 8	29 36	29 33	6 59	18 46
21	13 36	7 40	54 4	54 0	29 31	29 29	7 59	19 13
22	14 24	10 57	53 59	53 59	29 29	29 29	8 56	19 41
23	15 13	13 45	54 1	54 4	29 30	29 31	9 53	20 15
24	16 2	15 58	54 10	54 18	29 34	29 39	10 51	20 50
25	16 54	17 28	54 28	54 39	29 44	29 50	11 46	21 30
26	17 47	18 8	54 54	55 10	29 58	30 7	12 38	22 17
27	18 41	17 53	55 29	55 51	30 17	30 29	13 29	23 8
28	19 37	16 39	56 14	56 39	30 42	30 56	14 15	* *
29	20 33	14 25	57 6	57 34	31 10	31 26	14 57	0 8
30	21 30	11 15	58 3	58 32	31 41	31 57	15 35	1 12
31	22 28	7 16	59 1	59 29	32 13	32 28	16 13	2 20

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	10ʰ 35′	*Occidente*
1	●4 3. 1.	○	2.
2	3. 4☌2	○	.1
3	4. .3 1. .2	○	
4	4. .3	○	1. 2.
5	4. 1☌.2	○	.3
6	.4 .2	○	1. 3.
7	.4 .1	○	3☌2
8	.4 3. 1.	○	2.
9	3. 2. .4	○	.1
10	.3 1. .2	○	.4
11	.3	○	1. .2 .4
12	1. 2.	○	.3 .4
13	.2	○	.1 3. .4
14	.1	○	.2,3. .4
15	●1 3.	○	2. .4
16	3. 2.	○	.1 4.
17	.3 1☌2	○	4.
18	3.,4.	○	.1 .2
19	4. 1.	○	2. .3
20	4. 2.	○	1. .3
21	4. .1	○	.2 3.
22	4. 3.	○	1. 2.
23	.4 3. 2.	○	1○
24	.4 3. .2,1.	○	
25	.4 .3	○	.1 2
26	1. .4	○	2. .3
27	2.	○	.1.4 .3
28	.1	○	.2 3. .4
29	●3	○	1. 2. .4
30	3. 2. .1	○	.4
31	●1 3. .2	○	4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
3	Luna nuova	11h38′
10	Primo quarto	3 26
18	Luna piena	3 8
26	Ultimo quarto	2 58

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
3	80 e ♓ 5.ª	14 0
4	110 o ♓ 5.ª	5 28
6	54 γ ♉ 3. 4.ª	18 22
6	61 δ¹ ♉ 4.ª	20 10
6	64 δ² ♉ 4. 5.ª	20 33
6	68 δ³ ♉ 5.ª	21 12
7	Aldebaran 1.ª	0 56
7	104 m ♉ 5.ª	13 43
9	54 λ ♋ 4. 5.ª	19 56
12	14 o ♌ 4.ª	14 4
17	82 m ♍ 5.ª	18 54
18	98 κ ♍ 4.ª	10 40
20	38 γ ♎ 4. 5.ª	4 27
20	44 η ♎ 4. 5.ª	9 0
20	46 θ ♎ 4. 5.ª	14 0
21	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	7 40
24	44 ρ¹ ♐ 5.ª	15 20
26	13 ν ♒ 5.ª	17 8
27	43 θ ♒ 4. 5.ª	22 54

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove. Tempo medio.
	I. Satellite.
2	6h 11′ 11″ imm.
4	0 40 1
5	19 8 56
7	13 37 44
9	8 6 40
11	2 35 30
12	21 4 25
14	15 33 13
* 16	10 2 10
18	4 31 0
19	22 59 54
21	17 28 43
* 23	11 57 39
25	6 26 29
27	0 55 23
28	19 24 11
30	13 53 7
	II. Satellite.
2	21 1 23 imm.
* 6	10 19 15
9	23 37 8
* 13	12 54 57
17	2 12 45
20	15 30 30
24	4 48 13
27	18 5 54
	III. Satellite.
5	17 38 23 imm.
5	20 59 6 em.
12	21 38 10 imm.
13	0 59 30 em.
20	1 37 55 imm.
20	4 59 49 em.
27	5 37 46 imm.
* 27	9 0 14 em.
	IV. Satellite
* 4	10 31 30 imm.
4	14 18 22 em.
21	4 35 20 imm.
21	8 28 34 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
92	1	Sab.	0 3 51,91	0 43 39,00	0 39 46,46	5 39	6 21
93	2	Dom.	0 3 33,87	0 47 17,46	0 43 43,01	5 37	6 23
94	3	Lun.	0 3 15,96	0 50 56,06	0 47 39,56	5 36	6 24
95	4	Mart.	0 2 58,20	0 54 34,80	0 51 37,12	5 34	6 26
96	5	Merc.	0 2 40,61	0 58 13,72	0 55 32,67	5 33	6 27
97	6	Giov.	0 2 23,21	1 1 52,83	0 59 29,22	5 31	6 29
98	7	Ven.	0 2 6,01	1 5 32,13	1 3 25,77	5 30	6 30
99	8	Sab.	0 1 49,04	1 9 11,66	1 7 22,32	5 28	6 32
100	9	Dom.	0 1 32,26	1 12 51,38	1 11 18,88	5 26	6 34
101	10	Lun.	0 1 15,76	1 16 31,38	1 15 15,43	5 24	6 36
102	11	Mart.	0 0 59,51	1 20 11,65	1 19 11,98	5 23	6 37
103	12	Merc.	0 0 43,52	1 23 52,18	1 23 8,54	5 21	6 39
104	13	Giov.	0 0 27,82	1 27 32,99	1 27 5,10	5 19	6 41
105	14	Ven.	0 0 12,43	1 31 14,11	1 31 1,65	5 18	6 42
106	15	Sab.	23 59 57,40	1 34 55,59	1 34 58,20	5 16	6 44
107	16	Dom.	23 59 42,69	1 38 37,40	1 38 54,76	5 14	6 46
108	17	Lun.	23 59 28,36	1 42 19,59	1 42 51,31	5 13	6 47
109	18	Mart.	23 59 14,49	1 46 2,12	1 46 47,86	5 11	6 49
110	19	Merc.	23 58 0,84	1 49 45,09	1 50 44,41	5 10	6 50
111	20	Giov.	23 58 47,71	1 53 28,48	1 54 40,69	5 8	6 52
112	21	Ven.	23 58 35,03	1 57 12,31	1 58 37,51	5 7	6 53
113	22	Sab.	23 58 22,80	2 0 56,60	2 2 34,06	5 5	6 54
114	23	Dom.	23 58 11,00	2 4 41,32	2 6 30,62	5 3	6 55
115	24	Lun.	23 57 59,71	2 8 26,55	2 10 27,17	5 2	6 58
116	25	Mart.	23 57 48,92	2 12 12,28	2 14 23,72	5 1	6 59
117	26	Merc.	23 57 38,64	2 15 58,52	2 18 20,27	5 0	7 0
118	27	Giov.	23 57 28,87	2 19 45,29	2 22 16,83	4 58	7 2
119	28	Ven.	23 57 19,63	2 23 32,57	2 26 13,38	4 57	7 3
120	29	Sab.	23 57 10,91	2 27 20,38	2 30 9,94	4 56	7 4
121	30	Dom.	23 57 2,72	2 31 8,72	2 34 6,49	4 54	7 6

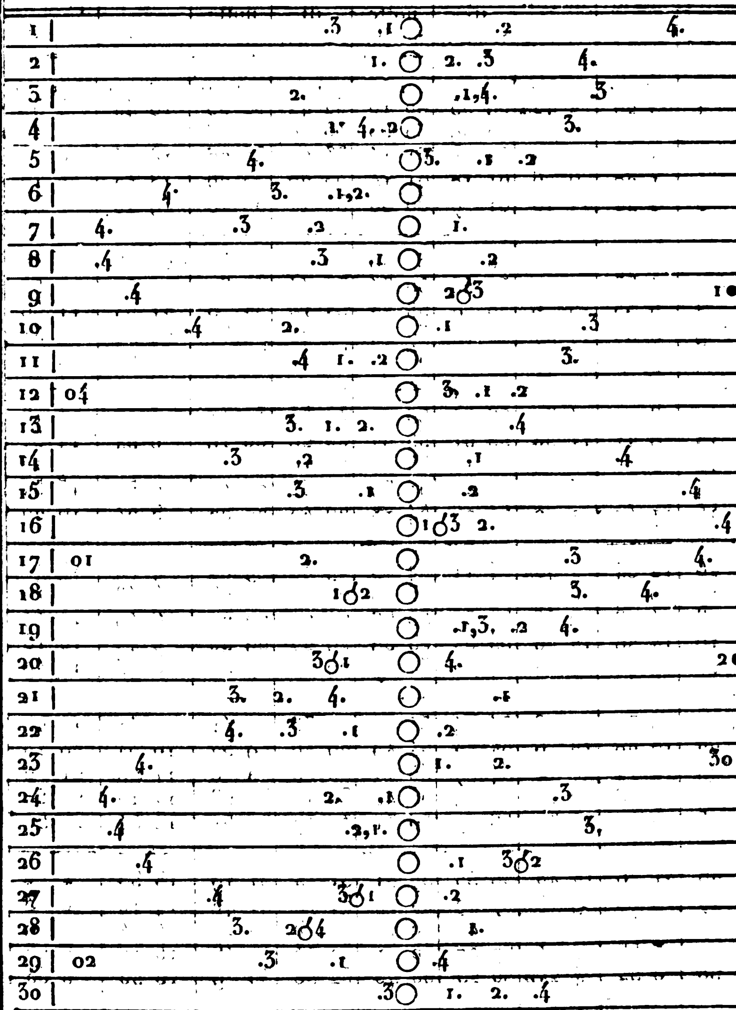
Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	0 11 51 58,0	4 41 45,6	+ 0,96	+ 0,24	0,0000836
2	0 12 51 4,8	5 4 49,4	0,96	+ 0,11	0,0002098
3	0 13 50 9,9	5 27 48,0	0,95	− 0,04	0,0003354
4	0 14 49 12,5	5 50 40,8	0,95	0,17	0,0004603
5	0 15 48 13,4	6 13 27,5	0,95	0,29	0,0005844
6	0 16 47 12,0	6 36 7,7	0,94	0,40	0,0007075
7	0 17 46 8,5	6 58 41,1	0,94	0,47	0,0008298
8	0 18 45 2,8	7 21 7,1	0,93	0,52	0,0009514
9	0 19 43 54,6	7 43 25,6	0,93	0,55	0,0010727
10	0 20 42 44,3	8 5 36,5	0,93	0,54	0,0011928
11	0 21 41 31,6	8 27 39,2	0,92	0,51	0,0013126
12	0 22 40 16,8	8 49 33,2	0,92	0,45	0,0014320
13	0 23 38 59,5	9 11 18,2	0,91	0,35	0,0015512
14	0 24 37 40,1	9 32 54,0	0,90	0,24	0,0016702
15	0 25 36 18,6	9 54 20,3	0,90	− 0,12	0,0017890
16	0 26 34 54,9	10 15 36,9	0,89	+ 0,01	0,0019076
17	0 27 33 29,2	10 36 43,3	0,88	0,14	0,0020262
18	0 28 32 1,4	10 57 39,2	0,87	0,26	0,0021447
19	0 29 30 31,7	11 18 24,3	0,86	0,37	0,0022631
20	1 0 29 0,3	11 38 58,3	0,85	0,46	0,0023814
21	1 1 27 27,0	11 59 20,8	0,84	0,54	0,0024995
22	1 2 25 52,0	12 19 31,6	0,83	0,58	0,0026172
23	1 3 24 15,3	12 39 30,4	0,83	0,57	0,0027345
24	1 4 22 37,2	12 59 16,9	0,82	0,54	0,0028513
25	1 5 20 57,4	13 18 50,8	0,81	0,49	0,0029674
26	1 6 19 16,2	15 38 11,9	0,80	0,40	0,0030825
27	1 7 17 33,3	13 57 19,5	0,79	0,30	0,0031966
28	1 8 15 49,0	14 16 13,4	0,78	0,18	0,0033096
29	1 9 14 3,2	14 34 53,3	0,77	+ 0,05	0,0034212
30	1 10 12 15,9	14 53 18,9	0,76	− 0,09	0,0035314

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Sab.	11 7 19 22	11 14 36 56	2 5 43B	1 27 37B	22 43
2	Dom.	11 21 59 54	11 29 27 30	0 47 35	0 6 21	23 38
3	Lun.	0 6 58 50	0 14 32 48	0 35 20A	1 16 36A	* *
4	Mart.	0 22 8 16	0 29 43 59	1 56 38	2 34 36	0 35
5	Merc.	1 7 18 45	1 14 51 24	3 9 44	3 41 23	1 32
6	Giov.	1 22 20 48	1 29 46 0	4 8 58	4 32 4	2 31
7	Ven.	2 7 6 11	2 14 20 40	4 50 24	5 3 52	3 29
8	Sab.	2 21 28 59	2 28 30 51	5 12 23	5 16 3	4 27
9	Dom.	3 5 26 9	3 12 14 53	5 15 2	5 9 35	5 24
10	Lun.	3 18 57 13	3 25 33 25	4 59 57	4 46 28	6 17
11	Mart.	4 2 3 49	4 8 28 50	4 29 28	4 9 19	7 9
12	Merc.	4 14 48 55	4 21 4 32	3 46 21	3 20 56	7 57
13	Giov.	4 27 16 9	5 3 24 15	2 53 25	2 24 9	8 43
14	Ven.	5 9 29 17	5 15 31 42	1 53 30	1 21 49	9 27
15	Sab.	5 21 31 55	5 27 30 20	0 49 25	0 16 40	10 11
16	Dom.	6 3 27 18	6 9 23 11	0 16 6B	0 48 34B	10 53
17	Lun.	6 15 18 18	6 21 12 56	1 20 25	1 51 19	11 36
18	Mart.	6 27 7 21	7 3 1 51	2 20 59	2 49 6	12 19
19	Merc.	7 8 56 37	7 14 51 57	3 15 23	3 39 35	13 3
20	Giov.	7 20 48 4	7 26 45 14	4 1 26	4 20 42	13 49
21	Ven.	8 2 43 41	8 8 43 41	4 37 11	4 50 41	14 36
22	Sab.	8 14 45 33	8 20 49 37	5 1 2	5 8 3	15 24
23	Dom.	8 26 56 12	9 3 5 40	5 11 37	5 11 39	16 13
24	Lun.	9 9 18 23	9 15 34 46	5 8 2	5 0 42	17 3
25	Mart.	9 21 55 14	9 28 20 10	4 49 38	4 34 51	17 54
26	Merc.	10 4 50 1	10 11 25 9	4 16 21	3 54 14	18 45
27	Giov.	10 18 5 57	10 24 52 43	3 28 38	2 59 44	19 36
28	Ven.	11 1 45 41	11 8 45 3	2 27 50	1 53 14	20 29
29	Sab.	11 15 50 48	11 23 2 49	1 16 24	0 37 50	21 22
30	Dom.	0 0 20 51	0 7 44 22	0 1 52A	0 41 59A	22 16

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	23 26	2 42A	59 55	60 18	32 42	32 55	16 48	3 32
2	0 26	2 10B	60 39	60 55	33 7	33 16	17 25	4 46
3	* *	* *	61 7	61 14	33 22	33 26	18 3	6 0
4	1 27	6 56	61 17	61 14	33 27	33 26	18 40	7 17
5	2 28	11 13	61 7	60 56	33 22	33 16	19 23	8 34
6	3 31	14 40	60 40	60 20	33 7	32 56	20 8	9 48
7	4 33	17 0	59 58	59 34	32 44	32 31	20 59	10 55
8	5 35	18 6	59 9	58 42	32 17	32 3	21 55	11 56
9	6 36	17 57	58 15	57 48	31 48	31 33	22 52	12 51
10	7 34	16 46	57 22	56 57	31 19	31 5	23 53	13 37
11	8 29	14 39	56 34	56 12	30 53	30 41	* *	14 18
12	9 21	11 50	55 51	55 32	30 29	30 19	0 54	14 51
13	10 11	8 30	55 15	55 1	30 10	30 2	1 55	15 23
14	11 0	4 51	54 48	54 36	29 55	29 48	2 54	15 52
15	11 47	1 2	54 26	54 18	29 43	29 39	3 54	16 20
16	12 34	2 48A	54 11	54 5	29 35	29 32	4 50	16 48
17	13 21	6 30	54 1	53 58	29 29	29 28	5 48	17 16
18	14 8	9 55	53 57	53 56	29 27	29 27	6 49	17 44
19	14 56	12 56	53 57	53 59	29 27	29 28	7 47	18 15
20	15 46	15 22	54 2	54 7	29 30	29 33	8 45	18 49
21	16 37	17 8	54 14	54 22	29 36	29 41	9 41	19 29
22	17 29	18 6	54 32	54 43	29 46	29 52	10 34	20 13
23	18 22	18 11	54 57	55 12	30 0	30 8	11 25	21 2
24	19 16	17 19	55 29	55 48	30 17	30 28	12 12	21 57
25	20 11	15 31	56 9	56 31	30 39	30 51	12 54	22 59
26	21 6	12 47	56 55	57 21	31 4	31 19	13 33	* *
27	22 2	9 15	57 47	58 15	31 33	31 48	14 10	0 3
28	22 58	5 3	58 43	59 10	32 3	32 18	14 44	1 9
29	23 55	0 24	59 37	60 1	32 33	32 46	15 19	2 23
30	0 54	4 24B	60 23	60 43	32 58	33 9	15 55	3 35

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente 9^h 56$'$ *Occidente*



Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
2	Luna nuova	19h 51′
9	Primo quarto	15 33
17	Luna piena	19 18
25	Ultimo quarto	12 25

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	80 e ♓ 5.a	0 57
1	110 o ♓ 5.a	16 29
4	54 γ ♉ 3. 4.a	4 36
4	61 δ^1 ♉ 4.a	6 21
4	64 δ^2 ♉ 4. 5.a	6 45
4	68 δ^3 ♉ 5.a	7 25
4	Aldebaran 1.a	11 5
7	54 λ ♋ 4. 5.a	3 58
7	68 k ♋ 5.a	10 34
9	14 o ♌ 4.a	20 31
11	58 d ♌ 5.a	12 40
15	98 κ ♍ 4.a	16 47
17	46 θ ♎ 4. 5.a	19 55
18	8 φ Ofiuco 4. 5.a	13 34
25	43 θ ♒ 4. 5.a	5 51
29	110 o ♓ 5.a	2 20
31	54 γ ♉ 3. 4.a	15 17
31	61 δ^1 ♉ 4.a	17 0
31	64 δ^2 ♉ 4. 5.a	17 24
31	68 δ^3 ♉ 5.a	18 4
31	Aldebaran 1.a	21 44

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
2	8 21 56 imm.
4	2 50 51
5	21 19 38
7	15 48 34
* 9	10 17 23
11	4 46 17
12	23 15 4
14	17 43 58
16	12 12 46
18	6 41 40
20	1 10 26
21	19 39 20
23	14 8 7
25	8 37 0
27	3 5 45
28	21 34 38
30	16 3 25
	II. Satellite.
1	7 23 32 em.
4	20 41 9
* 8	9 58 43
11	23 16 16
15	12 33 46
19	1 51 15
22	15 8 40
26	4 26 6
29	17 43 28
	III. Satellite.
* 4	9 38 11 imm.
4	13 1 13 em.
11	13 38 13 imm.
11	17 1 49 em.
18	17 38 36 imm.
18	21 2 43 em.
25	21 38 18 imm.
26	1 4 55 em.
	IV. Satellite.
7	22 38 25 imm.
8	2 37 36 em.
24	16 21 6 imm.
24	20 45 52 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
122	1	Lun.	23 56 55,07	2 34 57,62	2 38 3,05	4 53	7 7
123	2	Mart.	23 56 48,98	2 38 47,08	2 41 59,60	4 52	7 8
124	3	Merc.	23 56 41,45	2 42 37,07	2 45 56,16	4 50	7 10
125	4	Giov.	23 56 35,47	2 46 27,62	2 49 52,71	4 49	7 11
126	5	Ven.	23 56 30,04	2 50 18,73	2 53 49,27	4 48	7 12
127	6	Sab.	23 56 25,17	2 54 10,40	2 57 45,82	4 46	7 14
128	7	Dom.	23 56 20,85	2 58 2,63	3 1 42,38	4 45	7 15
129	8	Lun.	23 56 17,19	3 1 55,42	3 5 38,93	4 44	7 16
130	9	Mart.	23 56 13,89	3 5 48,76	3 9 35,49	4 43	7 17
131	10	Merc.	23 56 11,24	3 9 42,67	3 13 32,04	4 41	7 19
132	11	Giov.	23 56 9,14	3 13 37,11	3 17 28,60	4 40	7 20
133	12	Ven.	23 56 7,69	3 17 32,11	3 21 25,14	4 39	7 21
134	13	Sab.	23 56 6,61	3 21 27,69	3 25 21,71	4 38	7 22
135	14	Dom.	23 56 6,20	3 25 23,82	3 29 18,26	4 37	7 23
136	15	Lun.	23 56 6,35	3 29 20,53	3 33 14,82	4 36	7 24
137	16	Mart.	23 56 7,05	3 33 17,79	3 37 11,37	4 34	7 26
138	17	Merc.	23 56 8,30	3 37 15,60	3 41 7,93	4 33	7 27
139	18	Giov.	23 56 10,11	3 41 13,97	3 45 4,48	4 32	7 28
140	19	Ven.	23 56 12,46	3 45 12,88	3 49 1,04	4 31	7 29
141	20	Sab.	23 56 15,39	3 49 12,38	3 52 57,59	4 30	7 30
142	21	Dom.	23 56 18,87	3 53 12,42	3 56 54,15	4 29	7 31
143	22	Lun.	23 56 22,90	3 57 13,01	4 0 50,70	4 28	7 32
144	23	Mart.	23 56 27,46	4 1 14,14	4 4 47,26	4 27	7 33
145	24	Merc.	23 56 32,57	4 5 15,81	4 8 43,81	4 26	7 34
146	25	Giov.	23 56 38,21	4 9 18,02	4 12 40,36	4 25	7 35
147	26	Ven.	23 56 44,36	4 13 20,75	4 16 36,92	4 24	7 36
148	27	Sab.	23 56 51,41	4 17 23,98	4 20 33,47	4 23	7 37
149	28	Dom.	23 56 58,14	4 21 27,69	4 24 30,04	4 22	7 38
150	29	Lun.	23 57 5,75	4 25 31,87	4 28 26,60	4 21	7 39
151	30	Mart.	23 57 13,82	4 29 36,51	4 32 23,15	4 20	7 40
152	31	Merc.	23 57 22,32	4 33 41,60	4 36 19,71	4 19	7 41

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1h nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	1 11 10 27,0	15 11 29,9	+ 0,75	− 0,22	0,0036400
2	1 12 8 36,4	15 29 25,9	0,74	0,34	0,0037469
3	1 13 6 44,2	15 47 6,6	0,73	0,44	0,0038520
4	1 14 4 50,4	16 4 31,6	0,72	0,52	0,0039554
5	1 15 2 54,8	16 21 40,7	0,71	0,58	0,0040570
6	1 16 0 57,4	16 38 33,7	0,70	0,61	0,0041568
7	1 16 58 58,2	16 55 9,8	0,68	0,62	0,0042550
8	1 17 56 57,2	17 11 28,9	0,67	0,59	0,0043515
9	1 18 54 54,4	17 27 30,9	0,66	0,52	0,0044464
10	1 19 52 49,7	17 43 15,3	0,65	0,43	0,0045398
11	1 20 50 43,2	17 58 41,9	0,64	0,32	0,0046318
12	1 21 48 34,8	18 13 50,5	0,63	0,20	0,0047225
13	1 22 46 24,7	18 28 40,6	0,61	− 0,06	0,0048121
14	1 23 44 13,0	18 43 12,0	0,59	+ 0,07	0,0049006
15	1 24 41 59,6	18 57 24,5	0,58	0,19	0,0049882
16	1 25 38 44,7	19 11 18,0	0,57	0,30	0,0050749
17	1 26 37 28,3	19 24 51,9	0,54	0,40	0,0051606
18	1 27 35 10,5	19 38 5,9	0,55	0,47	0,0052453
19	1 28 32 51,4	19 51 0,0	0,53	0,51	0,0053291
20	1 29 30 31,1	20 3 34,0	0,51	0,51	0,0054118
21	2 0 28 9,5	20 15 47,7	0,50	0,50	0,0054935
22	2 1 25 47,0	20 27 40,6	0,48	0,46	0,0055741
23	2 2 23 23,5	20 39 12,6	0,47	0,38	0,0056535
24	2 3 20 59,0	20 50 23,4	0,46	0,28	0,0057314
25	2 4 18 33,7	21 1 12,9	0,44	0,16	0,0058078
26	2 5 16 7,6	21 11 40,7	0,43	+ 0,03	0,0058826
27	2 6 13 40,6	21 21 46,6	0,41	− 0,10	0,0059555
28	2 7 11 12,6	21 31 30,4	0,40	0,24	0,0060264
29	2 8 8 43,8	21 40 52,0	0,38	0,37	0,0060951
30	2 9 6 14,2	21 49 51,0	0,36	0,48	0,0061615
31	2 10 3 43,7	21 58 27,3	0,35	− 0,56	0,0062256

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Lun.	0 15 12 42	0 22 44 59	1 21 46A	2 0 26A	23 13
2	Mart.	1 0 20 10	1 7 57 4	2 37 11	3 11 14	* *
3	Merc.	1 15 34 24	1 23 10 50	3 41 52	4 8 27	0 12
4	Giov.	2 0 45 5	2 8 15 52	4 30 32	4 47 44	1 12
5	Ven.	2 15 42 5	2 23 2 45	4 59 51	5 6 51	2 12
6	Sab.	3 0 17 7	3 7 24 37	5 8 49	5 5 56	3 11
7	Dom.	3 14 24 55	3 21 17 52	4 58 30	4 46 50	4 8
8	Lun.	3 28 3 31	4 4 42 4	4 31 20	4 12 25	5 2
9	Mart.	4 11 13 53	4 17 39 22	3 50 29	3 25 59	5 53
10	Merc.	4 23 59 4	5 0 13 33	2 59 17	2 30 48	6 41
11	Giov.	5 6 23 25	5 12 29 16	2 0 55	1 29 57	7 26
12	Ven.	5 18 31 44	5 24 31 25	0 58 18	0 26 15	8 9
13	Sab.	6 0 28 54	6 6 24 43	0 5 52B	0 37 44B	8 52
14	Dom.	6 12 19 24	6 18 13 26	1 9 3	1 39 32	9 34
15	Lun.	6 24 7 16	7 0 1 17	2 8 54	2 36 50	10 17
16	Mart.	7 5 55 50	7 11 51 14	3 3 4	3 27 21	11 1
17	Merc.	7 17 47 44	7 23 45 34	3 49 26	4 9 4	11 46
18	Giov.	7 29 44 55	8 5 45 56	4 26 0	4 40 1	12 33
19	Ven.	8 11 48 49	8 17 53 42	4 50 57	4 58 39	13 21
20	Sab.	8 24 0 42	9 0 10 1	5 2 57	5 3 46	14 10
21	Dom.	9 6 21 48	9 12 36 13	5 1 1	4 54 40	15 0
22	Lun.	9 18 53 29	9 25 13 50	4 44 42	4 31 10	15 50
23	Mart.	10 1 37 30	10 8 4 43	4 14 8	3 53 41	16 41
24	Merc.	10 14 35 48	10 21 11 1	3 29 59	3 3 15	17 31
25	Giov.	10 27 50 40	11 4 35 0	2 33 46	2 1 46	18 21
26	Ven.	11 11 24 18	11 18 18 46	1 27 38	0 51 48	19 12
27	Sab.	11 25 18 34	0 2 23 45	0 14 45	0 23 0A	20 4
28	Dom.	0 9 34 13	0 16 49 46	1 0 48A	1 38 3	20 58
29	Lun.	0 24 10 2	1 1 34 24	2 14 2	2 48 4	21 54
30	Mart.	1 9 2 7	1 16 32 17	3 19 26	3 47 29	22 52
31	Merc.	1 24 3 49	2 1 35 33	4 11 39	4 31 25	23 52

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	1 54	9 0B	60 58	61 10	33 17	33 23	16 32	4 47
2	* *	* *	61 17	61 19	33 27	33 29	17 12	6 6
3	2 57	13 0	61 16	61 8	33 27	33 23	17 58	7 22
4	4 1	16 2	60 56	60 39	33 16	33 7	18 46	8 34
5	5 6	17 49	60 19	59 55	32 56	32 43	19 41	9 42
6	6 9	18 18	59 29	59 1	32 28	32 13	20 40	10 41
7	7 10	17 31	58 33	58 4	31 58	31 42	21 41	11 32
8	8 8	15 41	57 35	57 7	31 26	31 11	22 44	12 16
9	9 3	13 2	56 41	56 16	30 57	30 43	23 46	12 53
10	9 55	9 48	55 55	55 32	30 31	30 19	* *	13 26
11	10 44	6 11	55 13	54 57	30 9	30 0	0 46	13 56
12	11 32	2 23	54 42	54 30	29 52	29 45	1 46	14 23
13	12 19	1 29A	54 20	54 12	29 40	29 35	2 44	14 52
14	13 5	5 15	54 6	54 1	29 32	29 29	3 42	15 18
15	13 52	8 48	53 58	53 57	29 28	29 27	4 41	15 46
16	14 40	12 0	53 58	54 0	29 28	29 29	5 40	16 16
17	15 29	14 41	54 4	54 9	29 31	29 34	6 38	16 50
18	16 20	16 44	54 15	54 22	29 37	29 41	7 35	17 28
19	17 12	18 0	54 30	54 40	29 45	29 51	8 31	18 10
20	18 5	18 24	54 51	55 2	29 57	30 3	9 23	18 58
21	18 59	17 51	55 15	55 29	30 10	30 17	10 11	19 52
22	19 54	16 22	55 45	56 1	30 26	30 35	10 55	20 50
23	20 48	13 59	56 18	56 37	30 44	30 55	11 34	21 53
24	21 42	10 47	56 58	57 18	31 6	31 17	12 11	22 57
25	22 37	6 54	57 40	58 3	31 29	31 41	12 45	* *
26	23 32	2 32	58 26	58 49	31 54	32 7	13 20	0 5
27	0 28	2 7B	59 11	59 33	32 19	32 31	13 52	1 13
28	1 26	6 45	59 53	60 11	32 42	32 51	14 26	2 26
29	2 26	11 2	60 26	60 38	33 0	33 6	15 3	3 40
30	3 28	14 36	60 47	60 52	33 11	33 14	15 45	4 55
31	4 32	17 6	60 52	60 48	33 14	33 12	16 31	6 8

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$9^h\ 7^s$	*Occidente*
1	O1 2.	○	.3 .4
2	.2 ,1.	○	.3 .4
3		○	.1 .2,3. .4
4	1. 3.	○	2. 4.
5	3. 2.	○	.1 4.
6	.3 .1 .2	○	4.
7	.3	○	4.1. .2
8	4. 2..1	○	.3
9	4. .2 1.	○	.3
10	4.	○	.1 .2 3.
11	4. 1.	○	3. 2.
12	.4 3. 2.	○	.1
13	.4 .3 .1 .2	○	
14	.4 3	○	1. .2
15	●2 1☌4	○	.3
16	●1 .2	○	.4 .3
17		○	.1 .2 3☌4
18	1.	○	3. 2. .4
19	3. 2.	○	.1 .4
20	.3 .1 .2	○	.4
21	.3	○	1. .2 4.
22	.1	○	2. .3 4.
23	2.	○	1. 4. .3
24	O4	○	.2 3. 1●
25	4. 1.	○	3. 2.
26	4. 3. 2.	○	.1
27	4. 3. 1☌2	○	
28	4. 3	○	1. .2
29	.4 1.	○	2☌3
30	.4 2.	○	1. .3
31	.4 .1	○	3. 2O

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Luna nuova	$5^h 16'$
8	Primo quarto	5 51
16	Luna piena	9 35
23	Ultimo quarto	19 3
30	Luna nuova	10 56

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	104 m ♉ 5.ª	10 3
3	54 λ □ 4. 5.ª	13 26
3	68 k □ 5.ª	20 12
6	14 o ♌ 4.ª	4 31
11	98 x ♍ 4.ª	23 24
13	38 γ ♎ 4. 5.ª	17 4
14	46 θ ♎ 4. 5.ª	2 28
14	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	20 4
15	24 m ♏ 5.ª	1 14
21	43 θ ♒ 4. 5.ª	11 25
24	80 e ♓ 5.ª	17 18
25	110 o ♓ 5.ª	9 50
28	54 γ ♉ 3. 4.ª	0 37
28	61 δ^1 ♉ 4.ª	2 22
28	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	2 46
28	68 δ^3 ♉ 5.ª	3 24
28	Aldebaran 1.ª	7 6
28	104 m ♉ 5.ª	19 43
30	54 k □ 5.ª	23 36

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	10 32 17 imm.
3	5 1 0
4	23 29 52
6	17 58 38
8	12 27 29
10	6 56 12
12	1 25 2
13	19 53 47
15	14 22 37
17	8 51 19
19	3 20 8
20	21 48 51
22	16 17 36
24	10 46 20
26	5 15 9
27	23 43 50
	II. Satellite.
2	7 0 50 em.
5	20 18 9
9	9 35 28
12	22 52 45
16	12 9 0
20	1 27 15
	III. Satellite.
2	5 2 55 em.
9	9 2 52
16	13 2 49
23	17 3 18
	IV. Satellite.
10	10 44 3 imm.
10	14 55 56 em.
27	4 45 59 imm.
27	9 0 35 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
153	1	Giov.	23 57 31,27	4 37 47,12	4 40 16,26	4 19	7 41
154	2	Ven.	23 57 40,59	4 41 53,01	4 44 12,82	4 18	7 42
155	3	Sab.	23 57 50,30	4 45 59,31	4 48 9,37	4 18	7 42
156	4	Dom.	23 58 0,36	4 50 5,96	4 52 5,93	4 17	7 43
157	5	Lun.	23 58 10,75	4 54 12,94	4 56 2,48	4 16	7 44
158	6	Mart.	23 58 21,47	4 58 20,24	4 59 59,04	4 16	7 44
159	7	Merc.	23 58 32,44	5 2 27,83	5 3 55,60	4 15	7 45
160	8	Giov.	23 58 43,71	5 6 35,67	5 7 52,17	4 15	7 45
161	9	Ven.	23 58 55,22	5 10 43,78	5 11 48,72	4 14	7 46
162	10	Sab.	23 59 6,98	5 14 52,12	5 15 45,28	4 14	7 46
163	11	Dom.	23 59 18,92	5 19 0,64	5 19 41,83	4 14	7 46
164	12	Lun.	23 59 31,05	5 23 9,36	5 23 38,39	4 13	7 47
165	13	Mart.	23 59 43,36	5 27 18,25	5 27 34,94	4 13	7 47
166	14	Merc.	23 59 55,80	5 31 27,27	5 31 31,50	4 13	7 47
167	15	Giov.	0 0 8,36	5 35 36,43	5 35 28,05	4 13	7 47
168	16	Ven.	0 0 21,02	5 39 45,68	5 39 24,61	4 13	7 47
169	17	Sab.	0 0 33,78	5 43 45,04	5 43 21,17	4 12	7 48
170	18	Dom.	0 0 46,61	5 48 4,46	5 47 17,73	4 12	7 48
171	19	Lun.	0 0 59,50	5 52 13,95	5 51 14,29	4 12	7 48
172	20	Mart.	0 1 12,42	5 56 23,45	5 55 10,85	4 12	7 48
173	21	Merc.	0 1 25,35	6 0 32,98	5 59 7,40	4 12	7 48
174	22	Giov.	0 1 38,27	6 4 42,49	6 3 3,96	4 12	7 48
175	23	Ven.	0 1 51,16	6 8 51,98	6 7 0,52	4 12	7 48
176	24	Sab.	0 2 3,99	6 13 1,41	6 10 57,08	4 12	7 48
177	25	Dom.	0 2 16,73	6 17 10,74	6 14 53,63	4 12	7 48
178	26	Lun.	0 2 29,38	6 21 19,98	6 18 50,19	4 13	7 47
179	27	Mart.	0 2 41,89	6 25 29,08	6 22 46,75	4 13	7 47
180	28	Merc.	0 2 54,26	6 29 38,05	6 26 43,31	4 13	7 47
181	29	Giov.	0 3 6,46	6 33 46,83	6 30 39,86	4 13	7 47
182	30	Ven.	0 3 18,45	6 37 55,41	6 34 36,42	4 13	7 47

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	2 11 1 12,4	22 6 40,8	+ 0,33	− 0,63	0,0062874
2	2 11 58 39,9	22 14 31,2	0,32	0,67	0,0063468
3	2 12 56 6,6	22 21 58,2	0,30	0,66	0,0064038
4	2 13 53 52,2	22 29 1,8	0,28	0,63	0,0064585
5	2 14 50 56,8	22 35 41,8	0,27	0,59	0,0065107
6	2 15 48 20,5	22 41 58,1	0,25	0,50	0,0065606
7	2 16 45 42,9	22 47 50,5	0,23	0,39	0,0066083
8	2 17 43 4,4	22 53 18,9	0,22	0,27	0,0066540
9	2 18 40 24,9	22 58 25,1	0,20	− 0,14	0,0066978
10	2 19 37 44,3	23 3 3,1	0,18	0,00	0,0067394
11	2 20 35 2,7	23 7 18,8	0,17	+ 0,13	0,0067794
12	2 21 32 20,3	23 11 10,1	0,15	0,24	0,0068178
13	2 22 29 37,0	23 14 36,8	0,13	0,33	0,0068546
14	2 23 26 52,9	23 17 38,9	0,11	0,41	0,0068900
15	2 24 24 8,2	23 29 16,5	0,10	0,47	0,0069239
16	2 25 21 22,8	23 22 29,5	0,08	0,49	0,0069564
17	2 26 18 36,9	23 24 17,7	0,07	0,48	0,0069875
18	2 27 15 50,6	23 25 41,2	0,05	0,43	0,0070173
19	2 28 13 4,1	23 26 39,9	0,03	0,35	0,0070457
20	2 29 10 17,3	23 27 13,8	+ 0,01	0,24	0,0070725
21	3 0 7 30,4	23 27 22,9	0,00	+ 0,12	0,0070977
22	3 1 4 43,3	23 27 7,2	− 0,02	0,00	0,0071211
23	3 2 1 56,2	23 26 26,7	0,04	− 0,13	0,0071427
24	3 2 58 9,2	23 25 21,4	0,06	0,28	0,0071623
25	3 3 56 22,1	23 23 51,4	0,07	0,38	0,0071798
26	3 4 53 35,1	23 21 56,8	0,09	0,49	0,0071950
27	3 5 50 48,1	23 19 57,5	0,10	0,58	0,0072079
28	3 6 48 1,4	23 16 53,5	0,12	0,65	0,0072184
29	3 7 45 14,6	23 13 45,0	0,14	0,69	0,0072263
30	3 8 42 27,8	23 10 12,0	0,16	0,70	0,0072316

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Giov.	2 9 6 15	2 16 34 41	4 46 25A	4 56 26A	* *
2	Ven.	2 23 59 41	3 1 20 9	5 1 22	5 1 13	0 53
3	Sab.	3 8 35 11	3 15 44 0	4 56 12	4 46 35	1 52
4	Dom.	3 22 46 6	3 29 41 8	4 32 44	4 15 3	2 50
5	Lun.	4 6 28 57	4 13 9 36	3 54 1	3 30 6	3 43
6	Mart.	4 19 43 20	4 26 10 29	3 3 47	2 35 29	4 34
7	Merc.	5 2 31 30	5 8 46 57	2 5 41	1 34 47	5 21
8	Giov.	5 14 57 25	5 21 3 35	1 3 9	0 31 9	6 6
9	Ven.	5 27 6 6	6 3 5 37	0 0 53B	0 32 58B	6 50
10	Sab.	6 9 2 49	6 14 58 21	1 3 48	1 34 7	7 32
11	Dom.	6 20 52 52	9 26 46 56	2 3 17	2 31 5	8 15
12	Lun.	7 2 41 9	7 8 35 59	2 57 14	3 21 29	8 59
13	Mart.	7 14 31 54	7 20 29 17	3 43 36	4 3 20	9 43
14	Merc.	7 26 28 29	8 2 29 47	4 20 28	4 34 46	10 29
15	Giov.	8 8 33 24	8 14 39 29	4 46 3	4 54 7	11 17
16	Ven.	8 20 48 11	8 26 59 34	4 58 51	5 0 4	12 6
17	Sab.	9 3 13 41	9 9 30 36	4 57 44	4 51 46	12 57
18	Dom.	9 15 50 18	9 22 12 49	4 42 10	4 28 58	13 48
19	Lun.	9 28 38 10	10 5 6 20	4 12 15	3 52 9	14 38
20	Mart.	10 11 37 22	10 18 11 20	3 28 51	3 2 36	15 29
21	Merc.	10 24 48 19	11 1 28 23	2 33 39	2 2 21	16 19
22	Giov.	11 8 11 39	11 14 58 16	1 29 5	0 54 16	17 9
23	Ven.	11 21 48 22	11 28 42 3	0 18 20	0 18 11A	17 59
24	Sab.	0 5 39 25	0 12 40 31	0 54 44A	1 30 48	18 51
25	Dom.	0 19 45 20	0 26 53 46	2 5 46	2 39 3	19 44
26	Lun.	1 4 5 34	1 11 20 25	3 10 3	3 38 11	20 39
27	Mart.	1 18 37 49	1 25 57 9	4 2 55	4 23 46	21 37
28	Merc.	2 3 17 41	2 10 38 35	4 40 17	4 52 11	22 35
29	Giov.	2 17 58 55	2 25 17 43	4 59 14	5 1 22	23 35
30	Ven.	3 2 34 3	3 9 46 57	4 58 35	4 51 2	* *

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	* *	* *	60 40	60 28	33 7	33 1	17 24	7 19
2	5 37	18 19B	60 12	59 52	32 52	32 41	18 22	8 23
3	6 41	18 12	59 29	59 5	32 28	32 15	19 23	9 20
4	7 42	16 50	58 38	58 11	32 1	31 46	20 27	10 11
5	8 40	14 29	57 43	57 15	31 31	31 16	21 51	10 51
6	9 35	11 24	56 48	56 23	31 1	30 47	22 35	11 27
7	10 26	7 50	55 59	55 37	30 34	30 22	23 37	11 58
8	11 15	4 0	55 18	55 0	30 11	30 2	* *	12 27
9	12 3	0 5	54 45	54 32	29 53	29 46	0 37	12 56
10	12 49	3 46A	54 22	54 14	29 41	29 36	1 35	13 23
11	13 36	7 27	54 9	54 5	29 33	29 32	2 33	13 50
12	14 24	10 49	54 4	54 5	29 31	29 32	3 33	14 20
13	15 12	13 44	54 7	54 12	29 33	29 35	4 30	14 52
14	16 2	16 4	54 19	54 26	29 39	29 43	5 28	15 27
15	16 54	17 40	54 35	54 46	29 48	29 54	6 24	16 7
16	17 48	18 25	54 57	55 9	30 0	30 6	7 18	16 53
17	18 42	18 15	55 21	55 35	30 13	30 21	8 10	17 45
18	19 37	17 5	55 49	56 3	30 28	30 36	8 55	18 44
19	20 32	14 59	56 17	56 32	30 44	30 52	9 36	19 45
20	21 26	12 2	56 48	57 4	31 1	31 9	10 14	20 50
21	22 21	8 23	57 19	57 35	31 17	31 26	10 50	21 56
22	23 15	4 12	57 52	58 8	31 35	31 44	11 21	23 6
23	0 9	0 18B	58 25	58 41	31 53	32 2	11 53	* *
24	1 5	4 52	58 57	59 11	32 11	32 19	12 27	0 14
25	2 2	9 12	59 25	59 38	32 26	32 33	13 2	1 25
26	3 1	13 2	59 48	59 57	32 39	32 44	13 40	2 37
27	4 3	16 1	60 3	60 6	32 47	32 49	14 23	3 49
28	5 5	17 53	60 7	60 4	32 49	32 48	15 9	4 59
29	6 10	18 28	59 58	59 49	32 44	32 39	16 5	6 5
30	* *	* *	59 37	59 21	32 33	32 24	17 5	7 5

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	8h 27′	Occidente
1	●1 .4	○	3. .2
2	3.2.	○	.1 .4
3	3. .2, 1.	○	.4
4	.3	○	.1 .2 .4
5	1☌3	○	2. .4
6	2.	○	1. .3 .4
7	.1.2	○	.3 4.
8		○	1. 3☌2 4.
9	●1 2☌3.	○	4.
10	3. 2. 4☌1	○	
11	.3 4.	○	1☌2
12	4. 1☌3	○	2.
13	4. 2.	○	1☌3
14	4. .1 .2	○	.3
15	.4	○	1. .2,3.
16	●2 .4 .1	○	3●
17	3☌4,2. .1	○	
18	.3 .4	○	.1.2
19	.3 1.	○	2☌4
20	2.	○	.3 .1 .4
21	1☌2	○	.3 .4
22		○	1. .2, 3. .4
23	.1	○	3☌2 4.
24	●1 3.2.	○	4.
25	3.	○	.1☌2 4.
26	.3 .1	○	4. 2.
27	2. 4.	○	.3 .1
28	4. 1☌2	○	.3
29	4.	○	1. .2 3.
30	4. .1	○	3☌2

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.		
7	Primo quarto	22h	8′
15	Luna piena	21	58
23	Ultimo quarto	0	5
29	Luna nuova	20	2

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.		
3	14 o ♌ 4.ª	13	37
8	82 m ♍ 5.ª	14	57
9	98 κ ♍ 4.ª	6	46
11	38 γ ♎ 4. 5.ª	0	27
11	46 θ ♎ 4. 5.ª	9	53
12	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	3	27
12	24 m ♏ 5.ª	8	39
18	48 λ ♑ 5.ª	2	30
18	43 θ ♒ 4. 5.ª	17	10
21	80 e ♓ 5.ª	10	48
22	110 o ♓ 5.ª	15	31
25	54 γ ♉ 3. 4.ª	7	43
25	61 δ¹ ♉ 4.ª	9	33
25	64 δ² ♉ 4. 5.ª	9	58
25	68 δ³ ♉ 5.ª	10	39
25	Aldebaran 1.ª	14	28
26	104 m ♉ 5.ª	3	24
28	54 λ □ 4. 5.ª	8	27
30	14 o ♌ 4.ª	22	51

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	In questo mese gli eclissi dei satelliti di Giove sono invisibili.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
183	1	Sab.	0 3 30,20	6 42 3,75	6 38 32,98	4 14	7 46
184	2	Dom.	0 3 41,70	6 46 11,83	6 42 29,53	4 14	7 46
185	3	Lun.	0 3 52,88	6 50 19,01	6 46 26,09	4 14	7 46
186	4	Mart.	0 4 3,78	6 54 27,08	6 50 22,65	4 14	7 46
187	5	Merc.	0 4 14,36	6 58 34,25	6 54 19,20	4 15	7 45
188	6	Giov.	0 4 24,56	7 2 41,04	6 58 15,76	4 15	7 45
189	7	Ven.	0 4 34,39	7 6 47,45	7 2 12,32	4 16	7 44
190	8	Sab.	0 4 43,83	7 10 53,47	7 6 8,87	4 16	7 44
191	9	Dom.	0 4 52,85	7 14 59,07	7 10 5,43	4 17	7 43
192	10	Lun.	0 5 1,44	7 19 4,25	7 14 1,99	4 18	7 42
193	11	Mart.	0 5 9,58	7 23 8,97	7 17 58,54	4 18	7 42
194	12	Merc.	0 5 17,24	7 27 13,21	7 21 55,10	4 19	7 41
195	13	Giov.	0 5 24,45	7 31 17,00	7 25 51,66	4 21	7 39
196	14	Ven.	0 5 31,16	7 35 20,28	7 29 48,21	4 21	7 39
197	15	Sab.	0 5 37,37	7 39 23,07	7 33 44,77	4 22	7 38
198	16	Dom.	0 5 43,11	7 43 25,38	7 37 41,33	4 23	7 37
199	17	Lun.	0 5 48,30	7 47 27,14	7 41 37,88	4 24	7 36
200	18	Mart.	0 5 52,99	7 51 28,40	7 45 34,44	4 25	7 35
201	19	Merc.	0 5 57,17	7 55 29,14	7 49 30,99	4 26	7 34
202	20	Giov.	0 6 0,80	7 59 29,33	7 53 27,55	4 27	7 33
203	21	Ven.	0 6 3,88	8 3 28,97	7 57 24,10	4 28	7 32
204	22	Sab.	0 6 6,41	8 7 28,07	8 1 20,66	4 29	7 31
205	23	Dom.	0 6 8,40	8 11 26,63	8 5 17,21	4 30	7 30
206	24	Lun.	0 6 9,86	8 15 24,64	8 9 13,77	4 31	7 29
207	25	Mart.	0 6 10,73	8 19 22,07	8 13 10,32	4 32	7 28
208	26	Merc.	0 6 11,02	8 23 18,90	8 17 6,88	4 33	7 27
209	27	Giov.	0 6 10,74	8 27 15,18	8 21 3,43	4 34	7 26
210	28	Ven.	0 6 9,87	8 31 10,87	8 24 59,99	4 35	7 25
211	29	Sab.	0 6 8,42	8 35 5,96	8 28 56,54	4 36	7 24
212	30	Dom.	0 6 6,36	8 39 0,46	8 32 53,10	4 37	7 23
213	31	Lun.	0 6 3,70	8 42 54,34	8 36 49,65	4 38	7 22

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	3 9 39 4,1	23 6 14,7	− 0,17	− 0,69	0,0072341
2	3 10 36 54,2	23 1 53,1	0,19	0,64	0,0072340
3	3 11 34 7,3	22 57 7,4	0,21	0,57	0,0072314
4	3 12 31 20,4	22 51 57,7	0,22	0,47	0,0072262
5	3 13 28 33,7	22 46 24,2	0,24	0,34	0,0072184
6	3 14 25 46,0	22 40 26,9	0,25	0,20	0,0072082
7	3 15 2 58,3	22 34 5,9	0,27	− 0,07	0,0071957
8	3 16 20 11,3	22 27 21,5	0,29	+ 0,05	0,0071811
9	3 17 17 23,8	22 20 14,0	0,31	0,17	0,0071644
10	3 18 14 36,3	22 12 43,5	0,33	0,27	0,0071457
11	3 19 11 49,7	22 4 50,0	0,34	0,35	0,0071252
12	3 20 9 1,1	21 56 33,6	0,35	0,41	0,0071031
13	3 21 6 13,3	21 47 54,8	0,37	0,44	0,0070793
14	3 22 3 26,6	21 38 53,8	0,38	0,43	0,0070540
15	3 23 0 39,7	21 29 30,6	0,39	0,39	0,0070274
16	3 23 57 53,3	21 19 45,4	0,41	0,33	0,0069994
17	3 24 55 7,2	21 9 38,4	0,42	0,24	0,0069699
18	3 25 52 21,8	20 59 9,8	0,44	0,13	0,0069391
19	3 26 49 37,0	20 48 20,0	0,45	0,01	0,0069068
20	3 27 46 53,1	20 37 9,2	0,46	− 0,13	0,0068730
21	3 28 44 9,9	20 25 37,5	0,48	0,26	0,0068376
22	3 29 41 27,5	20 13 45,2	0,50	0,39	0,0068006
23	4 0 38 46,1	20 1 32,6	0,51	0,50	0,0067617
24	4 1 36 5,8	19 48 59,8	0,52	0,60	0,0067207
25	4 2 33 26,4	19 36 7,0	0,53	0,67	0,0066777
26	4 3 30 48,1	19 22 54,7	0,55	0,72	0,0066326
27	4 4 28 10,7	19 9 23,1	0,56	0,73	0,0065853
28	4 5 25 34,1	18 55 32,4	0,58	0,71	0,0065356
29	4 6 22 58,7	18 41 22,9	0,59	0,66	0,0064835
30	4 7 20 24,3	18 26 55,0	0,60	0,59	0,0064290
31	4 8 17 50,7	18 12 8,9	0,61	0,50	0,0063720

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
1	Sab.	3s 16° 55' 35"	3s 23° 59' 16"	4° 38' 58" A	4° 22' 45" A	0h 34'
2	Dom.	4 0 57 22	4 7 49 29	4 2 46	3 39 29	1 50
3	Lun.	4 14 35 20	4 21 14 51	3 13 25	2 45 4	2 23
4	Mart.	4 27 48 3	5 4 15 11	2 14 53	1 43 25	3 13
5	Merc.	5 10 36 33	5 16 52 34	1 11 4	0 38 16	4 0
6	Giov.	5 23 3 44	5 29 10 39	0 5 25	0 27 10 B	4 45
7	Ven.	6 5 13 55	6 11 14 10	0 59 7	1 30 8	5 28
8	Sab.	6 17 12 6	6 23 8 21	1 59 59	2 28 24	6 11
9	Dom.	6 29 3 36	7 4 58 30	2 55 6	3 19 54	6 55
10	Lun.	7 10 53 42	7 16 49 47	3 42 33	4 2 50	7 39
11	Mart.	7 22 47 16	7 28 46 41	4 20 33	4 35 30	8 24
12	Merc.	8 4 48 28	8 10 52 58	4 47 29	4 56 18	9 11
13	Giov.	8 17 0 33	8 23 11 26	5 1 47	5 3 48	10 0
14	Ven.	8 29 25 48	9 5 43 46	5 2 13	4 56 58	10 50
15	Sab.	9 12 5 23	9 18 30 39	4 47 59	4 35 16	11 42
16	Dom.	9 24 59 30	10 1 31 50	4 18 53	3 58 56	12 33
17	Lun.	10 8 7 31	10 14 46 21	3 35 37	3 9 9	13 25
18	Mart.	10 21 28 11	10 28 12 48	2 39 51	2 8 4	14 16
19	Merc.	11 5 0 2	11 11 49 43	1 34 13	0 58 46	15 7
20	Giov.	11 18 41 43	11 25 35 54	0 22 15	0 14 51 A	15 57
21	Ven.	0 2 32 11	0 9 30 28	0 51 56 A	1 28 26	16 48
22	Sab.	0 16 30 40	0 23 32 41	2 3 47	2 37 24	17 40
23	Dom.	1 0 36 24	1 7 41 41	3 8 46	3 37 21	18 33
24	Lun.	1 14 48 19	1 21 56 3	4 2 39	4 24 14	19 28
25	Mart.	1 29 4 33	2 6 13 28	4 41 46	4 54 55	20 25
26	Merc.	2 13 22 20	2 20 30 39	5 3 28	5 7 17	21 23
27	Giov.	2 27 37 51	3 4 43 21	5 6 21	5 0 43	22 21
28	Ven.	3 11 46 34	3 18 46 55	4 50 31	4 36 1	23 17
29	Sab.	3 25 43 50	4 2 36 51	4 17 30	3 55 23	* *
30	Dom.	4 9 25 29	4 16 9 26	3 30 6	3 2 8	0 11
31	Lun.	4 22 48 26	4 29 22 22	2 31 58	2 0 7	1 3

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a		Diametro orizzontale della Luna a		Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
			mezzo dì medio.	mezza notte media.	mezzo dì medio.	mezza notte media.		
	h '	° '	' ''	' ''	' ''	' ''	h '	h '
1	7 12	17 45B	59 3	58 43	32 14	32 3	18 8	7 59
2	8 13	15 52	58 21	57 57	31 51	31 38	19 13	8 45
3	9 10	13 5	57 33	57 9	31 25	31 12	20 19	9 23
4	10 4	9 40	56 45	56 21	30 59	30 46	21 23	9 58
5	10 55	5 52	55 59	55 38	30 34	30 22	22 24	10 30
6	11 44	1 55	55 19	55 2	30 12	30 3	23 22	10 58
7	12 31	2 2A	54 48	54 36	29 55	29 48	* *	11 26
8	13 18	5 50	54 26	54 18	29 43	29 39	0 21	11 53
9	14 6	9 22	54 14	54 11	29 36	29 35	1 22	12 21
10	14 54	12 30	54 12	54 14	29 35	29 36	2 20	12 53
11	15 43	15 6	54 19	54 26	29 39	29 43	3 18	13 26
12	16 34	17 2	54 34	54 45	29 47	29 53	4 15	14 4
13	17 27	18 10	54 58	55 11	30 0	30 8	5 11	14 48
14	18 22	18 24	55 26	55 42	30 16	30 25	6 3	15 38
15	19 17	17 39	55 58	56 15	30 34	30 43	6 52	16 35
16	20 13	15 54	56 31	56 48	30 52	31 1	7 36	17 35
17	21 9	13 14	57 3	57 19	31 9	31 17	8 15	18 41
18	22 4	9 45	57 33	57 47	31 25	31 33	8 52	19 47
19	22 58	5 42	58 0	58 12	31 40	31 46	9 25	20 58
20	23 53	1 16	58 24	58 35	31 52	31 58	9 57	22 6
21	0 48	3 17B	58 44	58 53	32 4	32 9	10 30	23 15
22	1 44	7 41	59 1	59 8	32 13	32 17	11 4	* *
23	2 41	11 38	59 14	59 18	32 20	32 22	11 40	0 26
24	3 41	14 53	59 21	59 23	32 24	32 25	12 18	1 37
25	4 42	17 10	59 23	59 21	32 25	32 24	13 3	2 46
26	5 44	18 17	59 18	59 12	32 22	32 19	13 54	3 52
27	6 45	18 10	59 5	58 56	32 15	32 10	14 51	4 54
28	7 46	16 51	58 45	58 32	32 4	31 57	15 51	5 49
29	* *	* *	58 17	58 1	31 49	31 40	16 55	6 38
30	8 44	14 31	57 43	57 24	31 31	31 20	18 1	7 19
31	9 40	11 23	57 4	56 44	31 9	30 58	19 6	7 56

I SATELLITI DI GIOVE

NON SONO VISIBILI

IN QUESTO MESE.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.		GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE Tempo medio.
6	Primo quarto	15h 33'		I. SATELLITE.
14	Luna piena	8 53	27	1h 41' 20" em.
21	Ultimo quarto	4 44	28	20 9 23
28	Luna nuova	7 40	30	14 18 21
				II. SATELLITE.
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.		26	11 2 33 imm.
			30	0 19 36
				III. SATELLITE.
4	82 m ♍ 5.ª	23 0		
5	98 κ ♍ 4.ª	14 37	27	1 28 48 imm.
7	38 γ ♎ 4. 5.ª	8 24		
8	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	11 35		
8	24 m ♐ 5.ª	16 47		
14	48 λ ♑ 5.ª	10 17		
15	43 θ ♒ 4. 5.ª	8 37		
18	80 e ♓ 5.ª	4 38		
18	98 μ ♓ 5.ª	13 20		
21	54 γ ♉ 3. 4.ª	13 13		
21	61 δ¹ ♉ 4.ª	15 3		
21	64 δ² ♉ 4. 5.ª	15 30		
21	77 θ¹ ♉ 5.ª	16 55		
21	Aldebaran 1.ª	20 2		
22	104 m ♉ 5.ª	9 11		
24	54 λ ♊ 4. 5.ª	15 15		
27	14 o ♌ 4.ª	6 50		
27	31 α ♌ 5.ª	18 7		
29	5 β ♍ 3. 4.ª	20 38		
30	15 η ♍ 3. 4.ª	11 39		

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
214	1	Mart.	0 6 0,42	8 46 47,61	8 40 46,21	4 40	7 20
215	2	Merc.	0 5 5,55	8 50 40,29	8 44 42,76	4 42	7 18
216	3	Giov.	0 5 52,06	8 54 32,34	8 48 39,52	4 43	7 17
217	4	Ven.	0 5 46,97	8 58 23,79	8 52 35,87	4 44	7 16
218	5	Sab.	0 5 41,26	9 2 14,62	8 56 32,43	4 45	7 15
219	6	Dom.	0 5 34,92	9 6 4,82	9 0 28,98	4 46	7 14
220	7	Lun.	0 5 27,98	9 9 54,42	9 4 25,54	4 48	7 12
221	8	Mart.	0 5 20,43	9 13 43,40	9 8 22,09	4 49	7 11
222	9	Merc.	0 5 12,28	9 17 31,77	9 12 18,64	4 50	7 10
223	10	Giov.	0 5 3,54	9 21 19,56	9 16 15,20	4 52	7 8
224	11	Ven.	0 4 54,23	9 25 6,78	9 20 11,75	4 53	7 7
225	12	Sab.	0 4 44,34	9 28 53,41	9 24 8,30	4 55	7 5
226	13	Dom.	0 4 33,88	9 32 39,49	9 28 4,86	4 56	7 4
227	14	Lun.	0 4 22,89	9 36 25,02	9 32 1,41	4 58	7 2
228	15	Mart.	0 4 11,36	9 40 10,01	9 35 57,96	4 59	7 1
229	16	Merc.	0 3 59,30	9 43 54,47	9 39 54,52	5 0	7 0
230	17	Giov.	0 3 46,73	9 47 38,45	9 43 51,08	5 1	6 59
231	18	Ven.	0 3 33,68	9 51 21,89	9 47 47,63	5 3	6 57
232	19	Sab.	0 3 20,16	9 55 4,88	9 51 44,18	5 4	6 56
233	20	Dom.	0 3 6,14	9 58 47,38	9 55 40,73	5 5	6 55
234	21	Lun.	0 2 51,67	10 2 29,43	9 59 37,29	5 7	6 53
235	22	Mart.	0 2 36,78	10 6 1,05	10 3 33,84	5 8	6 52
236	23	Merc.	0 2 21,46	10 9 52,25	10 7 30,39	5 10	6 50
237	24	Giov.	0 2 5,72	10 13 33,00	10 11 26,95	5 11	6 49
238	25	Ven.	0 1 49,60	10 17 13,40	10 15 23,50	5 13	6 47
239	26	Sab.	0 1 33,09	10 20 53,39	10 19 20,05	5 14	6 46
240	27	Dom.	0 1 16,19	10 24 33,00	10 23 16,61	5 16	6 44
241	28	Lun.	0 0 58,90	10 28 12,22	10 27 13,16	5 17	6 43
242	29	Mart.	0 0 41,30	10 31 51,12	10 31 9,71	5 19	6 41
243	30	Merc.	0 0 23,35	10 35 29,68	10 35 6,26	5 21	6 39
244	31	Giov.	0 0 5,07	10 39 7,89	10 39 2,82	5 22	6 38

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	4 9 15 17,9	17 57 5,0	− 0,63	− 0,38	0,0063125
2	4 10 12 46,0	17 41 43,4	0,64	− 0,25	0,0062506
3	4 11 10 15,0	17 26 4,4	0,65	− 0,12	0,0061864
4	4 12 7 44,8	17 10 8,6	0,66	+ 0,01	0,0061200
5	4 13 5 15,3	16 53 56,0	0,68	0,13	0,0060515
6	4 14 2 46,6	16 37 27,2	0,69	0,25	0,0059811
7	4 15 0 18,7	16 20 42,4	0,70	0,33	0,0059089
8	4 15 57 51,6	16 3 41,8	0,71	0,38	0,0058350
9	4 16 55 25,4	15 46 25,9	0,72	0,42	0,0057595
10	4 17 53 0,2	15 28 54,8	0,74	0,43	0,0056827
11	4 18 50 35,9	15 11 8,9	0,75	0,41	0,0056046
12	4 19 48 12,5	14 53 8,4	0,76	0,35	0,0055253
13	4 20 45 50,4	14 34 53,7	0,76	0,26	0,0054450
14	4 21 43 29,6	14 16 25,1	0,77	0,15	0,0053637
15	4 22 41 9,9	13 57 43,0	0,78	0,03	0,0052814
16	4 23 38 51,6	13 38 47,4	0,79	− 0,10	0,0051981
17	4 24 36 34,9	13 19 38,7	0,80	0,23	0,0051139
18	4 25 34 19,6	13 0 17,3	0,81	0,36	0,0050287
19	4 26 32 6,1	12 40 43,5	0,81	0,48	0,0049424
20	4 27 29 54,0	12 20 57,6	0,82	0,58	0,0048550
21	4 28 27 43,7	12 0 59,8	0,83	0,65	0,0047663
22	4 29 25 35,3	11 40 50,4	0,84	0,70	0,0046763
23	5 0 23 28,6	11 20 29,9	0,85	0,73	0,0045848
24	5 1 21 23,7	10 59 58,4	0,86	0,72	0,0044919
25	5 2 19 20,7	10 39 16,3	0,86	0,68	0,0043974
26	5 3 17 19,1	10 18 23,9	0,87	0,61	0,0043010
27	5 4 15 19,9	9 57 21,7	0,88	0,52	0,0042028
28	5 5 13 22,1	9 36 10,0	0,88	0,41	0,0041028
29	5 6 11 25,8	9 14 49,0	0,89	0,28	0,0040009
30	5 7 9 31,3	8 53 19,2	0,89	0,15	0,0038972
31	5 8 7 38,4	8 31 40,8	0,90	0,02	0,0037918

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Mart.	5 5 51 12	5 12 15 2	1 27 4A	0 53 18A	1 51
2	Merc.	5 18 34 1	5 24 48 27	0 19 15	0 14 40B	2 38
3	Giov.	6 0 58 40	6 7 5 8	0 48 3B	1 20 34	3 22
4	Ven.	6 13 8 18	6 19 8 44	1 51 55	2 21 47	4 6
5	Sab.	6 25 7 0	7 1 3 42	2 49 56	3 16 7	4 49
6	Dom.	7 6 59 27	7 12 54 54	3 40 7	4 1 45	5 33
7	Lun.	7 18 50 39	7 24 47 21	4 20 48	4 37 6	6 18
8	Mart.	8 0 45 36	8 6 45 58	4 50 28	5 0 43	7 4
9	Merc.	8 12 49 0	8 18 55 11	5 7 43	5 11 18	7 51
10	Giov.	8 25 4 56	9 1 18 38	5 11 21	5 7 44	8 41
11	Ven.	9 7 36 38	9 13 59 9	5 0 23	4 49 13	9 32
12	Sab.	9 20 26 19	9 26 58 14	4 34 17	4 15 35	10 23
13	Dom.	10 3 34 53	10 10 16 8	3 53 14	3 27 25	11 16
14	Lun.	10 17 1 49	10 23 51 40	2 58 25	2 26 33	12 8
15	Mart.	11 0 45 19	11 7 42 23	1 52 12	1 15 52	13 0
16	Merc.	11 14 42 27	11 21 45 3	0 38 7	0 0 30A	13 52
17	Giov.	11 28 49 44	0 5 56 0	0 39 18A	1 17 40	14 44
18	Ven.	0 13 3 26	0 20 11 37	1 54 57	2 30 31	15 37
19	Sab.	0 27 20 9	1 4 28 41	3 3 45	3 34 8	16 30
20	Dom.	1 11 36 51	1 18 44 21	4 1 10	4 24 24	17 25
21	Lun.	1 25 50 55	2 2 56 16	4 43 32	4 58 16	18 21
22	Mart.	2 10 0 7	2 17 2 14	5 8 26	5 13 55	19 17
23	Merc.	2 24 2 21	3 1 0 15	5 14 41	5 10 50	20 13
24	Giov.	3 7 55 42	3 14 48 28	5 2 28	4 49 46	21 9
25	Ven.	3 21 38 21	3 28 25 7	4 33 2	4 12 34	22 3
26	Sab.	4 5 8 37	4 11 48 39	3 48 46	3 22 1	22 55
27	Dom.	4 18 25 3	4 24 57 44	2 52 47	2 21 31	23 44
28	Lun.	5 1 26 36	5 7 51 38	1 48 41	1 14 45	* *
29	Mart.	5 14 12 51	5 20 30 18	0 40 14	0 5 31	0 31
30	Merc.	5 26 44 7	6 2 54 28	0 28 57B	1 2 45B	1 16
31	Giov.	6 9 1 36	6 15 5 49	1 35 33	2 7 2	2 0

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	10 32	7 44B	56 24	56 4	30 47	30 36	20 10	8 28
2	11 23	3 49	55 45	55 28	30 26	30 17	21 9	8 58
3	12 12	0 12A	55 11	54 56	30 8	30 0	22 8	9 27
4	12 59	4 6	54 43	54 32	29 52	29 46	23 9	9 56
5	13 46	7 47	54 24	54 18	29 42	29 39	* *	10 22
6	14 34	11 56	54 14	54 13	29 36	29 36	0 8	10 52
7	15 23	13 55	54 14	54 19	29 36	29 38	1 6	11 25
8	16 13	16 9	54 25	54 34	29 42	29 47	2 3	12 2
9	17 5	17 39	54 45	54 59	29 53	30 1	2 58	12 41
10	17 58	18 18	55 14	55 31	30 9	30 18	3 53	13 29
11	18 53	18 1	55 50	55 10	30 29	30 40	4 43	14 22
12	19 49	16 43	56 31	56 52	30 51	31 3	5 28	15 22
13	20 45	14 26	57 12	57 32	31 14	31 25	6 11	16 26
14	21 42	11 15	57 52	58 10	31 35	31 45	6 50	17 32
15	22 38	7 21	58 27	58 42	31 55	32 3	7 26	18 42
16	23 34	2 57	58 54	59 5	32 9	32 15	7 59	19 54
17	0 30	1 41B	59 14	59 20	32 20	32 23	8 32	21 5
18	1 27	6 13	59 25	59 27	32 26	32 27	9 7	22 17
19	2 24	10 22	59 28	59 27	32 28	32 27	9 43	23 27
20	3 23	13 52	59 24	59 20	32 26	32 23	10 20	* *
21	4 23	16 26	59 14	59 7	32 20	32 16	11 3	0 38
22	5 24	17 56	58 59	58 50	32 12	32 7	11 50	1 45
23	6 24	18 15	58 40	58 29	32 2	31 56	12 43	2 47
24	7 24	17 24	58 18	58 6	31 50	31 43	13 41	3 43
25	8 22	15 29	57 55	57 39	31 36	31 28	14 43	4 34
26	9 18	12 43	57 25	57 10	31 20	31 12	15 47	5 16
27	10 11	9 19	56 54	56 39	31 4	30 56	16 49	5 55
28	* *	* *	56 23	56 7	30 47	30 38	17 54	6 29
29	11 2	5 31	55 51	55 35	30 29	30 21	18 58	6 59
30	11 51	1 32	55 20	55 6	30 12	30 5	19 59	7 27
31	12 40	2 26A	54 53	54 41	29 58	29 51	20 57	7 54

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	16^h $0'$	*Occidente*
25	●1	O	.4, 2. 3.
26	2.	O	.1 3. .4
27	.2, 3. 1.	O	.4
28	3.	O	.1 .2 .4
29	.3 .1	O	2. 4.
30	2.	O	.3, 1. 4.
31	●1 .2	O	.3, 4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Primo quarto	$9^h 20'$
12	Luna piena	18 55
19	Ultimo quarto	10 34
26	Luna nuova	22 12

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	82 m ♍ 5.ª	6 58
1	98 x ♍ 4.ª	22 40
3	38 γ ♎ 4. 5.ª	16 20
4	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	19 43
5	24 ♏ 5.ª	0 57
13	20 n ♓ 5.ª	0 37
15	65 ξ¹ Balena 5.ª	14 46
17	54 γ ♉ 3. 4.ª	19 2
17	61 δ¹ ♉ 4.ª	20 50
17	64 δ² ♉ 4. 5.ª	21 15
17	77 θ¹ ♉ 5.ª	22 40
18	Aldebaran 1.ª.	1 43
18	104 m ♉ 5.ª	14 41
20	54 λ □ 4. 5.ª	20 50
21	68 k □ 5.ª.	3 33
23	14 o ♌ 4.ª	13 14
26	15 η ♍ 3. 4.ª	18 54
27	51 θ ♍ 4. 5.ª	21 21
29	98 x ♍ 4.ª	5 57

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	9 6 54 imm.
3	3 35 20
4	22 3 51
* 6	16 32 18
8	11 0 49
10	5 29 14
11	23 57 42
13	18 26 8
15	12 54 37
17	7 22 1
19	1 51 28
20	20 19 51
22	14 48 20
24	9 16 42
26	3 45 7
27	22 13 29
* 29	16 41 56
	II. Satellite.
2	13 36 47 imm.
6	2 53 50
* 9	16 11 4
13	5 28 7
16	18 45 24
20	8 2 28
23	21 19 49
27	10 36 54
30	23 54 28
	III. Satellite.
3	5 27 8 imm.
10	9 25 14
17	13 17 23
* 24	17 21 22
24	20 52 32 em.
	IV. Satellite.
2	4 49 12 imm.
2	9 19 19 em.
18	22 49 15 imm.
19	3 22 25 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
245	1	Ven.	23 59 46,46	10 42 45,79	10 42 59,37	5 23	6 37
246	2	Sab.	23 59 27,54	10 46 23,37	10 46 55,92	5 25	6 35
247	3	Dom.	23 59 8,34	10 50 0,68	10 50 52,47	5 27	6 33
248	4	Lun.	23 58 48,88	10 53 37,71	10 54 49,02	5 29	6 31
249	5	Mart.	23 58 29,16	10 57 14,48	10 58 45,57	5 30	6 30
250	6	Merc.	23 58 9,22	11 0 51,05	11 2 42,13	5 31	6 29
251	7	Giov.	23 57 49,05	11 4 27,37	11 6 38,68	5 33	6 27
252	8	Ven.	23 57 28,61	11 8 3,50	11 10 35,23	5 35	6 25
253	9	Sab.	23 57 8,13	11 11 39,44	11 14 31,78	5 36	6 24
254	10	Dom.	23 56 47,41	11 15 15,21	11 18 28,33	5 38	6 22
255	11	Lun.	23 56 26,55	11 18 50,86	11 22 24,89	5 40	6 20
256	12	Mart.	23 56 5,59	11 22 26,39	11 26 21,44	5 42	6 18
257	13	Merc.	23 55 44,54	11 26 1,84	11 30 17,99	5 44	6 16
258	14	Giov.	23 55 23,41	11 29 37,20	11 34 14,54	5 45	6 15
259	15	Ven.	23 55 2,23	11 33 12,52	11 38 11,10	5 47	6 13
260	16	Sab.	23 54 41,05	11 36 47,83	11 42 7,65	5 48	6 12
261	17	Dom.	23 54 19,87	11 40 23,14	11 46 4,20	5 50	6 10
262	18	Lun.	23 53 58,72	11 43 58,49	11 50 0,75	5 51	6 9
263	19	Mart.	23 53 37,61	11 47 33,87	11 53 57,30	5 53	6 7
264	20	Merc.	23 53 16,58	11 51 9,31	11 57 53,85	5 55	6 5
265	21	Giov.	23 52 55,63	11 54 44,87	12 1 50,41	5 57	6 3
266	22	Ven.	23 52 34,78	11 58 20,51	12 5 46,96	5 58	6 2
267	23	Sab.	23 52 14,06	12 1 56,30	12 9 43,51	5 59	6 1
268	24	Dom.	23 51 53,49	12 5 32,22	12 13 40,06	6 1	5 59
269	25	Lun.	23 51 33,08	12 9 8,31	12 17 36,62	6 2	5 58
270	26	Mart.	23 51 12,86	12 12 44,60	12 21 33,17	6 3	5 57
271	27	Merc.	23 50 52,85	12 16 21,08	12 25 29,72	6 5	5 55
272	28	Giov.	23 50 33,05	12 19 57,77	12 29 26,27	6 6	5 54
273	29	Ven.	23 50 13,48	12 23 34,70	12 33 22,82	6 8	5 52
274	30	Sab.	23 49 54,17	12 27 11,89	12 37 19,37	6 9	5 51

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	5 9 5 47,0	8 9 54,2	− 0,91	+ 0,11	0,0036847
2	5 10 3 57,2	7 47 59,9	0,91	0,22	0,0035761
3	5 11 2 8,7	7 25 58,0	0,91	0,31	0,0034661
4	5 12 0 22,8	7 3 48,9	0,92	0,38	0,0033547
5	5 12 58 36,3	6 41 33,0	0,92	0,42	0,0032420
6	5 13 56 52,5	6 19 10,5	0,93	0,43	0,0031283
7	5 14 55 10,0	5 56 42,0	0,93	0,41	0,0030136
8	5 15 53 29,1	5 34 7,5	0,94	0,36	0,0028982
9	5 16 51 49,7	5 11 27,7	0,94	0,28	0,0027823
10	5 17 50 12,1	4 48 42,6	0,95	0,18	0,0026660
11	5 18 48 36,0	4 25 52,6	0,95	0,06	0,0025494
12	5 19 47 1,8	4 2 57,9	0,95	0,07	0,0024327
13	5 20 45 29,5	3 39 59,0	0,95	0,21	0,0023158
14	5 21 43 59,0	3 16 56,1	0,96	0,34	0,0021988
15	5 22 42 30,5	2 53 49,6	0,96	0,46	0,0020815
16	5 23 41 4,0	2 30 39,7	0,96	0,56	0,0019640
17	5 24 39 39,7	2 7 26,7	0,96	0,64	0,0018463
18	5 25 38 17,6	1 44 10,9	0,96	0,70	0,0017285
19	5 26 36 57,7	1 20 52,9	0,97	0,73	0,0016103
20	5 27 35 40,0	0 57 32,6	0,97	0,73	0,0014917
21	5 28 34 24,7	0 34 10,5	0,97	0,70	0,0013727
22	5 29 33 11,5	0 10 47,3	0,97	0,63	0,0012530
23	6 0 32 0,7	0 12 37,1 Aust.	0,97	0,54	0,0011326
24	6 1 30 52,0	0 36 2,2	0,97	0,42	0,0010115
25	6 2 29 45,7	0 59 27,7	0,97	0,30	0,0008895
26	6 3 28 41,3	1 22 53,2	0,97	0,18	0,0007667
27	6 4 27 39,2	1 46 18,3	0,97	− 0,03	0,0006429
28	6 5 26 39,1	2 9 42,6	0,97	+ 0,10	0,0005182
29	6 6 25 40,9	2 33 5,8	0,97	0,23	0,0003927
30	6 7 24 44,9	2 56 27,4	0,97	0,33	0,0002666

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzanotte media.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	6 21 7 26	6 27 6 51	2 36 52B	3 4 47B	2 44
2	Sab.	7 3 4 30	7 9 0 52	3 30 33	3 53 57	3 28
3	Dom.	7 14 56 25	7 20 51 43	4 14 48	4 32 55	4 12
4	Lun.	7 26 47 17	8 2 43 44	4 48 7	5 0 17	4 57
5	Mart.	8 8 41 37	8 14 41 33	5 9 16	5 14 57	5 44
6	Merc.	8 20 44 5	8 26 49 48	5 17 11	5 15 54	6 31
7	Giov.	9 2 59 15	9 9 12 56	5 10 59	5 2 23	7 21
8	Ven.	9 15 31 18	9 21 54 45	4 50 3	4 33 58	8 11
9	Sab.	9 28 23 37	10 4 58 9	4 14 11	3 50 47	9 3
10	Dom.	10 11 38 31	10 18 24 44	3 23 55	2 53 48	9 55
11	Lun.	10 25 16 44	11 2 14 16	2 20 45	1 45 11	10 48
12	Mart.	11 9 17 7	11 16 24 43	1 7 34	0 28 27	11 40
13	Merc.	11 23 36 32	0 0 51 54	0 11 29A	0 51 34A	12 34
14	Giov.	0 8 10 3	0 15 30 10	1 31 3	2 9 12	13 28
15	Ven.	0 22 51 25	1 0 12 58	2 45 18	3 18 41	14 22
16	Sab.	1 7 34 1	1 14 53 46	3 48 44	4 14 55	15 18
17	Dom.	1 22 11 31	1 29 26 41	4 36 51	4 54 12	16 15
18	Lun.	2 6 38 45	2 13 47 16	5 6 47	5 14 30	17 12
19	Mart.	2 20 51 58	2 27 52 35	5 17 21	5 15 27	18 9
20	Merc.	3 4 49 2	3 11 41 13	5 8 56	4 58 3	19 5
21	Giov.	3 18 29 10	3 25 12 57	4 43 4	4 24 19	19 59
22	Ven.	4 1 52 40	4 8 28 26	4 2 11	3 37 2	20 50
23	Sab.	4 15 0 26	4 21 28 47	3 9 16	2 39 20	21 39
24	Dom.	4 27 53 38	5 4 15 10	2 7 39	1 34 39	22 26
25	Lun.	5 10 33 32	5 16 48 53	1 0 45	0 26 24	23 12
26	Mart.	5 23 1 21	5 29 11 8	0 7 59B	0 42 1B	23 56
27	Merc.	6 5 18 22	6 11 23 15	1 15 18	1 47 30	* *
28	Giov.	6 17 25 59	6 23 26 45	2 18 17	2 47 19	0 40
29	Ven.	6 29 25 50	7 5 23 27	3 14 22	3 39 10	1 23
30	Sab.	7 11 19 55	7 17 15 32	4 1 29	4 21 9	2 7

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	13 27	6 14A	54 30	54 21	29 45	29 40	21 58	8 24
2	14 15	9 42	54 15	54 11	29 37	29 35	22 55	8 53
3	15 3	12 45	54 8	54 8	29 33	29 33	23 52	9 24
4	15 53	15 13	54 11	54 16	29 35	29 38	* *	9 57
5	16 43	17 2	54 24	54 34	29 42	29 47	0 49	10 37
6	17 35	18 3	54 47	55 2	29 54	30 3	1 41	11 20
7	18 29	18 11	55 19	55 39	30 12	30 23	2 33	12 10
8	19 23	17 23	56 0	56 23	30 34	30 47	3 20	13 5
9	20 19	15 35	56 48	57 13	31 1	31 14	4 3	14 7
10	21 15	12 50	57 38	58 3	31 28	31 41	4 44	15 12
11	22 12	9 15	58 28	58 50	31 55	32 7	5 22	16 21
12	23 9	4 59	59 12	59 30	32 19	32 29	5 55	17 34
13	0 6	0 20	59 46	59 59	32 38	32 45	6 30	18 46
14	1 4	4 24B	60 9	60 15	32 50	32 54	7 6	19 59
15	2 3	8 51	60 17	60 16	32 55	32 54	7 40	21 14
16	3 3	12 43	60 12	60 5	32 52	32 48	8 20	22 26
17	4 4	15 41	59 56	59 44	32 43	32 37	9 2	23 36
18	5 5	17 34	59 30	59 15	32 29	32 21	9 47	* *
19	6 6	18 14	58 59	58 41	32 12	32 2	10 39	0 41
20	7 6	17 44	58 24	58 6	31 52	31 43	11 36	1 39
21	8 4	16 10	57 48	57 31	31 33	31 24	12 38	2 31
22	8 59	13 42	57 14	56 57	31 15	31 6	13 39	3 15
23	9 53	10 33	56 41	56 25	30 57	30 48	14 11	3 54
24	10 44	6 55	56 10	55 55	30 40	30 32	15 44	4 29
25	11 33	3 2	55 41	55 27	30 24	30 16	16 47	5 0
26	12 21	0 57A	55 14	55 2	30 9	30 3	17 46	5 29
27	* *	* *	54 50	54 39	29 57	29 50	18 45	5 58
28	13 9	4 49	54 29	54 20	29 45	29 40	19 46	6 27
29	13 57	8 27	54 13	54 7	29 36	29 33	20 45	6 53
30	14 45	11 40	54 3	54 0	29 30	29 29	21 43	7 24

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$15^h\ 36'$	Occidente
1	1.	○	4♂2 , 3.
2	●4	○	2. .1 3.
3	4♂2'.1 3.	○	
4	4. 3.	○	.2 .1
5	4. .3 .1	○	2.
6	4· 2♂3	○	1.
7	.4 .2	○	.3 1○
8	.4 1.	○	.2 3.
9	.4	○	2. .1 3.
10	2. 1. .4,3.	○	
11	3.	○	.2 .4♂1
12	.3 .1	○	2. .4
13	.3, 2.	○	1. .4
14	.2 .1	○	.3 .4
15	1.	○	.2 .3 4.
16		○	2♂1 3. 4.
17	2. .1	○	3. 4.
18	3. .2	○	.1,4.
19	3. 1. 4.	○	.2
20	4. .3 2.	○	1.
21	4. .2 .1	○	.3
22	4.	○	.2 .3 1●
23	4.	○	.1 2. 3.
24	.4 2. 1.	○	3.
25	.4 3. .2	○	.1
26	3. .4 1.	○	.2
27	.3 2♂4	○	1.
28	2. .1	○	.4 3○
29		○	.1.2 .3 .4
30	○1	○	2. 3. .4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Primo quarto	$2^h 37'$
12	Luna piena	4 32
18	Ultimo quarto	19 4
26	Luna nuova	15 23
	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	3 7
2	24 m ♏ 5.ª	8 27
8	43 θ ♒ 4. 5.ª	20 27
11	80 e ♓ 5.ª	22 45
12	98 μ ♓ 5.ª	7 0
15	54 γ ♉ 3. 4.ª	2 57
15	61 δ¹ ♉ 4.ª	4 41
15	64 δ² ♉ 4. 5.ª	5 7
15	77 θ¹ ♉ 5.ª	6 27
15	Aldebaran 1.ª	9 30
15	104 m ♉ 5.ª	22 0
18	54 λ ♊ 4. 5.ª	2 43
21	31 a ♌ 5.ª	6 20
23	5 β ♍ 3. 4.ª	9 54
24	15 η ♍ 3. 4.ª	1 4
25	51 θ ♍ 4. 5.ª	3 57
26	98 κ ♍ 4.ª	12 27
28	38 γ ♎ 4. 5.ª	7 13
29	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	9 37
29	24 m ♏ 5.ª	14 58

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	11 10 17 imm.
3	5 38 41
5	0 6 2
6	18 35 28
8	13 3 47
10	7 32 9
12	2 0 29
13	20 28 53
* 15	14 56 11
17	9 25 33
19	3 53 51
20	22 21 14
* 22	16 50 31
24	11 18 51
26	5 47 8
28	0 15 30
29	18 43 47
* 31	13 12 6
	II. Satellite.
4	13 11 25 imm.
8	2 28 56
* 11	15 46 2
15	5 3 38
18	18 20 45
22	7 38 27
25	20 55 35
29	10 13 22
	III. Satellite.
1	21 19 59 imm.
2	0 51 24 em.
9	1 18 6 imm.
9	4 49 45 em.
16	5 16 26 imm.
16	8 48 18 em.
23	9 14 7 imm.
23	12 46 11 em.
* 30	13 11 37 imm.
* 30	16 43 52 em.
	IV. Satellite.
5	16 48 11 imm.
5	21 24 0 em.
* 22	10 46 50 imm.
* 22	15 25 1 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
275	1	Dom.	23 49 35,13	12 30 49,34	12 41 15,92	6 11	5 49
276	2	Lun.	23 49 16,38	12 34 27,09	12 45 12,47	6 13	5 47
277	3	Mart.	23 48 57,92	12 38 5,13	12 49 9,02	6 15	5 45
278	4	Merc.	23 48 39,79	12 41 43,50	12 53 5,57	6 16	5 44
279	5	Giov.	23 48 21,97	12 45 22,18	12 57 2,12	6 17	5 43
280	6	Ven.	23 48 4,53	12 49 1,25	13 0 58,68	6 18	5 42
281	7	Sab.	23 47 47,46	12 52 40,69	13 4 55,23	6 20	5 40
282	8	Dom.	23 47 30,79	12 56 20,51	13 8 51,78	6 21	5 39
283	9	Lun.	23 47 14,55	13 0 0,78	13 12 48,33	6 23	5 37
284	10	Mart.	23 46 58,75	13 3 41,50	13 16 44,88	6 24	5 36
285	11	Merc.	23 46 43,41	13 7 22,66	13 20 41,44	6 25	5 34
286	12	Giov.	23 46 28,57	13 11 4,34	13 24 37,99	6 27	5 33
287	13	Ven.	23 46 14,25	13 14 46,54	13 28 34,54	6 28	5 32
288	14	Sab.	23 46 0,47	13 18 29,27	13 32 31,09	6 30	5 30
289	15	Dom.	23 45 47,24	13 22 12,55	13 36 27,64	6 31	5 29
290	16	Lun.	23 45 34,57	13 25 56,40	13 40 24,20	6 33	5 27
291	17	Mart.	23 45 22,50	13 29 40,85	13 44 20,75	6 35	5 25
292	18	Merc.	23 45 11,04	13 33 25,91	13 48 17,30	6 37	5 23
293	19	Giov.	23 45 0,21	13 37 11,62	13 52 13,86	6 38	5 22
294	20	Ven.	23 44 50,04	13 40 57,96	13 56 10,41	6 40	5 20
295	21	Sab.	23 44 40,54	13 44 44,98	14 0 6,96	6 42	5 18
296	22	Dom.	23 44 31,72	13 48 32,69	14 4 3,51	6 43	5 17
297	23	Lun.	23 44 23,61	13 52 21,11	14 8 0,06	6 45	5 15
298	24	Mart.	23 44 16,21	13 56 10,24	14 11 56,62	6 47	5 13
299	25	Merc.	23 44 9,52	14 0 0,09	14 15 53,17	6 48	5 12
300	26	Giov.	23 44 3,56	14 3 50,67	14 19 49,73	6 49	5 11
301	27	Ven.	23 43 58,34	14 7 41,99	14 23 46,28	6 51	5 9
302	28	Sab.	23 43 53,88	14 11 34,07	14 27 42,83	6 52	5 8
303	29	Dom.	23 43 50,19	14 15 26,92	14 31 39,38	6 54	5 6
304	30	Lun.	23 43 47,25	14 19 20,52	14 35 35,93	6 56	5 4
305	31	Mart.	23 43 45,08	14 23 14,90	14 39 32,49	6 57	5 3

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	6 8 23 50,5	3 19 47,2	− 0,97	+ 0,39	0,0001399
2	6 9 22 58,2	3 43 4,8	0,97	0,42	0,0000125
3	6 10 22 7,5	4 6 19,8	0,96	0,44	9,9998847
4	6 11 21 18,7	4 29 31,7	0,96	0,43	9,9997567
5	6 12 20 31,6	4 52 40,2	0,96	0,39	9,9996286
6	6 13 19 46,3	5 15 44,8	0,96	0,32	9,9995006
7	6 14 19 2,6	5 38 45,4	0,96	0,22	9,9993727
8	6 15 18 20,9	6 1 41,6	0,95	+ 0,11	9,9992449
9	6 16 17 40,9	6 24 33,1	0,95	− 0,02	9,9991184
10	6 17 17 2,7	6 47 19,3	0,94	0,15	9,9989922
11	6 18 16 26,5	7 10 0,0	0,94	0,29	9,9988666
12	6 19 15 52,2	7 32 34,9	0,94	0,41	9,9987419
13	6 20 15 20,1	7 55 3,6	0,93	0,52	9,9986181
14	6 21 14 49,9	8 17 25,7	0,93	0,60	9,9984953
15	6 22 14 21,9	8 39 40,9	0,92	0,67	9,9983735
16	6 23 13 56,2	9 1 48,8	0,92	0,70	9,9982526
17	6 24 13 32,5	9 23 48,9	0,92	0,70	9,9981326
18	6 25 13 11,2	9 45 41,0	0,91	0,67	9,9980133
19	6 26 12 52,2	10 7 24,7	0,91	0,62	9,9978947
20	6 27 12 35,5	10 28 59,7	0,90	0,53	9,9977767
21	6 28 12 21,2	10 50 25,2	0,89	0,42	9,9976593
22	6 29 12 8,9	11 11 41,4	0,88	0,30	9,9975124
23	7 0 11 59,0	11 32 47,5	0,87	0,16	9,9974259
24	7 1 11 51,1	11 53 43,1	0,87	− 0,02	9,9973097
25	7 2 11 45,7	12 14 28,1	0,86	+ 0,11	9,9971937
26	7 3 11 42,0	12 35 1,7	0,85	0,22	9,9970778
27	7 4 11 40,4	12 55 23,6	0,84	0,32	9,9969622
28	7 5 11 40,6	13 15 33,5	0,83	0,40	9,9968469
29	7 6 11 42,8	13 35 30,7	0,83	0,45	9,9967318
30	7 7 11 46,7	13 55 15,0	0,82	0,47	9,9966171
31	7 8 11 52,2	14 14 45,9	0,81	0,46	9,9965029

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Dom.	7 23 10 38	7 29 5 37	4 37 59B	4 51 51B	2 52
2	Lun.	8 5 0 53	8 10 56 54	5 2 35	5 10 7	3 38
3	Mart.	8 16 54 10	8 22 53 10	5 14 21	5 15 11	4 25
4	Merc.	8 28 54 28	9 4 58 36	5 12 33	5 6 27	5 13
5	Giov.	9 11 6 9	9 17 17 40	4 56 48	4 43 37	6 2
6	Ven.	9 23 33 43	9 29 54 50	4 26 55	4 6 43	6 52
7	Sab.	10 6 21 29	10 12 54 6	3 43 9	3 16 19	7 42
8	Dom.	10 19 33 5	10 26 18 40	2 46 26	2 13 45	8 33
9	Lun.	11 3 11 1	11 10 10 10	1 38 36	1 1 27	9 25
10	Mart.	11 17 15 57	11 24 28 5	0 22 46	0 16 49A	10 18
11	Merc.	0 1 46 3	0 9 9 11	0 56 37A	1 35 56	11 12
12	Giov.	0 16 36 39	0 24 7 26	2 13 56	2 49 51	12 7
13	Ven.	1 1 40 24	1 9 14 23	3 22 57	3 52 33	13 5
14	Sab.	1 16 48 8	1 24 20 27	4 18 4	4 38 57	14 3
15	Dom.	2 1 50 12	2 9 16 20	4 54 54	5 5 46	15 3
16	Lun.	2 16 37 59	2 23 54 27	5 11 28	5 12 2	16 2
17	Mart.	3 1 5 11	3 8 9 51	5 7 42	4 58 42	16 59
18	Merc.	3 15 8 19	3 22 0 35	4 45 22	4 28 7	17 55
19	Giov.	3 28 46 44	4 5 27 3	4 7 21	3 43 30	18 48
20	Ven.	4 12 1 51	4 18 31 30	3 17 0	2 48 17	19 38
21	Sab.	4 24 56 26	5 1 17 3	2 17 48	1 45 57	20 25
22	Dom.	5 7 33 46	5 13 47 1	1 13 9	0 39 47	21 10
23	Lun.	5 19 57 11	5 26 4 38	0 6 17	0 27 2B	21 54
24	Mart.	6 2 9 42	6 8 12 43	0 59 47B	1 31 37	22 38
25	Merc.	6 14 13 58	6 20 13 43	2 2 14	2 31 20	23 21
26	Giov.	6 26 12 12	7 2 9 40	2 58 37	3 23 49	* *
27	Ven.	7 8 6 19	7 14 2 19	3 46 42	4 7 4	0 4
28	Sab.	7 19 57 54	7 25 53 16	4 24 42	4 39 27	0 48
29	Dom.	8 1 48 36	8 7 44 10	4 51 11	4 59 46	1 34
30	Lun.	8 13 40 12	8 19 37 1	5 5 8	5 7 12	2 21
31	Mart.	8 25 34 55	9 1 34 18	5 5 56	5 1 19	3 8

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	15 34	14 22A	53 59	54 0	29 29	29 29	22 39	7 57
2	16 24	16 27	54 4	54 9	29 31	29 34	23 34	8 34
3	17 14	17 47	54 17	54 28	29 38	29 44	* *	9 14
4	18 7	18 17	54 41	54 56	29 51	29 59	0 25	10 0
5	19 0	17 53	55 14	55 34	30 9	30 20	1 13	10 52
6	19 54	16 33	55 56	56 20	30 32	30 45	1 57	11 50
7	20 48	14 18	56 46	57 13	30 59	31 14	2 37	12 52
8	21 43	11 10	57 41	58 10	31 29	31 45	3 14	13 58
9	22 39	7 15	58 38	59 6	32 1	32 16	3 51	15 8
10	23 36	2 47	59 32	59 56	32 30	32 43	4 24	16 21
11	0 34	2 0B	60 17	60 35	32 55	33 4	4 59	17 34
12	1 34	6 45	60 49	60 58	33 12	33 17	5 35	18 49
13	2 35	11 5	61 3	61 4	33 20	33 20	6 14	20 5
14	3 38	14 37	61 0	60 51	33 18	33 13	6 54	21 19
15	4 41	17 3	60 39	60 23	33 7	32 58	7 41	22 30
16	5 45	18 13	60 4	59 43	32 48	32 36	8 33	23 32
17	6 47	18 7	59 20	58 56	32 23	32 10	9 29	* *
18	7 46	16 51	58 32	58 7	31 57	31 44	10 29	0 26
19	8 43	14 37	57 43	57 20	31 31	31 18	11 32	1 17
20	9 37	11 38	56 57	56 36	31 5	30 54	12 35	1 58
21	10 28	8 9	56 16	55 57	30 43	30 33	13 38	2 32
22	11 17	4 20	55 40	55 25	30 23	30 15	14 40	3 3
23	12 6	0 24	55 10	54 57	30 7	30 0	15 40	3 32
24	12 53	3 31A	54 45	54 34	29 53	29 47	16 39	4 0
25	13 40	7 15	54 25	54 17	29 42	29 38	17 39	4 29
26	* *	* *	54 10	54 4	29 34	29 31	18 37	4 56
27	14 28	10 39	53 59	53 55	29 28	29 26	19 35	5 24
28	15 17	13 35	53 53	53 53	29 25	29 25	20 33	5 57
29	16 6	15 55	53 53	53 56	29 25	29 27	21 28	6 32
30	16 57	17 33	54 0	54 7	29 29	29 33	22 20	7 11
31	17 48	18 21	54 15	54 25	29 37	29 42	23 9	7 55

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	14^h 36′	Occidente
1	.2 1.	○	3. .4
2	3. .2	○	.1 4.
3	3. 1.	○	.2 4.
4	•2 .3	○	.1 4.
5	.2,1. .3	○	4.
6	4.	○	1☌2 .3
7	4. .1	○	2. .3
8	4. 2.	○	1. 3.
9	4. 3☌2	○	.1
10	4. 3. 1.	○	.2
11	.4 .3	○	2. .1
12	.4 .2,1☌3	○	
13	.4	○	.2,1. .3
14	.1	○	2, .3 4o
15	2.	○	1. .4☌3
16	o1 .2, 3.	○	.4
17	3. 1.	○	.2 .4
18	3.	○	2. .1 .4
19	2. .3,1.	○	4.
20	o2	○	1☌3 4.
21	1.	○	.2, 4..3
22	2.	○	4☌1 3.
23	•3 .2,4. .1	○	
24	4. 3.	○	.2 1•
25	4. 3.	○	.1 ,2.
26	4. 2☌3,1.	○	
27	.4 .2	○	.3 .1
28	.4 1.	○	2. .3
29	.4 2.	○	1. 3.
30	.2.4 .1	○	3.
31	3.	○	.4 .2 1•

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
3	Primo quarto	18h 39'
10	Luna piena	14 12
17	Ultimo quarto	7 23
25	Luna nuova	10 6

GIORNI.	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
4	48 λ ♑ 5.ª	14 51
5	43 θ ♒ 4. 5.ª	5 50
6	20 n ♓ 5.ª	21 46
8	80 e ♓ 5.ª	9 53
8	98 μ ♓ 5.ª	18 14
11	54 γ ♉ 3. 4.ª	13 24
11	61 δ¹ ♉ 4.ª	15 4
11	64 δ² ♉ 4. 5.ª	15 28
11	77 θ¹ ♉ 5.ª	16 50
11	Aldebaran 1.ª	19 42
12	104 m ♉ 5.ª	7 52
14	54 λ ◻ 4. 5.ª	10 45
19	5 β ♍ 3. 4.ª	15 37
20	15 η ♍ 3. 4.ª	6 52
21	51 θ ♍ 4. 5.ª	9 40
22	98 κ ♍ 4.ª	18 28
24	38 γ ♎ 4. 5.ª	12 17
25	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	15 37
25	24 m ♏ 5.ª	8 56
30	9 β ♑ 3. 4.ª	5 39

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	I. SATELLITE.
2	7h 40' 23" imm.
4	2 8 43
5	20 36 59
* 7	15 5 17
9	9 33 33
11	4 1 53
12	22 30 9
* 14	16 58 26
16	11 26 32
18	5 55 0
20	0 23 16
21	18 51 33
* 23	13 19 48
25	7 48 7
27	2 16 22
28	20 44 39
* 30	15 12 54
	II. SATELLITE.
1	23 30 32 imm.
* 5	12 48 25
9	2 5 37
* 12	15 23 36
16	4 40 49
* 19	17 58 54
23	7 16 11
26	20 34 12
30	9 51 40
	III. SATELLITE.
* 6	17 9 10 imm.
6	20 41 36 em.
13	21 6 47 imm.
14	0 39 23 em.
21	1 5 0 imm.
21	4 37 46 em.
28	5 2 47 imm.
28	8 35 41 em.
	IV. SATELLITE
8	4 45 53 imm.
8	9 26 9 em.
24	21 44 9 imm.
25	3 26 9 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
306	1	Merc.	23 43 43,69	14 27 10,06	14 43 20,04	6 58	5 2
307	2	Giov.	23 43 43,09	14 31 6,03	14 47 25,59	7 0	5 0
308	3	Ven.	23 43 43,28	14 35 2,75	14 51 22,14	7 1	4 59
309	4	Sab.	23 43 44,27	14 39 0,30	14 55 18,70	7 2	4 58
310	5	Dom.	23 43 46,06	14 42 58,66	14 59 15,27	7 4	4 56
311	6	Lun.	23 43 48,67	14 46 57,83	15 3 11,82	7 5	4 55
312	7	Mart.	23 43 52,10	14 50 57,82	15 7 8,38	7 6	4 54
313	8	Merc.	23 43 56,34	14 54 58.65	15 11 4,93	7 8	4 52
314	9	Giov.	23 44 1,45	14 59 0,30	15 15 1,48	7 9	4 51
315	10	Ven.	23 44 7,38	15 3 2,81	15 18 58,04	7 10	4 50
316	11	Sab.	23 44 14,15	15 7 6,16	15 22 54,60	7 12	4 48
317	12	Dom.	23 44 21,78	15 11 10,36	15 26 51,15	7 13	4 47
318	13	Lun.	23 44 30,24	15 15 15,40	15 30 47,71	7 14	4 46
319	14	Mart.	23 44 39,58	15 19 21,32	15 34 44,26	7 15	4 45
320	15	Merc.	23 44 49,77	15 23 28,10	15 38 40,82	7 16	4 44
321	16	Giov.	23 45 0,83	15 27 35,74	15 42 37,37	7 17	4 43
322	17	Ven.	23 45 12,75	15 31 44,25	15 46 33,93	7 19	4 41
323	18	Sab.	23 45 25,51	15 35 53,60	15 50 30,48	7 20	4 40
324	19	Dom.	23 45 39,11	15 40 3,80	15 54 27,04	7 21	4 39
325	20	Lun.	23 45 53,56	15 44 14,84	15 58 23,59	7 22	4 38
326	21	Mart.	23 46 8,83	15 48 26,71	16 2 20,15	7 23	4 37
327	22	Merc.	23 46 24,92	15 52 39,39	16 6 16,70	7 24	4 36
328	23	Giov.	23 46 41,80	15 56 52,89	16 10 13,26	7 25	4 35
329	24	Ven.	23 46 59,48	16 1 7,16	16 14 9,81	7 26	4 34
330	25	Sab.	23 47 17,92	16 5 22,20	16 18 6,37	7 27	4 33
331	26	Dom.	23 47 37,12	16 9 38,01	16 22 2,93	7 28	4 32
332	27	Lun.	23 47 57,03	16 13 54,53	16 25 59,49	7 29	4 31
333	28	Mart.	23 48 17,66	16 18 11,78	16 29 56,04	7 30	4 30
334	29	Merc.	23 48 38,97	16 22 29,71	16 33 52,60	7 31	4 29
335	30	Giov.	23 49 0,93	16 26 48,29	16 37 49,16	7 32	4 28

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	7 9 11 59,4	14 34 3,0	− 0,80	+ 0,43	9,9963894
2	7 10 12 8,2	14 53 5,9	0,78	0,37	9,9962766
3	7 11 12 18,5	15 11 54,2	0,77	0,27	9,9961646
4	7 12 12 30,4	15 30 27,5	0,76	0,16	9,9960537
5	7 13 12 43,7	15 48 45,2	0,75	+ 0,04	9,9959440
6	7 14 12 58,6	16 6 47,2	0,74	− 0,10	9,9958357
7	7 15 13 15,0	16 24 32,9	0,73	0,23	9,9957289
8	7 16 13 32,7	16 42 1,9	0,71	0,35	9,9956238
9	7 17 13 52,1	16 59 14,0	0,70	0,46	9,9955206
10	7 18 14 13,2	17 16 8,6	0,69	0,54	9,9954193
11	7 19 14 35,8	17 32 45,5	0,68	0,61	9,9953199
12	7 20 15 0,0	17 49 4,2	0,67	0,65	9,9952225
13	7 21 15 26,0	18 5 4,4	0,65	0,66	9,9951271
14	7 22 15 53,8	18 20 45,5	0,64	0,64	9,9950336
15	7 23 16 23,2	18 36 7,4	0,63	0,58	9,9949420
16	7 24 16 54,5	18 51 9,7	0,62	0,50	9,9948522
17	7 25 17 27,7	19 5 51,8	0,61	0,40	9,9947642
18	7 26 18 2,6	19 20 13,5	0,59	0,28	9,9946780
19	7 27 18 39,3	19 34 14,3	0,57	− 0,14	9,9945934
20	7 28 19 17,8	19 47 53,9	0,56	0,00	9,9945103
21	7 29 19 57,8	20 1 11,8	0,54	+ 0,13	9,9944287
22	8 0 20 39,7	20 14 7,9	0,52	0,25	9,9943484
23	8 1 21 23,0	20 26 41,8	0,51	0,35	9,9942693
24	8 2 22 8,0	20 38 52,8	0,49	0,42	9,9941913
25	8 3 22 54,1	20 50 40,7	0,48	0,48	9,9941145
26	8 4 23 41,7	21 2 5,2	0,46	0,51	9,9940389
27	8 5 24 30,4	21 13 16,0	0,44	0,50	9,9939644
28	8 6 25 20,5	21 23 42,7	0,43	0,47	9,9938912
29	8 7 26 11,4	21 33 55,1	0,41	0,39	9,9938194
30	8 8 27 3,3	21 43 42,8	0,39	0,30	9,9937491

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Merc.	9 7 35 34	9 13 39 11	4 53 20B	4 42 1B	3 56
2	Giov.	9 19 45 38	9 25 55 25	4 27 25	4 9 34	4 45
3	Ven.	10 2 9 5	10 8 27 9	3 48 36	3 24 37	5 34
4	Sab.	10 14 50 11	10 21 18 42	2 57 46	2 28 16	6 23
5	Dom.	10 27 53 12	11 4 34 9	1 56 22	1 22 22	7 13
6	Lun.	11 11 21 54	11 18 16 44	0 46 40	0 9 40	8 3
7	Mart.	11 25 18 47	0 2 27 59	0 28 4A	1 5 57A	8 55
8	Merc.	0 9 44 8	0 17 6 47	1 43 22	2 19 35	9 49
9	Giov.	0 24 35 13	1 2 8 33	2 53 46	3 25 17	10 45
10	Ven.	1 9 45 41	1 17 25 18	3 53 21	4 17 22	11 43
11	Sab.	1 25 6 1	2 2 46 21	4 36 45	4 51 7	12 44
12	Dom.	2 10 24 51	2 18 0 9	4 0 12	5 3 55	13 46
13	Lun.	2 25 30 58	3 2 56 15	5 2 20	4 55 39	14 47
14	Mart.	3 10 15 8	3 17 27 1	5 44 10	4 28 20	15 45
15	Merc.	3 24 31 31	4 1 28 30	4 8 37	3 45 31	16 41
16	Giov.	4 8 18 2	4 15 0 21	3 19 35	2 51 18	17 34
17	Ven.	4 21 35 49	4 28 4 56	2 21 11	1 49 42	18 23
18	Sab.	5 4 28 14	5 10 46 17	1 17 18	0 44 24	18 9
19	Dom.	5 16 59 43	5 23 9 7	0 11 23	0 21 24B	19 53
20	Lun.	5 29 15 4	6 5 18 7	0 53 35B	1 24 53	20 37
21	Mart.	6 11 18 48	6 17 17 36	1 55 0	2 23 38	21 20
22	Merc.	6 23 14 58	6 29 11 19	2 50 32	3 15 28	22 3
23	Giov.	7 5 7 0	7 11 2 20	3 38 11	3 58 29	22 47
24	Ven.	7 16 57 35	7 22 52 59	4 16 10	4 31 3	23 32
25	Sab.	7 28 48 43	8 4 44 58	4 42 59	4 51 52	* *
26	Dom.	8 10 41 53	8 16 39 36	4 57 33	4 59 59	0 18
27	Lun.	8 22 38 16	8 28 38 2	4 59 6	4 54 55	1 5
28	Mart.	9 4 39 6	9 10 41 39	4 47 26	4 36 40	1 53
29	Merc.	9 16 45 57	9 22 52 16	4 22 43	4 5 39	2 42
30	Giov.	9 29 0 56	10 5 12 18	3 45 37	3 22 45	3 31

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	18 40	18 18A	54 37	54 51	29 49	29 57	23 54	8 44
2	19 33	17 20	55 7	55 25	30 5	30 15	* *	9 39
3	20 26	15 30	55 46	56 9	30 27	30 39	0 34	10 39
4	21 20	12 47	56 33	56 59	30 52	31 6	1 11	11 41
5	22 13	9 19	57 27	57 55	31 22	31 37	1 47	12 46
6	23 8	5 12	58 24	58 53	31 53	32 9	2 19	13 55
7	0 4	0 37	59 22	59 49	32 25	32 39	2 52	15 6
8	1 2	4 10B	60 14	60 37	32 53	33 6	3 28	16 19
9	2 2	8 48	60 56	61 11	33 16	33 24	4 4	17 36
10	3 4	12 53	61 21	61 26	33 30	33 32	4 43	18 53
11	4 9	16 3	61 26	61 21	33 32	33 30	5 29	20 6
12	5 14	17 58	61 11	60 56	33 24	33 16	6 20	21 16
13	6 20	18 29	60 38	60 16	33 6	32 54	7 17	22 17
14	7 23	17 41	59 51	59 24	32 40	32 26	8 16	23 10
15	8 23	15 44	58 56	58 27	32 10	31 55	9 21	23 55
16	9 19	12 56	57 58	57 30	31 39	31 23	10 26	* *
17	10 12	9 31	57 3	56 37	31 9	30 55	11 29	0 35
18	11 2	5 44	56 13	55 51	30 41	30 29	12 32	1 8
19	11 51	1 47	55 31	55 13	30 18	30 9	13 33	1 37
20	12 38	2 11A	54 57	54 42	30 0	29 52	14 32	2 5
21	13 25	6 0	54 29	54 19	29 45	29 39	15 31	2 35
22	14 13	9 32	54 11	54 4	29 35	29 31	16 32	3 1
23	15 1	12 40	53 59	53 55	29 28	29 26	17 30	3 28
24	15 50	15 16	53 53	53 52	29 25	29 24	18 28	3 59
25	* *	* *	53 53	53 55	29 25	29 26	19 23	4 32
26	16 40	17 10	53 58	54 2	29 28	29 30	20 17	5 9
27	17 31	18 18	54 8	54 16	29 33	29 38	21 7	5 52
28	18 24	18 35	54 24	54 34	29 42	29 47	21 54	6 40
29	19 16	17 57	54 45	54 58	29 53	30 0	22 35	7 33
30	20 9	16 25	55 12	55 28	30 8	30 17	23 12	8 30

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$14^h\ 31'$	*Occidente*
1	3.	○	.1 2. .4
2	.3,2. 1.	○	4
3	.2	○	.3 .1 .4
4	1.	○	.2 .3 .4
5		○	2. 1. .3 4.
6	.2 .1	○	3. 4.
7	3.	○	1. .2 4.
8	3.	○	4☌1 2.
9	.3,4. 2. 1.	○	
10	4. .2	○	.1 3o
11	4. 1.	○	.2 .3
12	4.	○	2. .1 .3
13	.4 .2 .1	○	3.
14	.4 3.	○	.2☌1
15	o1 3. .4	○	2.
16	.3 2☌4,1.	○	
17	.2 .3	○	.1.4
18	1.	○	.2.3 .4
19		○	2. .1 .3 .4
20	2. .1	○	3. .4
21	o2 3.	○	1. .4
22	3. .1	○	2. 4.
23	•1 .3 2.	○	4.
24	.2 .3	○	.1 4.
25	1. 4.	○	2☌3
26	4.	○	2☌1 .3
27	4. 2. 1.	○	3.
28	4. 3☌2	○	1.
29	4. 3. .1	○	.2
30	.4 3. 2.	○	1.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
3	Primo quarto	$8^h 42'$
10	Luna piena.	0 20
16	Ultimo quarto	23 50
25	Luna nuova	4 59

GIORNI.	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
2	48 λ ♑ 5.ª	21 42
3	73 λ ♒ 4.ª	4 17
5	80 e ♓ 5.ª	19 50
9	54 γ ♉ 3. 4.ª	0 52
9	63 ♉ 5.ª	2 30
9	61 δ^1 ♉ 4.ª	2 34
9	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	2 56
9	68 δ^3 ♉ 5.ª	3 35
9	77 θ^1 ♉ 5.ª	4 17
9	Aldebaran 1.ª	7 10
9	104 m ♉ 5.ª	19 15
14	31 α ♌ 5.ª	20 27
15	47 ρ ♌ 4.ª	7 22
16	5 β ♍ 3. 4.ª	22 25
18	51 θ ♍ 4. 5.ª	16 2
20	98 κ ♍ 4.ª	0 45
21	38 γ ♎ 4. 5.ª	6 37
22	8 φ Ofiuco 4. 5.ª	21 57
23	24 m ♏ 5.ª	3 16
29	48 λ ♑ 5.ª	3 17
31	20 η ♓ 5.ª	12 35

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE Tempo medio.
	I. SATELLITE.
	h ′ ″
2	9 41 13 imm.
4	4 9 28
5	22 36 45
* 7	17 6 1
* 9	11 34 20
11	6 2 36
13	0 30 53
14	18 59 9
* 16	13 27 28
18	7 55 45
20	2 24 2
21	20 52 19
* 23	15 20 38
* 25	9 48 57
27	4 17 13
28	22 45 32
* 30	17 13 53
	II. SATELLITE.
3	23 9 57 imm.
* 7	12 27 18
11	1 45 41
* 14	15 3 5
18	4 21 33
* 21	17 39 2
25	6 57 36
28	20 15 8
	III. SATELLITE.
5	9 0 50 imm.
* 5	12 33 51 em.
* 12	12 58 20 imm.
* 12	16 31 28 em.
* 19	16 55 45 imm.
19	20 28 59 em.
26	20 53 21 imm.
27	0 26 40 em.
	IV. SATELLITE.
* 11	16 42 31 imm.
11	21 25 57 em.
* 28	10 41 46 imm.
* 28	15 26 22 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
336	1	Ven.	23 49 23,55	16 31 7,52	16 41 45,71	7 33	4 27
337	2	Sab.	23 49 46,76	16 35 27,35	16 45 42,27	7 33	4 27
338	3	Dom.	23 50 10,56	16 39 47,78	16 49 38,83	7 34	4 26
339	4	Lun.	23 50 34,94	16 44 8,79	16 53 35,38	7 35	4 25
340	5	Mart.	23 50 59,87	16 48 30,34	16 57 31,94	7 36	4 24
341	6	Merc.	23 51 25,34	16 52 52,42	17 1 28,49	7 36	4 24
342	7	Giov.	23 51 51,28	16 57 14,99	17 5 25,05	7 37	4 23
343	8	Ven.	23 52 17,68	17 1 38,02	17 9 21,71	7 37	4 23
344	9	Sab.	23 52 44,53	17 6 1,50	17 13 18,17	7 38	4 22
345	10	Dom.	23 53 11,40	17 10 25,41	17 17 14,73	7 38	4 22
346	11	Lun.	23 53 39,48	17 14 49,72	17 21 11,28	7 39	4 21
347	12	Mart.	23 54 7,53	17 19 14,41	17 25 7,84	7 39	4 21
348	13	Merc.	23 54 35,91	17 23 39,43	17 29 4,40	7 40	4 20
349	14	Giov.	23 55 4,60	17 28 4,76	17 33 1,96	7 40	4 20
350	15	Ven.	23 55 33,60	17 32 30,40	17 36 57,52	7 40	4 20
351	16	Sab.	23 56 2,84	17 36 56,29	17 40 54,08	7 41	4 19
352	17	Dom.	23 56 32,31	17 41 22,38	17 44 50,64	7 41	4 19
353	18	Lun.	23 57 1,97	17 45 48,69	17 48 47,19	7 41	4 19
354	19	Mart.	23 57 31,80	17 50 15,14	17 52 43,75	7 42	4 18
355	20	Merc.	23 58 1,75	17 54 41,73	17 56 40,31	7 42	4 18
356	21	Giov.	23 58 31,80	17 59 8,42	18 0 36,86	7 42	4 18
357	22	Ven.	23 59 1,87	18 3 35,13	18 4 33,42	7 42	4 18
358	23	Sab.	23 59 31,98	18 8 1,88	18 8 29,98	7 42	4 18
359	24	Dom.	0 0 2,07	18 12 28,61	18 12 26,54	7 42	4 18
360	25	Lun.	0 0 32,09	18 16 55,27	18 16 23,09	7 41	4 19
361	26	Mart.	0 1 2,01	18 21 21,82	18 20 19,65	7 41	4 19
362	27	Merc.	0 1 31,77	18 25 48,22	18 24 16,21	7 41	4 19
363	28	Giov.	0 2 1,36	18 30 14,45	18 28 12,76	7 40	4 20
364	29	Ven.	0 2 30,74	18 34 10,47	18 32 9,32	7 40	4 20
365	30	Sab.	0 2 59,87	18 39 6,22	18 36 5,88	7 39	4 21
366	31	Dom.	0 3 28,71	18 43 34,71	18 40 2,43	7 39	4 21

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	8 9 27 56,2	21 53 5,4	− 0,37	+ 0,20	9,9936804
2	8 10 28 49,8	22 2 2,7	0,35	0,08	9,9936133
3	8 11 29 44,2	22 10 34,5	0,34	− 0,05	9,9935481
4	8 12 30 39,3	22 18 40,4	0,32	0,18	9,9934848
5	8 13 31 35,0	22 26 20,3	0,31	0,30	9,9934235
6	8 14 32 31,6	22 33 33,9	0,29	0,41	9,9933644
7	8 15 33 28,8	22 40 20,9	0,27	0,51	9,9933078
8	8 16 34 26,7	22 46 41,2	0,25	0,58	9,9932538
9	8 17 35 25,4	22 52 34,8	0,24	0,63	9,9932024
10	8 18 36 24,9	22 58 1,3	0,22	0,64	9,9931536
11	8 19 37 25,2	23 3 0,4	0,20	0,62	9,9931076
12	8 20 38 26,2	23 7 32,1	0,18	0,58	9,9930643
13	8 21 39 28,2	23 11 36,2	0,16	0,51	9,9930237
14	8 22 40 30,9	23 15 12,6	0,14	0,41	9,9929857
15	8 23 41 34,6	23 18 21,2	0,12	0,29	9,9929502
16	8 24 32 39,1	23 21 1,8	0,10	0,16	9,9929172
17	8 25 43 44,5	23 23 14,4	0,08	− 0,03	9,9928865
18	8 26 44 50,7	23 24 58,8	0,06	+ 0,10	9,9928581
19	8 27 45 57,7	23 26 15,0	0,04	0,22	9,9928319
20	8 28 47 5,3	23 27 2,9	− 0,02	0,33	9,9928079
21	8 29 48 13,8	23 27 22,5	0,00	0,43	9,9927858
22	9 0 49 22,8	23 27 13,9	+ 0,02	0,49	9,9927655
23	9 1 50 32,5	23 26 36,9	0,03	0,53	9,9927470
24	9 2 51 42,7	23 25 31,5	0,05	0,53	9,9927301
25	9 3 52 53,0	23 23 57,8	0,07	0,51	9,9927198
26	9 4 54 3,7	23 21 55,9	0,09	0,46	9,9927011
27	9 5 55 14,5	23 19 25,8	0,11	0,37	9,9926890
28	9 6 56 25,3	23 16 27,5	0,13	0,26	9,9926787
29	9 7 57 36,3	23 13 1,1	0,15	0,14	9,9926703
30	9 8 58 46,9	23 9 6,9	0,17	0,02	9,9926637
31	9 9 59 57,4	23 4 44,9	0,19	− 0,11	9,9926590

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	10 11 26 47	10 17 44 46	2 57 16B	2 29 21B	4 19
2	Sab.	10 24 6 43	11 0 33 9	1 59 16	1 27 18	5 8
3	Dom.	11 7 4 29	11 13 41 14	0 53 46	0 19 3	5 56
4	Lun.	11 20 23 48	11 27 12 35	0 16 26A	0 52 13A	6 45
5	Mart.	0 4 7 54	0 11 9 54	1 27 47	2 2 34	7 36
6	Merc.	0 18 18 37	0 25 33 52	2 35 58	3 7 19	8 28
7	Giov.	1 2 55 17	1 10 22 14	3 36 0	4 1 20	9 24
8	Ven.	1 17 53 54	1 25 29 13	4 22 44	4 39 39	10 22
9	Sab.	2 3 6 57	2 10 45 44	4 51 40	4 58 30	11 23
10	Dom.	2 18 24 8	2 26 0 42	4 59 58	4 56 6	12 25
11	Lun.	3 3 34 2	3 11 2 54	4 47 3	4 33 7	13 27
12	Mart.	3 18 26 11	3 25 43 0	4 14 45	3 52 27	14 27
13	Merc.	4 2 52 42	4 9 54 54	3 26 47	2 58 20	15 23
14	Giov.	4 16 49 25	4 23 36 18	2 27 43	1 55 32	16 15
15	Ven.	5 0 15 47	5 6 48 14	1 22 18	0 48 31	17 4
16	Sab.	5 13 14 8	5 19 34 3	0 14 40	0 18 52B	17 50
17	Dom.	5 25 48 38	6 1 58 31	0 51 43B	1 23 32	18 35
18	Lun.	6 8 4 22	6 14 6 52	1 54 2	2 22 57	19 18
19	Mart.	6 20 6 38	6 26 4 19	2 50 3	3 15 5	20 1
20	Merc.	7 2 0 29	7 7 55 42	3 37 54	3 58 16	20 44
21	Giov.	7 13 50 27	7 19 45 12	4 16 1	4 31 0	21 29
22	Ven.	7 25 40 20	8 1 36 12	4 43 4	4 52 5	22 15
23	Sab.	8 7 33 5	8 13 31 12	4 57 57	5 0 33	23 2
24	Dom.	8 19 30 45	8 25 31 53	4 59 51	4 55 47	23 50
25	Lun.	9 1 34 44	9 7 39 24	4 48 22	4 37 38	* *
26	Mart.	9 13 45 59	9 19 54 33	4 23 38	4 6 28	0 39
27	Merc.	9 26 5 14	10 2 18 7	3 46 17	3 23 16	1 28
28	Giov.	10 8 33 20	10 14 51 4	2 57 38	2 29 36	2 17
29	Ven.	10 21 11 28	10 27 34 45	1 59 29	1 27 34	3 6
30	Sab.	11 4 1 11	11 10 31 1	0 54 15	0 19 54	3 54
31	Dom.	11 17 4 33	11 23 42 7	0 15 4A	0 50 13A	4 42

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	21 1	14 3A	55 46	56 5	30 27	30 37	23 49	9 31
2	21 54	10 55	56 26	56 48	30 48	31 1	* *	10 34
3	22 47	7 8	57 12	57 37	31 14	31 27	0 22	11 39
4	23 40	2 52	58 2	58 29	31 41	31 56	0 52	12 47
5	0 35	1 43B	58 55	59 21	32 10	32 24	1 24	13 57
6	1 31	6 20	59 46	60 9	32 38	32 50	1 58	15 8
7	2 31	10 42	60 29	60 47	33 1	33 11	2 35	16 23
8	3 33	14 24	61 0	61 10	33 18	33 24	3 15	17 37
9	4 38	17 6	61 15	61 15	33 26	33 26	4 2	18 50
10	5 44	18 29	61 11	61 1	33 24	33 19	4 56	19 56
11	6 50	18 25	60 47	60 29	33 11	33 1	5 56	20 56
12	7 54	17 1	60 7	59 42	32 49	32 36	7 0	21 49
13	8 54	14 31	59 15	58 47	32 21	32 5	8 7	22 32
14	9 51	11 15	58 17	57 48	31 49	31 33	9 13	23 8
15	10 44	7 29	57 19	56 51	31 17	31 2	10 19	23 39
16	11 34	3 28	56 25	56 0	30 48	30 34	11 23	* *
17	12 22	0 35A	55 37	55 17	30 22	30 11	12 24	0 8
18	13 10	4 31	54 59	54 43	30 1	29 52	13 23	0 38
19	13 57	8 12	54 30	54 19	29 45	29 39	14 24	1 5
20	14 44	11 31	54 10	54 4	29 34	29 31	15 21	1 31
21	15 33	14 21	53 59	53 57	29 28	29 27	16 20	2 1
22	16 23	16 33	53 57	53 58	29 27	29 28	17 17	2 34
23	17 14	18 1	54 1	54 6	29 29	29 32	18 12	3 10
24	18 5	18 38	54 12	54 19	29 35	29 39	19 3	3 50
25	* *	* *	54 28	54 37	29 44	29 49	19 52	4 36
26	18 59	18 21	54 48	54 59	29 55	30 1	20 36	5 27
27	19 53	17 9	55 11	55 24	30 8	30 15	21 15	6 24
28	20 46	15 3	55 7	55 52	30 22	30 30	21 51	7 24
29	21 38	12 10	56 58	56 23	30 38	30 47	22 25	8 27
30	22 31	8 36	56 37	56 56	30 56	31 5	22 56	9 30
31	23 23	4 32	57 15	57 34	31 15	31 26	23 29	10 37

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	14h 16′	*Occidente*
1	.4 .2 .3	○	.1
2	.4 1.	○	.2 .3
3	.4	○	.1,2. .3
4	2. 1.	○	.4 3.
5	●3 .2	○	1. .4
6	3. .1	○	.2 .4
7	3.	○	2. 1. .4
8	2. .3 .1	○	4.
9	1.	○	.2 .3 4.
10		○	.1 2. 4☌3
11	1☌2	○	4. .3
12	.2,4.	○	3. .1
13	4. 3. .1	○	.2
14	4. 3.	○	2. 1.
15	4. 2. .3 .1	○	
16	.4	○	.2 .3 1●
17	.4	○	.1 2. .3
18	.4 2.1.	○	3.
19	.4 .2	○	3☌1
20	3. 1.	○	.2 4.
21	3.	○	2. 1. .4
22	2☌3 .1	○	.4
23	.2	○	1☌3 .4
24	○1	○	2. .3 .4
25	2☌1	○	.3 4.
26	.2	○	.1 3. 4.
27	3☌1	○	.2 4.
28	3.	○	4.2☌1
29	.3,2. 4☌1	○	
30	4. .2	○	1. 3○
31	4. .1	○	.2 .3

Semidiametro del Sole, tempo sidereo impiegato dal Sole a passare pel meridiano, e longitudine del nodo della Luna a mezzodì medio.

	Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.		Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.
		′ ″	′ ″	s ° ′			′ ″	′ ″	s ° ′
Gennajo	1	16 17,8	2 22,1	6 4 53	Luglio	5	15 45,6	2 16,9	5 25 2
	7	16 17,7	2 21,4	6 4 34		11	15 45,7	2 16,4	5 24 43
	13	16 17,5	2 20,5	6 4 14		17	15 46,0	2 15,7	5 24 24
	19	16 17,0	2 19,4	6 3 55		23	15 46,5	2 14,8	5 24 5
	25	16 16,4	2 18,1	6 3 36		29	15 47,2	2 13,8	5 23 45
	31	16 15,5	2 16,8	6 3 18	Agosto	4	15 47,9	2 12,7	5 23 26
Febbrajo	6	16 14,5	2 15,4	6 2 59		10	15 48,8	2 11,6	5 23 7
	12	16 13,5	2 14,1	6 2 40		16	15 49,9	2 10,6	5 22 48
	18	16 12,3	2 12,8	6 2 21		22	15 51,1	2 9,8	5 22 29
	24	16 11,0	2 11,7	6 2 2		28	15 52,4	2 9,2	5 22 10
Marzo	1	16 9,5	2 10,7	6 1 42	Settembre	3	15 53,8	2 8,6	5 21 51
	7	16 8,0	2 9,9	6 1 23		9	15 55,2	2 8,3	5 21 32
	13	16 6,5	2 9,4	6 1 4		15	15 56,8	2 8,1	5 21 13
	19	16 4,8	2 9,0	6 0 45		21	15 58,4	2 8,2	5 20 54
	25	16 3,1	2 8,8	6 0 26		27	16 0,0	2 8,4	5 20 35
	31	16 1,5	2 8,9	6 0 7	Ottobre	3	16 1,6	2 8,9	5 20 16
Aprile	6	15 59,8	2 9,2	5 29 48		9	16 3,3	2 9,6	5 19 57
	12	15 58,2	2 9,6	5 29 29		15	16 5,0	2 10,5	5 19 38
	18	15 56,6	2 10,3	5 29 10		21	16 6,6	2 11,6	5 19 19
	24	15 55,1	2 11,1	5 28 51		27	16 8,2	2 12,8	5 18 59
	30	15 53,6	2 11,9	5 28 31	Novembre	2	16 9,7	2 14,1	5 18 40
Maggio	6	15 52,1	2 12,8	5 28 12		8	16 11,1	2 15,5	5 18 21
	12	15 50,9	2 13,7	5 27 53		14	16 12,4	2 16,9	5 18 2
	18	15 49,8	2 14,7	5 27 34		20	16 13,7	2 18,3	5 17 43
	24	15 48,8	2 15,7	5 27 15		26	16 14,7	2 19,6	5 17 24
	30	15 47,9	2 16,7	5 26 56	Dicembre	2	16 15,6	2 20,8	5 17 5
Giugno	5	15 47,1	2 17,3	5 26 37		8	16 16,4	2 21,6	5 16 46
	11	15 46,5	2 17,6	5 26 18		14	16 17,1	2 22,1	5 16 27
	17	15 46,0	2 17,8	5 25 59		20	16 17,4	2 22,4	5 16 8
	23	15 45,7	2 17,7	5 25 40		26	16 17,7	2 22,3	5 15 49
	29	15 45,5	2 17,4	5 25 21					

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	8 24 24	0 4A	17 36	23 24A	18 37	22 57	3 17
	7	9 3 24	0 45	18 15	24 10	18 57	23 13	3 29
	13	9 12 40	1 20	18 56	24 11	19 14	23 30	3 46
	19	9 22 14	1 47	19 37	23 22	19 28	23 48	4 8
	25	10 2 8	2 1	20 20	21 41	19 36	0 4	4 32
	31	10 12 25	2 4	21 2	19 4	19 41	0 23	5 5
Febbr.	6	10 23 6	1 49	21 44	15 32	19 43	0 41	5 39
	12	11 3 58	1 13	22 25	11 12	19 42	0 59	6 16
	18	11 14 25	0 13A	23 3	6 20	19 36	1 13	6 50
	24	11 23 2	1 9B	23 33	1 43	19 23	1 19	7 15
Marzo	1	11 27 43	2 34	23 48	1 27B	19 0	1 10	7 20
	7	11 27 6	3 32	23 44	2 5	18 30	0 42	6 54
	13	11 22 20	3 27	23 26	0 8	17 58	0 1	6 4
	19	11 17 8	2 21	23 9	2 55A	17 24	23 15	5 9
	25	11 14 43	0 50B	23 2	5 15	17 5	22 46	4 27
	31	11 15 42	0 33A	23 8	6 10	16 52	22 30	4 8
Aprile	6	11 19 28	1 38	23 24	5 41	16 44	22 24	4 4
	12	11 25 15	2 20	23 46	4 2	16 36	22 23	4 10
	18	0 2 35	2 41	0 14	1 26	16 31	22 28	4 25
	24	0 11 11	2 42	0 45	1 56B	16 26	22 36	4 46
	30	0 20 53	2 23	1 21	5 57	16 22	22 49	5 16
Maggio	6	1 1 42	1 45	2 1	10 25	16 20	23 6	5 52
	12	1 13 37	0 52A	2 46	15 7	16 20	23 28	6 36
	18	1 26 26	0 11B	3 36	19 32	16 28	23 56	7 24
	24	2 9 33	1 9	4 30	23 2	16 36	0 22	8 8
	30	2 22 3	1 51	5 25	25 4	16 56	0 53	8 50
Giugno	5	3 3 17	2 6	6 15	25 31	17 19	1 19	9 19
	11	3 12 58	1 54	6 57	24 43	17 43	1 38	9 33
	17	3 21 0	1 17	7 32	23 5	18 2	1 48	9 44
	23	3 27 15	0 17B	7 57	21 0	18 15	1 50	9 25
	29	4 1 24	1 2A	8 14	18 51	18 19	1 43	9 7

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	5	4 3 3	2 32A	8 19	17 2B	18 8	1 24	8 40
	11	4 1 56	3 57	8 13	15 54	17 44	0 55	8 6
	17	3 28 30	4 51	7 58	15 44	17 7	0 17	7 27
	23	3 24 33	4 48	7 42	16 30	16 17	23 31	6 45
	29	3 22 29	3 50	7 35	17 48	15 41	23 1	6 21
Agosto	4	3 23 55	2 19	7 42	19 3	15 23	22 48	6 13
	10	3 29 14	0 43A	8 5	19 38	15 21	22 50	6 19
	16	4 7 58	0 37B	8 42	18 53	15 40	23 5	6 30
	22	4 18 58	1 28	9 27	16 33	16 14	23 28	6 42
	28	5 0 47	1 46	10 14	12 52	16 52	23 50	6 48
Settem.	3	5 12 24	1 39	10 58	8 25	17 30	0 7	6 44
	9	5 23 27	1 13	11 38	3 44	18 5	0 23	6 41
	15	6 3 49	0 37B	12 15	0 57A	18 38	0 37	6 36
	21	6 13 34	0 5A	12 50	5 26	19 8	0 48	6 28
	27	6 22 45	0 49	13 23	9 36	19 34	0 57	6 20
Ottobre	3	7 1 22	1 32	13 55	13 24	19 58	1 5	6 12
	9	7 9 22	2 12	14 25	16 42	20 19	1 12	6 5
	15	7 16 31	2 43	14 53	19 24	20 36	1 16	5 56
	21	7 22 19	3 2	15 16	21 17	20 46	1 16	5 46
	27	7 25 43	2 55	15 31	22 2	20 40	1 7	5 34
Novem.	2	7 24 54	2 5	15 28	21 1	20 9	0 40	5 11
	8	7 18 46	0 19A	15 5	17 44	18 57	23 45	4 33
	14	7 11 41	1 34B	14 39	13 52	17 53	22 58	4 3
	20	7 10 14	2 26	14 34	12 35	17 24	22 34	3 44
	26	7 14 25	2 23	14 51	13 54	17 24	22 29	3 34
Dicem.	2	7 21 34	1 51	15 19	16 23	17 40	22 34	3 28
	8	7 29 57	1 9	15 52	19 2	18 2	22 44	3 26
	14	8 8 51	0 24B	16 28	21 23	18 28	22 58	3 28
	20	8 17 58	0 19A	17 8	23 13	18 53	23 13	3 33
	26	8 27 14	0 57	17 48	24 23	19 17	23 30	3 43
Genn.	1	9 6 41	1 29A	18 29	24 46A	19 36	23 48	4 0

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	7 24 22	2 57B	15 31	16 1B	13 39	20 50	4 1
	7	8 1 7	2 51	15 58	17 37	13 35	20 54	4 13
	13	8 7 57	2 41	16 27	19 1	13 35	20 59	4 24
	19	8 14 53	2 27	16 56	20 10	13 35	21 4	4 34
	25	8 21 54	2 11	17 25	21 2	13 36	21 10	4 45
	31	8 28 58	1 53	17 56	21 35	13 38	21 17	4 56
Febb.	6	9 6 5	1 33	18 26	21 47	13 44	21 24	5 4
	12	9 13 14	1 12	18 57	21 36	13 52	21 31	5 10
	18	9 20 26	0 51	19 28	21 4	14 4	21 39	5 14
	24	9 27 40	0 29	19 59	20 10	14 16	21 46	5 16
Marzo	1	10 4 54	0 9B	20 29	18 55	14 28	21 52	5 17
	7	10 12 10	0 11A	20 59	17 20	14 41	21 58	5 15
	13	10 19 27	0 29	21 28	15 28	14 56	22 4	5 12
	19	10 26 44	0 46	21 57	13 20	15 10	22 9	5 8
	25	11 4 2	1 0	22 25	10 58	15 25	22 14	5 3
	31	11 11 21	1 12	22 53	8 26	15 40	22 18	4 56
Aprile	6	11 18 40	1 22	23 20	5 45	15 55	22 21	4 48
	12	11 25 59	1 29	23 48	2 58	16 10	22 25	4 40
	18	0 3 18	1 34	0 15	0 8	16 25	22 28	4 31
	24	0 10 37	1 36	0 42	2 43A	16 40	22 31	4 23
	30	0 17 57	1 35	1 9	5 34	16 54	22 35	4 16
Maggio	6	0 25 16	1 32	1 36	8 21	17 10	22 39	4 8
	12	1 2 36	1 27	2 4	11 1	17 25	22 43	4 1
	18	1 9 55	1 19	2 32	13 33	17 39	22 47	3 55
	24	1 17 15	1 10	3 0	15 53	17 56	22 52	3 48
	30	1 24 36	0 59	3 30	17 59	18 12	22 58	3 44
Giugno	5	2 1 56	0 46	4 0	19 48	18 27	23 3	3 41
	11	2 9 16	0 33	4 31	21 19	18 42	23 12	3 42
	17	2 16 37	0 19	5 2	22 28	18 56	23 20	3 44
	23	2 23 58	0 4A	5 34	23 15	19 7	23 28	3 49
	29	3 1 19	0 10B	6 6	23 37	19 18	23 36	3 54

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio 5	3 8 41	0 24B	6 38	23 34A	19 26	23 45	4 4
11	3 16 4	0 37	7 10	23 7	19 32	23 53	4 14
17	3 23 26	0 50	7 42	23 14	19 35	0 0	4 25
23	4 0 50	1 0	8 13	20 58	19 37	0 8	4 39
29	4 8 14	1 10	8 44	19 21	19 35	0 15	4 55
Agosto 4	4 15 38	1 17	9 14	17 23	19 32	0 21	5 10
10	4 23 3	1 22	9 43	15 8	19 27	0 27	5 27
16	5 0 28	1 25	10 12	12 39	19 22	0 32	5 42
22	5 7 53	1 26	10 40	9 57	19 15	0 37	5 59
28	5 15 18	1 24	11 8	7 5	19 7	0 41	6 15
Settem. 3	5 22 44	1 20	11 35	4 6	18 58	0 45	6 32
9	6 0 10	1 14	12 3	1 4	18 49	0 48	6 47
15	6 7 36	1 5	12 30	2 1B	18 40	0 51	7 2
21	6 15 2	0 55	12 57	5 5	18 31	0 55	7 19
27	6 22 28	0 43	13 24	8 6	18 23	0 59	7 35
Ottobre 3	6 29 54	0 29	13 52	11 0	18 14	1 3	7 52
9	7 7 20	0 14B	14 20	13 45	18 6	1 7	8 8
15	7 14 45	0 2A	14 49	16 18	18 0	1 13	8 26
21	7 22 11	0 18	15 19	18 37	17 55	1 19	8 43
27	7 29 36	0 34	15 49	20 38	17 51	1 25	8 59
Novem. 2	8 7 1	0 50	16 20	22 19	17 51	1 33	9 15
8	8 14 26	1 5	16 52	23 38	17 51	1 41	9 31
14	8 21 50	1 19	17 24	24 31	17 55	1 49	9 43
20	8 29 13	1 32	17 57	24 59	18 1	1 58	9 55
26	9 6 36	1 42	18 29	25 0	18 10	2 7	10 4
Dicem. 2	9 13 58	1 51	19 2	24 33	18 22	2 16	10 10
8	9 21 19	1 56	19 34	23 41	18 34	2 24	10 14
14	9 28 39	1 59	20 5	22 23	18 50	2 32	10 14
20	10 5 58	1 58	20 35	20 43	19 5	2 39	10 13
26	10 13 14	1 55	21 5	18 41	19 21	2 45	10 9
Genn. 1	10 20 28	1 48	21 34	16 22	19 37	2 50	10 3

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	1 5 48	1 20B	2 12	14 44B	0 25	7 30	14 35
	7	1 7 47	1 25	2 20	15 28	0 6	7 14	14 22
	13	1 10 1	1 30	2 28	16 15	23 46	6 59	14 12
	19	1 12 26	1 33	2 38	17 3	23 29	6 45	14 1
	25	1 15 2	1 35	2 48	17 52	23 11	6 32	13 53
	31	1 17 46	1 37	2 59	18 42	22 55	6 19	13 43
Febb.	6	1 20 38	1 39	3 10	19 30	22 39	6 7	13 35
	12	1 23 36	1 40	3 23	20 18	22 24	5 56	13 28
	18	1 26 40	1 40	3 36	21 3	22 9	5 45	13 21
	24	1 29 49	1 41	3 49	21 46	21 55	5 34	13 13
Marzo	1	2 3 1	1 40	4 2	22 25	21 41	5 23	13 5
	7	2 6 17	1 40	4 16	23 1	21 29	5 15	13 1
	13	2 9 37	1 40	4 31	23 33	21 15	5 5	12 55
	19	2 12 59	1 39	4 45	24 1	21 4	4 56	12 48
	25	2 16 23	1 39	5 0	24 24	20 55	4 48	12 41
	31	2 19 49	1 38	5 15	24 41	20 44	4 39	12 34
Aprile	6	2 23 17	1 37	5 30	24 54	20 33	4 30	12 27
	12	2 26 46	1 36	5 46	25 1	20 25	4 22	12 19
	18	3 0 17	1 35	6 1	25 2	20 17	4 14	12 11
	24	3 3 49	1 33	6 17	24 57	20 9	4 6	12 3
	30	3 7 22	1 32	6 32	24 47	20 2	3 58	11 54
Maggio	6	3 10 57	1 31	6 48	24 30	19 56	3 50	11 44
	12	3 14 32	1 29	7 4	24 8	19 51	3 42	11 33
	18	3 18 8	1 27	7 19	23 40	19 45	3 34	11 23
	24	3 21 44	1 26	7 35	23 7	19 40	3 26	11 12
	30	3 25 22	1 24	7 50	22 28	19 36	3 18	11 0
Giugno	5	3 29 0	1 22	8 6	21 43	19 30	3 9	10 48
	11	4 2 39	1 21	8 21	20 53	19 26	3 1	10 36
	17	4 6 18	1 19	8 36	19 59	19 22	2 52	10 22
	23	4 9 59	1 17	8 51	18 59	19 19	2 44	10 9
	29	4 13 40	1 15B	9 6	17 56	19 14	2 35	9 56

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	5	4 17 21	1 13B	9 21	16 48B	19 10	2 26	9 42
	11	4 21 4	1 11	9 35	15 36	19 7	2 17	9 27
	17	4 24 48	1 8	9 50	14 20	19 5	2 8	9 11
	23	4 28 32	1 6	10 4	13 2	19 1	1 59	8 57
	29	5 2 17	1 4	10 19	11 40	18 58	1 50	8 42
Agosto	4	5 6 3	1 2	10 33	10 15	18 54	1 40	8 26
	10	5 9 50	0 59	10 47	8 48	18 51	1 31	8 11
	16	5 13 38	0 57	11 1	7 19	18 48	1 21	7 54
	22	5 17 27	0 54	11 15	5 48	18 44	1 11	7 39
	28	5 21 17	0 52	11 29	4 15	18 41	1 2	7 23
Settem.	3	5 25 9	0 49	11 43	2 41	18 39	0 53	7 7
	9	5 29 1	0 47	11 58	1 6	18 36	0 43	6 50
	15	6 2 55	0 44	12 12	0 29A	18 32	0 33	6 34
	21	6 6 50	0 41	12 26	2 5	18 29	0 24	6 19
	27	6 10 46	0 38	12 41	3 41	18 27	0 15	6 3
Ottobre	3	6 14 43	0 35	12 55	5 16	18 23	0 6	5 47
	9	6 18 42	0 32	13 10	6 50	18 20	23 55	5 30
	15	6 22 42	0 29	13 25	8 23	18 18	23 47	5 16
	21	6 26 44	0 26	13 40	9 54	18 16	23 38	5 0
	27	7 0 47	0 23	13 55	11 24	18 14	23 30	4 46
Novem.	2	7 4 51	0 20	14 11	12 50	18 12	23 22	4 32
	8	7 8 57	0 17	14 27	14 14	18 10	23 14	4 18
	14	7 13 5	0 13	14 43	15 34	18 9	23 7	4 5
	20	7 17 14	0 10	14 59	16 50	18 7	23 0	3 53
	26	7 21 25	0 6	15 16	18 2	18 7	22 53	3 39
Dicem.	2	7 25 37	0 3B	15 33	19 8	18 5	22 46	3 27
	8	7 29 50	0 1A	15 51	20 9	18 3	22 40	3 16
	14	8 4 6	0 5	16 8	21 4	18 3	22 34	3 5
	20	8 8 22	0 9	16 26	21 52	18 2	22 29	2 56
	26	8 12 41	0 13	16 45	22 32	18 1	22 24	2 47
Gennajo	1	8 17 0	0 17A	17 3	23 5A	17 59	22 19	2 40

Posizioni di Cerere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Febbrajo 6	5 29 58	15 31 B	12 18	14 59 B	8 8	15 15	22 22
12	5 27 16	15 55	12 16	15 39	7 40	14 50	22 0
18	5 26 30	16 22	12 14	16 22	7 11	14 24	21 37
24	5 25 43	16 44	12 11	17 6	6 42	13 57	21 12
Marzo 1	5 24 17	17 0	12 7	17 50	6 10	13 29	20 48
7	5 22 54	17 7	12 2	18 29	5 39	13 1	20 23
13	5 21 30	17 10	11 57	19 5	5 8	12 33	19 58
19	5 20 8	17 4	11 52	19 32	4 34	12 3	19 32
25	5 18 58	16 54	11 47	19 53	4 5	11 35	19 5
31	5 17 42	16 35	11 42	20 4	3 36	11 6	18 36
Aprile 6	5 16 48	16 16	11 38	20 8	3 9	10 39	18 9
12	5 15 56	15 46	11 34	20 1	2 41	10 11	17 41
18	5 15 36	15 22	11 32	19 47	2 16	9 45	17 14
24	5 13 6	14 42	11 29	19 23	1 52	9 19	16 46
30	5 15 17	14 17	11 29	18 55	1 30	8 55	16 20

POSIZIONI DI PALLADE DI SEI IN SEI GIORNI
A MEZZODÌ MEDIO.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Febbrajo 6	3 14 29	8 59B	10 59	13 41A	8 50	13 56	19 2
12	3 13 59	10 42	10 56	11 53	8 17	13 30	18 43
18	3 13 20	12 38	10 53	9 50	7 42	13 3	18 24
24	3 12 38	14 49	10 48	7 30	7 3	12 35	18 7
Marzo 1	3 11 57	17 9	10 45	5 2	6 24	12 7	17 50
7	3 11 20	19 38	10 40	2 26	5 45	11 39	17 33
13	3 10 44	21 4	10 37	0 10B	5 9	11 12	17 15
19	3 9 38	19 6	10 33	2 40	4 32	10 45	16 58
25	3 8 40	16 36	10 31	5 5	3 55	10 19	16 43
31	3 7 58	14 24	10 29	7 15	3 21	9 54	16 27
Aprile 6	3 7 30	12 26	10 29	9 14	2 48	9 30	16 12
12	3 7 23	10 49	10 29	10 55	2 17	9 6	15 55
18	3 7 28	9 23	10 31	12 24	1 49	8 44	15 39
24	3 7 51	8 16	10 33	13 36	1 21	8 22	15 23
30	3 8 31	7 23	10 36	14 36	0 57	8 2	15 17

Posizioni di Giunone di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Ottobre.	5	2 26 25	3 57B	5 35	7 0B	10 6	16 38	23 10
	11	2 25 40	3 42	5 41	6 5	9 52	16 20	22 48
	17	2 27 26	3 12	5 45	5 7	9 37	16 0	22 24
	23	2 27 55	2 42	5 49	4 8	9 22	15 41	22 0
	29	2 28 14	1 53	5 50	3 8	9 5	15 19	21 34
Novem.	4	2 28 17	1 7	5 51	2 11	8 44	14 56	21 8
	10	2 28 2	0 16B	5 51	1 16	8 23	14 32	20 41
	16	2 27 28	0 35A	5 50	0 26	8 2	14 7	20 12
	22	2 26 12	1 18	5 46	0 16A	7 38	13 40	19 42
	28	2 24 53	2 27	5 43	0 50	7 13	13 13	19 12
Dicem.	4	2 23 26	3 29	5 38	1 12	6 47	12 45	18 43
	10	2 21 52	3 45	5 33	1 24	6 18	12 16	18 13
	16	2 20 35	4 26	5 28	1 21	5 49	11 47	17 45
	22	2 19 22	4 42	5 23	1 8	5 20	11 19	17 18
	28	2 18 14	4 48	5 18	0 42	4 50	10 50	16 50

Posizioni di Vesta di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Agosto	6	0 3 24	8 30A	0 31	6 49A	9 56	15 30	21 7
	12	0 3 6	9 0	0 31	7 21	9 34	15 7	20 40
	18	0 2 41	9 34	0 30	7 57	9 11	14 41	20 12
	24	0 2 4	10 13	0 27	8 41	8 48	14 16	19 44
	30	0 1 31	10 55	0 24	9 26	8 24	13 48	19 13
Settem.	5	0 0 58	11 42	0 20	10 17	8 0	13 21	18 42
	11	0 0 31	12 24	0 15	11 3	7 35	12 52	18 10
	17	0 0 13	13 4	0 10	11 47	7 9	12 24	17 38
	23	0 0 2	13 40	0 4	12 26	6 42	11 54	17 6
	29	0 0 0	14 9	23 59	12 58	6 16	11 25	16 32
Ottobre	5	11 29 57	14 33	23 53	13 23	5 49	10 56	16 2
	11	11 29 52	14 46	23 49	13 38	5 22	10 28	15 34
	17	11 29 46	14 53	23 45	13 46	4 54	10 0	15 6
	23	11 29 44	14 53	23 42	13 46	4 28	9 34	14 40
	29	11 29 43	14 44	23 40	13 37	4 2	9 8	14 14

Posizioni di Giove di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	3 16 13	0 11 B	7 10	22 39 B	4 43	12 27	20 11
	13	3 14 37	0 13	7 4	22 51	3 48	11 33	19 18
	25	3 13 6	0 14	6 57	23 2	2 53	10 39	18 25
Febbrajo	6	3 11 51	0 15	6 52	23 11	2 0	9 47	17 34
	18	5 10 58	0 16	6 48	23 16	1 9	8 56	16 43
Marzo	1	3 10 54	0 17	6 46	23 19	0 19	8 7	15 55
	13	3 10 35	0 18	6 46	23 20	23 32	7 20	15 8
	25	3 11 7	0 19	6 48	23 18	22 48	6 35	14 22
Aprile	6	3 12 1	0 19	6 52	23 14	22 6	5 52	13 38
	18	3 13 20	0 20	6 58	23 7	21 24	5 10	12 56
	30	3 14 57	0 20	7 5	22 57	20 44	4 30	12 16
Maggio	12	3 16 52	0 21	7 13	22 44	20 7	3 51	11 35
	24	3 19 0	0 22	7 22	22 28	19 30	3 13	10 56
Giugno	5	3 21 54	0 23	7 32	22 8	18 55	2 36	10 17
	17	3 23 46	0 23	7 43	21 45	18 18	1 59	9 40
	29	3 26 19	0 24	7 54	21 18	17 46	1 23	9 0
Luglio	11	3 28 56	0 25	8 5	20 47	17 12	0 46	8 20
	23	4 1 35	0 26	8 16	20 14	16 37	0 10	7 41
Agosto	4	4 4 15	0 27	8 27	19 39	16 2	23 31	6 59
	16	4 6 52	0 28	8 38	19 1	15 30	22 55	6 20
	28	4 9 26	0 29	8 48	18 23	14 56	22 18	5 40
Settem.	9	4 11 53	0 31	8 58	17 44	14 21	21 40	4 59
	21	4 14 12	0 33	9 7	17 6	13 47	21 3	4 19
Ottobre	3	4 16 19	0 34	9 16	16 30	13 11	20 24	3 37
	15	4 18 14	0 36	9 23	15 57	12 33	19 44	2 55
	27	4 19 49	0 39	9 30	15 29	11 55	19 3	2 11
Novem.	8	4 21 7	0 41	9 35	15 7	11 14	18 21	1 28
	20	4 22 0	0 44	9 39	14 52	10 30	17 37	0 44
Dicem.	2	4 22 29	0 47	9 40	14 46	9 46	16 52	23 58
	14	4 22 27	0 50	9 40	14 49	8 58	16 4	23 10
	26	4 22 0	0 55	9 39	15 1	8 9	15 16	22 23

Posizioni di Saturno di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo 1	11 8 29	1 51A	22 43	10 6A	22 39	4 1	9 23
13	11 9 34	1 50	22 47	9 41	21 55	3 18	8 41
25	11 10 47	1 49	22 52	9 13	21 11	2 36	8 1
Febbrajo 6	11 12 9	1 49	22 57	8 42	20 26	1 54	7 22
18	11 13 16	1 48	23 2	8 9	19 42	1 12	6 42
Marzo 1	11 15 0	1 48	23 8	7 35	18 57	0 30	6 3
13	11 16 28	1 49	23 13	7 1	18 11	23 45	5 19
25	11 17 55	1 50	23 18	6 28	17 26	23 3	4 40
Aprile 6	11 19 19	1 51	23 24	5 56	16 42	22 21	4 0
18	11 20 38	1 53	23 29	5 27	15 58	21 39	3 20
30	11 21 51	1 55	23 33	5 0	15 13	20 56	2 39
Maggio 12	11 22 54	1 57	23 37	4 37	14 27	20 12	1 57
24	11 23 47	1 59	23 40	4 18	13 44	19 29	1 14
Giugno 5	11 24 17	2 2	23 43	4 4	12 57	18 44	0 31
17	11 24 58	2 5	23 45	3 55	12 12	17 59	23 46
29	11 25 16	2 9	23 46	3 52	11 25	17 13	23 1
Luglio 11	11 25 16	2 12	23 46	3 54	10 37	16 25	22 13
23	11 25 16	2 16	23 45	4 2	9 50	15 37	21 24
Agosto 4	11 25 8	2 17	23 44	4 15	9 4	14 49	20 34
16	11 24 48	2 19	23 42	4 33	8 15	13 59	19 43
28	11 23 10	2 22	23 39	4 54	7 26	13 9	18 52
Settem. 9	11 22 17	2 23	23 35	5 16	6 38	12 19	18 0
21	11 21 21	2 24	23 32	5 38	5 48	11 28	17 8
Ottobre 3	11 20 28	2 24	23 29	5 59	4 59	10 38	16 17
15	11 19 42	2 23	23 26	6 17	4 11	9 48	15 25
27	11 19 5	2 21	23 24	6 30	3 22	8 58	14 34
Novem. 8	11 18 42	2 20	23 22	6 37	2 34	8 10	13 46
20	11 18 33	2 18	23 22	6 39	1 46	7 22	12 58
Dicem. 2	11 18 39	2 15	23 22	6 34	0 58	6 35	12 12
14	11 19 0	2 12	23 23	6 23	0 12	5 49	11 26
26	11 19 36	2 10	23 25	6 7	23 25	5 4	10 43

Posizioni di Urano di dodici in dodici giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	0 14 22	0 39 A	0 54	5 4 B	23 48	6 12	12 36
	13	0 14 31	0 38	0 54	5 8	23 1	5 25	11 49
	25	0 14 49	0 38	0 55	5 15	22 14	4 39	11 4
Febb.	6	0 15 16	0 37	0 57	5 24	21 28	3 53	10 18
	18	0 15 38	0 37	0 59	5 35	20 42	3 8	9 34
Marzo	1	0 16 12	0 37	1 1	5 48	19 56	2 23	8 50
	13	0 16 52	0 36	1 3	6 3	19 10	1 38	8 6
	25	0 17 31	0 36	1 5	6 18	18 24	0 53	7 22
Aprile	6	0 18 11	0 36	1 8	6 34	17 39	0 8	6 37
	18	0 18 56	0 36	1 10	6 50	16 50	23 20	5 50
	30	0 19 31	0 36	1 13	7 5	16 3	22 35	5 7
Maggio	12	0 20 8	0 36	1 15	7 19	15 17	21 50	4 23
	24	0 20 43	0 36	1 17	7 32	14 31	21 5	3 39
Giugno	5	0 21 10	0 36	1 19	7 43	13 45	20 20	2 55
	17	0 21 38	0 37	1 21	7 52	12 58	19 34	2 10
	29	0 21 58	0 37	1 22	7 59	12 12	18 48	1 24
Luglio	11	0 22 11	0 37	1 23	8 4	11 26	18 2	0 38
	23	0 22 17	0 38	1 23	8 6	10 39	17 15	23 51
Agosto	4	0 22 15	0 38	1 23	8 5	9 52	16 28	23 4
	16	0 22 9	0 39	1 23	8 2	9 4	15 40	22 16
	28	0 21 54	0 39	1 22	7 56	8 17	14 52	21 27
Settem.	9	0 21 34	0 39	1 21	7 49	7 29	14 4	20 39
	21	0 21 9	0 39	1 19	7 40	6 40	13 15	19 50
Ottobre	3	0 20 42	0 39	1 17	7 29	5 52	12 26	19 0
	15	0 20 23	0 39	1 16	7 18	5 4	11 37	18 10
	27	0 19 44	0 39	1 14	7 7	4 16	10 48	17 20
Novem.	8	0 19 20	0 38	1 12	6 58	3 27	9 59	16 31
	20	0 18 56	0 38	1 11	6 49	2 41	9 11	15 41
Dicem.	2	0 18 38	0 38	1 10	6 43	1 52	8 22	14 52
	14	0 18 27	0 38	1 9	6 39	1 5	7 35	14 5
	26	0 18 21	0 37	1 9	6 37	0 17	6 47	13 17

	Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Gennajo	5	♅ □ ☉.
	6	♃ ☍ ☉.
	7	♀ nella massima lat. B.
	10	☿ nell' afelio.
	12	☾ perigea.
	16	Aldebaran tang. il lembo ☾.
	20	☉ entra in ♒ a 9^h 19'
	26	☾ apogea.
	28	☿ ☌ super. col ☉.
	31	☿ nella massima lat. A.
Febbrajo	7	☾ perigea.
	12	Occultazione di Aldebaran.
	13	♂ □ ☉.
	18	☉ entra in ♓ a 23^h 58.'
	19	☿ in ☊.
	23	☾ apogea.
	23	☿ nel perielio.
	25	☿ nella mass. elong. orient.
Marzo	3	♀ in ☋.
	3	☿ ☍ ☉.
	4	☿ nella massima lat. B.
	5	♄ ☌ ☉.
	6	☾ perigea.
	11	♀ ☍ ☉.
	12	☿ ☌ inf. col ☉.
	19	Eclisse totale di Luna.
	19	☉ entra in ♈ a 23^h 55'.
	22	☾ apogea.
	28	☿ in ☋.
	31	♃ □ ☉.

	Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	3	☾ perigea.
	6	♀ nell' afelio.
	7	♅ ☌ ☉.
	7	☿ nell' afelio.
	7	Occultazione di Aldebaran.
	9	☿ nella mass. elongaz. occid.
	18	☾ apogea.
	19	☉ entra in ♉ a 12^h 6'.
	21	Separazione dell' anello di ♄.
	28	☿ nella massima lat. A.
	29	♀ nella massima lat. A.
Maggio	2	☾ perigea.
	4	L' anello di ♄ diventa visibile.
	15	☾ apogea.
	17	☿ in ☊.
	18	☿ ☌ super. ☉.
	20	☉ entra in ♊ a 12^h 16'.
	21	☿ nel perielio.
	23	♂ nella massima lat. B.
	30	☾ perigea.
	31	Occultazione di Aldebaran.
	31	☿ nella massima lat. B.
Giugno	12	☾ apogea.
	15	♄ □ ☉.
	20	☉ entra in ♋ a 20^h 51'.
	21	☿ Nella mass. elongaz. orient.
	24	☿ in ☋.
	24	♀ in ☊.
	25	♂ nell' afelio.
	27	☾ perigea.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Luglio	1	☉ nella massima distanza.
	4	☿ nell'afelio.
	9	☾ apogea.
	14	♅ □ ☉.
	19	☿ ☌ infer. col ☉.
	22	☉ entra in ♌ a 7^h 46'.
	22	♀ ☌ super. col ☉.
	24	♃ ☌ ☉.
	24	☾ perigea.
	25	☿ nella massima latitud. A.
	25	Aldebaran tangente il lembo ☾
	28	☿ nel perielio.
Agosto	6	☾ apogea.
	7	☿ nella massima elong. occid.
	13	☿ in ☋.
	17	☿ nel perielio.
	18	☾ perigea.
	19	♀ nella massima latitud. B.
	21	Occultazione di Aldebaran.
	22	☉ entra in ♍ a 14^h 16'.
	27	☿ nella massima latitud. B.
Settembre	1	☿ ☌ super. col ☉.
	3	☾ apogea.
	12	Scomparizione dell'anello ♄.
	12	Eclisse totale di Luna.
	14	♄ ☍ ☉.
	15	☾ perigea.
	19	♅ ☍ ☉.
	20	☿ in ☊.
	22	☉ entra in ♎ a 10^h 56'.
	30	☿ nell'afelio.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Ottobre	1	☾ apogea.
	13	♅ ☍ ☉.
	13	☾ perigea.
	14	♀ in ☊.
	16	♂ ☌ ☉.
	17	☿ nella mass. elong. orient.
	20	☿ nella massima latitud. A.
	22	☉ entra in ♏ a 19^h 11'.
	28	☾ apogea.
Novembre	8	☿ in ☋.
	8	☿ ☌ inf. ☉. pass. di Mercurio.
	10	☾ perigea.
	11	Occultazione di Aldebaran.
	13	♃ □ ☉.
	13	☿ nel perielio.
	17	♀ nell'afelio.
	21	☉ entra in ♐ a 15^h 50'.
	23	☿ nella massima lat. B.
	24	☾ apogea.
	26	☿ nella massima elong. occid.
Dicembre	8	♂ in ☊.
	9	Occultazione di Aldebaran.
	9	☾ perigea.
	9	♀ nella massima latit. A.
	10	♄ □ ☉.
	13	☿ ☍ ☉
	17	☿ in ☊.
	21	☉ entra in ♑ a 4^h 37'.
	21	☾ apogea.
	27	☿ nell'afelio.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

dell' anno 1848.

SULL' INTEGRAZIONE

DELLE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DI 1.° ORDINE E LINEARI

FRA UN NUMERO QUALUNQUE DI VARIABILI

DI

PAOLO FRISIANI.

Un' equazione differenziale ordinaria di 1.° ordine e lineare fra un numero qualunque $= m$ di variabili è espressa in generale da

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 + \ldots\ldots + X_m\, dx_m = 0$$

ove i coefficienti delle differenziali sono funzioni delle m variabili x_1, $x_2 \ldots\ldots x_m$. Ammesso che i coefficienti godano di un' assoluta indipendenza, sicchè nessuna relazione esista fra essi, in più modi e con un numero più o meno grande di equazioni finite si potrà soddisfare alla proposta equazione. Fra questi diversi modi uno se ne trova che gode della massima generalità e che consiste nel trovare da prima quel sistema contenente il minimo numero di equazioni e di costanti arbitrarie atto a soddisfare la proposta, e passar quindi da esso ad un altro sistema fatto dello stesso numero di equazioni, ma contenente, in luogo delle costanti arbitrarie, una funzione arbitraria.

Dopo aver trattata la quistione nell' ipotesi dell' assoluta generalità ed indipendenza de' coefficienti, distinguendo in questa il caso in cui il numero delle variabili contenute nella proposta sia pari da quello in cui sia dispari, s' indicheranno in appositi articoli le modificazioni che il metodo generale subisce quando esistano fra i coefficienti speciali relazioni, fra le quali, per non entrare in troppo minute particolarità, si sceglieranno quelle che godono ancora di una generalità relativa, quando cioè sono tali: 1.° che sia soddisfatta quell' equazione di condizione in forza della quale sussiste la trasformazione di un polinomio di un numero dispari di termini; 2.° che siano o totalmente o parzialmente avverate le equazioni dei criterj d' integralità; 3.° che scompajano dall' equazione proposta alcuni termini senza che sia alterato il numero delle variabili che essa contiene. Si mostrerà in appositi articoli come in queste ed in altre ipotesi secondarie si possa assegnare il numero dei termini di cui sarà composta l' equazione finale dal quale dipende il numero delle equazioni del sistema integrale.

I.

Integrazione della proposta equazione nell' ipotesi dell' assoluta indipendenza dei coefficienti.

1. Si supponga primieramente che il numero m dei termini della proposta equazione sia pari $= 2n$, onde abbiasi

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 + \cdots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0 \qquad (1)$$

e si ammetta che i coefficienti $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ funzioni qualunque delle $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ siano affatto indipendenti.

Si stabilisca arbitrariamente fra le $2n$ variabili un sistema di $2n-2$ equazioni differenziali lineari della forma (1) e sia esso aggregato alla proposta stessa. Il sistema complessivo sarà integrabile con $2n-1$ equazioni contenenti $2n-1$ costanti arbitrarie, e tale sistema integrale soddisferà alla proposta (1) che fa parte del sistema differenziale che si è integrato. Si potrà anche stabilire arbitrariamente un sistema di $2n-1$ equazioni, purchè sia tale che da esso possa derivarsi la proposta stessa. Si potrà cioè stabilire un sistema di $2n-1$ equazioni in cui la proposta sia inchiusa od esplicitamente od implicitamente. Indefinito sarà il numero di tali sistemi le cui equazioni integrali contenenti $2n-1$ costanti arbitrarie saranno atte a soddisfare la proposta (1). Fra tali sistemi se ne fissi uno il cui sistema integrale di $2n-1$ equazioni ed altrettante costanti verrà indicato col nome di sistema *arbitrario*, in quanto è il risultato dell'integrazione di un sistema di $2n-1$ equazioni, delle quali $2n-2$ sono affatto arbitrarie ed una è determinata ed equivalente alla proposta equazione. Designata la x_{2n} per la variabile indipendente, si potranno determinare col sistema arbitrario tutte le variabili dipendenti x_1, $x_2 \ldots . x_{2n-1}$ in funzione della x_{2n} e delle $2n-1$ costanti arbitrarie. Tali costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione si suppongano pur esse variabili, cioè funzioni di x_{2n} e di altre arbitrarie.

S'indichi con D la differenziazione delle variabili dipendenti rispetto alla x_{2n} ch'esse contengono sia esplicitamente, sia implicitamente nelle costanti, e siano d, δ i simboli di differenziazione delle stesse variabili, il 1.° soltanto rispetto alla x_{2n} esplicita, il 2.° rispetto solo alla x_{2n} implicita nelle costanti. Se le arbitrarie che entrano nelle x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{2n-1}$ si riguardano come variabili, si dovrà nel 1.° membro della proposta equazione cambiare la d in D a tutte le variabili tranne alla x_{2n}. Essendo $D = d + \delta$ e supposto

$$X_1\, Dx_1 + X_2\, Dx_2 \cdots\cdots + X_{2n-1}\, Dx_{2n-1} + X_{2n}\, dx_{2n} = S_1$$

si avrà

$$S_1 = \left\{ X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \cdots\cdots + X_{2n}\, dx_{2n} \right\} + \left\{ X_1\, \delta x_1 + X_2\, \delta x_2 \cdots\cdots + X_{2n-1}\, \delta x_{2n-1} \right\}.$$

Se s' immaginano sostituiti in questa i valori delle variabili dipendenti in funzione di x_{2n} e delle arbitrarie desunti dal sistema integrale, la 1.ª parte del valore di S_1, nella quale si riguardano come costanti le arbitrarie introdotte dall' integrazione, sarà zero, onde in forza di tal sostituzione la S_1 diverrà

$$S_1 = X_1\, \delta x_1 + X_2\, \delta x_2 \cdots\cdots + X_{2n-1}\, \delta x_{2n-1} \qquad (2)$$

Delle $2n-1$ equazioni che annullano l'accennata 1.ª parte, essendone affatto arbitrario un numero $= 2n-2$, si potrà disporre di tale arbitrio per operare un' ulteriore trasformazione della S_1, dalla quale apparisca potersi ridurre $S_1 = 0$ e perciò soddisfare alla proposta sia con un sistema di n equazioni ed n costanti arbitrarie, sia con un sistema di n equazioni contenenti una funzione arbitraria.

2. Per raggiungere tale scopo si rappresenti compendiosamente con $P = 0$ la proposta equazione (1). Se le arbitrarie contenute nelle variabili dipendenti desunte dal sistema integrale si riguardano come costanti dovrà essere $\delta P = 0$, ma riguardate esse come variabili dovrà essere $DP = 0$. Quindi per essere $D = d + \delta$ dovrà verificarsi la $\delta P = 0$, vale a dire, supposti introdotti nella $P = 0$ i valori delle variabili dipendenti dati per la x_{2n} ed arbitrarie, dovendo essa verificarsi qualunque siano i valori delle arbitrarie stesse, dovrà essere zero la differenziale rispetto a questa ed aversi $\delta P = 0$, ossia

$$\delta \left\{ X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots\cdots + X_{2n}\, dx_{2n} \right\} = 0$$

dalla quale risulta

$$\left\{\begin{matrix} dx_1\,\delta X_1 + X_1\,\delta dx_1 + dx_2\,\delta X_2 + X_2\,\delta dx_2 + \cdots \\ \cdots\cdots + dx_{2n-1}\,\delta X_{2n-1} + X_{2n-1}\,\delta dx_{2n-1} \end{matrix}\right\} + dx_{2n}\,\delta X_{2n} = 0$$

Siccome per qualunque valore dell' indice

$$i = 1\,,\quad 2\,,\quad 3\,,\ \ldots\ 2n \tag{3}$$

deve aversi $\delta dx_i = d\,\delta x_i$ per essere fra loro indipendenti i simboli d, δ ed avverarsi per gli stessi valori la relazione

$$X_i\,d\,\delta x_i = d\,(X_i\,\delta x_i) - dX_i\,\delta x_i$$

così, raccolti i termini che sono differenziali esatte rapporto alla d, si avrà

$$\left\{\begin{matrix} d\left\{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \cdots + X_{2n-1}\delta x_{2n-1}\right\} + (dx_1\delta X_1 - dX_1\delta x_1) \\ + (dx_2\delta X_2 - dX_2\delta x_2) + \cdots + (dx_{2n-1}\delta X_{2n-1} - dX_{2n-1}\delta x_{2n-1}) \end{matrix}\right\} + dx_{2n}\delta X_{2n} = 0$$

Se si pongono per le δX_1, $\delta X_2 \ldots \delta X_{2n}$ i valori che si desumono dalla generica

$$\delta X_i = \left(\frac{dX_i}{dx_1}\right)\delta x_1 + \left(\frac{dX_i}{dx_2}\right)\delta x_2 + \cdots + \left(\frac{dX_i}{dx_{2n-1}}\right)\delta x_{2n-1}$$

col dare all' indice $= i$ tutti i valori della serie (3) e quindi si raccolgono i termini moltiplicati per le variazioni

$$\delta x_1\,,\quad \delta x_2\ \ldots\ \delta x_{2n-1}$$

si otterrà l' equazione

$$P_1\,\delta x_1 + P_2\,\delta x_2 + \cdots + P_{2n-1}\,\delta x_{2n-1} = -d\left\{X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 \cdots + X_{2n-1}\,\delta x_{2n-1}\right\} \tag{4}$$

ove le P_1, $P_2 \ldots P_{2n-1}$ rappresentano i valori che si desumono dalla generica

$$P_i = \left(\frac{dX_1}{dx_i}\right)dx_1 + \left(\frac{dX_2}{dx_i}\right)dx_2 + \ldots + \left(\frac{dX_{2n}}{dx_i}\right)dx_{2n} - dX_i$$

attribuendo all' indice $= i$ tutti i valori della serie (3) escluso l' ultimo. Siccome poi per gli stessi valori della i il valor generico di dX_i è dato da

$$dX_i = \left(\frac{dX_i}{dx_1}\right)dx_1 + \left(\frac{dX_i}{dx_2}\right)dx_2 + \ldots + \left(\frac{dX_i}{dx_{2n}}\right)dx_{2n}$$

così i coefficienti dell' equazione (4) avranno quei valori che risultano dalla

$$\left.\begin{array}{l} P_i = \left(\dfrac{dX_1}{dx_i} - \dfrac{dX_i}{dx_1}\right)dx_1 + \left(\dfrac{dX_2}{dx_i} - \dfrac{dX_i}{dx_2}\right)dx_2 + \ldots \\ \ldots + \left(\dfrac{dX_{2n-1}}{dx_i} - \dfrac{dX_i}{dx_{2n-1}}\right)dx_{2n-1} + \left(\dfrac{dX_{2n}}{dx_i} - \dfrac{dX_i}{dx_{2n}}\right)dx_{2n} \end{array}\right\} \quad (5)$$

col dare alla i tutti i valori della serie (3) escluso l' ultimo. Se ora pel sistema delle $2n-2$ equazioni differenziali da aggregarsi alla proposta (1), le quali, come si disse, erano affatto arbitrarie, si sceglie quel sistema di equazioni che risulta dall' eliminazione di una quantità arbitraria $= \theta$ dalle $2n-1$ equazioni

$$P_1 = -\theta X_1, \quad P_2 = -\theta X_2, \ldots\ldots P_{2n-1} = -\theta X_{2n-1} \qquad (6)$$

allora l' equazione (4) si trasforma nella

$$\frac{d\{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \ldots + X_{2n-1}\delta x_{2n-1}\}}{X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 \ldots + X_{2n-1}\delta x_{2n-1}} = \theta.$$

Siccome il simbolo d rappresenta la differenziale rispetto alla x_{2n} che si trova esplicitamente nelle $x_1, x_2 \ldots x_{2n-1}$, così integrando e passando dai logaritmi agli esponenziali, la precedente darà

$$X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 \dots + X_{2n-1}\,\delta x_{2n-1} = C e^{\int\theta} \tag{7}$$

essendo C la costante arbitraria introdotta dall'integrazione. S'indichino con

$$x'_1\ ,\quad x'_2 \dots x'_{2n-1}\ ,\quad X'_1\ ,\quad X'_2 \dots X'_{2n-1}$$

ciò che diventano le

$$x_1\ ,\quad x_2 \dots x_{2n-1}\ ,\quad X_1\ ,\quad X_2 \dots X_{2n-1}$$

quando in queste si suppone $x_{2n} = x'_{2n}$. La (7) diverrà

$$X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \dots + X_{2n-1}\delta x_{2n-1} = e^{\int\theta}\left\{X'_1\delta x'_1 + X'_2\delta x'_2 \dots + X'_{2n-1}\delta x'_{2n-1}\right\} \tag{8}$$

definito l'integrale da $x_{2n} = x'_{2n}$ ad $x_{2n} = x_{2n}$.

Se si suppone integrato completamente il sistema che consta della proposta equazione differenziale e delle $2n-2$, equazioni che risultano dalle (6) eliminata la θ, si potranno determinare le variabili dipendenti x_1, $x_2 \dots x_{2n-1}$ in funzione della variabile indipendente x_{2n} e delle $2n-1$ arbitrarie introdotte dalle integrazioni. Se in queste equazioni si suppone $x_{2n} = x'_{2n}$ le x_1, $x_2 \dots x_{2n-1}$ assumeranno un apice, e le anzidette arbitrarie divenendo funzioni determinate delle

$$x'_1\ ,\quad x'_2 \dots x'_{2n-1}\ ,\quad x'_{2n} \tag{9}$$

anche le variabili dipendenti saranno determinate funzioni della indipendente x_{2n} e delle quantità (9) che chiameremo *valori iniziali.*

Se i valori così determinati delle variabili dipendenti s'immaginano sostituiti in una qualsivoglia delle equazioni (6), cavato il valore di θ, risulterà esso della forma $\theta = -\phi\, dx_{2n}$, ove la ϕ sarà una funzione di x_{2n} e dei valori iniziali. Supposto per mantenere una simetria di operazioni che il valore di ϕ sia quello che risulta dall' ultima delle equazioni (6), posto

$$e^{\int\theta} = e^{-\int\phi\, dx_{2n}} = N_n \tag{10}$$

l' integrale essendo ancor definito fra i limiti $x_{2n} = x'_{2n}$, $x_{2n} = x_{2n}$, la (8) diverrà

$$X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \dots + X_{2n-1}\delta x_{2n-1} = N_n\left\{X'_1\delta x'_1 + X'_2\delta x'_2 \dots + X'_{2n-1}\delta x'_{2n-1}\right\} \tag{11}$$

Questa equazione mostra che in forza degl' integrali ottenuti col sistema delle $2n-1$ equazioni, che chiameremo sistema *ausiliario*, il 2.° membro della (2) viene trasformato in una espressione fatta di due fattori di cui il 1.° è una funzione della variabile x_{2n} e dei valori iniziali ancora arbitrarj, ed il 2.° un' espressione differenziale non contenente la x_{2n} e relativa ai soli valori iniziali considerati come nuove variabili.

3. Prima di procedere ad un' ulteriore trasformazione è opportuno di ridurre il sistema ausiliario da integrarsi sotto forma più comoda e simetrica.

Ritenuto che le lettere α, β possano assumere tutti i valori competenti all' indice $= i$ della serie (3), pongasi per abbreviazione

$$\frac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \frac{dX_\beta}{dx_\alpha} = (\alpha\,,\ \beta) \tag{12}$$

Il sistema (6) avuto riguardo ai valori di P_i risultanti dai valori $i = 1, 2, 3 \dots (2n-1)$ ed alle relazioni

$$(\alpha\,,\ \alpha) = 0\,, \qquad (\alpha\,,\ \beta) = -(\beta\,,\ \alpha)$$

si riduce al sistema

$$\left.\begin{array}{l}(1,1)dx_1+(1,2)dx_2\cdots\cdot+(1,2n-1)dx_{2n-1}+(1,2n)dx_{2n}=\theta X_1\\(2,1)dx_1+(2,2)dx_2\cdots\cdot+(2,2n-1)dx_{2n-1}+(2,2n)dx_{2n}=\theta X_2\\\vdots\\(2n-1,1)dx_1+(2n-1,2)dx_2\cdots\cdot+(2n-1,2n)dx_{2n}=\theta X_{2n-1}\end{array}\right\}\quad(13)$$

al quale devesi aggiungere la proposta

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\cdots\cdot+X_{2n}\,dx_{2n}=0\qquad(14)$$

o ciò che è lo stesso un' equazione che risulti dalla combinazione delle (13) colla proposta stessa. Per ottenerla in modo che ne risulti un' equazione simetrica colle (13), si moltiplichi la prima delle citate equazioni per dx_1, la 2.ª per dx_2, la 3.ª per dx_3, e così di seguito sino all' ultima che verrà moltiplicata per dx_{2n-1}. Fatta la somma, eseguite le riduzioni del 1.° membro, ed osservando che il 2.° membro in forza della proposta (1) diventa eguale a $-\theta X_{2n}\,dx_{2n}$, si otterrà, tolta la dx_{2n}, primieramente

$$(1,2n)dx_1+(2,2n)dx_2+\cdots\cdot+(2n-1,2n)dx_{2n-1}=-\theta X_{2n}$$

quindi cambiati i segni a tutti i termini, sostituita alla $-(\beta,\alpha)$ la sua eguale (α,β) ed aggiuntovi nel 1.° membro il termine zero $(2n,2n)dx_{2n}$, si otterrà a complemento del sistema (13) l' equazione

$$(2n,1)dx_1+(2n,2)dx_2\cdots\cdot+(2n,2n-1)dx_{2n-1}+(2n,2n)dx_{2n}=\theta X_{2n}\qquad(15)$$

Il complesso delle $2n-1$ equazioni (13), (15) costituisce il sistema ausiliario da integrarsi acciò coi valori delle variabili dipendenti desunti dalle equazioni integrali il 1.° membro della (11), ossia la S_1 data dalla (2), sia trasformabile nel 2.° membro della (11).

4. Il valore di N_n dato dalla (10) che contiene una quadratura può ottenersi sotto altra forma esente da integrale. Infatti se le variabili dipendenti x_1, $x_2 \ldots\ldots x_{2n-1}$ contenute nella (11) s'intendono funzioni di x_{2n} e de' valori iniziali x'_1, $x'_2 \ldots\ldots x'_{2n-1}$ quali risultano dagl' integrali del sistema ausiliario, si potrà sostituire alle δx_1, $\delta x_2 \ldots\ldots$ del 1.° membro della (11) ciò che risulta dall' espressione generica

$$\delta x_i = \left(\frac{dx_i}{dx'_1}\right)\delta x'_1 + \left(\frac{dx_i}{dx'_2}\right)\delta x'_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{dx_i}{dx'_{2n-1}}\right)\delta x'_{2n-1} \qquad (16)$$

pei valori $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots (2n-1)$.
Ordinato il 1.° membro della (11) a seconda delle variazioni $\delta x'_1$, $\delta x'_2 \ldots\ldots \delta x'_{2n-1}$, il valore di N_n si otterrà dal paragone dei coefficienti di una qualunque delle anzidette variazioni. Se per uniformarsi a quanto si è fatto per la θ si desume un tal valore dal paragone de' coefficienti dell' ultima variazione $\delta x'_{2n-1}$ si otterrà

$$N_n = H_n : X'_{2n-1} \qquad (17)$$

ove sarà

$$H_n = X_1\left(\frac{dx_1}{dx'_{2n-1}}\right) + X_2\left(\frac{dx_2}{dx'_{2n-1}}\right) + \ldots\ldots + X_{2n-1}\left(\frac{dx_{2n-1}}{dx'_{2n-1}}\right) \qquad (18)$$

intendendo che nelle X_1, $X_2 \ldots\ldots X_{2n-1}$ di questa siano posti i valori delle variabili dipendenti espressi per la variabile indipendente x_{2n} e pei valori iniziali.
Dietro ciò, posto nella (11) S_1 in luogo del 1.° membro e rimesso il simbolo d in luogo di δ nel 2.°, in quanto quest' ultimo simbolo si riferisce alle sole nuove variabili contrassegnate da un apice, la stessa (11) diverrà

$$S_1 = N_n\left\{X'_1 dx'_1 + X'_2 dx'_2 \ldots\ldots + X'_{2n-2} dx'_{2n-2}\right\} + H_n dx'_{2n-1} \qquad (19)$$

5. Se le x'_1, $x'_2 \ldots\ldots x'_{2n-2}$ che entrano nel fattore della N_1 si riguardano come nuove variabili e la x'_{2n-1} come

una costante od un' arbitraria qualunque, il fattore stesso costituirà un' espressione differenziale rispetto a $2n-2$ variabili della stessa natura del 1.° membro della proposta (1). Se pertanto nell' anzidetta espressione differenziale fra un numero pari di variabili si cambia d in D sarà essa suscettibile della stessa trasformazione che si è fatta subire alla S_1 nei precedenti paragrafi. Posto

$$S_2 = X'_1\,dx'_1 + X'_2\,dx'_2 \cdots\cdots + X'_{2n-2}\,dx'_{2n-2}$$

si otterrà la trasformazione della S_2 sostituendo nella (19) la S_2 ad S_1, la $2n-2$ alla $2n$, le N_{n-1}, H_{n-1} alle N_n, H_n ed aumentando di un apice le quantità relative, riguardando le variabili affette del doppio apice come nuovi valori iniziali. Si avrà cioè

$$S_2 = N_{n-1}\left\{X''_1\,dx''_1 + X''_2\,dx''_2 + \cdots\cdots + X''_{2n-4}\,dx''_{2n-4}\right\} + H_{n-1}\,dx''_{2n-3} \tag{20}$$

nella quale sarà

$$N_{n-1} = H_{n-1} : X''_{2n-3} \tag{21}$$

essendo

$$H_{n-1} = X'_1\left(\frac{dx'_1}{dx''_{2n-3}}\right) + X'_2\left(\frac{dx'_2}{dx''_{2n-3}}\right)\cdots\cdots + X'_{2n-3}\left(\frac{dx'_{2n-3}}{dx''_{2n-3}}\right) \tag{22}$$

ed il 2.° sistema ausiliario assunto come semplice mezzo di trasformazione si desumerà dal 1.° riducendone le equazioni (13), (15) ad un numero $= 2n-2$, applicando un indice ai simboli (α, β) ed alle variabili, ed indicando con θ_1 la quantità da eliminarsi. Esso sarà espresso da

$$\left.\begin{array}{l}
(1,1)'dx'_1 + (1,2)'dx'_2 \cdots\cdots + (1,2n-2)'dx'_{2n-2} = \theta_1 X'_1 \\
(1,2)'dx'_1 + (2,2)'dx'_2 \cdots\cdots + (2,2n-2)'dx'_{2n-2} = \theta_1 X'_2 \\
\vdots \\
(2n-2,1)'dx'_1 + (2n-2,2)'dx'_2 \cdots\cdots + (2n-2,2n-2)'dx'_{2n-2} = \theta_1 X'_{2n-2}
\end{array}\right\} \tag{23}$$

6. Considerato parimente nella (20) il coefficiente della N_{n-1} come un' espressione differenziale $= S_3$ fra un numero pari $2n-4$ di nuove variabili

$$x''_1\,,\quad x''_2\,,\quad x''_3\ldots\ldots x''_{2n-4}$$

si avrà pure

$$S_3 = N_{n-2}\left\{X'''_1 dx''_1 + X''_2 dx'''_2 + \cdots + X'''_{2n-6} dx'''_{2n-6}\right\} + H_{n-2} dx'''_{2n-5} \qquad (24)$$

$$N_{n-2} = H_{n-1} : X'''_{2n-5}$$

$$H_{n-2} = X''_1\left(\frac{dx''_1}{dx'''_{2n-5}}\right) + X''_2\left(\frac{dx''_2}{dx'''_{2n-5}}\right)\cdots\cdots + X''_{2n-5}\left(\frac{dx''_{2n-5}}{dx'''_{2n-5}}\right)$$

ed il 3.° sistema ausiliario da integrarsi si desumerà dal 2.° sistema (23) ponendovi $2n-2$ in luogo di $2n$, accrescendo gli apici di un' unità e cambiando θ_1 in θ_2.

7. Progredendo nel modo sopra indicato si farà scomparire l' ultimo termine della S_3 con un 4.° sistema ausiliario, si separerà il termine in posto dispari e si otterrà un' espressione S_4 di un numero pari di termini. Così successivamente operando si spingerà la trasformazione sino a che la S_{n+1} sia ridotta a zero non esistendo più alcun termine affetto da indice pari. Si giungerà per tal modo ad ottenere una S_n che sarà della forma

$$S_n = H_{n-(n-1)} dx^{(n)}_{2n-(2n-1)} = H_1 dx_1^{(n)} \qquad (25)$$

Dalla serie ricorrente che nasce dalla relazione generica

$$S_i = N_{n-(i-1)} S_{i+1} + H_{n-(i-1)} dx^{(i)}_{2n-(2i-1)}$$

pei valori di $i = 1\,,\ 2\,,\ 3\ldots\ldots n$ si otterrà colla sostituzione continua il valore di S_i competente all' indice $i=1$. Una tale espressione che non conterrà più differenziali ad indici pari, essendo in essa scomparse le diverse S, avrà la forma

$$S_1 = K_1 dx_1^{(n)} + K_2 dx_3^{(n-1)} + \cdots + K_{n-2} dx'''_{2n-5} + K_{n-1} dx''_{2n-3} + K_n dx'_{2n-1} \qquad (26)$$

ove una qualunque K_i è data dalla relazione ricorrente

$$H_{i+1} K_i = H_i N_{i+1} K_{i+1}$$

pei valori di $i = 1, 2, 3 \ldots (n-1)$, ritenuto essere $K_n = H_n$.
Chiamerò in generale espressione o polinomio *finale* un qualsivoglia valore di S_1 affetto da una S_x sulla quale, per qualsiasi motivo, non sia più effettuabile un' ulteriore trasformazione, ed equazione *finale* la $S_1 = 0$. Nel caso attuale dell' assoluta indipendenza de' coefficienti dell' equazione proposta, l' espressione finale è la (26) e l' equazione finale è la stessa (26) ridotta a zero.

8. Suppongansi ottenuti gl' integrali del 1.° sistema ausiliario. Si potranno i $2n-1$ valori iniziali

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3 \ldots x'_{2n-1} \tag{27}$$

determinare in funzione delle $2n$ variabili originarie

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots x_{2n-1}, \quad x_{2n} \tag{28}$$

Integrato il 2.° sistema ausiliario, i nuovi valori iniziali

$$x''_1, \quad x''_2, \quad x''_3 \ldots x''_{2n-3} \tag{29}$$

risulteranno determinati in funzione delle precedenti variabili

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3 \ldots x'_{2n-3}, \quad x'_{2n-2} \tag{30}$$

le quali essendo funzioni delle $2n$ variabili primitive (28) risulteranno parimente le (29) funzioni delle (28). Così progredendo ed impiegando i valori già ottenuti cogl' integrali dei precedenti sistemi ausiliarj, si otterranno colle continue sostituzioni i valori delle

$$x_1^{(n)}, \quad x_3^{(n-1)}, \quad x_5^{(n-2)} \ldots x''_{2n-3}, \quad x'_{2n-1}$$

in funzione delle variabili primitive (28). Indicando tali funzioni rispettivamente con

$$f_n \; , \quad f_{n-1} \; , \quad f_{n-2} \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; f_2 \; , \quad f_1$$

si avrà.

$$x_1^{(n)} = f_n \; , \; x_3^{(n-1)} = f_{n-1} \; , \; \ldots\ldots \; x''_{2n-3} = f_2 \; , \; x'_{2n-1} = f_1 \qquad (31)$$

Parimente i coefficienti K_1, K_2 .... K_n con tali sostituzioni risulteranno funzioni delle stesse variabili primitive (28). Esprimeremo rispettivamente con F_1, F_2 .... F_n il risultato della sostituzione. Per tal modo l' espressione finale (26) diverrà

$$S_1 = F_1 \, df_n + F_2 \, df_{n-1} + F_3 \, df_{n-2} \; \cdots\cdots + F_n \, df_1 \qquad (32)$$

9. Si può soddisfare alla $S_1 = 0$ e perciò alla proposta equazione:
1.° Con una soluzione particolare che nasce dallo stabilire le equazioni

$$df_n = 0 \; , \quad df_{n-1} = 0 \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; df_1 = 0$$

dalle quali risulta il sistema

$$f_n = \alpha_n \; , \quad f_{n-1} = \alpha_{n-1} \; , \; \ldots\ldots\ldots \; f_1 = \alpha_1 \qquad (33)$$

essendo α_1, α_2 .... α_n quantità costanti. Il sistema (33) che consta di n equazioni fra le variabili originarie ed n costanti α_1, α_2 .... α_n sarà un sistema integrale della proposta equazione. Le quantità

$$x'_{2n} \; , \quad x''_{2n-2} \; , \quad x^{\text{IV}}_{2n-4} \; , \; \ldots\ldots$$

che ancora entreranno in questo sistema saranno da riguardarsi come costanti soprannumerarie che potranno pur farsi $= 0$.
2.° Generalizzando la precedente soluzione col ritenere le quantità

$$x_1^{(n)} \; , \quad x_3^{(n-1)} \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; x''_{2n-3} \; , \quad x'_{2n-1} \qquad (34)$$

non soggette ad essere eguali a costanti, ma lasciate nell' assoluta generalità, si otterrà il sistema integrale più generale col far subire in tal caso alla S_1 un'ulteriore trasformazione. Infatti suppongasi che una qualsivoglia delle (34) o delle funzioni ch'esse rappresentano sia eguale ad una funzione arbitraria ϕ di tutte le altre. Se supponiamo, per fissare le idee, che siasi scelta la prima delle (34), ritenendo che una tal scelta è pur essa arbitraria, si avrà

$$\mathrm{f}_n = \phi(\mathrm{f}_{n-1}, \mathrm{f}_{n-2}, \ldots \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1) \tag{35}$$

e quindi

$$d\mathrm{f}_n = \phi'(\mathrm{f}_{n-1})d\mathrm{f}_{n-1} + \phi'(\mathrm{f}_{n-2})d\mathrm{f}_{n-2} + \ldots\ldots + \phi'(\mathrm{f}_1)d\mathrm{f}_1$$

ove l'apice apposto alla ϕ indica la differenziale parziale della ϕ data dalla (35) rispetto alla sola quantità che si è posta fra parentesi. Posto tal valore nella (32), essa diventa

$$S_1 = \left(F_1\phi'(\mathrm{f}_{n-1}) + F_2\right)d\mathrm{f}_{n-1} + \left(F_1\phi'(\mathrm{f}_{n-2}) + F_3\right)d\mathrm{f}_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(F_1\phi'(\mathrm{f}_1) + F_n\right)d\mathrm{f}_1.$$

Si soddisfa quindi alla $S_1 = 0$, e perciò alla proposta, stabilendo il sistema

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{f}_n - \phi(\mathrm{f}_{n-1}, \mathrm{f}_{n-2}, \ldots \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1) = 0 \\
&F_1\phi'(\mathrm{f}_{n-1}) + F_2 = 0 \\
&F_1\phi'(\mathrm{f}_{n-2}) + F_3 = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&F_1\phi'(\mathrm{f}_1) + F_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

In questo sistema di n equazioni contenente una funzione arbitraria senza le costanti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ si dovranno considerare le quantità x'_{2n}, x''_{2n-2} .... quali costanti soprannumerarie da trattarsi come si è detto rispetto al sistema (33).

10. Se nell'equazione generale fra un numero qualunque m di variabili data in principio si suppone $m = 2n+1$

l'equazione ad integrarsi fra un numero dispari di variabili sarà espressa da

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots\cdots + X_{2n}\,dx_{2n} + X_{2n+1}\,dx_{2n+1} = 0 \qquad (37)$$

Ammesso ancora che nessuna relazione esista fra i coefficienti, non si potrà trasformare la proposta fatta di un polinomio di un numero dispari di termini con un sistema ausiliario, come si è fatto di un polinomio di un numero pari di termini, a meno che non sia adempita una certa relazione fra i coefficienti che qui escludiamo come verrà nel seguito con tutta generalità dimostrato. È per tale motivo che le precedenti trasformazioni si operarono sempre sopra un polinomio pari isolando l'ultimo termine in posto dispari ad ogni operazione. La stessa norma dovrà dunque seguirsi nella proposta equazione isolando l'ultimo termine in posto dispari e trasformando il restante polinomio pari. Chiamato S il 1.° membro della (37) e posto

$$S = S_1 + X_{2n+1}\,dx_{2n+1}$$

si trasformerà la S_1 col metodo già dato pel caso della (1) sino ad ottenere l'espressione finale della S_1 data dalla (26), riguardando la x_{2n+1} in essa contenuta come una quantità invariabile. La S verrà così trasformata nell' espressione finale

$$S = K_1\,dx_1^{(n)} + K_2\,dx_3^{(n-1)} + \cdots\cdots + K_n\,dx'_{2n-1} + X_{2n+1}\,dx_{2n+1} \qquad (38)$$

Espresse le quantità

$$x_1^{(n)}\,,\quad x_3^{(n-1)}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ x''_{2n-3}\,,\quad x'_{2n-1}$$

in funzione delle variabili primitive, fra le quali sarà compresa anche la x_{2n+1}, posto come si è fatto indietro

$$x_1^{(n)} = f_n\,,\quad x_3^{(n-1)} = f_{n-1}\,,\ \ldots\ldots\ x''_{2n-3} = f_2\,,\quad x'_{2n-1} = f_1$$

e fatto per la simetria delle formole

$$X_{2n+1} = F_{n+1}\,,\qquad x_{2n+1} = f$$

la precedente espressione finale S ridotta alla forma (32) diverrà

$$S = F_1 d\mathrm{f}_n + F_2 d\mathrm{f}_{n-1} + \cdots + F_n d\mathrm{f}_1 + F_{n+1} d\mathrm{f} \tag{39}$$

Si soddisferà pertanto all' equazione $S = 0$, e perciò alla proposta (37), primieramente col sistema particolare di $n+1$ equazioni ed altrettante costanti arbitrarie date da

$$\mathrm{f}_n = \alpha_n\,,\quad \mathrm{f}_{n-1} = \alpha_{n-1}\,, \ldots \mathrm{f}_1 = \alpha_1\,,\quad \mathrm{f} = x_{2n+1} = \alpha \tag{40}$$

In secondo luogo col sistema generale di $n+1$ equazioni contenenti una funzione arbitraria data da

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{f}_n - \phi(\mathrm{f}_{n-1}\,, \mathrm{f}_{n-1}\,, \ldots \mathrm{f}_2\,, \mathrm{f}_1\,, x_{2n+1}) &= 0\\
F_1\,\phi'(\mathrm{f}_{n-1}) + F_2 &= 0\\
F_1 + \phi'(\mathrm{f}_{n-2}) + F_3 &= 0\\
&\vdots\\
F_1\,\phi'(\mathrm{f}_1) + F_n &= 0\\
F_1\,\phi'(x_{2n+1}) + F_{n+1} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

11. La soluzione data nei paragrafi antecedenti è la più generale; ma se si volesse limitare l' integrazione della (1) del § 1.° alla ricerca di un sistema di $2n-1$ equazioni finite contenenti altrettante costanti, si potrebbe, in luogo di stabilire arbitrariamente $2n-2$ equazioni differenziali da aggregarsi alla proposta, come in quel paragrafo si è detto potersi fare, servirsi ancora del sistema di $2n-1$ equazioni

$$x'_1 = \alpha_1\,,\quad \alpha'_2 = x_2\,, \ldots\ldots\ldots\ldots\, x'_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

quantunque il relativo sistema ausiliario serva solo a render possibile un' ulteriore trasformazione, purchè a tale soluzione;

che sarebbe affatto particolare, siccome quella in cui è scomparsa ogni traccia dell' arbitrarietà che la natura stessa della questione richiede, sia restituita l' arbitrarietà col supporre una qualunque delle precedenti quantità funzione arbitraria delle restanti $2n-2$ e collo stabilire un sistema di $2n-1$ equazioni simili nella forma a quelle del sistema (36). Tale riflessione vale anche pel caso in cui si volesse limitare la soluzione a quel numero di equazioni che verrebbero fornite dalla $S_1 = 0$ quando questa si riducesse a contenere una S_α, riguardata in questi diversi casi la S_1 come l' espressione finale. Tali soluzioni però quantunque atte tutte a soddisfare la proposta, pure, siccome non contengono il minimo numero di equazioni a cui si possa ridurre la soluzione, non si potranno riguardare come le più generali se non quando non sia più possibile, stante particolari relazioni esistenti fra i coefficienti, di più oltre progredire alla formazione di nuovi sistemi ausiliarj, o, ciò che è lo stesso, se non quando, forzati dall' indole della proposta equazione ad arrestare ad una S_α il processo della trasformazione, divenga necessario il considerare la S_1 affetta dalla S_α, e perciò contenente ancora differenziali ad indici pari come l' espressione finale da ridursi zero col minimo numero possibile di equazioni. In questo caso soltanto la soluzione godrà di tutta quella generalità che alla proposta equazione differenziale si conviene, come si vedrà nei diversi casi speciali che si tratteranno in progresso.

12. Se nell' integrazione dell' equazione (1) data in principio non si vogliono introdurre i valori iniziali, ma ritenere le arbitrarie quali vengono introdotte dalle immediate integrazioni dei diversi sistemi ausiliarj, si otterrà parimente una soluzione analoga che presenterà gli stessi caratteri della soluzione già data. Infatti essendo proposta ad integrarsi la (1), se si procede nel modo già sopra indicato, si giungerà col mezzo del 1.° sistema ausiliario (13), (15) a trasformare la proposta (1) nella

$$X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 \,\ldots\ldots + X_{2n-1}\,\delta x_{2n-1} = C e^{\int \theta} \qquad (42)$$

che è la (7) del § 1.°, ove la C è una costante ed il 1.° membro è ciò che nasce dalla trasformazione della S_1. Suppongasi ora che le $2n-1$ arbitrarie introdotte dall'immediata integrazione del 1.° sistema ausiliario (13), (15) siano espresse da

$$\alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\quad \alpha_3\,,\ \ldots\ldots\ \alpha_{2n-1}\,.$$

Riguardate queste come variabili, una qualunque δx_i della (42) sarà espressa da

$$\delta x_i = \left(\frac{dx_i}{d\alpha_1}\right) d\alpha_1 + \left(\frac{dx_i}{d\alpha_2}\right) d\alpha_2 \,\ldots\ldots + \left(\frac{dx_i}{d\alpha_{2n-1}}\right) d\alpha_{2n-1}$$

nella quale dovrà farsi $i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\ (2n-1)$. Posti nella (42) i diversi valori di δx_i, ordinati i termini per le differenziali

$$d\alpha_1\,,\quad d\alpha_2\,,\ \ldots\ldots\ d\alpha_{2n-1}$$

e fatto per compendio $\quad e^{-\int\theta} = N \qquad (43)$

$$\left(\frac{dx_1}{d\alpha_i}\right) X_1 + \left(\frac{dx_2}{d\alpha_i}\right) X_2 \,\ldots\ldots + \left(\frac{dx_{2n-1}}{d\alpha_i}\right) X_{2n-1} = Q_i$$

la (42) diverrà primieramente

$$X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 \ldots\ldots + X_{2n-1}\,\delta x_{2n-1} = Q_1\,d\alpha_1 + Q_2\,d\alpha_2 \ldots\ldots + Q_{2n-1}\,d\alpha_{2n-1} = C e^{\int\theta} \qquad (44)$$

e quindi

$$NQ_1\,d\alpha_1 + NQ_2\,d\alpha_2 \,\ldots\ldots + NQ_{2n-1}\,d\alpha_{2n-1} = C$$

da cui risulta che i coefficienti delle

$$d\alpha_1\,,\quad d\alpha_2\,,\ \ldots\ldots\ d\alpha_{2n-1}$$

non contengono la variabile x_{2n} e che i rapporti

$$\frac{Q_1}{Q_{2n-1}} = A_1\,,\quad \frac{Q_2}{Q_{2n-1}} = A_2\,,\ \ldots\ldots\ \frac{Q_{2n-2}}{Q_{2n-1}} = A_{2n-2} \qquad (45)$$

saranno indipendenti dalla stessa variabile. Posta la quantità S_1 pel 1.° membro della (42), il quale rappresenta la trasformazione del polinomio compreso nella proposta equazione (7) in cui riguardinsi variabili le quantità introdotte dall' integrazione, sostituito nel 2.° membro il precedente valore di C', e rappresentata con f_1 quella funzione delle variabili originarie che risulta cavando il valore di α_{2n-1} dagl' integrali del 1.° sistema ausiliario, la (42), avuto riguardo alla (43), diverrà

$$S_1 = Q_{2n-1} \left\{ A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 \cdots + A_{2n-2} d\alpha_{2n-2} \right\} + Q_{2n-1} df_1$$

Il polinomio che moltiplica la Q_{2n-1} essendo indipendente dalla variabile x_{2n} sarà un' espressione delle sole arbitrarie

$$\alpha_1 \; , \quad \alpha_2 \; , \; \ldots\ldots \; \alpha_{2n-2} \; , \quad \alpha_{2n-1}$$

delle quali considerata l' ultima come invariabile, il polinomio stesso sarà un' espressione differenziale fra un numero pari $2n-2$ di variabili che potrà trasformarsi come si è fatto del polinomio pari contenuto nella proposta (1). Rappresentato infatti con S_2 un tal polinomio pari, si eseguirà su di esso una trasformazione analoga a quella relativa alla S_1 stabilendo un 2.° sistema ausiliario. Questo risulterà dal 1.° sistema (13), (15) nel quale si sostituiscano

alle $\quad x_1 \; , \; x_2 \; , \; \ldots\ldots \; x_{2n-2}$

le $\quad \alpha_1 \; , \; \alpha_2 \; , \; \ldots\ldots \; \alpha_{2n-2}$

e posto $\quad dx_{2n-1} = dx_{2n} = 0 \; , \quad X_{2n} = X_{2n-1} = 0$

si mettano le $\quad A_1 \; , \; A_2 \; , \; \ldots\ldots \; A_{2n-2}$

in luogo delle $\quad X_1 \; , \; X_2 \; , \; \ldots\ldots \; X_{2n-2}$

Chiamate quindi β_1, β_2, ... β_{2n-3} le arbitrarie introdotte dall' integrazione del 2.° sistema ausiliario e dette R_i, B_i le quantità analoghe alle Q_i, A_i, si otterrà

$$S_2 = R_{2n-3}\left\{B_1 d\beta_1 + B_2 d\beta_2 \cdots + B_{2n-4} d\beta_{2n-4}\right\} + R_{2n-3} d\mathrm{f}_2$$

ove la f_2 sarà quella funzione delle variabili originarie che risulta cavando il valore di β_{2n-3} colle eliminazioni dal complesso degl' integrali dei due sistemi ausiliarj. Sostituendo quindi, sarà

$$S_1 = Q_{2n-1} R_{2n-3}\left\{B_1 d\beta_1 + B_2 d\beta_2 \cdots + B_{2n-4} d\beta_{2n-4}\right\} + Q_{2n-1} R_{2n-3} d\mathrm{f}_2 + Q_{2n-1} d\mathrm{f}_1$$

Così progredendo a nuove trasformazioni dei polinomj pari e ponendo

$$Q_{2n-1} = \Pi_n \,, \qquad Q_{2n-1} R_{2n-3} = \Pi_{n-1} \,, \; \ldots\ldots$$

si troverà la S_1 sotto la forma finale

$$S_1 = \Pi_1 d\mathrm{f}_n + \Pi_2 d\mathrm{f}_{n-1} + \Pi_3 d\mathrm{f}_{n-2} \cdots + \Pi_n d\mathrm{f}_1 \qquad (46)$$

Si soddisferà quindi alla $S_1 = 0$ 1.° colle equazioni

$$\mathrm{f}_1 = a_1 \,, \quad \mathrm{f}_2 = a_2 \,, \; \ldots \; \mathrm{f}_n = a_n \qquad (47)$$

essendo a_1, a_2, ... a_n quantità costanti; 2.° indicando con ϕ una funzione arbitraria, col sistema delle n equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{f}_n - \phi(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots\ldots \mathrm{f}_{n-1}) &= 0 \\
\Pi_1 \phi'(\mathrm{f}_{n-1}) + \Pi_2 &= 0 \\
\Pi_1 \phi'(\mathrm{f}_{n-2}) + \Pi_3 &= 0 \\
\Pi_1 \phi'(\mathrm{f}_{n-3}) + \Pi_4 &= 0 \\
&\vdots \\
\Pi_1 \phi'(\mathrm{f}_1) + \Pi_n &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

13. Il metodo indicato nel precedente paragrafo coincide in sostanza con quello esposto dal signor Pfaff nella Memoria inserita negli Atti dell' Accademia di Berlino per gli anni 1814, 1815.

Infatti ripresa l'equazione (2) del § 1.° se, senza stabilire alcun sistema ausiliario, si trasforma il 2.° membro riguardandovi le x_1, $x_2 \ldots\ldots x_{2n-1}$ quali funzioni di x_{2n} e di altre variabili α_1, $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{2n-1}$ si avrà dalla (44) ove il 1.° membro è eguale ad S_1

$$S_1 = Q_{2n-1}\left\{\frac{Q_1}{Q_{2n-1}}d\alpha_1 + \frac{Q_2}{Q_{2n-1}}d\alpha_2 \ldots\ldots + \frac{Q_{2n-2}}{Q_{2n-1}}d\alpha_{2n-2} + d\alpha_{2n-1}\right\}$$

Se in luogo del 1.° sistema ausiliario si stabilisce invece quel sistema di equazioni atto a far scomparire dai coefficienti delle $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, . . . $d\alpha_{2n-2}$ la variabile x_{2n}, un tal sistema sarà dato dalle $2n-2$ equazioni

$$\frac{d}{dx_{2n}}\left(\frac{Q_1}{Q_{2n-1}}\right) = 0\,, \quad \frac{d}{dx_{2n}}\left(\frac{Q_2}{Q_{2n-1}}\right) = 0\,, \ldots\ldots \frac{d}{dx_{2n}}\left(\frac{Q_{2n-2}}{Q_{2n-1}}\right) = 0 \qquad (49)$$

Queste equazioni differenziali, sviluppate che siano, dovranno coincidere colle $2n-2$ equazioni che si ottengono dalla eliminazione della θ dal sistema (13), in quanto entrambi questi sistemi hanno la stessa proprietà di render costanti rispetto alla x_{2n} i rapporti (45). Le equazioni (49) sono quelle da cui è partito il signor Pfaff nella citata Memoria per istabilire il primo sistema di equazioni differenziali da integrarsi.

Quantunque questo secondo metodo non richiegga la determinazione delle arbitrarie introdotte dall' integrazione in funzione dei valori iniziali, pure esso esige l' integrazione effettiva del 1.° sistema innanzi poter stabilire il 2.°, e così dicasi del 3.°, 4.°, ... relativamente ai precedenti, laddove il primo metodo in cui s'impiegano i valori iniziali fornisce un sistema qualunque da integrarsi senz' avere ottenuta l' integrazione di alcun sistema precedente. Si vedrà in seguito di quale vantaggio sia una tale disposizione simetrica dei sistemi ausiliarj, quando si tratterà il caso in cui si suppongono esistere fra i coefficienti della proposta equazione alcune particolari relazioni.

II.

Proprietà delle Semi-alternanti e loro applicazioni.

1. Prima di progredire ad ulteriori ricerche è necessario di richiamare alcune proposizioni relative ad un sistema di equazioni lineari fra un numero qualunqne d' incognite e dedurre le conseguenze che risultano dalle proprietà delle alternanti dimostrate nella Memoria sulla *Genesi delle funzioni simetriche ed alternate*, pubblicata l'anno 1845 nell' Appendice alle Effemeridi astronomiche di Milano.

Essendo dato fra un numero qualunque m d' incognite

$$\zeta^a\,,\ \zeta^b\,,\ \zeta^c\,,\ \ldots\ldots\ \zeta^z$$

un sistema di m equazioni lineari

$$\left.\begin{array}{l} a^a\zeta^a + a^b\zeta^b + a^c\zeta^c \cdots\cdots + a^\omega\zeta^\omega \cdots\cdots + a^z\zeta^z = a^\zeta \\ b^a\zeta^a + b^b\zeta^b + b^c\zeta^c \cdots\cdots + b^\omega\zeta^\omega \cdots\cdots + b^z\zeta^z = b^\zeta \\ \vdots \\ z^a\zeta^a + z^b\zeta^b + \cdots\cdots\cdots + z^\omega\zeta^\omega \cdots\cdots + z^z\zeta^z = z^\zeta \end{array}\right\} \quad (1)$$

ove la ω indica quella fra le lettere della serie $= g$ espressa da

$$a\,,\ b\,,\ c \ldots\ldots \omega \ldots\ldots x\,,\ y\,,\ z \qquad (2)$$

che occupa il posto i^{mo}, un' incognita qualunque ζ^ω sarà data da

$$\zeta^\omega = \frac{D(g)^{g(\omega=\zeta)}}{D(g)^g} \qquad (3)$$

ove il valore dell' *Alternante* $D(g)^g = D(a^a b^b c^c \ldots\ldots y^y z^z)$

viene determinato da una semplice operazione combinatoria e quello della $D(g)^{g(\omega = \zeta)}$ si ottiene dallo sviluppo della $D(g)^g$ a seconda dell' indice generico ω col sostituire ζ ad ω. Supposto nella (3) $\omega = z$ si avrà il rapporto fra un' incognita qualunque ζ^ω e l' ultima ζ^z dall' equazione

$$\zeta^\omega : \zeta^z = D(g)^{g(\omega = \zeta)} : D(g)^{g(z = \zeta)} \tag{4}$$

Se nel sistema (1) si suppongono zero i secondi membri, il sistema allora introduce fra i coefficienti dell' incognita la relazione

$$D(g)^g = 0 \tag{5}$$

la quale dev' essere avverata. Una tale relazione è quella che risulterebbe dall' eliminazione delle m incognite fra le m equazioni (1) supposti zero i 2.[i] membri.

2. Si chiamerà alternante pari la $D(g)^g$, quando la g consta di un numero pari di lettere che rappresentiamo sempre colla serie (2), e si dirà alternante dispari quando la serie (2) che sarà indicata con g' consta di un numero dispari. Quindi la $D(g)^g$ sarà l' alternante pari, la $D(g')^{g'}$ sarà l' alternante dispari, e l' alternante $D(\gamma)^\gamma$ si riferirà al caso in cui la γ sia pari o dispari. Nel 1.° caso il sistema (1) fatto di un numero $m = 2n$ d' incognite si dirà pari; nel 2.° in cui sarà $m = 2n \pm 1$ si dirà dispari.

3. Quando nel sistema (1) per m qualunque esistano fra i coefficienti le relazioni

$$\lambda^\lambda = 0 \,, \qquad \lambda^\mu = -\mu^\lambda \tag{6}$$

essendo λ, μ due lettere generiche della serie (2) per tutti i valori della stessa serie, i simboli D delle alternanti verranno controdistinti con $\bar{D}$. Siccome le relazioni (6) indicano che se nel quadro costituito dai primi membri delle

(1) si fa passare una diagonale da a^a alla z^z sono zero tutti i coefficienti che si trovano sulla diagonale e sono eguali e di segno contrario quelli che trovansi ad eguale distanza da una e dall' altra parte della diagonale stessa, così quando si dirà essere in un sistema avverata la *Condizione diagonale*, intenderemo essere verificate le relative condizioni (6).

4. Quando le relazioni (6) sono avverate si ha identicamente

$$\bar{D}(g')^{g'} = 0 \qquad (7)$$

Infatti dietro il § 53 (Mem. cit.) la $D(\gamma)^\gamma$ rimane invariata quando s' invertano tutti i gruppi di cui essa consta, onde chiamata $D'(\gamma)^\gamma$ ciò che in tale inversione, essa diventa si ha in generale $D(\gamma)^\gamma = D'(\gamma)^\gamma$. Se supponiamo avverate le condizioni (6) sarà in generale $\bar{D}(\gamma)^\gamma = \bar{D}'(\gamma)^\gamma$. Se ora a ciascuno degli m elementi della forma λ^μ di cui constano i gruppi della $\bar{D}'(\gamma)^\gamma$ si sostituiscono i loro eguali e contrarj $-\mu^\lambda$ ed essendo $\lambda^\lambda = -\lambda^\lambda = 0$, ciascun gruppo di essa diverrà eguale al corrispondente gruppo della $\bar{D}(\gamma)^\gamma$ moltiplicato per $(-1)^m$. Quindi raccogliendo il moltiplicatore $(-1)^m$ sarà

$$\bar{D}'(\gamma)^\gamma = (-1)^m \bar{D}(\gamma)^\gamma$$

ossia, dietro la data relazione generale, sarà

$$\bar{D}(\gamma)^\gamma = (-1)^m D(\gamma)^\gamma.$$

Dovendo questa essere avverata per qualsivoglia valore di m pari o dispari, dovrà per m dispari essere $\bar{D}(\gamma)^\gamma = 0$ ossia dovrà essere identicamente zero la $\bar{D}(g')^{g'}$. Una tale conseguenza fu nella citata Memoria desunta, come corollario, dalla legge di composizione dei gruppi dell' alternante, per rendere manifesta anche la forma che assume in tal caso l' alternante stessa $D(g)^g$, ciò che in seguito ci tornerà utile.

5. Essendo ζ una lettera estranea alla serie (2), cioè estranea alla serie γ, e supposto che le condizioni (6) siano avverate per tutti i valori di λ, μ della serie

$$a\,,\; b\,,\; c\,,\; \ldots\; x\,,\; y\,,\; z\,,\; \zeta = \gamma + \zeta$$

si avrà

$$\bar{D}(\gamma)^{\gamma(\omega=\zeta)} = \pm \bar{D}\big(\gamma(\omega=\zeta)\big)^{\gamma} \tag{8}$$

ove nel 1.° membro s'intende per l'indice ω posta la ζ e nel 2.° membro s'intende posta la ζ per la base stessa ω negli sviluppi delle alternanti D. Avrà luogo poi il $+$ od il $-$ secondo che sarà $\gamma = g$ ovvero $\gamma = g'$.
Infatti pongasi

$$\bar{D}(\gamma)^{\gamma(\omega=\zeta)} = P\,, \qquad \bar{D}\big(\gamma(\omega=\zeta)\big)^{\gamma} = Q.$$

La Q che rappresenta una $\bar{D}(\gamma)^{\gamma}$ nelle cui basi γ si ponga $\omega = \zeta$ è eguale a ciò che si ottiene invertendo tutti i gruppi della P. Se dunque in ciascun gruppo della Q si sostituisce a' suoi m elementi λ^{μ} i loro eguali $-\mu^{\lambda}$ in forza delle (6), ove si ha pure $\lambda^{\lambda} = -\lambda^{\lambda}$, tutti questi gruppi si cambieranno nei corrispondenti della P moltiplicati per $(-1)^{m}$. Perciò, raccogliendo il comun fattore, sarà $Q = (-1)^{m}P$ ossia $\bar{D}\big(\gamma(\omega=\zeta)\big)^{\gamma} = \pm \bar{D}(\gamma)^{\gamma(\omega=\zeta)}$, ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che m sarà pari o dispari ossia secondo che sarà $\gamma = g$ ovvero $\gamma = g'$.

6. Dietro la composizione dell' alternante pari $D(g)^{g}$ data nella citata Memoria risulta contenere essa alcuni gruppi fatti di soli rientranti di 2.ª specie. Sia $2n$ il numero delle lettere della serie g. Si dirà *semi-gruppo* ciò che diventa uno de' gruppi anzidetti contenuto nella $D(g)^{g}$, quando ritenuti in esso gruppo gli n elementi h^{k} si sopprimano gli n invertiti k^{h}. Dicasi *semi-gruppo ordinato* quando per gli n elementi di cui consta un semi-gruppo si sono presi quelli in cui la base

occupa nella serie g un posto i^{mo} inferiore a quello che occupa il proprio indice, e *semi-gruppo invertito* quello in cui ciascun indice occupa un posto i^{mo} inferiore a quello della rispettiva base. Un gruppo ordinato sarà dunque il prodotto di elementi che nel quadro del sistema (1) trovansi tutti a destra della diagonale, ed un gruppo invertito sarà fatto di elementi che trovansi a sinistra della diagonale stessa.

Ne risulta che un gruppo qualunque fatto di soli rientranti di 2.ª specie è il prodotto di due semi-gruppi di cui uno è l'ordinato, l'altro l'invertito. Così per esempio il gruppo

$$f^c c^f a^d d^a e^g g^e b^h h^b \ldots\ldots$$

fatto di soli rientranti di 2.ª specie consta del prodotto dei due semi-gruppi

$$c^f a^d b^h e^g \ldots\ldots, \qquad f^c d^a h^b g^e \ldots\ldots$$

di cui il 1.° è il semi-gruppo ordinato ed il 2.° il suo invertito. Si dirà inoltre *semi-gruppo fondamentale* il semi-gruppo ordinato $a^b c^d e^f g^h \ldots y^z$ e s'indicherà con g_1. Gli altri semi-gruppi ordinati saranno indicati con g_2, g_3, ... g_μ. Indicheremo poi con c_1, c_2, c_3, ... c_μ gl' invertiti dei precedenti.

7. Supposto $2n$ il numero delle lettere componenti la serie pari g e supposte avverate le condizioni (6) sarà

$$\bar{D}(g)^g = S + 2\Pi \qquad (9)$$

ove, essendo S l'aggregato dei gruppi della $D(g)^g$ contenenti tutti i gruppi fatti di rientranti di sola 2.ª specie, e g_1, g_2, ... g_μ i semi-gruppi ordinati, sarà

$$S = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + \ldots\ldots + g_\mu^2 .$$

La Π sarà l'aggregato di tutti i prodotti a due a due dei semi-gruppi stessi, astrazion fatta dal loro segno, e la μ

indicherà il prodotto di tutti i numeri dispari contenuti in $2n$. Infatti, dietro quanto fu esposto nella citata Memoria, l'alternante $D(g)^g$ di un numero pari $2n$ di elementi equivale alla somma $P + S + R$, ove P è l'aggregato dei gruppi dell'alternante contenenti rientranti di 1.ª specie, od elementi fissi, la S è l'aggregato dei gruppi fatti di soli rientranti di 2.ª specie, e la R l'aggregato di tutti i restanti gruppi. Stante la prima delle (6) sarà $P = 0$. Si fissi arbitrariamente un gruppo qualunque della R e sia espresso da MG, essendo G un rientrante di specie dispari. Esisterà nella R un gruppo MG_1 dotato dello stesso segno, ove G_1 sarà l'invertito di G, e per la 2.ª delle (6) sarà $G_1 = -G$. Ne deriva che tutti i gruppi contenenti rientranti di specie dispari si elideranno a due a due e la $D(g)^g$ si ridurrà ad $S + Q$, ove sarà Q l'aggregato di tutti i gruppi della R fatti di rientranti di sola specie pari. Si consideri ora un gruppo qualunque della Q e sia espresso con MG, ove sarà G un gruppo rientrante di specie pari; esisterà nella Q un gruppo MG_1 dotato dello stesso segno ed ove G_1 sarà l'invertito di G. Sarà quindi per la 2.ª delle (6) $G_1 = G$, dunque i gruppi della Q si sommeranno a due a due e la $D(g)^g$ sarà ridotta ad $S + 2\Pi$.

Dalla citata Memoria risulta che il numero dei gruppi dell'alternante pari $D(g)^g$ fatti di soli rientranti di 2.ª specie è il prodotto dei numeri dispari contenuti in $2n$. Sia μ un tale prodotto, sarà

$$S = \pm (g_1 c_1 + g_2 c_2 + \dots + g_\mu c_\mu)$$

ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che n sarà pari o dispari. Per la 2.ª delle (6) sarà $c_i = \pm g_i$ per tutti i valori di $i = 1, 2, 3, \dots \mu$, ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che n sarà pari o dispari. Sarà quindi

$$S = g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_\mu^2 .$$

Per dimostrare finalmente essere la II l' aggregato di tutti i prodotti a due a due dei semi-gruppi ordinati $g_1, g_2 \ldots . g_\mu$, astrazion fatta dal loro segno, si consideri un gruppo GN della II in cui per ipotesi la N consti di un solo rientrante, per esempio $N = a^b b^c c^d d^a$, essendo la G fatta di rientranti pure di specie pari. Sarà $N = a^b c^d \times b^c d^a$, cioè fatta del prodotto di due semi-gruppi. Sia per ipotesi G fatto pur esso di un gruppo di un rientrante solo, per esempio $G = g^e c^h h^f f^g$; sarà parimente $G = f^g e^h \times h^f g^e$, onde sarà

$$GN = a^b c^d f^g e^h \times b^c d^a h^f g^e$$

il quale è il prodotto dei semi-gruppi di cui constano i due gruppi di soli rientranti di 2.ª specie, cioè dei due gruppi

$$a^b b^a c^d d^c f^g g^f e^h h^e, \quad b^c c^b d^a a^d h^f f^h g^e e^g$$

i quali ordinati per gl' indici corrispondono nella $D(g)^g$ ai due gruppi

$$b^a a^b d^c c^d h^e g^f f^g e^h, \quad d^a c^b b^c a^d g^e h^f e^g f^h.$$

Si vede quindi che potendo un qualunque gruppo rientrante di un numero pari di elementi scomporsi nel prodotto di due semi-gruppi, un gruppo qualunque G che entra nella II fatto di rientranti di specie pari, in ciascun de' quali si ometta alternativamente un elemento, verrà decomposto in due fattori ciascun de' quali sarà un semi-gruppo. Così, per esempio, si ha

$$e^f f^g g^a a^c c^d d^b b^n n^l l^k k^h h^m m^e = e^f g^a c^d b^n l^k h^m \times f^g a^c d^b n^l k^h m^e$$

il 1.° de' quali fattori è il semi-gruppo corrispondente al gruppo intero

$$e^f f^e g^a a^g c^d d^c b^n n^b l^k k^l h^m m^h$$

ed il 2.° al gruppo intero

$$f^g g^f a^c c^a d^b b^d n^l l^n k^h h^k m^e e^m .$$

Ma impiegando la 2.ª delle relazioni (6) ciascun semi-gruppo di cui constano i gruppi della II potrà ridursi ad un semi-gruppo ordinato col ridurre ordinati gli elementi di cui esso consta. Dunque tutti i gruppi della II si ridurranno al prodotto a due a due dei semi-gruppi ordinati g_1, g_2, $g_3 \ldots . g_\mu$ combinati in tutti i modi possibili, giacchè oltre tale combinazione non vi potrà esistere in II altro gruppo, altrimenti la serie g_1, $g_2 \ldots . g_\mu$ non conterrebbe tutti i possibili semi-gruppi e mancherebbe nella $D(g)^g$ il corrispondente gruppo a soli rientranti di 2.ª specie; nè potrà mancare in II alcuno di tali prodotti, altrimenti il corrispondente gruppo mancherebbe nella $D(g)^g$.

8. Essendo avverate le relazioni (6), si avrà

$$\bar{D}(g)^g = \left(g_1 + \cdots + (-1)^\alpha g_m + \cdots + (-1)^\beta g_n \cdots (-1)^\delta g_i \cdots + (-1)^\sigma g_\mu\right)^2 = V^2 \qquad (9)$$

in cui le diverse g saranno i μ semi-gruppi ordinati, la g_1 il semi-gruppo fondamentale e le $\alpha \ldots . \beta \ldots . \delta \ldots . \sigma \ldots .$ esprimeranno il numero delle alternazioni necessarie per passare dal fondamentale g_1 ai rispettivi semi-gruppi ordinati

$$g_m , \ldots . g_n , \ldots . g_i , \ldots . g_\mu .$$

Infatti provato che i gruppi della II risultano dall'aggregato di tutti i prodotti a due a due dei semi-gruppi ordinati, non avuto riguardo al loro segno, per poter ridurre la $S + 2\text{II}$ ad un quadrato V^2, resterà solo a provarsi che il segno di cui sarà affetto un gruppo nato dal prodotto di due semi-gruppi ordinati

$$(-1)^\delta g_i (-1)^\lambda g_k = (-1)^{\delta+\lambda} g_i g_k$$

dopo eseguite, dietro la relazione (8), le inversioni opportune onde ridurlo ad un gruppo della II, sarà positivo o negativo secondo che pari o dispari sarà il numero de' rientranti da cui sarà affetto un tal gruppo. Ora dai principj esposti nella citata Memoria risulta che il segno competente ad un gruppo qualunque G come derivato da un altro gruppo $(-1)^{\nu} G_{1}$ con un numero $=\rho$ d'alternazioni è $=(-1)^{\nu+\rho}$, qualunque siasi il giro o processo con cui si alternano le lettere di cui esso consta. Sia dunque r il numero delle inversioni necessarie per passare direttamente dal prodotto di due semi-gruppi generici $(-1)^{\delta} g_i (-1)^{\lambda} g_k$ al gruppo G della II, la cui composizione, astrazion fatta dal segno, risulti dal prodotto dei due semi-gruppi g_i, g_k. Il segno di G sarà $=(-1)^{\lambda+\delta+r}$. Sia x il numero dei rientranti di cui consta il gruppo G. Si trasformi con opportune alternazioni il prodotto $(-1)^{\delta+\lambda} g_i g_k$ nel gruppo in quistione passando pel gruppo fondamentale della $D(g)^g$, cioè pel gruppo $a^a b^b \ldots y^y z^z = F$, per ridiscendere al gruppo G. È chiaro che con un numero $=n$ d'inversioni la g_k si cambierà in c_k affetta dal segno $(-1)^n$. Il segno del risultato sarà $(-1)^{\delta+\lambda}(-1)^n$, ed il gruppo sarà divenuto $g_i c_k$. Con un numero δ d'alternazioni si cambierà g_i in g_1 e si avrà il gruppo $(-1)^{2\delta+\lambda+n} g_1 c_k$. Quindi con un numero $=\lambda$ d'inversioni si cambierà c_k nell'invertito di g_1 che sarà c_1, e si avrà il gruppo

$$(-1)^{2\delta+2\lambda+n} g_1 c_1 .$$

Osservando ora essere $g_1 c_1 = a^b c^d e^f \ldots y^z \times b^a d^c f^e \ldots z^y$, esso con un numero $=n$ di alternazioni fra le basi si cambierà in F. Il gruppo sarà ridotto a $(-1)^{2(\delta+\lambda)+2n} F$. Avendo la G per ipotesi un numero $=x$ di rientranti, si passerà da F a G con un numero $2n-x$ di alternazioni, e quindi il segno della G risulterà dato da $(-1)^{2(\delta+\lambda)+2n+2n-x} = (-1)^x$. Ma siccome in ambi questi giri si deve ottenere lo stesso segno per la G, così dovrà essere $\delta + \mu + r$ pari o dispari secondo che pari o dispari sarà x. Il segno dunque, che nasce dal prodotto in questione ottenuto con diretto passaggio, sarà positivo o negativo secondo che positivo o negativo sarà il numero dei rientranti che contiene il risultante gruppo G. Quindi viceversa un gruppo qualunque della II di x rientranti, il cui segno sarà $(-1)^x$, risulterà dal prodotto di due semigruppi ordinati, tanto rispetto alla composizione de' suoi elementi, quanto rispetto al segno che assume dopo le iterate riduzioni. Siccome i doppj prodotti di tutti i termini della V eguaglieranno tutti i gruppi contenuti in $2II$, così la $\bar{D}(g)^g$ sarà ridotta al quadrato della V.

9. Siavi una serie $a, b, c, d, \ldots\ldots v, x, y, z = g$ di un numero pari $2n$ di lettere. Posta sotto la forma $g = a^b c^d \ldots\ldots v^x y^z$, si esprima con $\Delta(g) = \Delta(a^b c^d \ldots\ldots v^x y^z)$ l' aggregato di tutti i termini che risultano dal fondamentale g alternando fra loro due lettere successivamente, ed escludendo quei termini che non differiscono dai già ritenuti se non in quanto vi compajono elementi invertiti, sia ad ogni termine apposto il segno $+$ od il $-$ secondo che pari o dispari è il numero delle alternazioni atte a ricondurre il termine in questione al fondamentale g. L' aggregato $\Delta(g)$ risulta in tal caso da un processo uniforme di operazioni che si ottiene incominciando dai casi più semplici e salendo ai più complessi.

Sia $2n = 2$, sarà $g = a^b$, e quindi sarà $\Delta a^b = a^b$ ed in generale $\Delta\lambda^\mu = \lambda^\mu$.

Sia $2n = 4$, sarà $g = a^b c^d$. Per ottenere $\Delta(g) = \Delta a^b c^d$ si ritenga fissa una base, per esempio la c dell' elemento c^d, si alterni la d con tutte le lettere dell' altro elemento, e vi si apponga il segno $-$. Risulterà

$$\Delta a^b c^d = c^d \Delta a^b - c^a \Delta d^b - c^b \Delta a^d \qquad \text{ossia}$$

$$\Delta a^b c^d = a^b c^d - c^a d^b - c^b a^d \qquad (10)$$

Sia $2n = 6$, sarà $g = a^b c^d e^f$ e quindi

$$\Delta a^b c^d e^f = e^f \Delta a^b c^d - e^a \Delta f^b c^d - e^b \Delta a^f c^d - e^c \Delta a^b f^d - e^d \Delta a^b c^f \tag{11}$$

ove si dovranno porre i valori dei Δ del 2.° membro desunti dal caso di $2n = 4$.

Per $2n = 8$ si avrà parimente

$$\Delta a^b c^d e^f g^h = g^h \Delta a^b c^d e^f - g^a \Delta h^b c^d e^f - g^b \Delta a^h c^d e^f - g^c \Delta a^b h^d e^f - g^d \Delta a^b c^h e^f - g^e \Delta a^b c^d h^f - g^f \Delta a^b c^d e^h \tag{12}$$

ove pure si dovranno far scomparire le Δ del 2.° membro col mezzo dei valori ottenuti per $2n = 6, 4, 2$.

La legge essendo manifesta, la $\Delta(g) = \Delta(a^b c^d \ldots\ldots v^x y^z)$ si otterrà dalla

$$\Delta(a^b c^d \ldots\ldots v^x y^z) = y^z \Delta(a^b c^d e^f \ldots\ldots v^x) - y^a \Delta(z^b c^d e^f \ldots\ldots v^x) - y^b \Delta(a^z c^d e^f \ldots\ldots v^x) - \ldots\ldots\ldots\ldots - y^v \Delta(a^b c^d e^f \ldots\ldots z^x) - y^x \Delta(a^b c^d e^f \ldots\ldots v^z) \tag{13}$$

ove le diverse Δ contenute nel 2.° membro si avranno dalla $\Delta(g)$ in cui sia g di un numero $2n - 2$. Le Δ che si trovano in ciascuna di queste si avranno dai valori ottenuti per $2n - 4$, e così di seguito, di modo che il valore della (13) si otterrà da relazioni ricorrenti, in cui le diverse g diminuiscono sempre di due unità. La $\Delta(g)$ data dalla (13) si dirà sviluppata a seconda della base y.

Il numero dei termini, di cui consterà il risultato finale scevro dal simbolo Δ, sarà dato dal prodotto dei numeri dispari contenuti in $2n$.

Infatti una $\Delta(g)$ fatta di $2n$ lettere fornisce colla (13) un numero $2n-1$ di termini. Ciascuna Δ del 2.° membro fatta di $2n-2$ lettere fornirà un numero $2n-3$ di termini, in ciascun de' quali la Δ fatta di $2n-4$ lettere fornirà nello sviluppo un numero $2n-5$ di termini, e così di seguito, in modo che lo sviluppo finale della $\Delta(g)$, scevro da ogni Δ, consterà, come si è enunciato, di un numero di termini dato da

$$(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots.3.1 = 1.3.5\ldots.(2n-1)$$

I termini che formeranno l'aggregato $\Delta(g)$ saranno altrettanti semi-gruppi, essendo essi, fra basi ed indici, formati di tutte le lettere della serie g senza che alcuna venga ripetuta e senza che alcuna vi manchi. Un semi-gruppo qualsivoglia potrà dunque completarsi col suo invertito e dare origine ad un gruppo fatto di soli rientranti di 2.ª specie.

Così, per esempio, supposto $2n=6$, il termine $a^c f^d e^b$ di cui consterà la $\Delta a^b c^d e^f$ sarà il semi-gruppo competente al gruppo intero $a^c f^d e^b \times c^a d^f b^e = a^c c^a f^d d^f e^b b^e$, il quale ordinato a seconda degl' indici forma il gruppo $c^a e^b a^c f^d b^e d^f$ di soli rientranti di 2.ª specie che entra nella $D(g)^g = D(a^a b^b c^c d^d e^e f^f)$

Se si suppone avverata la (6) sarà $\lambda^\mu = -\mu^\lambda$ ed i semi-gruppi, di cui consta la $\Delta(g)$ scevra dai Δ, potranno ridursi a semi-gruppi ordinati, i quali manterranno ancora il $+$ od il $-$ secondo che pari o dispari sarà il numero delle alternazioni totali eseguite sulle lettere, onde ridurre il semi-gruppo ordinato al semi-gruppo fondamentale, in quanto ogni alternazione fra base e relativo indice fa cambiar il segno al semi-gruppo per la relazione stessa $\lambda^\mu = -\mu^\lambda$.

Si cerchi per un esempio il valore di $\Delta a^b c^d e^f$ espresso per semi-gruppi ordinati. Sarà

$$\Delta a^b c^d e^f = e^f \Delta a^b c^d - e^a \Delta f^b c^d - e^b \Delta a^f c^d - e^c \Delta a^b f^d - e^d \Delta a^b c^f$$

ed essendo

$$\Delta a^b c^d = a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c\,, \qquad \Delta f^b c^d = f^b c^d - f^c b^d + f^d b^c$$

$$\Delta a^f c^d = a^f c^d - a^c f^d + a^d f^c\,, \qquad \Delta a^b f^d = a^b f^d - a^f b^d + a^d b^f$$

$$\Delta a^b c^f = a^b c^f - a^c b^f + a^f b^c$$

risulterà

$$\begin{aligned}\Delta a^b c^d e^f = {} & a^b c^d e^f - a^c b^d e^f + a^d b^c e^f - f^b c^d e^a + f^c b^d e^a - f^d b^c e^a \\ & - a^f c^d e^b + a^c f^d e^b - a^d f^c e^b - a^b f^d e^c + a^f b^d e^c - a^d b^f e^c \\ & - a^b c^f e^d + a^c b^f e^d - a^f b^c e^d\end{aligned}$$

Ordinati i semi-gruppi colla solita relazione $\lambda^\mu = -\mu^\lambda$ sarà

$$\begin{aligned}\Delta a^b c^d e^f = {} & a^b c^d e^f - a^c b^d e^f + a^d b^c e^f - a^e c^d b^f + a^e b^d c^f - a^e b^c d^f \\ & + a^f b^e c^d - a^d b^e c^f + a^c b^e d^f - a^b c^e d^f + a^d b^f c^e - a^f b^d c^e \\ & + a^b c^f d^e - a^c b^f d^e + a^f b^c d^e\end{aligned}$$

ove vedesi avverata la legge che il segno di ciascun semi-gruppo ordinato è positivo o negativo secondo che si esige un numero pari o dispari di alternazioni fra le lettere di cui consta il gruppo in questione per ricondurlo al semi-gruppo fondamentale ordinato $a^b c^d e^f$.

10. L'equazione (9), quando la serie pari g che entra nella Δ sia identica con quella della V, si riduce alla

$$\bar{D}(g)^g = \big(\Delta(g)\big)^2 \tag{14}$$

Infatti la $\Delta(g)$ consta dello stesso numero μ di semi-gruppi come la V, e quando i semi-gruppi della $\Delta(g)$ vengano ordinati, essi saranno coincidenti coi semi-gruppi

$$g_1\,,\quad g_2\,,\quad g_3\,,\;\ldots\ldots\; g_\mu$$

astrazion fatta dal segno. Ma i segni da cui sono affetti i semi-gruppi della $\Delta(g)$ sono positivi o negativi secondo che si esige un numero pari o dispari d'alternazioni per ricondurli al gruppo fondamentale. Una tale condizione esigendosi anche nei gruppi dell'aggregato V, sarà $V=\Delta(g)$, e perciò la (9) darà la (14).

11. La $\Delta(a^b c^d \dots y^z) = \Delta(g)$ in forza della 2.ª delle relazioni (6) è una funzione alternata rispetto a tutte le $2n$ lettere di cui essa consta. Per tale proprietà comune coll'alternante $D(g)^g$ fatta di un doppio numero di elementi si dirà *Semi-alternante*.

Per dimostrarlo supponiamo che la proposizione sia vera per un numero $=m$ d'elementi. Basterà dimostrare che essa è vera per un numero $=m+1$ d'elementi, e provare che per un valore particolare di m la $\Delta(g)$ è una funzione alternata. Di fatti se le Δ contenute nel 2.° membro della (13), che supporremo di n elementi, sono funzioni alternate rispetto a tutte le $2n$ lettere che esse contengono, cambieranno di segno alternandone due qualunque di esse. Suppongasi, per fissare le idee, che siansi alternate le due lettere h, k. Tutte le Δ, in cui queste entrano, cambieranno di segno. Converrà vedere che cosa accade ai due gruppi

$$\left.\begin{array}{l} -\,y^h\Delta(a^b c^d \dots z^k \dots v^x) \\ -\,y^k\Delta(a^b c^d \dots h^z \dots v^x) \end{array}\right\} = C$$

in cui le Δ non ne contengono che una di esse. Se nella 1.ª si alterna z con k essa cambia di segno e si avrà

$$C = y^h\Delta(a^b c^d \dots k^z \dots v^x) - y^k\Delta(a^b c^d \dots h^z \dots v^x)$$

Si eseguisca l'alternazione delle fissate lettere h, k, e sia C_1 il risultato, sarà

$$C_1 = y^k\Delta(a^b c^d \dots h^z \dots v^x) - y^h\Delta(a^b c^d \dots k^z \dots v^x) = -C.$$

Assumono dunque esse pure un valore eguale e di segno contrario. Lo stesso accade se alle lettere consecutive h, k si sostituiscano due lettere non consecutive h, l. Sarà in tal caso da considerarsi che cosa accade colla suddetta alternazione ai due termini

$$\left.\begin{array}{l} -y^h\Delta(a^bc^d \ldots z^kl^m \ldots v^x) \\ -y^l\Delta(a^bc^d \ldots h^kz^m \ldots v^x) \end{array}\right\} = C.$$

Se nel 1.° termine di questa espressione si alternano le due lettere k, m sotto a Δ, esso cambia di segno e si ha

$$y^h\Delta(a^bc^d \ldots z^ml^k \ldots v^x) - y^l\Delta(a^bc^d \ldots h^kz^m \ldots v^x) = C.$$

Alternando h, l, e chiamato C_1 il risultato, si ha

$$C_1 = y^l\Delta(a^bc^d \ldots z^mh^k \ldots v^x) - y^h\Delta(a^bc^d \ldots l^kz^m \ldots v^x) = -C.$$

Dunque la $\Delta(a^bc^d \ldots y^z)$ fatta di $m+1$ elementi è una funzione alternata, quando lo sia la Δ fatta di m elementi. Ma per $m=2$, stante la (6), la Δ è una funzione alternata, ciò che può facilmente verificarsi sul valore di Δa^bc^d dato dalla (10). Dunque una $\Delta(g)$ di un numero qualunque di elementi sarà una funzione alternata.

Si avrà quindi, come corollario, che una qualunque Δ_i contenente semi-gruppi non ordinati sarà eguale a $(-1)^\sigma\Delta(a^bc^d \ldots y^z)$, essendo σ il numero delle alternazioni da eseguirsi sulle $2n$ lettere di cui consta la $\Delta(a^bc^d \ldots y^z)$ onde trasformarla in Δ_i. Risulta inoltre dalla (14) che un' alternante pari $D(g)^g$ si cambia in una funzione simetrica, quando siano verificate le relazioni (6).

12. La $\Delta(g) = \Delta(a^bc^d \ldots p^q \ldots v^xy^z)$ può esprimersi per una serie ordinata a seconda dello stesso indice z colla formola

$$\begin{aligned} \Delta(a^bc^d \ldots v^xy^z) = {} & y^z\Delta(a^bc^d \ldots v^x) - a^z\Delta(y^bc^d \ldots v^x) \\ & - b^z\Delta(a^yc^d \ldots v^x) - c^z\Delta(a^by^d \ldots v^x) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots - x^z\Delta(a^bc^d \ldots v^y) \end{aligned} \tag{15}$$

In generale la $\Delta(g)$ può esprimersi per una serie ordinata a seconda di una base p o di un indice q appartenenti ad un elemento generico della g.

Infatti essendo $\Delta(g)$ una funzione alternata rispetto a tutte le $2n$ lettere di cui consta, si avrà

$$\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z) = -\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots z^y).$$

Sviluppato il 2.° membro a seconda della base z colla formola (13) e posta pei coefficienti ω^z delle Δ la sua eguale $-z^\omega$ si otterrà la (15).

Inoltre siccome sarà $\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z) = \Delta(a^b c^d \dots y^z p^q)$, sviluppato il 2.° membro per la stessa base p col mezzo della (13), eseguendo in essa due alternazioni, cioè fra y, p e fra z, q, si avrà

$$\left.\begin{aligned}\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z) = {} & p^q \Delta(a^b c^d \dots v^x y^z) \\ & - p^a \Delta(q^b c^d \dots v^x y^z) \\ & - p^b \Delta(a^q c^d \dots v^x y^z) \\ & \vdots \\ & - p^y \Delta(a^b c^d \dots v^x q^z) \\ & - p^z \Delta(a^b c^d \dots v^x y^q)\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

ove si sono posti per simetria in ultimo i due termini affetti da p^y, p^z che risultano dai due termini della (13)

$$-y^p \Delta(a^b c^d \dots z^q \dots v^x), \quad -y^q \Delta(a^b c^d \dots p^z \dots v^x)$$

coll' alternare y con p, e z con q, e viceversa. Si è pure portato in ultimo sotto Δ l' elemento y^z. Questa, in sostanza, è quella stessa che risulterebbe dalla $\Delta(a^b c^d \dots v^x y^z p^q)$

operando sull'elemento p^q come si è indietro operato sulla y^z. La (15) darebbe parimente una formola ordinata per lo stesso indice q e si avrebbe

$$\left.\begin{aligned}\Delta(a^b c^d \ldots p^q \ldots y^z) = \; & p^q \Delta(a^b c^d \ldots v^x y^z) \\ & - a^q \Delta(p^b c^d \ldots v^x y^z) \\ & - b^q \Delta(a^p c^d \ldots v^x y^z) \\ & \;\vdots \\ & - x^q \Delta(a^b c^d \ldots v^p y^z) \\ & - y^q \Delta(a^b c^d \ldots v^x p^z) \\ & - z^q \Delta(a^b c^d \ldots v^x y^p)\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

13. Essendo avverate le (6), ed essendo g la solita serie pari, si avrà

$$\bar{D}(g)^{g(\omega=\zeta)} = \Delta(g)\,\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big) \quad (18)$$

Infatti la $D(g)^g$ nel caso generale in cui non si suppongono avverate le (6) potrà svilupparsi, come si è avvertito nella citata Memoria, a seconda dell'indice ω, e chiamati A, B, C, ... Ω, ... Z per brevità i coefficienti degli elementi a^ω, b^ω, ... ω^ω, ... z^ω ed ordinati i termini, si avrà

$$D(g)^g = Aa^\omega + Bb^\omega + \ldots + \Omega\omega^\omega \ldots + Yy^\omega + Zz^\omega$$

e quindi

$$D(g)^{g(\omega=\zeta)} = Aa^\zeta + Bb^\zeta + \ldots + \Omega\omega^\zeta \ldots + Yy^\zeta + Zz^\zeta$$

Pongasi una lineetta sui coefficienti suddetti per indicare ciò che essi divengono quando si suppongono avverate le (6), sarà

$$\bar{D}(g)^g = \bar{A}a^\omega + \bar{B}b^\omega \ldots + \bar{P}p^\omega \ldots + \bar{Z}z^\omega \quad (19)$$

e quindi

$$\bar{D}(g)^{g(\omega=\zeta)} = \bar{A}a^{\zeta} + \bar{B}b^{\zeta} + \ldots . \bar{P}p^{\zeta} \ldots . + \bar{Z}z^{\zeta} \qquad (20)$$

In queste formole (19), (20) si è omesso il termine affetto da $\bar{\Omega}$ in quanto che $\bar{\Omega}$ corrisponde all'alternante $\bar{D}(g-\omega)^{g-\omega} = D(g')^{g'} = 0$ per essere $g - \omega = g'$ dispari. Per la (14) si ha

$$\bar{D}(g)^{g} = \Delta(g)\,\Delta(g) = \Delta(g)\,\Delta(a^{b}c^{d} \ldots . p^{q} \ldots . y^{z}).$$

Suppongasi che la ω sia in posto pari nella serie g onde corrisponda all'indice q dell'elemento generico p^{q}. Sviluppato colla (17) il 2.° dei due fattori a seconda dell'indice q, indi postovi $q = \zeta$ e paragonati i coefficienti delle a^{ζ}, $b^{\zeta} \ldots . z^{\zeta}$ che nascono da tale sviluppo coi coefficienti degli stessi elementi della (19), ove pongasi $\omega = q$, si avrà

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= -\,\Delta(g)\Delta(q^{b}c^{d} \ldots . y^{z}) \\
\bar{B} &= -\,\Delta(g)\Delta(a^{q}c^{d} \ldots . y^{z}) \\
\bar{C} &= -\,\Delta(g)\Delta(a^{b}q^{d} \ldots . y^{z}) \\
&\vdots \\
\bar{P} &= +\,\Delta(g)\Delta(a^{b}c^{d} \ldots . y^{z}) \\
&\vdots \\
\bar{Y} &= -\,\Delta(g)\Delta(a^{b}c^{d} \ldots . p^{z}) \\
\bar{Z} &= -\,\Delta(g)\Delta(a^{b}c^{d} \ldots . y^{p})
\end{aligned}$$

Quindi la (20), ove pongasi $\omega = q$ e sostituiscansi per $\bar{A}$, $\bar{B}$, ... i trovati valori, e mettasi pel 1.° il termine positivo affetto da p^{ζ}, diverrà

$$\bar{D}(g)^{g(q=\zeta)} = \left\{p^{\zeta}\Delta(a^{b}c^{d} \ldots y^{z}) - a^{\zeta}\Delta(p^{b}c^{d} \ldots y^{z}) - b^{\zeta}\Delta(a^{p}c^{d} \ldots y^{z}) \ldots . - z^{\zeta}\Delta(a^{b}c^{d} \ldots y^{p})\right\}\Delta(g)$$

Ora il coefficiente della $\Delta(g)$ del 2.° membro è ciò che diventa la (17) quando pongasi $q = \zeta$, onde si avrà

$$\bar{D}(g)^{g(q=\zeta)} = \Delta(g)\,\Delta(a^b c^d \dots p^\zeta \dots y^z),$$

ossia indicando con $\Delta\big(g(q=\zeta)\big)$ ciò che diventa lo sviluppo della semi-alternante $\Delta(g)$ quando in luogo di q si ponga la ζ, vale a dire ciò che diventa lo sviluppo della $\Delta(a^b c^d \dots p^\zeta \dots y^z)$ a seconda dell'indice ζ, si avrà

$$\bar{D}(g)^{g(q=\zeta)} = \Delta(g)\,\Delta\big(g(q=\zeta)\big).$$

Ma un tale processo può ripetersi per ω situato in posto dispari e corrispondente alla base p dell'elemento generico p^q. Infatti in tal caso nella $\bar{D}(g)^g = \Delta(g)\,\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z)$ si svilupperà il 2.° fattore a seconda della base p colla formola (16). Si porrà $p = \zeta$, indi ad ogni ζ^r si sostituirà $-r^\zeta$. I coefficienti dei diversi elementi

$$a^\zeta\,,\quad b^\zeta\,,\quad c^\zeta\,,\ \dots\dots\ q^\zeta\,,\ \dots\dots\ z^\zeta$$

si paragoneranno coi coefficienti degli stessi elementi che trovansi nella (19) ove pongasi $\omega = p$, con che verranno determinate le $\bar{A}$, $\bar{B}$, ... $\bar{P}$, ... $\bar{Z}$ che poste nella (20) risulterà

$$D(g)^{g(p=\zeta)} = -\big\{q^\zeta \Delta(a^b c^d \dots y^z) - a^\zeta \Delta(q^b c^d \dots y^z) - b^\zeta \Delta(a^q c^d \dots y^z) \cdots - z^\zeta \Delta(a^b c^d \dots y^q)\big\}\Delta(g)$$

Ma, per essere $-r^\zeta = \zeta^r$, il moltiplicatore di $\Delta(g)$ si ridurrà per la (16) a

$$\Delta(a^b c^d \dots \zeta^q \dots y^z) = \Delta\big(g(p=\zeta)\big),$$

e perciò la $\bar{D}(g)^{g(\omega=\zeta)}$, qualunque sia la lettera della serie g che la ω rappresenta, sarà ancora ridotta alla quantità $\Delta(g)\,\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$, che è la (18).

14. Quando le relazioni (6) sono avverate per la serie dispari g' delle lettere

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ \ldots\ldots\ x\,,\ y\,,\ z = g'\,,$$

ed inoltre per la serie

$$g' + \zeta = a\,,\ b\,,\ c\,,\ \ldots\ldots\ x\,,\ y\,,\ z\,,\ \zeta$$

essendo ζ una lettera estranea alla serie g', si avrà

$$\bar{D}(g')^{g'(\omega=\zeta)} = \pm\,\Delta(g'-\omega)\,\Delta(g'+\zeta) \qquad (21)$$

ove le $g'-\omega$, $g'+\zeta$ costituiscono due serie pari, di cui la 1.ª è ciò che diventa la g' omessavi la lettera generica designata per ω, e la 2.ª è la g' a cui sia aggregata la lettera estranea ζ. Avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che ω nella serie g' occupa un posto dispari o pari.

Infatti pel § 73 della Memoria citata si ha in generale

$$D(g')^{g'} = z^z D(g'-z)^{(g'-z)} - y^z D(g'-y)^{(g'-z)} + x^z D(g'-x)^{(g'-z)} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm\,\theta^z D(g'-\theta)^{(g'-z)} \ldots\ldots + a^z D(g'-a)^{(g'-z)}$$

ove avrà luogo nel termine generico il $+$ od il $-$ secondo che θ occuperà un posto dispari o pari nella serie g'. Supposto $z = \zeta$ negl' indici, sarà

$$D(g')^{g'(z=\zeta)} = z^\zeta D(g'-z)^{(g'-z)} - y^\zeta D(g'-y)^{(g'-z)} + x^\zeta D(g'-x)^{(g'-z)} \ldots$$
$$\ldots\ldots \pm\,\theta^\zeta D(g'-\theta)^{(g'-z)} \ldots\ldots + a^\zeta D(g'-a)^{(g'-z)}$$

Nel § 54 della Memoria citata si è mostrato come un' alternante D' è eguale a $\pm D$ secondo che pari o dispari è il numero delle alternazioni necessarie a farsi nelle basi onde passare da un' alternante all' altra; si avrà dunque

$$D(g'-\theta)^{(g'-z)} = \pm\,D\big((g'-z)\,(\theta=\zeta)\big)^{(g'-z)}$$

ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che θ sarà in posto pari od in posto dispari, ossia, posto $g'-z=g$, sarà

$$D(g'-\theta)^{(g'-z)} = \pm D\big(g(\theta=\zeta)\big)^g,$$

Quindi pei diversi valori di $\theta = y, x, v, \ldots\ldots a$, si avrà

$$\begin{aligned}
D(g'-y)^{g'-z} &= + D\big(g(y=z)\big)^g \\
D(g'-x)^{g'-z} &= - D\big(g(x=z)\big)^g \\
D(g'-v)^{g'-z} &= + D\big(g(v=z)\big)^g \\
&\vdots \\
D(g'-a)^{g'-z} &= - D\big(g(a=z)\big)^g.
\end{aligned}$$

Posti questi valori, si avrà

$$D(g')^{g'(z=\zeta)} = z^\zeta D(g)^g - y^\zeta D\big(g(y=z)\big)^g - x^\zeta D\big(g(x=z)\big)^g - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots - \theta^\zeta D\big(g(\theta=z)\big)^g \ldots\ldots - a^\zeta D\big(g(a=z)\big)^g.$$

Ora si suppongano avverate le (6), onde le D divengano $\bar{D}$, e si osservi che in forza della (8) in cui facciasi $\gamma=g$ si ha

$$\bar{D}\big(g(\theta=z)\big)^g = \bar{D}(g)^{g(\theta=z)}$$

quindi eseguita tale inversione per tutti i suddetti valori di $\theta = y, x, v, \ldots\ldots a$, si avrà

$$\bar{D}(g')^{g'(z=\zeta)} = z^\zeta\bar{D}(g)^g - y^\zeta\bar{D}(g)^{g(y=z)} - x^\zeta\bar{D}(g)^{g(x=z)} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots - \theta^\zeta\bar{D}(g)^{g(\theta=z)} \ldots\ldots - a^\zeta\bar{D}(g)^{g(a=z)}$$

Richiamata ora la (18), ove si cambj ω, ζ in θ, z sarà

$$\bar{D}(g)^{g(\theta=z)} = \Delta(g)\,\Delta\big(g(\theta=z)\big)$$

per tutti i valori di $\theta = y, x, v, \ldots\ldots a$, onde, avvertendo essere pel § 10 $\bar{D}(g)^g = \Delta(g)\,\Delta(g)$, sarà

$$\bar{D}(g')^{g'(z=\zeta)} = \Delta(g)\Big\{z^{\zeta}\Delta(g) - y^{\zeta}\Delta\big(g(y=z)\big) - x^{\zeta}\Delta\big(g(x=z)\big) - \cdots\cdots$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots - \theta^{\zeta}\Delta\big(g(\theta=z)\big) \cdots\cdots - a^{\zeta}\Delta\big(g(a=z)\big)\Big\}$$

Ma se le condizioni (6) hanno luogo non solo per la serie g', ma per la serie $g'+\zeta$, il polinomio che moltiplica $\Delta(g)$ è lo sviluppo della $\Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^d \ldots\ldots x^y z^{\zeta})$ a seconda dell' indice ζ. Dunque, posta per g la $g'-z$, sarà

$$\bar{D}(g')^{g'(z=\zeta)} = \Delta(g'-z)\,\Delta(g'+\zeta).$$

Se ora si chiami ω una qualunque lettera della serie g' e si cerchi a che si riduce la $\bar{D}(g')^{g'(\omega=\zeta)}$, seguendo il processo indicato pel caso in cui era $\omega = z$ si otterrà per risultato ciò che deriva dalla precedente formola, sostituendo ω alla z, e riducendo negativo il 2.° membro qualora ω occupi un posto pari.

15. Stabilita la serie pari g di $2n$ lettere

$a, b, c, \ldots. v, x, y, z$ e posto $g' = g - z = a, b, c, \ldots. x, y$

la semi-alternante $\Delta(g)$ sarà sviluppabile a seconda dell' ultimo indice z colla formola

$$\Delta(g) = y^z\Delta(g'-y) - x^z\Delta(g'-x) + v^z\Delta(g'-v) - \cdots\cdots + a^z\Delta(g'-a) \qquad (22)$$

Infatti si ha, come nell' antecedente paragrafo,

$$D(g)^g = z^z D(g-z)^{g-z} - y^z D(g-y)^{g-z} + x^z D(g-x)^{g-z} - v^z D(g-v)^{g-z} + \cdots\cdots$$

Ma nel § 54 della Memoria citata si è mostrato come un'alternante D^1 è eguale a $\pm D$ secondo che pari o dispari è il numero delle alternazioni necessarie a farsi nelle basi onde passare da un' alternante all' altra, si avrà quindi, come nel § 14

$$D(g-\theta)^{g-z} = \pm D\big((g-z)\,(\theta=z)\big)^{(g-z)}$$

ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che si esige un numero pari o dispari d'alternazioni per passare dalla 1.ª alternante alla 2.ª, ossia secondo che la θ occupa nella serie g un posto pari o dispari, contata da destra a sinistra, ovvero per essere g pari, secondo che θ occupa un posto dispari o pari, contata progressivamente da sinistra a destra. Così per esempio si avrà

$$D(g-v)^{g-2} = D(a^a b^b c^c \ldots u^u x^v y^x z^y) = -D(a^a b^b c^c \ldots u^u x^v z^x y^y)$$
$$= D(a^a b^b c^c \ldots u^u z^v x^x y^y) = D\Big((g-z)\,(v=z)\Big)^{g-2}$$

Lo stesso si dirà degli altri. Sarà dunque

$$D(g)^g = z^2 D(g-z)^{g-2} - y^2 D\Big((g-z)(y=z)\Big)^{g-2} - x^2 D\Big((g-z)\,(x=z)\Big)^{g-2}$$
$$-v^2 D\Big((g-z)(v=z)\Big)^{g-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e postovi $g-z=g'$ sarà

$$D(g)^g = z^2 D(g')^{g'} - y^2 D\Big(g'(y=z)\Big)^{g'} - x^2 D\Big(g'(x=z)\Big)^{g'}$$
$$- v^2 D\Big(g'(v=z)\Big)^{g'} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supposta avverata la condizione diagonale per cui la D si cambia in $\bar{D}$ e per essere $\bar{D}(g')^{g'} = 0$ sarà

$$\bar{D}(g)^g = -y^2 \bar{D}\Big(g'(y=z)\Big)^{g'} - x^2 \bar{D}\Big(g'(x=z)\Big)^{g'} - v^2 \bar{D}\Big(g'(v=z)\Big)^{g'} - \ldots\ldots$$

Ma per la (8) in cui sia γ dispari $=g'$ si avrà per qualunque valore di θ

$$\bar{D}\Big(g'(\theta=z)\Big)^{g'} = -\bar{D}(g')^{g'(\theta=z)}\,.$$

Sarà dunque

$$\bar{D}(g)^g = y^2 \bar{D}(g')^{g'(y=z)} + x^2 \bar{D}(g')^{g'(x=z)} + v^2 \bar{D}(g')^{g'(v=z)} + \ldots\ldots$$

Se nella formola (21), ove si supponga che la serie dispari

g' sia la $g+z$ quì adottata, ed inoltre che la lettera estranea alla serie g' sia la z, cioè pongasi $\zeta = z$ e si diano ad u i diversi valori della serie g', si avrà

$$\bar{D}(g')^{g'(y=z)} = +\Delta(g'-y)\,\Delta(g'+z) = +\Delta(g'-y)\,\Delta(g)$$
$$\bar{D}(g')^{g'(x=z)} = +\Delta(g'-x)\,\Delta(g'+z) = -\Delta(g'-x)\,\Delta g$$
$$\bar{D}(g')^{g'(v=z)} = +\Delta(g'-v)\,\Delta(g'+z) = +\Delta(g'-v)\,\Delta g$$
$$\vdots$$

e così dicasi degli altri. Posti questi valori ed osservando essere $\bar{D}(g)^g = \Delta(g)\,\Delta(g)$ e dividendo per $\Delta(g)$ si avrà la (22) la quale presenta lo sviluppo della semi-alternante sotto la stessa forma che si è data, nella citata Memoria, allo sviluppo dell' alternante ordinata a seconda dello stesso indice z.

Un simile processo servirebbe a fornire sotto la stessa forma lo sviluppo della $\Delta(g)$ a seconda della base y o più generalmente a seconda di un indice o di una base qualunque. Così essendo q un indice qualunque della $g = a^b c^d \ldots . p^q \ldots . v^x y^z$ si avrà

$$\Delta(g) = \pm\left\{ z^q\Delta(g'-z) - y^q\Delta(g'-y) + x^q\Delta(g'-x) - \ldots . \right\}$$

ove sarà $g' = g - q$ ed ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che la q occupa nella serie g un posto dispari o pari.

16. Nel sistema (1) di un numero qualunque m di equazioni si sostituiscano, per semplicità, alle m incognite

$$\zeta^a, \quad \zeta^b, \quad \zeta^c, \ldots . \zeta^w, \ldots . \zeta^z$$

rispettivamente le incognite

$$\frac{\zeta_1}{-\zeta_{m+1}}, \quad \frac{\zeta_2}{-\zeta_{m+1}}, \quad \frac{\zeta_3}{-\zeta_{m+1}}, \ldots . \frac{\zeta_i}{-\zeta_{m+1}}, \ldots . \frac{\zeta_m}{-\zeta_{m+1}}$$

Tale sistema diverrà

$$\left.\begin{array}{l} a^a\zeta_1 + a^b\zeta_2 \ldots\ldots + a^\omega\zeta_i \ldots\ldots + a^z\zeta_m = -a^\zeta\zeta_{m+1} \\ b^a\zeta_1 + b^b\zeta_2 \ldots\ldots + b^\omega\zeta_i \ldots\ldots + b^z\zeta_m = -b^\zeta\zeta_{m+1} \\ \vdots \\ z^a\zeta_1 + z^b\zeta_2 \ldots\ldots + z^\omega\zeta_i \ldots\ldots + z^z\zeta_m = -z^\zeta\zeta_{m+1} \end{array}\right\} \quad (23)$$

Se si suppone avverata la condizione diagonale e si ponga $\zeta^\zeta = 0$ ed inoltre $\omega^\zeta = -\zeta^\omega$ per tutti i valori di ω della serie $a, b, c, \ldots\ldots y, z$, il sistema (23) per m pari sussisterà senza che sia verificata fra le quantità indipendenti dalle incognite altra relazione estranea alle già supposte. Il sistema (23) per m dispari non potrà sussistere a meno che non sia avverata la relazione $\Delta(g'+\zeta) = 0$, essendo g' la serie dispari $a, b, c, \ldots\ldots y, z$. Ciò che si dice del sistema (23) vale anche pel sistema (1).
Infatti l'aggregato della 1.ª delle (23) moltiplicata per ζ_1 della 2.ª per ζ_2, ... della m^{esima} per ζ_m, dividendo per ζ_{m+1} ed osservando essere $\zeta^\zeta = 0$, fornisce l'equazione

$$-a^\zeta\zeta_1 - b^\zeta\zeta_2 - c^\zeta\zeta_3 - \ldots\ldots - z^\zeta\zeta_m - \zeta^\zeta\zeta_{m+1} = 0$$

ossia

$$\zeta^a\zeta_1 + \zeta^b\zeta_2 + \zeta^c\zeta_3 \ldots\ldots + \zeta^z\zeta_m + \zeta^\zeta\zeta_{m+1} = 0$$

la quale unita al sistema (23), in cui siano portati nei primi membri i secondi, fornirà un sistema di $m+1$ equazioni fra $m+1$ incognite, dalla cui eliminazione si avrà per la (5) $D(\gamma)^\gamma = 0$, ove γ esprime la serie delle $m+1$ lettere $a, b, c, \ldots\ldots x, y, z, \zeta$. Ora se sarà m pari sarà γ dispari, e quindi $\gamma = g'$, $D(g')^{g'} = 0$. Questa essendo pel § 4 identicamente avverata, il sistema (23) ed il sistema (1) non introdurranno alcuna relazione fra le quantità indipendenti dalle incognite. Ma se m sarà dispari, sarà γ pari, e chiamata g' la serie dispari $a, b, \ldots. y, z,$ sarà $\gamma = g' + \zeta$. Quindi la $D(\gamma)^\gamma = 0$, che per essere γ pari non è identicamente verificata, darà

$$D(\gamma)^\gamma = \big(\Delta(\gamma)\big)^2 = \big(\Delta(g' + \zeta)\big)^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad \Delta(g' + \zeta) = 0.$$

Questa introducendo una relazione fra le quantità indipendenti dalle incognite del sistema (23) e perciò del sistema (1), converrà che sia verificata acciò il sistema stesso possa sussistere.

17. Supposto dato il sistema (1), ed avverata la condizione diagonale, l'equazione (4) pel caso di $m = 2n$ diverrà

$$\zeta_i : \zeta_{2n} = \Delta\big(g(\omega = \zeta)\big) : \Delta\big(g(z = \zeta)\big) \tag{24}$$

e pel caso di $m = 2n + 1$ ed avverata la $\Delta(g' + \zeta) = 0$ diverrà

$$\zeta_i : \zeta_{2n+1} = \pm \Delta(g' - \omega) : \Delta(g' - z) \tag{25}$$

ove varrà il $+$ od il $-$ secondo che ω nella serie g' occupa un posto dispari o pari.

Infatti l'equazione (4), supposto g pari ed $m = 2n$, ed essendo avverate le (6) diventa

$$\zeta_i : \zeta_{2n} = \bar{D}(g)^{g(\omega = \zeta)} : \bar{D}(g)^{g(z = \zeta)}$$

ed in forza della (18) essendo

$$\bar{D}(g)^{g(\omega = \zeta)} = \Delta(g)\, \Delta\big(g(\omega = \zeta)\big)$$

$$\bar{D}(g)^{g(z = \zeta)} = \Delta(g)\, \Delta\big(g(z = \zeta)\big)$$

si avrà la (24).

Siccome in tal caso un'incognita qualunque ζ_i è data da $\zeta_i = \dfrac{\Delta\big(g(\omega = \zeta)\big)}{\Delta(g)}$, ne deriva che quando sono verificate le relazioni (6), il valore di un' incognita qualunque ζ_i si deriva dalla formazione della semi-alternante $\Delta(g)$, nell' egual modo che l' incognita stessa si deriva dall' alternante $D(g)^g$ nel caso generale in cui le condizioni (6) non siano avverate. Supposto m dispari $= 2n+1$ ed avverata, per la sussistenza del sistema (1), la relazione $\Delta(g'+\zeta) = 0$ la (4) diverrà:

$$\zeta_i : \zeta_{2n+1} = \bar{D}(g')^{g'(\omega=\zeta)} : \bar{D}(g')^{g'(z=\zeta)}$$

ed essendo per la formola (21)

$$\bar{D}(g')^{g'(\omega=\zeta)} = \pm\Delta(g'-\omega)\,\Delta(g'+\zeta)$$
$$\bar{D}(g')^{g'(z=\zeta)} = \Delta(g'-z)\,\Delta(g'+\zeta)$$

ove vale il $+$ od il $-$ secondo che ω occupa nella serie g' un posto dispari o pari, si avrà la (25).
Nei rapporti pertanto delle incognite scomparendo nel caso di m dispari la lettera ζ estranea alla serie g' i rapporti stessi, in forza delle (6), sono indipendenti dai 2.[i] membri del sistema proposto e risultano soltanto funzioni dei coefficienti.

III.

Riduzione dei sistemi ausiliarj.

1. Sia proposta da integrarsi l' equazione

$$S = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots\cdots + X_m dx_m = 0 \qquad (1)$$

in cui sia m qualunque. Stabilite le due serie di lettere ed indici

$$\left.\begin{array}{l} a\,,\ b\,,\ c\,,\ \ldots\ldots\ \lambda\,,\ \ldots\ldots\ \omega\,,\ \ldots\ldots\ \mu\,,\ \ldots\ldots\quad y\ ,\ z \\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\ldots\ \alpha\,,\ \ldots\ldots\ i\,,\ \ldots\ldots\ \beta\,,\ \ldots\ldots\ (m-1)\,,\ m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

si diranno omologhi i termini che nelle serie (2) si corrispondono verticalmente. Se nel sistema (13), (15), art. I si pone $2n = m$ ed il simbolo generico (α, β) in cui α, β indicavano indici si faccia eguale al simbolo λ^{μ} in cui λ, μ sono i rispettivi valori omologhi, ed indicando i l'indice di ω, si ponga $X_i = \omega^{\zeta}$, il sistema suddetto si riduce a

$$\left.\begin{array}{l} a^a dx_1 + a^b dx_2 + \cdots\cdots + a^{\omega} dx_i + \cdots\cdots + a^z dx_m = \theta a^{\zeta} \\ b^a dx_1 + b^b dx_2 + \cdots\cdots + b^{\omega} dx_i + \cdots\cdots + b^z dx_m = \theta b^{\zeta} \\ \vdots \\ z^a dx_1 + z^b dx_2 + \cdots\cdots + z^{\omega} dx_i + \cdots\cdots + z^z dx_m = \theta z^{\zeta} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

ove sarà sempre $\qquad \lambda^{\lambda} = 0\,, \quad \lambda^{\mu} = -\mu^{\lambda} \qquad (4)$

La 1.ª delle serie (2) verrà indicata al solito con g o con g' secondo che m sarà pari o dispari.

2. Il sistema ausiliario (3) da integrarsi se è $m = 2n$ si riduce al sistema di $m - 1 = 2n - 1$ equazioni rappresentate dalla proporzione continua

$$\left.\begin{array}{c} dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots\ldots\ldots dx_i : \ldots\ldots\ldots dx_{2n} = \\ \Delta\big(g(a=\zeta)\big) : \Delta\big(g(b=\zeta)\big) : \Delta\big(g(c=\zeta)\big) : \cdots\cdot \Delta\big(g(\omega=\zeta)\big) : \cdots\cdot \Delta\big(g(z=\zeta)\big) \end{array}\right\} \quad (5)$$

che equivale alle $2n - 1$ equazioni che nascono dalla generica

$$\frac{dx_i}{dx_{2n}} = \Delta\big(g(\omega=\zeta)\big) : \Delta\big(g(z=\zeta)\big) \qquad (6)$$

essendo i ed ω valori omologhi delle serie (2). Il valore di una qualunque $\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$ deriverà dalla semi-alternante $\Delta(g) = \Delta(a^b c^d \ldots\ldots v^x y^z)$ quando nello sviluppo ottenuto dalle continue sostituzioni eseguite nelle relazioni ricorrenti (13), art. II venga sostituita la ζ alla lettera ω, sia nelle basi che negl' indici, indi avuto riguardo alle

$$\omega^{\zeta} = X_i \,, \qquad \zeta^{\omega} = -X_i \qquad (7)$$

si sostituisca ad una qualunque λ^{μ} la corrispondente (α, β). Di fatto diviso il sistema (3) per θ e posto

$$\frac{dx_i}{\theta} = \zeta_i \qquad (8)$$

esso si riduce al sistema (1), art. II. Essendo quindi avverata la condizione diagonale, si otterrà la (6) dalla (25), art. II, in cui pongasi il valore (8), e da essa la proporzione continua (5).

3. Siccome i successivi sistemi ausiliarj di cui si fece uso nell' art. I per ottenere il sistema finale degl' integrali della proposta godono tutti dell' avverata condizione diagonale e si deduce il 2.°, 3.°, ... sistema ausiliario sostituendo nel sistema (3) alla $m = 2n$ successivamente $2n-2$, $2n-4$, ... ed alle quantità che contengono le X_1, X_2, ... le stesse quantità affette da apici, così la riduzione di questi sistemi ausiliarj secondarj alla forma di proporzione continua si dedurrà dalla stessa (5) o (6) col solo sostituire a $2n$ i relativi numeri, ed alle X_1, X_2, ... le stesse quantità affette da corrispondenti apici.

4. Si dirà pari o dispari l' espressione (1) secondo che conterrà un numero pari o dispari di variabili colle loro corrispondenti differenziali, e quindi si dirà pari o dispari secondo che tale sarà il numero m. Si diranno espressioni ridotte quelle derivanti dalla (1) che compajono affette da apici aventi la stessa significazione loro attribuita nell' art. I. Un sistema ausiliario si dirà pure pari o dispari secondo che conterrà un numero pari o dispari di equazioni. Un tal compendio di espressione fu adottato anche per le alternanti pari o dispari, ma non può ciò applicarsi alle semi-alternanti, le quali dietro la loro essenza e formazione sono necessariamente pari.

5. Supponiamo che sia proposta l' equazione (1) in cui sia m dispari. Se nella (1) art. I si pone m in luogo di $2n$, riguardando più generalmente m come pari o dispari, si potrà ripetere su di essa lo stesso ragionamento e processo di calcolo per trasformare il 1.° membro dell'equazione più generale

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots\cdots + X_m dx_m = 0.$$

Riguardandosi variabili le arbitrarie, e ponendo D in luogo di d, e chiamato ancora S_1 un tal 1.° membro, la formola (2) art. I, cambiatovi $2n$ in m, fornirà come prima l' espressione

$$S_1 = X_1 \delta x_1 + X_2 \delta x_2 + \cdots\cdots + X_{m-1} \delta x_{m-1}.$$

Quindi stabilito il 1.° sistema ausiliario

$$\left.\begin{aligned}
(1,1)dx_1 + (1,2)dx_2 \cdots\cdots + (1,m)dx_m &= \theta X_1 \\
(2,1)dx_1 + (2,2)dx_2 \cdots\cdots + (2,m)dx_m &= \theta X_2 \\
&\vdots \\
(m,1)dx_1 + (m,2)dx_2 \cdots\cdots + (m,m)dx_m &= \theta X_m
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

che risulta dal sistema (13), (15), cambiatovi $2n$ in m, si otterrà la trasformazione

$$S_1 = N_n \left\{ X'_1 dx'_1 + X'_2 dx'_2 + \cdots\cdots + X'_{m-2} dx'_{m-2} \right\} + H_n dx'_{m-1}$$

essendo

$$H_n = X_1 \left(\frac{dx_1}{dx'_{m-1}}\right) + X_2 \left(\frac{dx_2}{dx'_{m-1}}\right) + \cdots\cdots + X_{m-1} \left(\frac{dx_{m-1}}{dx'_{m-1}}\right)$$

$$N_n = H_n : X'_{m-1}$$

ove le x_1, x_2, ... x_{m-1} saranno espresse in funzione di x_m e dei valori iniziali x'_1, x'_2, x'_3, ... x'_{m-1} risultanti dal valor particolare $x_m = x'_m$ quali si hanno dalle $m-1$ equazioni integrali del sistema (9), eliminata la θ. Ma un tale processo, nell' assoluta indipendenza dei coefficienti della proposta, è soltanto possibile per m pari, come si vedrà nel seguente paragrafo.

6. Stabilite le due serie di lettere e di indici

$$\left.\begin{array}{l} a\,,\,b\,,\,c\,,\,\ldots\ldots\,\lambda\,,\,\ldots\ldots\,\omega\,,\,\ldots\ldots\,\mu\,,\,\ldots\ldots\,y\,,\,z \\ 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\ldots\,\alpha\,,\,\ldots\ldots\,i\,,\,\ldots\ldots\,\beta\,,\,\ldots\ldots\ldots\,m \end{array}\right\} \qquad (10)$$

e chiamata g o g' la 1.ª serie secondo che m sarà pari o dispari, il sistema (9) pel caso di m pari $= 2n$ non introduce alcuna relazione fra i coefficienti che possono mantenere la supposta indipendenza fra loro. Per m dispari $= 2n + 1$ il sistema (9) introduce una relazione alla quale debbono i coefficienti della proposta soddisfare, acciò il sistema stesso possa sussistere. Tale relazione che diremo *Equazione condizionale* è data dall' equazione

$$\Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^d \ldots\ldots x^y z^\zeta) = 0 \qquad (11)$$

ove, sviluppata la semi-alternante Δ, si sostituiscano agli elementi contenenti la ζ i loro valori desunti dalle espressioni generiche

$$\omega^\zeta = X_i \quad , \qquad \zeta^\omega = -X_i \qquad (12)$$

che hanno luogo per tutti gli omologhi valori di i ed ω delle serie (10). Infatti sostituiti ai simboli $(\alpha\,,\,\beta)$ del sistema (9) i corrispondenti simboli λ^μ delle serie (10) ove m sia pari o dispari e fatto in esso

$$X_i = \omega^\zeta \quad , \qquad dx_i = \zeta_i \quad , \qquad \theta = -\zeta_{m+1}$$

il sistema (9) si riduce al sistema (23) dell'art. II. Per ciò che si è ivi dimostrato il sistema (23) in cui è avverata la condizione diagonale, e perciò anche il sistema (9) in cui tal condizione si avvera, sussisterà per m pari senza che fra le quantità indipendenti dalle incognite

$$dx_1 \ , \quad dx_2 \ , \ \ldots . \ dx_i \ , \ \ldots . \ dx_m \ , \quad \theta$$

sia necessaria alcuna relazione, e per m dispari non potrà sussistere, a meno che non sia verificata la relazione $\Delta(g'+\zeta)=0$ ove g' è la serie dispari $a, b, \ldots . \omega, \ldots . y, z$. Essendo quindi

$$g'+\zeta = a, \ b, \ c, \ldots . y, \ z, \ \zeta \quad \text{sarà} \quad \Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^e \ldots . x^y z^\zeta) = 0$$

ove, sviluppata la Δ, si sostituiranno ai relativi elementi ω^ζ, ζ^ω i loro valori X_i, $-X_i$.

7. Siccome si è finora trattato il caso dell' assoluta generalità ed indipendenza dei coefficienti di una proposta equazione, e quindi non si è supposto avverarsi alcun' equazione condizionale, riserbandoci a trattare in seguito questo caso come compreso in quello in cui si ammette che i coefficienti debbano soddisfare a date equazioni, è perciò che nel caso generale dell' art. I non potendosi eseguire le trasformazioni nella ipotesi di un numero dispari di variabili, fu necessario, onde ottenere la trasformazione finale della S_1 data dalla (26), di eseguire le successive trasformazioni sulle sole espressioni fatte di un numero pari di variabili, escludendo da tale trasformazione i termini affetti da variabili ad indice dispari.
Ed infatti se la trasformazione in quistione fosse egualmente possibile per m dispari come per m pari, si potrebbe allora con un numero $m-2$ di sistemi ausiliarj trasformare la S_1 in un' espressione binomia

$$S_1 = K_1 \, dx_1^{(m)} + K_2 \, dx_2^{(m-1)} = 0$$

e soddisfare alla proposta (1) con un' equazione sola contenente una costante arbitraria quale risulterebbe dall' integrazione della precedente equazione riguardata fra due variabili. Sostituiti poscia nell'equazione integrale ottenuta, in luogo delle arbitrarie o valori iniziali che essa contiene, i loro valori in funzione delle variabili originarie desunti, con sostituzioni successive, dagli integrali dei sistemi ausiliarj stabiliti, una tale equazione unica sarebbe quindi l'integrale della proposta comunque, non esistendo alcuna relazione fra i coefficienti, non siano avverate le equazioni del criterio d'integrabilità, ciò che è assurdo.

8. Supposto nella (1) che sia m dispari $= 2n + 1$ e che i coefficienti X_1, X_2, ... X_{2n+1} della proposta rendano soddisfatta l'equazione condizionale

$$\Delta(g' + \zeta) = 0 \qquad (13)$$

ove g' esprime la serie dispari data dalla (2), il sistema ausiliario (9), che in tale ipotesi non è più incompatibile, si riduce alla proporzione continua

$$\left.\begin{array}{c} dx_1 \;:\; dx_2 \;:\; dx_3 \;:\cdots\cdots dx_i \;:\cdots\cdots dx_{2n+1} = \\ \Delta(g'-a) \;:\; -\Delta(g'-b) \;:\; +\Delta(g'-c) \;:\cdots\cdots \pm\Delta(g'-\omega) \;:\cdots\cdots +\Delta(g'-z) \end{array}\right\} \quad (14)$$

ossia si riduce al sistema di $m = 2n$ equazioni che derivano dalla generica

$$dx_i : dx_{2n+1} = \pm\Delta(g' - \omega) : \Delta(g' - z) \qquad (15)$$

attribuendo successivamente ad i ed ω gli omologhi valori delle serie (2).

Infatti il sistema (9) che è sussistente in forza dell'avverata equazione condizionale quale risulterebbe dall'eliminazione di tutte le incognite dx_1, dx_2, ... dx_{2n+1}, θ, postovi

$$(\alpha, \beta) = \lambda^{\mu}, \qquad \frac{dx_i}{\theta} = \zeta_i \qquad (16)$$

si riduce al sistema (1) dell'art. II. Quindi dal § 13, art. II, per essere avverata l' equazione condizionale ne deriva

$$\zeta_i : \zeta_{2n+1} = \pm\Delta(g'-\omega) : \Delta(g'-z)$$

da cui, posti i valori (16), si ottiene la (15) e da essa la proporzione continua (14).

L'equazione generica (15) non contenendo la ζ, nè potendo questa ricomparire negli sviluppi delle Δ e sostituzioni successive dei valori dei simboli λ^μ, ne deriva che pel caso di m dispari, essendo avverata la (13), il 1.° sistema ausiliario non contiene i coefficienti della proposta (1), ma soltanto i loro differenziali parziali.

9. Per mostrare come si proceda ad ottenere il valore finale di un termine generico delle (5) espresso pei coefficienti della proposta, supponiamo che la g fatta delle $2n$ lettere della serie (2) sia espressa dai suoi n elementi $a^b c^d \ldots . p^q \ldots . v^x y^z$ e vogliasi la $\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$ pel valore di $\omega = q$.

Se nella (17), art. II, che dà lo sviluppo di $\Delta(a^b c^d \ldots . p^q \ldots . y^z)$ a seconda dell' indice q, la cui base p sia omologa all' indice μ, si pone $q = \zeta$, si avrà

$$\Delta\big(g(q=\zeta)\big) = \left\{p^\zeta \Delta(a^b c^d \cdots . y^z) - a^\zeta \Delta(p^b c^d \cdots . y^z) - \cdots . - z^\zeta \Delta(a^b c^d \cdots . y^p)\right\}$$

ossia per essere $\omega^\zeta = X_i$ la $\Delta\big(g(q=\zeta)\big)$ diverrà

$$X_\mu \Delta(a^b c^d \cdots . y^z) - X_1 \Delta(p^b c^d \cdots . y^z) - X_2 \Delta(a^p c^d \cdots . y^z) \cdots . - X_{2n} \Delta(a^b c^d \cdots . y^p)$$

Sviluppate quindi le Δ colla continua sostituzione delle relazioni ricorrenti citate al § 9, art. II, sino a che scompajano tutti i simboli Δ, si dovrà a ciascun elemento λ^μ sostituirvi la (α, β) fatta degl' indici α, β omologhi alle λ, μ ed a ciascun simbolo (α, β) sostituirvi il relativo valore $\frac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \frac{dX_\beta}{dx_\alpha}$. Si otterrà così il valore di ciascun termine $\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$ in cui ω è un indice espresso pei coefficienti della proposta e loro differenziali parziali e perciò espresso in funzione delle variabili x_1, x_2, ... x_{2n}.

Se si vuole invece una $\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$ in cui ω corrisponda ad una base p, si svilupperà la $\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z)$ colla (16), art. II, a seconda della base p, e ritenuto μ il termine omologo di p, fatto $p=\zeta$, ed osservando essere $\zeta^\omega = -X_i$, si avrà $\Delta\big(g(p=\zeta)\big) =$

$$-\left\{X_\mu \Delta(a^b c^d \cdots y^z) - X_1 \Delta(q^b c^d \cdots y^z) - X_2 \Delta(a^q c^d \cdots y^z) - \cdots - X_{2n} \Delta(a^b c^d \cdots y^q)\right\}$$

ove gli sviluppi delle semi-alternanti Δ si faranno come si è sopra indicato.

Parimente per $\omega = z$ sviluppando per l'indice z, indi ponendo $z=\zeta$, ed avvertendo essere $\omega^\zeta = X_i$ onde $y^\zeta = X_{2n-1}$, si otterrà $\Delta\big(g(z=\zeta)\big) =$

$$X_{2n-1} \Delta(a^b c^d \cdots v^x) - X_1 \Delta(y^b c^d \cdots v^x) - \cdots - X_{2n-2} \Delta(a^b c^d \cdots v^y)$$

e si procederà a far scomparire le Δ ed a sostituirvi le espressioni per le variabili come si è accennato sopra.

Un simile processo vale quando vogliasi un termine qualunque $\Delta(g'-\omega)$ della (14) in cui g' indica la serie dispari $a, b, c, \dots \omega, \dots y, z,$ e quindi $g'-\omega$ la serie pari $a, b, c, \dots y, z$ mancante di ω. Posta sotto la forma $a^b c^d \dots y^z = g'-\omega$, si troverà, come si è detto sopra, il valore della $\Delta(g'-\omega) = \Delta(a^b c^d \dots y^z)$.

10. Dalle cose antecedenti risulta non essere punto necessario il sostituire la ζ alla ω immediatamente dopo il 1.° sviluppo della Δ, ma potersi eseguire, o l'intero sviluppo della $\Delta(a^b c^d \dots p^q \dots y^z)$ sino all'espressione finale indipendente dalle Δ per porvi le espressioni

$$\omega^\zeta = X_i \quad , \quad \zeta^\omega = -X_i$$

onde ottenere il valore di $\Delta\big(g(\omega=\zeta)\big)$, o fare una simile sostituzione dopo un determinato numero di sviluppi a piacere ottenuti colle relazioni ricorrenti sopra citate.

Giova avvertire che si potrà, quando torni più comodo, in luogo delle (16), (17) dell' art. II servirsi delle formole analoghe a quelle che si hanno per l'alternante $D(g)^g$, come si è mostrato al § 15, art. II.

11. Per mostrare con qualche esempio l'uso delle formole date indietro, suppongasi che nella proposta (1) sia $m = 4$. Essa si ridurrà alla

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0.$$

Le serie (2) diverranno

$$\left.\begin{matrix} a\,, & b\,, & c\,, & d \\ 1\,, & 2\,, & 3\,, & 4 \end{matrix}\right\} \qquad (17)$$

e si avrà $g = a^b c^d$. Stabilito il sistema ausiliario (3), art. I, pel caso di $2n = 4$, e posto

$$(\alpha,\ \beta) = \lambda^\mu\,, \qquad X_i = \omega^\zeta\,, \qquad -X_i = \zeta^\omega \qquad (18)$$

per ridurlo alla forma (3) § 1, esso diverrà

$$\left.\begin{matrix} a^a dx_1 + a^b dx_2 + a^c dx_3 + a^d dx_4 = \theta a^\zeta \\ b^a dx_1 + b^b dx_2 + b^c dx_3 + b^d dx_4 = \theta b^\zeta \\ c^a dx_1 + c^b dx_2 + c^c dx_3 + c^d dx_4 = \theta c^\zeta \\ d^a dx_1 + d^b dx_2 + d^c dx_3 + d^d dx_4 = \theta d^\zeta \end{matrix}\right\} \qquad (19)$$

Quindi la (6) pei valori omologhi delle serie (17) diverrà

$$\frac{dx_i}{dx_4} = \Delta\Big(g(\omega = \zeta)\Big) : \Delta\Big(g(d = \zeta)\Big) \qquad (20)$$

e la (5) diverrà

$$\left.\begin{aligned} dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 &= \Delta\Big(g(a=\zeta)\Big) : \Delta\Big(g(b=\zeta)\Big) : \Delta\Big(g(c=\zeta)\Big) : \Delta\Big(g(d=\zeta)\Big) \\ &= \Delta(\zeta^b c^d) : \Delta(a^\zeta c^d) : \Delta(a^b \zeta^d) : \Delta(a^b c^\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Quindi, essendosi trovato al § 9, art. II

$$\Delta(g) = \Delta(a^b c^d) = a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c$$

si avranno le Δ della proporzione continua (21), ponendo nella precedente in luogo di a, b, c, d, la ζ, e quindi rimessi i valori (18) si avrà

$$\left.\begin{aligned} \Delta(a^b c^d)(a=\zeta) &= \zeta^b c^d - \zeta^c b^d + \zeta^d b^c = -X_2(3,4) + X_3(2,4) - X_4(2,3) \\ \Delta(a^b c^d)(b=\zeta) &= a^\zeta c^d - a^c \zeta^d + a^d \zeta^c = +X_1(3,4) + X_4(1,3) - X_3(1,4) \\ \Delta(a^b c^d)(c=\zeta) &= a^b \zeta^d - a^\zeta b^d + a^d b^\zeta = -X_4(1,2) - X_1(2,4) + X_2(1,4) \\ \Delta(a^b c^d)(d=\zeta) &= a^b c^\zeta - a^c b^\zeta + b^c a^\zeta = +X_3(1,2) - X_2(1,3) + X_1(2,3) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ove ai diversi simboli (α, β) sostituiti i relativi valori $\dfrac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \dfrac{dX_\beta}{dx_\alpha}$, saranno espressi i termini della (21) in funzione dei coefficienti della proposta e loro differenziali parziali, e perciò in funzione delle variabili.

Per $m = 6$ la (1) si ridurrà alla

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 + X_5 dx_5 + X_6 dx_6 = 0.$$

Le serie (2) diverranno

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{matrix}\right\}$$

Quindi $g = a^b c^d e^f$. Stabilito il 1.° sistema ausiliario desunto dalla (3), art. I, pel caso di $2n = 6$ e poste ancora le (18) esso si ridurrà alla forma (3), § 1. Quindi la proporzione continua (5) si ridurrà alla

$$\left.\begin{array}{c} dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 : dx_5 : dx_6 = \\ \Delta(\zeta^b c^d e^f) : \Delta(a^\zeta c^d e^f) : \Delta(a^b \zeta^d e^f) : \Delta a^b c^\zeta e^f) : \Delta(a^b c^d \zeta^f) : \Delta(a^b c^d e^\zeta) \end{array}\right\} \quad (23)$$

I termini del 2.° membro si otterranno ponendo nello sviluppo di $\Delta(g) = \Delta(a^d c^b e^f)$ dato al § 9, art. II, in luogo delle a, b, c, d, e, f, la ζ, indi avuto riguardo alle (18) si otterranno espressi pei coefficienti della proposta e loro differenziali parziali, con che si sarà ottenuta la riduzione del sistema ausiliario sotto forma più idonea alla sua integrazione. Se si cerca per esempio il valore di $\Delta\big(g(c=\zeta)\big) = \Delta(a^b \zeta^d e^f)$ si dovrà nei termini dello sviluppo della $\Delta(a^b c^d e^f)$ dato nell'esempio del § 9, art. II, porre $c = \zeta$, e preso il 2.° dei dati sviluppi si otterrà

$$\begin{aligned} \Delta\big(g(c=\zeta)\big) = \; & a^b \zeta^d e^f - a^\zeta b^d e^f + a^d b^\zeta e^f \\ & - a^e \zeta^d b^f + a^e b^d \zeta^f - a^e b^\zeta d^f \\ & + a^f b^e \zeta^d - a^d b^e \zeta^f + a^\zeta b^e d^f \\ & - a^b \zeta^e d^f + a^d b^f \zeta^e - a^f b^d \zeta^e \\ & + a^b \zeta^f d^e - a^\zeta b^f d^e + a^f b^\zeta d^e \end{aligned}$$

ove riposti i valori (18) si avrà

$$\begin{aligned} \Delta\big(g(c=\zeta)\big) = & - X_4(1,2)(5,6) - X_1(2,4)(5,6) + X_2(1,4)(5,6) \\ & + X_4(1,5)(2,6) - X_6(1,5)(2,4) - X_2(1,5)(4,6) \\ & - X_4(1,6)(2,5) + X_6(1,4)(2,5) + X_1(2,5)(4,6) \\ & + X_5(1,2)(4,6) - X_5(1,4)(2,6) + X_5(1,6)(2,4) \\ & - X_6(1,2)(4,5) - X_1(2,6)(4,5) + X_2(1,6)(4,5) \end{aligned}$$

Se ai simboli (α, β) si sostituiscono le espressioni per differenziali parziali che esse rappresentano, si otterrà la $\Delta\big(g(c=\zeta)\big)$ in funzione delle variabili. Lo stesso si farà rispetto agli altri termini del 2.° membro della proporzione continua (23).
Per trattare anche il caso di m dispari, si supponga che la (1) si riduca a

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3 = 0 \tag{24}$$

Sarà in tal caso $m = 2n+1 = 3$, e la serie (2) diverrà

$$\left.\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ 1\,, & 2\,, & 3 \end{array}\right\}$$

ove la 1.ª di esse sarà rappresentata da g'. Stabilito il sistema ausiliario (9), relativo al caso di $m = 3$, e supposto per la sussistenza di tal sistema dispari che i coefficienti della proposta adempiano alla condizione $\Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^\zeta)$ che si riduce in forza dell'ultima delle (22) a

$$X_3(1,2) - X_2(1,3) + X_1(2,3) = 0 \tag{25}$$

la (14) diverrà

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = \Delta(g'-a) : -\Delta(g'-b) : \Delta(g'-c)$$
$$= \Delta(b^c) : -\Delta(a^c) : \Delta(a^b) : = b^c : -a^c : a^b$$

e finalmente per la 1.ª delle (18) si avrà

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = (2,3) : -(1,3) : (1,2)$$

ossia

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = \left(\frac{dX_2}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_2}\right) : -\left(\frac{dX_1}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_1}\right) : \left(\frac{dX_1}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_1}\right) \tag{26}$$

Supposto $m = 2n + 1 = 5$, la (1), § 1, diventa

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 + X_5 dx_5 = 0$$

e la serie (2) di cui la 1.ª rappresenta la g', sarà

$$\left.\begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{array}\right\}$$

Stabilito il sistema ausiliario (9), relativo al caso di $m = 5$, si supponga, per la sussistenza di tal sistema dispari, che i coefficienti della proposta verifichino l'equazione condizionale

$$\Delta(g' + \zeta) = \Delta(a^b c^d e^\zeta) = \Delta(a^b c^d e^f)\,(f = \zeta) = 0$$

ossia la

$$\left.\begin{array}{l} X_5 \{(1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3)\} \\ + X_4 \{(1,3)(2,5) - (1,2)(3,5) - (1,5)(2,3)\} \\ + X_3 \{(1,5)(2,4) - (1,4)(2,5) + (1,2)(4,5)\} \\ + X_2 \{(1,4)(3,5) - (1,3)(4,5) - (1,5)(3,4)\} \\ + X_1 \{(2,5)(3,4) - (2,4)(3,5) + (2,3)(4,5)\} \end{array}\right\} = 0$$

che è quella che si deduce dall' esempio del § 9, art. II, ordinata per l' indice f, ed avuto riguardo alle (18), la (14) diverrà

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 : dx_5 = \Delta(g'-a) : -\Delta(g'-b) : \Delta(g'-c) : -\Delta(g'-d) : \Delta(g'-e)$$

$$= \Delta(b^c d^e) : -\Delta(a^c d^e) : \Delta(a^b d^e) : -(a^b c^e) : (a^b c^d)$$

ove sviluppate le Δ e sostituiti ai simboli λ^μ i loro eguali (α, β) si otterrà la cercata riduzione, espressa per le derivate parziali dei coefficienti della proposta.

12. In vece di cercare le $2n-1$ equazioni integrali del sistema ausiliario (5) si potranno cercare i $2n-1$ valori di f fra loro indipendenti che adempiono all'equazione differenziale parziale di 1.° ordine e lineare data dalla

$$X_1 \frac{d\mathrm{f}}{dx_1} + X_2 \frac{d\mathrm{f}}{dx_2} + X_3 \frac{d\mathrm{f}}{dx_3} + \ldots\ldots + X_{2n} \frac{d\mathrm{f}}{dx_{2n}} = 0 \qquad (27)$$

ove si è posto

$$X_1 = \Delta\Big(g(a=\zeta)\Big) \;, \quad X_2 = \Delta\Big(g(b=\zeta)\Big), \;\ldots\ldots\; X_{2n} = \Delta\Big(g(z=\zeta)\Big).$$

Se chiaminsi infatti f_1, f_2, ... f_{2n-1} i suddetti valori fra loro indipendenti, le equazioni integrali del sistema saranno, come è noto, date dalle equazioni

$$\mathrm{f}_1 = \alpha_1 \;, \quad \mathrm{f}_2 = \alpha_2 \;, \;\ldots\ldots\; \mathrm{f}_{2n-1} = \alpha_{2n-1} \qquad (28)$$

ove le quantità nei secondi membri sono le costanti arbitrarie. Che se queste voglionsi espresse pei valori iniziali, si avrà

$$\alpha_1 = \mathrm{f}'_1 \;, \quad \alpha_2 = \mathrm{f}'_2 \;, \;\ldots\ldots\; \alpha_{2n-1} = \mathrm{f}'_{2n-1} .$$

ove i secondi membri saranno ciò che diventano le f contenute nei primi membri delle (28) quando si ponga un apice alle variabili ch' esse contengono. Lo stesso processo avrà luogo pel caso che la proposta equazione fosse fra un numero dispari $2n+1$ di variabili, e si avranno analoghe formole quando all' indice $2n$ si sostituisca $2n+1$ e suppongasi

$$X_1 = +\Delta(g'-a) \;, \quad X_2 = -\Delta(g'-b) \;, \quad X_3 = +\Delta(g'-c) \;, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\; X_i = \pm\Delta(g'-\omega) \;, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; X_{2n+1} = +\Delta(g'-z).$$

Lo stesso vale per tutti i sistemi ausiliarj secondarj risultanti dalle successive trasformazioni.

IV.

Equazioni condizionali soddisfatte.

1. Si tratti ora la seconda questione accennata all' art. I, quella cioè in cui i coefficienti di una proposta equazione

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots\dots + X_m dx_m = 0 \qquad (1)$$

fra un numero qualunque m di variabili non siano più fra loro indipendenti come si è supposto nel citato articolo, ma adempiano a particolari relazioni. Nei diversi casi di equazioni soddisfatte dai coefficienti si farà frequente uso di un principio per sè stesso evidente che basterà qui accennare senza che ogni volta sia necessario di porlo in chiaro. Indicando con F_1, F_2, ... F_ν un numero qualunque ν di funzioni delle m variabili x_1, x_2, ... x_m se si ha un' equazione

$$\Pi(F_1, F_2, F_3, \dots\dots\dots F_\nu) = 0 \qquad (2)$$

che sia avverata identicamente rispetto alle variabili stesse, indicando Π una funzione qualunque, sarà pure identicamente avverata l' equazione

$$\Pi(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots\dots\dots \overline{F}_\nu) = 0 \qquad (3)$$

ove le diverse $\overline{F}$ indicano che nelle F, senza cambiar la loro composizione, si è sostituito alle x_1, x_2, ... x_m altre variabili, sia espresse con lettere diverse, sia contradistinte con apici. Viceversa avverata questa second' equazione sarà pure avverata identicamente la prima.

Se alle F_1, F_2, ... F_ν si sostituiscono le X_1, X_2, X_3, ... e quelle che nascono dai simboli (α, β) che contengono le loro differenziali parziali, le diverse $\overline{F}$ saranno quelle che entrano nelle espressioni ridotte e nei relativi sistemi ausiliarj di cui si fece uso nell' art. I. Se quindi esiste un' equazione identicamente avverata fra i valori iniziali delle variabili, l'equazione stessa sarà adempita rispetto alle variabili originarie. Ciò deriva dall'aver adottato quel sistema di trasformazione in cui ad ogni integrazione dei sistemi ausiliarj s'introducono i valori iniziali delle variabili controdistinti con successivi apici in luogo delle solite costanti arbitrarie. Perciò la composizione delle diverse $X_i^{(m)}$ e loro differenziali parziali che entrano in tali equazioni non differisce da quella delle relative X_i che entrano nella proposta se non in quanto le variabili che vi compajono essendo affette da diversi apici rappresentano altre variabili.

2. Si tratti in questo articolo del caso in cui i coefficienti adempiano ad equazioni condizionali, e primieramente supposto nella (1) m dispari $= 2n + 1$, i coefficienti X_1, X_2, ... X_{2n+1} avverino l'equazione

$$\Delta(g' + \zeta) = 0 \qquad (4)$$

quale fu trovata al § 6, art. III. In tal caso, stante l'integrale del sistema ausiliario (14), art. III, la proposta verrà trasformata in altr' equazione da integrarsi mancante dell' ultimo termine, ossia sarà ridotta all' integrazione di un' equazione fra un numero pari $= 2n$ di variabili. Supposto quindi che nessuna altra relazione esista fra i coefficienti, sarà questa integrabile con un sistema di n equazioni, come si è veduto nel caso generale trattato all' art. I. Un tale sistema espresso per le variabili date sarà quello che soddisfa alla proposta contenente $2n + 1$ variabili. Ma se nella proposta stessa fra $2n + 1$ variabili i coefficienti supposti fra loro indipendenti non adempivano la condizione (4), si sarebbe ottenuto per integrale un sistema di $n + 1$ equazioni, laddove avverata l'equazione condizionale (4) la proposta è integrabile con un sistema di sole n equazioni.

Così per esempio sia proposta l'equazione fra tre variabili

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0.$$

Se non si ammette alcuna relazione fra i coefficienti, e perciò non si suppone avverata l'equazione condizionale data nel 3.° esempio del § 11, art. III, si dovrà seguire il metodo generale dell'art. I. In tal caso, fatta astrazione dall'ultimo termine in posto dispari, si trasformerà l'espressione pari $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$ in altra mancante dell'ultimo termine collo stabilire il sistema ausiliario

$$(1,1)dx_1 + (1,2)dx_2 = \theta X_1 \,, \qquad (2,1)dx_1 + (2,2)dx_2 = \theta X_2$$

il quale, eliminata la θ, si riduce all'integrazione dell'equazione $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0$, ove la x_3 vi si considererà come una costante ed ove integrando s'introdurranno i valori iniziali. Dietro ciò la proposta si trasformerà nella

$$N_1 X'_1 dx'_1 + X_3 dx_3 = 0 \,,$$

ossia, avvertendo essere per la (17), (18), art. I,

$$N_1 = \frac{H_1}{X'_1} = \frac{X_1}{X'_1}\left(\frac{dx_1}{dx'_1}\right)$$

si ridurrà alla

$$X_1\left(\frac{dx_1}{dx'_2}\right) dx'_1 + X_3 dx_3 = 0.$$

Posto $x_3 = f_1$, $x'_1 = f_2$, essendo f_2 quella funzione che risulterà cavando dall'integrale ottenuto il valore di x'_1 si avrà

$$X_1\left(\frac{dx_1}{dx'_1}\right) df_2 + X_3 df_1 = 0 \,,$$

alla quale si soddisferà, o colle due equazioni

$$df_2 = 0 \,, \quad df_1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad f_1 = \alpha_1 \,, \quad f_2 = \alpha_2$$

essendo α_1, α_2 costanti, ovvero, supposto $f_2 = \phi(f_1)$, colle due equazioni

$$f_2 - \phi(x_3) = 0 \;, \qquad X_3 + X_1\left(\frac{d\phi}{dx_3}\right)\left(\frac{dx_1}{dx'_1}\right) = 0 \;,$$

le quali, per essere $dx'_1 = \left(\frac{df_2}{dx_1}\right)dx_1$, si riducono alle

$$f_2 - \phi(x_3) = 0 \;, \qquad \left(\frac{df_2}{dx_1}\right)X_3 + \left(\frac{d\phi}{dx_3}\right)X_1 = 0$$

Si rifletterà che il valore x'_2 da cui dipende il valore iniziale x'_1 costituisce una costante eccedente affatto in nostro arbitrio che può farsi zero.

Se invece i coefficienti della proposta avverano l'equazione condizionale ad essa relativa, sussisterà il sistema ausiliario rispetto al numero dispari di variabili quale è dato al § 11, art. III. Si avranno da esso due equazioni integrali fra le variabili x_1, x_2, x_3 ed i loro valori iniziali, e la proposta sarà ridotta alla

$$X'_1 dx'_1 + X'_2 dx'_2 = 0$$

fra le due nuove variabili x'_1, x'_2. Ma questa è sempre integrabile con un'equazione contenente una costante arbitraria. Se quindi pongansi nel suo integrale in luogo di x'_1, x'_2 i valori che risultano dai due integrali del sistema ausiliario, l'equazione si ridurrà fra le tre variabili x_1, x_2, x_3 e conterrà la costante anzidetta, e la x'_3 che potrà farsi zero. Tale equazione unica sarà l'integrale della proposta. Ma se la proposta è integrabile con una sola equazione, come quì si è mostrato, dovrebb'essere in essa verificato il criterio d'integrabilità. Ora è facile provare che nel caso trattato di tre variabili l'equazione condizionale coincide coll'equazione unica data dal criterio stesso. Infatti l'equazione condizionale è data dalla (25), art. III, la quale, stante le relazioni simboliche

$$(\alpha\,,\,\beta) = \frac{dX_\alpha}{dx_\beta} - \frac{dX_\beta}{dx_\alpha}\,,$$

diventa

$$X_1\left(\frac{dX_3}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_3}\right) + X_2\left(\frac{dX_1}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_1}\right) + X_3\left(\frac{dX_2}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_2}\right) = 0$$

che è la nota equazione del criterio d' integrabilità della proposta equazione fra tre variabili.

3. Suppongasi nella (1) $m = 2n$. Il sistema ausiliario atto a far scomparire l' ultimo termine nell' ipotesi di un' assoluta indipendenza de' coefficienti è quello che risulta dall' equazione generica

$$\Delta\Big(g(z \pm \zeta)\Big)dx_i = \Delta\Big(g(\omega \pm \zeta)\Big)dx_{2n} \tag{5}$$

che è la (6), art. III, ove la g rappresenta la serie pari (2), art. III. In forza degl' integrali di tal sistema la proposta

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots\cdots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0 \tag{6}$$

sarà ridotta per la (19), art. I, alla

$$X'_1\,dx'_1 + X'_2\,dx'_2 + \cdots\cdots + X'_{2n-1}\,dx'_{2n-1} = 0 \tag{7}$$

che è fra un numero dispari $= 2n - 1$ di variabili. Suppongasi ora avverata l' equazione condizionale relativa alla (7). Nel 1.° sistema ausiliario (5) risulterà $dx_{2n} = 0$, onde un tal sistema destinato a trasformare la (6) nella (7) col far svanire l' ultimo termine non ottiene lo scopo se non coll' ammettere $dx_{2n} = 0$. Infatti nella serie (2), art. III, facciasi $m = 2n - 1$, si sopprima l' ultima lettera z, pongasi $g' = g - z$ e s' indichino con un apice le lettere della g', volendo che esse si riferiscano alle quantità affette da un apice che entrano nella (7). L' equazione condizionale relativa alla (7) sarà espressa da

$$\Delta'(g'+\zeta) = 0 \qquad (8)$$

ove l'apice apposto alla Δ indica che a sviluppo eseguito debbono le lettere di cui constano gli elementi λ^{μ} essere affette da un apice. Sviluppata colla (15), art. II la (8) ridotta alla forma solita $\Delta'(a^{k}c^{d}\ldots\ldots v^{x}y^{\zeta}) = 0$ e postovi per le diverse $(\omega^{\zeta})'$ le relative X_i' per tutti i valori delle omologhe i, si avrà

$$\left.\begin{aligned}\Delta'(g'+\zeta) = X'_{2n-1}\Delta'(a^{b}c^{d}\ldots\ldots v^{x}) - X'_{1}\Delta'(y^{b}c^{d}\ldots\ldots v^{x}) + X'_{2}\Delta'(a^{y}c^{d}\ldots\ldots v^{x}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - X'_{2n-2}\Delta'(a^{b}c^{d}\ldots\ldots v^{y})\end{aligned}\right\} = 0$$

Sussistendo questa identicamente, sarà avverata pure quella che nasce pel principio generale del § 1, sopprimendo gli apici, ossia cambiando i valori iniziali x'_1, x'_2, x'_3, ... x'_{2n} delle variabili nei loro valori primitivi. Si avrà quindi dalla (8), toltovi l'apice, $\Delta(g'+\zeta) = 0$ che si riduce a $\Delta\big(g(z=\zeta)\big) = 0$. Dunque nel sistema ausiliario (5) risulterà $dx_{2n} = 0$.

4. Il sistema ausiliario (5) espresso dalla (3), art. III, ove sia $m = 2n$, nell'ipotesi che l'equazione condizionale rispetto alla (7) sia avverata, si riduce ad un sistema atto a far scomparire nella proposta (6) il penultimo termine in posto dispari lasciando sussistere l'ultimo in posto pari.

Infatti risultando in tale ipotesi $dx_{2n} = 0$, scompariranno nei primi membri del citato sistema tutti i termini affetti da dx_{2n}. Ommessa quindi l'ultima equazione, si otterrà il sistema dispari

$$\left.\begin{aligned}a^{a}dx_1 + a^{b}dx_2 + \cdots\cdots + a^{y}dx_{2n-1} &= \theta a^{\zeta} \\ b^{a}dx_1 + b^{b}dx_2 + \cdots\cdots + b^{y}dx_{2n-1} &= \theta b^{\zeta} \\ &\vdots \\ y^{a}dx_1 + y^{b}dx_2 + \cdots\cdots + y^{y}dx_{2n-1} &= \theta y^{\zeta}\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

che sussisterà senza introdur nuove relazioni, per essere avverata l'equazione condizionale

$$\Delta(g'+\zeta) = 0 \quad \text{in cui è} \quad g' = g - z.$$

Il sistema (9) in cui è $m = 2n - 1$ si ridurrà colla (14), art. III, ove pongasi $2n - 1$ in luogo di $2n + 1$, alla proporzione continua

$$dx_1 : dx_2 : \ldots\ldots dx_{2n-1} = \Delta(g'-a) : -\Delta(g'-b) : \ldots\ldots : \Delta(g'-y) \quad (10)$$

che risulta dalla generica

$$dx_i : dx_{2n-1} = \pm\Delta(g'-\omega) : \Delta(g'-y)$$

per tutti i valori omologhi di i, ω delle serie

$$\begin{array}{l} (a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ \ldots\ldots\ \omega\ ,\ \ldots\ldots\ x\ ,\ y) = g' \\ \ \ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ldots\ i\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ 2n-1\ , \end{array}$$

Le equazioni nate dalla precedente proporzione sono quelle che integrate fanno scomparire il penultimo termine in posto dispari.

5. Se pertanto nella proposta equazione (6) è avverata la $\Delta(g'+\zeta) = 0$ conducente a $dx_{2n} = 0$ è necessario (per conservare alla soluzione che si cerca quella generalità che permetta di presentare il sistema finale affetto da una funzione arbitraria, come si è fatto pel caso in cui la proposta era fra un numero dispari di variabili), lasciare indeterminato l'ultimo termine della (2) ed eseguire la trasformazione della espressione dispari

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ \ldots\ldots\ + X_{2n-1} dx_{2n-1}$$

col mezzo del sistema ausiliario (10), affine di farvi scomparire l'ultimo termine, e quindi, supposto che nessuna altra condizione abbia luogo, progredire alle ulteriori trasformazioni, seguendo il metodo sviluppato nell'art. I.

6. La precedente conclusione non si limita al caso ivi contemplato in cui l'avverata equazione condizionale, funzione di tutti i coefficienti della proposta (6) meno l'ultimo, e delle loro differenziali parziali è quella che risulta dal 2.° sistema ausiliario, ma si estende in generale al caso in cui l'equazione condizionale avverata sia quella che risulterebbe dal 4.°, 6.°..... sistema ausiliario dispari. Tale equazione condizionale non differirà dalla già trattata, se non pel minor numero di coefficienti e loro differenziali parziali ch'essa conterrà, e pel numero più grande di apici di cui le variabili saranno affette e potrà ripetersi in ciascuna di esse la conclusione adottata. Ogni qual volta un'equazione condizionale desunta dal 4.°, 6.°....... sistema ausiliario dispari è avverata, sussiste il relativo sistema ausiliario che rendesi atto, col far scomparire l'ultimo termine, alla trasformazione della relativa espressione dispari in altra espressione pari, ma il sistema ausiliario precedente, cioè il 3.°, 5.°...... non è esso più atto a far scomparire l'ultimo termine in posto pari della relativa espressione, ma si cambia nel sistema 4.°, 6.°...... quando si ommetta in esso l'ultima colonna verticale dei primi membri, e l'ultima equazione. Da ciò risulta:

1.° Che un'equazione fra un numero pari $2n$ di variabili sarà soddisfatta da un sistema di n equazioni, comunque abbiano o non abbiano luogo equazioni condizionali, purchè ogni qual volta s'imbatta in equazioni condizionali soddisfatte, si abbia ricorso al sistema ausiliario precedente modificato come si è sopra accennato, il quale farà invece scomparire il penultimo termine in posto dispari della relativa espressione, lasciando indeterminato il termine estremo;

2.° Che un'equazione fra un numero dispari $2n+1$ di variabili sarà soddisfatta da un sistema di n ovvero di $n+1$ equazioni secondo che sarà, o non sarà avverata l'equazione condizionale relativa al 1.° sistema ausiliario, comunque abbiano e non abbiamo luogo equazioni condizionali relative a successivi sistemi ausiliarj, purchè quando alcune di esse siano avverate, si proceda come si è sopra accennato.

7. Se per maggiore semplicità si pone $\Delta\big(g(\omega=\zeta_i)\big)=\mathfrak{X}_i$ per tutti i valori omologhi di ω, i l'equazione generica (6), art. III, diventa

$$\mathfrak{X}_{2n}dx_i=\mathfrak{X}_i dx_{2n}$$

e la proporzione continua (5), art. III, diventa

$$dx_1 : dx_2 : \ldots\ldots : dx_{2n}=\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \ldots\ldots : \mathfrak{X}_{2n}.$$

Ciò posto, l'equazione condizionale data al § 3, cioè la $\Delta(g'+\zeta)=\Delta\big(g(z=\zeta)\big)=0$ si riduce alla $\mathfrak{X}_{2n}=0$. Ora potrebbe accadere che non essendo identicamente zero la $\mathfrak{X}_i$ per $i=2n$ lo fosse invece per un altro valore di i, per esempio per $i=\alpha$. In tal caso il 1.° sistema ausiliario relativo alla proposta equazione (6) sarebbe pure incompleto ed inetto all'indicata trasformazione, come lo era nel caso in cui si aveva $\mathfrak{X}_{2n}=0$. Risulterebbe in tale ipotesi $dx_\alpha=0$ che farebbe scomparire tutti i termini della relativa colonna verticale affetti da dx_α, ed il sistema stesso subirebbe una modificazione analoga a quella indicata al § 4. Ma è da riflettersi che l'equazione $\mathfrak{X}_\alpha=0$ è essa stessa un'equazione condizionale che può con opportuno cambiamento d'indici trasformarsi nella $\mathfrak{X}_{2n}=0$. Infatti in una proposta equazione differenziale essendo in nostro arbitrio di contrassegnare le variabili con alcuni piuttosto che con altri indici, se nella proposta equazione si contraddistingue coll'indice $2n$ quella variabile che erasi contrassegnata coll'indice α, e viceversa, nella proposta (6) verranno ad essere alternati fra loro i due termini $X_\alpha dx_\alpha$, $X_{2n}dx_{2n}$ e la trovata equazione $\mathfrak{X}_\alpha=0$ si cambierà nella $\mathfrak{X}_{2n}=0$. Siccome una qualunque $\mathfrak{X}_i$ manca nella sua composizione del coefficiente X_i, così le $\mathfrak{X}_\alpha$, $\mathfrak{X}_{2n}$ mancheranno rispettivamente dei coefficienti X_α, X_{2n}.

Risulta quindi che il trovarsi verificata una $X_\alpha = 0$ è indizio che nel contrassegnare le variabili non si è avuto avvertenza a fare in modo che l' equazione condizionale generica $X_i = 0$ comparisse coll' indice $i = 2n$. Per procedere regolarmente coll' adottato sistema si sarebbe dunque dovuto far precedere un tale ordinamento della proposta equazione che compaja nell' ultimo termine quello che era affetto dall' indice α, ciò che si otterrà alternando nella proposta (6) gl' indici α, $2n$. Ma un' equazione condizionale di tal specie $X_\alpha = 0$ può non verificarsi nel 2.° sistema ausiliario, ma sibbene nei successivi sistemi 4.°, 6.°...... e richiedersi perciò, anche riguardo ad essi, un relativo coordinamento di coefficienti e relative alternazioni d' indici.

Onde procedere ordinatamente sarà perciò opportuno indicare una regola colla quale predisporre la proposta equazione da integrarsi in modo che le equazioni condizionali relative ai successivi sistemi si presentino sempre espresse da una $X_i = 0$ in cui la i sia sempre il massimo indice che il relativo sistema ausiliario pari contiene.

Questa regola riposa sul principio generale del § 1 che qualunque equazione si avveri identicamente fra le diverse funzioni $X_i^{(m)}$ e loro differenziali parziali, ove la m indica un numero di apici applicati ai coefficienti della proposta, la stessa è pure identicamente avverata sopprimendo gli apici che si riferiscono a valori iniziali delle variabili, cioè che un' equazione simile ha luogo fra i coefficienti X_i della proposta e loro differenziali parziali.

Ritenuto inoltre che in qualsivoglia modo si proceda alla soluzione generale di una proposta equazione fra un numero $2n$ ovvero $2n+1$ di variabili si deve sempre dietro il § 6 ottenere un sistema di n equazioni nel 1.° caso, e di n ovvero di $n+1$, nell' altro caso, secondo che sia o no verificata l' equazione condizionale del 1.° sistema ausiliario, così basterà indicare la regola onde ordinare una proposta equazione fra un numero pari $2n$ di variabili.

8. Essendo proposta fra $2n$ variabili

$$y\,,\ p\,,\ r\,,\ \ldots\ldots\ x\,,\ \ldots\ldots\ s\,,\ \ldots\ldots\ t\,,\ v\,,\ z \qquad (11)$$

un' equazione della forma

$$Ydy + Pdp + Rdr + \cdots\, Xdx \cdots + Sds \cdots + Tdt \cdots + Zdz = 0 \qquad (12)$$

si stabilisca una posizione affatto arbitraria

$$\left.\begin{array}{l} r = x_1\,,\quad p = x_2\,,\ \ldots\ldots\ x = x_\alpha\,,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ s = x_\beta\,,\ \ldots\ldots\ z = x_{2n-2}\,,\ \ldots\ldots\ y = x_{2n} \end{array}\right\} = 0 \qquad (13)$$

Posti questi valori nella (12), ordinati i termini a seconda degli indici ed indicati in generale con X_i i coefficienti delle diverse differenziali dx_i la (12) assumerà la forma

$$\left.\begin{array}{l} X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots\ldots + X_\beta dx_\beta + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + X_{2n-2}dx_{2n-2} + \ldots\ldots + X_{2n}dx_{2n} \end{array}\right\} = 0 \qquad (14)$$

Essendo questa della forma (1) § 2, si stabilirà il 1° sistema ausiliario (13), (15), art. I che posto sotto la forma (5) art. III si potrà con esso determinare l' espressione generica χ_i. Suppongasi che per $i = \alpha$ risulti identicamente avverata la $\chi_\alpha = 0$. Si alternino nelle (13), (14) gl' indici α, $2n$ tanto nelle variabili x_i quanto nei coefficienti X_i. La posizione arbitraria (13) sarà scambiata nella

$$\left.\begin{array}{l} r = x_1\,,\quad p = x_2\,,\ \ldots\ldots\ x = x_{2n}\,,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ s = x_\beta\,,\ \ldots\ldots\ z = x_{2n-2}\,,\ \ldots\ldots\ y = x_\alpha \end{array}\right\} = 0 \qquad (15)$$

Ordinati a seconda de' nuovi indici i termini della (14) ed ommessi gli ultimi due, si cercherà il 2.° sistema ausiliario relativo al polinomio

$$X_1dx_1 + X_2dx_2 \ldots\ldots X_\beta dx_\beta \ldots\ldots + X_{2n-2}dx_{2n-2} \qquad (16)$$

Questo sistema, posto sotto la solita forma (5) art. III, sarà atto a fornire il valore della corrispondente χ_i. Supposto che per $i=\beta$ risulti $\chi_\beta=0$, si alterneranno nella (15) gl' indici β, $2n-2$ e la (13) verrà scambiata nella nuova posizione

$$r=x_1\ ,\ p=x_2\ ,\ldots.x=x_{2n}\ ,\ldots.s=x_{2n-2}\ ,\ldots.z=x_\beta\ ,\ldots.y=x_\alpha \qquad (17)$$

Eseguita la stessa alternazione nell' espressione (16), ordinati i termini ed ommessi i due ultimi, si cercherà il 3.° sistema ausiliario relativo al polinomio

$$X_1dx_1+X_2dx_2\ldots\ldots+X_{2n-4}dx_{2n-4}$$

Tròvata la χ_i ad esso relativa, e supposto che per $i=\delta$ risulti $\chi_\delta=0$, si dovrà nella (17) procedere all' ulteriore alternazione degl' indici δ, $2n-4$, la quale fornirà una nuova posizione da sostituirsi alla (13). Così progredendo si giungerà ad ottenere quella posizione da sostituirsi alla (13) per mezzo della quale la proposta (12) verrà rappresentata da una espressione della forma (14), i cui termini saranno così coordinati che nelle successive operazioni che conducono al sistema finale delle n equazioni che la soddisfano, le equazioni condizionali $\chi_i=0$ che mano mano s' incontrano, ove le variabili saranno affette da relativi apici, saranno tali che l' indice $=i$ eguaglierà sempre il massimo indice pari dell' espressione da cui è derivata la χ_i. Giova appena avvertire che quando una χ_i per nessun valore dell' indice $=i$ è annullata, lasciando immutate le posizioni delle variabili, si passerà al successivo sistema ausiliario.

Il processo che la surriferita regola contiene può anche seguirsi nell' atto stesso che si stabiliscono i diversi sistemi da integrarsi e che conducono al sistema finale senza far precedere il coordinamento della (14), purchè ogni volta che s' incontra una χ_i, contenente in tal caso variabili affette da apici, che si annulli per un particolare valore di $i=\omega$, si alternino allora gl' indici relativi ω e $2n-2\mu$ dei valori iniziali delle variabili alternando in pari tempo gl' indici nell' originaria posizione (13).

Quando si ammettono fra i coefficienti quelle relazioni che adempiono ad equazioni condizionali, si ritiene sempre che queste siano le uniche condizioni a cui i coefficienti stessi sono soggetti. Si ritenga inoltre che dalle condizioni atte a verificare tali equazioni si escluderanno sempre quelle che richiedessero l' annullamento di qualche coefficiente X_i, giacchè il caso in cui la proposta, e perciò la (14), mancasse di alcuni termini, verrà trattato separatamente siccome quello in cui fra le condizioni a cui i coefficienti debbono soddisfare, vi sia quella di essere alcuni eguali a zero.

V.

Criterj d' integrabilità.

1. Suppongasi che le relazioni fra i coefficienti di un' equazione proposta siano tali che le equazioni del criterio d' integrabilità siano per essi verificate, o rispetto a tutti i coefficienti stessi, o rispetto ad alcuni soltanto. Prima di determinare il numero delle equazioni del sistema finale che soddisfa alla proposta equazione richiamerò in quest' articolo alcune proposizioni rispetto ai criterj d' integrabilità per un numero qualunque m di variabili.

Acciò il primo membro dell' equazione

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 \ldots\ldots + X_m dx_m = 0 \qquad (1)$$

possa con un opportuno moltiplicatore $= \mu$ divenire una differenziale esatta e la proposta avere per integrale l' equazione unica

$$f(x_1\,,\ x_2 \ldots\ldots x_m) = cost. \qquad (2)$$

dev' essere identicamente soddisfatto quel sistema di

$\frac{(m-1)(m-2)}{2} = n$ equazioni che risultano dall' espressione generica

$$(\alpha\,,\,\beta)X_\omega - (\alpha\,,\,\omega)X_\beta + (\beta\,,\,\omega)X_\alpha = 0 \qquad (3)$$

quando, ammettendo che ω conservi costantemente il valore di uno degli m indici, le $\alpha\,,\,\beta$ assumano successivamente i valori che risultano dalle combinazioni a due a due di tutti gli altri $m-1$ indici.

Infatti se della proposta (1) esiste un integrale della forma (2), la differenziale totale della (2) avrà per coefficienti delle $dx_1\,,\,dx_2\,,\,\ldots\ldots\,dx_m$ tali funzioni che non potranno differire dai coefficienti $X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\ldots\,X_m$ se non per un fattore comune che supposto $=\mu$ sarà atto a rendere il 1.° membro della (1) una differenziale esatta. Dovranno dunque essere avverate le $\frac{m(m-1)}{2} = \nu$ equazioni che risultano dalla generica

$$\frac{d\cdot\mu X_\alpha}{dx_\beta} - \frac{d\cdot\mu X_\beta}{dx_\alpha} = 0 \qquad (4)$$

coll' attribuire agl' indici $\alpha\,,\,\beta$ tutti i valori delle ν combinazioni a due a due degli m indici della proposta (1). Ossia, ritenuta al simbolo $(\alpha\,,\,\beta)$ la solita significazione, posto

$$\frac{d\mu}{dx_1} = \mu_1\,, \quad \frac{d\mu}{dx_2} = \mu_2\,, \ldots\ldots \frac{d\mu}{dx_m} = \mu_m$$

ed eseguite le differenziazioni indicate dalla (4), dovranno essere avverate le ν equazioni risultanti dalla

$$(\alpha\,,\,\beta)\,\mu + X_\alpha\,\mu_\beta - X_\beta\,\mu_\alpha = 0 \qquad (5)$$

coll' attribuire ad $\alpha\,,\,\beta$ i valori delle ν accennate combinazioni. Colle ν anzidette equazioni si formino tante terne o gruppi di tre equazioni, quante se ne possono formare colle

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} = N$ combinazioni a tre a tre degli m indici $1, 2, 3, \ldots\ldots m$. Un gruppo generico di questo sistema sarà rappresentato dalle tre equazioni

$$\left.\begin{aligned}(\alpha, \beta)\mu + X_\alpha \mu_\beta - X_\beta \mu_\alpha &= 0\\(\omega, \beta)\mu + X_\omega \mu_\beta - X_\beta \mu_\omega &= 0\\(\alpha, \omega)\mu + X_\alpha \mu_\omega - X_\omega \mu_\alpha &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

di cui la 1.ª è la stessa (5) e le altre due risultano col sostituire ω ad α ed a β. Tutti gli N gruppi del sistema in questione risulteranno dal gruppo generico (6) coll'attribuire successivamente agl'indici α, β, ω i valori delle N terne che possono formarsi cogli m indici stabiliti. Se pertanto col gruppo (6) ove si considerino le μ, μ_α, μ_β, μ_ω come incognite da eliminarsi, si giunge ad ottenere un'equazione indipendente da esse che indico con

$$[\alpha, \beta, \omega] = 0 \qquad (7)$$

le equazioni analoghe indipendenti dalle 4 incognite che risulterebbero dagli N gruppi in questione si deriveranno dalla stessa (7) col sostituire alle α, β, ω le N terne effettuabili cogli m indici.
Se pertanto si adotta la solita relazione $h^h = 0$, $k^k = -k^h$ e si pone

$$\left.\begin{aligned}X_\omega = a^b, \qquad -X_\beta = a^c, \qquad -(\beta, \omega) &= a^d\\X_\alpha = b^c, \qquad (\alpha, \omega) &= b^d\\-(\alpha, \beta) &= c^d\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

il gruppo (6) ordinato per μ_α, μ_β, μ_ω, μ, diventa

$$\left.\begin{array}{l} a^a\mu_\alpha + a^b\mu_\beta + a^c\mu_\omega + a^d\mu = 0 \\ b^a\mu_\alpha + b^b\mu_\beta + b^c\mu_\omega + b^d\mu = 0 \\ c^a\mu_\alpha + c^b\mu_\beta + c^c\mu_\omega + c^d\mu = 0 \\ d^a\mu_\alpha + d^b\mu_\beta + d^c\mu_\omega + d^d\mu = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

l'ultima delle quali equazioni risulta dall'aggregato della 1.ª moltiplicata per μ_α; della 2.ª moltiplicata per μ_β, e della 3.ª moltiplicata per μ_ω. Nel sistema (9) fra un numero pari d'incognite avverandosi la proprietà di essere zero i coefficienti situati sulla diagonale del quadro ch' essi costituiscono e di essere eguali e contrarj quelli che trovansi ad eguale distanza dall'una e dall'altra parte della diagonale stessa, si avrà, dietro quanto si è indietro stabilito, $\Delta(a^b c^d) = 0$, ossia dietro l'esempio dato all'art. II, § 9

$$a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c = 0$$

e quindi pei valori (8)

$$(\alpha, \beta) X_\omega - (\alpha, \omega) X_\beta + (\beta, \omega) X_\alpha = 0 \qquad (10)$$

Dovrà dunque avverarsi un sistema di N equazioni fra i coefficienti X_1, X_2, ... X_m e loro differenziali parziali acciò il 1.° membro della proposta possa con un opportuno moltiplicatore μ divenire una differenziale esatta, ed un tal sistema risulterà dalla (10) attribuendo alle α, β, ω i valori di tutte le terne effettuabili cogli m indici.

2. Chiamisi ora S il sistema di queste N equazioni e sia s_ω il sistema di tutte quelle equazioni del sistema S che sono affette dallo stesso indice ω. Sarà evidentemente n il numero di queste equazioni. È facile provare che le restanti $N-n$ equazioni del sistema S non sono che una conseguenza necessaria delle equazioni contenute nel sistema s_ω,

onde verificate queste debbono pur quelle essere necessariamente avverate. Infatti si fissi una qualunque delle $N-n$ equazioni che potrà rappresentarsi colla

$$(\alpha\,,\ \beta)X_\lambda-(\alpha\,,\ \lambda)X_\beta+(\beta\,,\ \lambda)X_\alpha=0 \qquad (11)$$

purchè ciascuno degl' indici α, β, λ sia diverso dall' indice designato ω. Fra le n equazioni del sistema s_ω ciascuna delle quali è affetta dall' indice ω esisterà un gruppo, o terna, rappresentato da

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\,,\ \beta)X_\omega-(\alpha\,,\ \omega)X_\beta+(\beta\,,\ \omega)X_\alpha&=0\\(\alpha\,,\ \lambda)X_\omega-(\alpha\,,\ \omega)X_\lambda+(\lambda\,,\ \omega)X_\alpha&=0\\(\beta\,,\ \lambda)X_\omega-(\beta\,,\ \omega)X_\lambda+(\lambda\,,\ \omega)X_\beta&=0\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

ove α, β, λ siano gli stessi indici contenuti nella (11). Se si cambia il segno alla 2.ª delle (12), si ordinano per X_α, X_β, X_λ, X_ω e si pone colla solita notazione

$$\left.\begin{aligned}(\lambda\,,\ \omega)=a^b\,,\qquad -(\beta\,,\ \omega)=a^c\,,\qquad (\beta\,,\ \lambda)&=a^d\\(\alpha\,,\ \omega)=b^c\,,\qquad -(\alpha\,,\ \lambda)&=b^d\\(\alpha\,,\ \beta)&=c^d\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

il gruppo (12) diventa

$$\left.\begin{aligned}a^aX_\alpha+a^bX_\beta+a^cX_\lambda+a^dX_\omega&=0\\b^aX_\alpha+b^bX_\beta+b^cX_\lambda+b^dX_\omega&=0\\c^aX_\alpha+c^bX_\beta+c^cX_\lambda+c^dX_\omega&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Quindi l' aggregato della 1.ª moltiplicata per X_α, della 2.ª moltiplicata per X_β, e della 3.ª moltiplicata per X_λ fornisce l' equazione

$$c^dX_\lambda+b^dX_\beta+a^dX_\alpha=0 \qquad (15)$$

ove posti i valori dell' ultima linea verticale delle (13), si ha la (11). Ne deriva quindi che, acciò l' equazione proposta divenga una differenziale esatta con un opportuno moltiplicatore, basterà che sia verificato il sistema s_ω, ove ω ritiene un valore fisso ed invariabile al variare di α, β.

Ne deriva qual corollario che, formati colle N equazioni del sistema S tanti sistemi s_ω quanti ne compajono in S pei valori $\omega = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$, se le equazioni di uno qualunque s_ε degli m sistemi $s_1, s_2, \ldots\ldots s_m$ che compajono in S risulteranno identicamente zero, saranno pure identicamente avverate tutte le equazioni contenute negli altri sistemi. Una tale conseguenza risulta pure dal seguente processo.

3. Si divida la proposta (1) per un coefficiente generico X_ω, si avrà

$$dx_\omega = -\left\{\frac{X_1}{X_\omega}dx_1 + \frac{X_2}{X_\omega}dx_2 \cdots \frac{X_\alpha}{X_\omega}dx_\alpha \cdots \frac{X_\beta}{X_\omega}dx_\beta \cdots + \frac{X_m}{X_\omega}dx_m\right\} \qquad (16)$$

Acciò il 2.° membro sia una differenziale esatta, non altrimenti che il primo, dovrà, come è noto, avverarsi il sistema di $\frac{(m-1)(m-2)}{2} = n$ equazioni quali si derivano dalla generica

$$\frac{d\frac{X_\alpha}{X_\omega}}{dx_\beta} - \frac{d\frac{X_\beta}{X_\omega}}{dx_\alpha} = 0 \qquad (17)$$

ove la variabile x_ω contenuta nei coefficienti generici X_α, X_β, X_ω si riguarderà funzione di tutte le altre variabili, ed ove, tenuto fisso l' indice ω, le α, β assumano tutti i valori delle n combinazioni a due a due che possono formarsi cogli $m-1$ restanti indici. Se si rappresenta con

$$(\alpha, \beta, \omega) = 0 \qquad (18)$$

ciò che diventa la (17) quando vi si eseguiscano le indicate differenziazioni rispetto alle variabili x_α, x_β comprese esplicitamente nelle X_α, X_β, X_ω ed implicitamente nella x_ω, tutte le equazioni del criterio risulteranno dalla (18), quando α, β assumano i valori delle anzidette n combinazioni. Eseguite le differenziazioni nella (17), e ritenuto che i coefficienti delle differenziali delle variabili x_1, x_2, ... x_m nel 2.° membro della (16) debbono rappresentare le differenziali parziali della x_ω rispetto alle altre variabili x_1, x_2, ...x_m per cui sarà in generale $\frac{dx_\omega}{dx_\alpha} = -\frac{X_\alpha}{X_\omega}$, $\frac{dx_\omega}{dx_\beta} = -\frac{X_\beta}{X_\omega}$ la (17) diverrà

$$(\alpha, \beta, \omega) = (\alpha, \beta)X_\omega - (\alpha, \omega)X_\beta + (\beta, \omega)X_\alpha = 0 \qquad (19)$$

Quantunque ω possa ricevere m differenti valori, basterà che sia verificato il sistema competente ad un determinato valore di ω per conchiudere che la proposta ammette per integrale un' equazione unica. Inoltre, siccome per gli m valori di $\omega = 1, 2, 3, ... m$ i sistemi che ne nascono coincidono coi sistemi indicati nel § 1 con s_1, s_2, ... s_m, così basterà in forza dello stesso § 1 che sia verificato uno di questi sistemi per conchiudere che esiste un opportuno moltiplicatore che rende il 1.° membro della (1) una differenziale esatta.

Per l' integrabilità della (1) bastando l' avveramento di uno dei sistemi $s_\omega = 0$ fatto di n equazioni fra loro indipendenti, così fu esso chiamato il sistema dei criterj d' integrabilità. Siccome poi nel sistema S sono contenuti tutti i sistemi s_ω e dev' essere identicamente zero il sistema stesso quando ne sia verificato uno, le restanti $N-n$ equazioni essendo una conseguenza delle altre n equazioni indipendenti; così la $S = 0$ si dirà sistema generale dei criterj.

4. Supposto verificato uno qualunque de' sistemi s_ω saranno parimente verificate le $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = h$

equazioni che risultano dalla generica

$$(\alpha, \beta)(\lambda, \omega) - (\alpha, \lambda)(\beta, \omega) + (\alpha, \omega)(\beta, \lambda) = 0 \qquad (20)$$

quando alle α, β, λ, ω si sostituiscano gl' indici di ciascuna delle h quaderne che possono formarsi cogli m indici $1, 2, 3, \ldots\ldots m$, o, ciò che è lo stesso, saranno verificate le h equazioni che risultano dalla generica

$$\Delta(\alpha^{\beta}\lambda^{\omega}) = 0 \qquad (21)$$

quando alle lettere α, β, λ, ω si sostituiscano le lettere delle h quaderne che nascono dalle m lettere $a, b, c, d, \ldots\ldots y, z$, e si chiamerà H un tal sistema di h equazioni.

Infatti se uno qualunque dei sistemi s_{ω} è avverato, sarà pure avverato il sistema generale S. Se colle N equazioni del sistema S si formano tutte le quaderne che nascono combinando fra loro a 4 a 4 gli m indici, una quaderna generica dietro il § 2 verrà costituita dalle 4 equazioni (11), (12) dalle quali potranno derivarsi tutte le altre. Adottando le posizioni (13), le (12) si cambiano nelle (14) e la (11) nella (15), la quale può scriversi

$$d^a X_{\alpha} + d^b X_{\beta} + d^c X_{\lambda} + d^d X_{\omega} = c.$$

Il sistema di queste quattro equazioni, in cui è verificata fra i coefficienti delle X_{α}, X_{β}, X_{λ}, X_{ω} da eliminarsi la solita proprietà della diagonale, conduce alla $a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c = 0$ che coincide colla (20) in forza delle (13). Se poi alla serie degl' indici

$$1, 2, 3, \ldots\ldots \alpha, \ldots\ldots \beta, \ldots\ldots \lambda, \ldots\ldots \omega, \ldots\ldots m$$

si sostituisca la serie delle lettere

$$a, b, c, \ldots\ldots \alpha, \ldots\ldots \beta, \ldots\ldots \lambda, \ldots\ldots \omega, \ldots\ldots z$$

ove le lettere greche α, β, λ, ω sono ora 4 qualunque delle lettere latine da noi sempre usate, ed adottando le solite notazioni di α^β, λ^ω, ... in luogo delle relative (α, β), (λ, ω), ... la (20) diverrà $\alpha^\beta\lambda^\omega - \alpha^\lambda\beta^\omega + \alpha^\omega\beta^\lambda = 0$, ossia si avrà $\Delta(\alpha^\beta\lambda^\omega) = 0$ che è la (21).

5. Quando sia verificato un qualunque sistema s_ω saranno avverate tutte le equazioni del sistema K che nascono dalla equazione generica

$$(\alpha, \beta)(\lambda, \omega) - (\alpha, \lambda)(\beta, \omega) + (\alpha, \omega)(\beta, \lambda) = 0 \qquad (22)$$

quando alle lettere α, β, λ, ω si sostituiscano gl' indici di ciascuna delle $k = \dfrac{(m+1)(m)(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ quaderne che possono formarsi cogli $m+1$ indici $1, 2, 3, 4, \ldots\, m, m+1$; o, ciò che è lo stesso, saranno verificate le k equazioni che risultano dall' equazione generica

$$\Delta(\alpha^\beta\lambda^\omega) = 0 \qquad (23)$$

quando alle lettere α, β, λ, ω si sostituiscano quelle che nascono dalle $m+1$ lettere $a, b, c, \ldots\, x, y, z, \zeta$, ritenuto che nel 1.° caso sia

$$X_1 = (1, m+1), \quad X_2 = (2, m+1), \ \ldots\ X_m = (m, m+1)$$

$$-X_1 = (m+1, 1), \quad -X_2 = (m+1, 2), \ \ldots\ -X_m = (m+1, m)$$

e nel 2.° caso sia

$$X_1 = a^\zeta, \quad X_2 = b^\zeta, \quad X_3 = c^\zeta, \ \ldots\ X_m = z^\zeta$$

$$-X_1 = \zeta^a, \quad -X_2 = \zeta^b, \quad -X_3 = \zeta^c, \ \ldots\ -X_m = \zeta^z$$

Infatti se nell' equazione generica (10) da cui deriva il sistema S di $N = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ equazioni si pone

$$X_\omega = (\omega, \zeta), \quad X_\beta = (\beta, \zeta), \quad X_\alpha = (\alpha, \zeta)$$

essendo $\zeta = m + 1$ essa diventa

$$(\alpha, \beta)(\omega, \zeta) - (\alpha, \omega)(\beta, \zeta) + (\beta, \omega)(\alpha, \zeta) = 0 \qquad (24)$$

e le diverse N equazioni risulteranno dal tener fissa la ζ e far variare tutte le α, β, λ coll' assumere i valori delle N terne fatte cogl' indici

$$1, \; 2, \; 3, \; 4, \; \ldots\ldots\ldots\; m \qquad (25)$$

Ma pel § 4 è verificato anche il sistema (20), cioè quello che risulta dalla

$$(\alpha, \beta)(\lambda, \omega) - (\alpha, \lambda)(\beta, \omega) + (\alpha, \omega)(\beta, \lambda) = 0 \qquad (26)$$

quando alle quattro lettere α, β, λ, ω si sostituiscano le $h = \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ quaderne che possono formarsi cogli m indici (25). Dunque nel sistema H vi saranno tutte le equazioni nate dalle h quaderne della serie (25), ove manca l' indice $m+1$, e tutte le equazioni del sistema S saranno N quaderne in cui la ζ è ritenuta fissa, e le α, β, ω assumono tutti i valori delle n terne della serie (25). Quindi il complessivo sistema $S+H$ fatto di

$$N + h = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(m+1)(m)(m-1)(m-}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

equazioni costituirà il sistema K di tutte le equazioni che nascono dalla (26) attribuendo alle α, β, λ, ω i valori delle quaderne che possono formarsi cogli $m+1$ indici $1, 2, 3, \ldots\ldots m, m+1$, il numero delle quali è appunto $= \dfrac{(m+1)(m)(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Se ora alla serie degl' indici $1, 2, 3, \ldots\ldots\, m, m+1$ si sostituisca rispettivamente la serie delle $m+1$ lettere

$$a, \; b, \; c, \; \ldots\ldots\; z, \; \zeta \qquad (27)$$

e si supponga che α, β, λ, ω siano quattro lettere qualunque di quest' ultima serie, e si scrivano in luogo dei simboli (α, β), (λ, ω), ... gli analoghi α^β, λ^ω, ... la (26) diverrà

$$\alpha^\beta\lambda^\omega - \alpha^\lambda\beta^\omega + \alpha^\omega\beta^\lambda = \alpha^\beta\lambda^\omega - \alpha^\lambda\beta^\omega - \lambda^\beta\alpha^\omega = 0\,,$$

ossia $\Delta(\alpha^\beta\lambda^\omega) = 0$ ove alle α, β, λ, ω si sostituiscano le k quaderne che possono formarsi colle $m+1$ lettere della serie (27) come si è enunciato.

6. Per dare qualche esempio si supponga $m = 3$. Risultando in tal caso $N = n$, il sistema S si riduce ad una equazione unica che risulta dalla (3) ponendovi $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\omega = 3$, ossia si riduce alla

$$(1,2)X_3 - (1,3)X_2 + (2,3)X_1 = 0$$

la quale coincide colla già trovata espressione (25) dell' art. III. Se si pone

$$X_1 = (1,4) = a^\zeta\,, \qquad X_2 = (2,4) = b^\zeta\,, \qquad X_3 = (3,4) = c^\zeta$$

le equazioni del sistema K si riducono ad una sola, cioè alla

$$(1,2)\,(3,4) - (1,3)\,(2,4) + (2,3)\,(1,4) = 0\,,$$

ossia alla

$$a^b c^\zeta - a^c b^\zeta - c^b a^\zeta = \Delta(a^b c^\zeta) = 0.$$

7. Per $m = 4$ le $N = 4$ combinazioni a tre a tre

$$1\,,\,2\,,\,3)\,, \quad 1\,,\,2\,,\,4)\,, \quad 1\,,\,3\,,\,4)\,, \quad 2\,,\,3\,,\,4)$$

forniscono pel sistema S le 4 equazioni

$$\begin{aligned}
&1.^a \;........\; (1,2)X_3 - (1,3)X_2 + (2,3)X_1 = 0\\
&2.^a \;........\; (1,2)X_4 - (1,4)X_2 + (2,4)X_1 = 0\\
&3.^a \;........\; (1,3)X_4 - (1,4)X_3 + (3,4)X_1 = 0\\
&4.^a \;........\; (2,3)X_4 - (2,4)X_3 + (3,4)X_2 = 0.
\end{aligned}$$

I 4 sistemi s_4, s_3, s_2, s_1 sono quelli che risultano rispettivamente dalle equazioni

$2.^a$, $3.^a$, $4.^a$), $1.^a$, $3.^a$, $4.^a$), $1.^a$, $2.^a$, $4.^a$), $1.^a$, $2.^a$, $3.^a$)

avvertendo di cambiare i segni quando si vuol presentare ciascuna equazione sotto la forma (3).
Risultando quindi $h = 1$, il sistema H si ridurrà all'equazione unica fornita dalla (20) in cui pongasi $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = 3$, $\omega = 4$, ossia alla

$$(1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3) = 0,$$

ovvero, sostituendo agl' indici le lettere a, b, c, d, si otterrà dalla (21)

$$a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c = \Delta(a^b c^d) = 0.$$

Risultando inoltre $k = 5$, il sistema K sarà dato o dalle cinque equazioni che costituiscono il sistema complessivo S, H, ponendo

$$X_1 = (1,5), \quad X_2 = (2,5), \quad X_3 = (3,5), \quad X_4 = (4,5),$$

ovvero ponendo invece

$$X_1 = a^\zeta, \quad X_2 = b^\zeta, \quad X_3 = c^\zeta, \quad X_4 = d^\zeta$$

dalle cinque equazioni

$$\Delta(a^b c^\zeta) = 0, \quad \Delta(a^b d^\zeta) = 0, \quad \Delta(a^c d^\zeta) = 0 \quad \Delta(a^b c^d) = 0.$$

8. Per $m = 5$ sarà $N = 10$. Colle 10 combinazioni a tre a tre dei 5 indici si ha

1, 2, 3), 1, 2, 4), 1, 2, 5), 1, 3, 4), 1, 3, 5), 1, 4, 5)
2, 3, 4), 2, 3, 5), 2, 4, 5)
3, 4, 5)

ed il sistema S si riduce col mezzo della (3) alle

$$(1,2)X_3 - (1,3)X_2 + (2,3)X_1 = 0$$
$$(1,2)X_4 - (1,4)X_2 + (2,4)X_1 = 0$$
$$(1,2)X_5 - (1,5)X_2 + (2,5)X_1 = 0$$
$$(1,3)X_4 - (1,4)X_3 + (3,4)X_1 = 0$$
$$(1,3)X_5 - (1,5)X_3 + (3,5)X_1 = 0$$
$$(1,4)X_5 - (1,5)X_4 + (4,5)X_1 = 0$$
$$(2,3)X_4 - (2,4)X_3 + (3,4)X_2 = 0$$
$$(2,3)X_5 - (2,5)X_3 + (3,5)X_2 = 0$$
$$(2,4)X_5 - (2,5)X_4 + (4,5)X_2 = 0$$
$$(3,4)X_5 - (3,5)X_4 + (4,5)X_3 = 0$$

Un qualsivoglia s_ω fatto di $n = 6$ equazioni risulterà dall'assumere le 6 equazioni del sistema S in ciascuna delle quali entra l'indice ω. Così per $\omega = 4$ il sistema s_4 sarà quello che consta delle equazioni 2.ª, 4.ª, 6.ª, 7.ª, 9.ª, 10.ª; lo stesso dicasi degli altri. Si può quì verificare la proprietà enunciata che un numero $N - n = 4$ di equazioni mancanti di un indice stabilito è una conseguenza delle n restanti equazioni del sistema S.
Risultando poi $h = 5$, le cinque equazioni del sistema H si avranno dalla (20) col sostituire alle α, β, λ, ω le cinque quaderne

1, 2, 3, 4), 1, 2, 3, 5), 1, 2, 4, 5), 1, 3, 4, 5), 2, 3, 4, 5)

e si avrà

$$(1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3) = 0$$
$$(1,2)(3,5) - (1,3)(2,5) + (1,5)(2,3) = 0$$
$$(1,2)(4,5) - (1,4)(2,5) + (1,5)(2,4) = 0$$
$$(1,3)(4,5) - (1,4)(3,5) + (1,5)(3,4) = 0$$
$$(2,3)(4,5) - (2,4)(3,5) + (2,5)(3,4) = 0$$

ovvero sostituendo alla serie degl' indici 1, 2, 3, 4, 5 la serie delle lettere a, b, c, d, e si avrà

$$a^b c^d - a^c b^d + a^d b^c = \Delta a^b c^d = 0$$

$$a^b c^e - a^c b^e + a^e b^c = \Delta a^b c^e = 0$$

$$a^b d^e - a^d b^e + a^e b^d = \Delta a^b d^e = 0$$

$$a^c d^e - a^d c^e + a^e c^d = \Delta a^c d^e = 0\,.$$

$$b^c d^e - b^d c^e + b^e c^d = \Delta b^c d^e = 0$$

Aggiunte a queste le 10 equazioni date in principio di questo paragrafo, ove alla serie degl' indici 1, 2, 3, 4, 5 si sostituiscano le rispettive lettere a, b, c, d, e e pongasi

$$X_1 = a^\zeta\,, \quad X_2 = b^\zeta\,, \quad X_3 = c^\zeta\,, \quad X_4 = d^\zeta\,, \quad X_5 = e^\zeta$$

si avranno le restanti 10 equazioni

$$a^b c^\zeta - a^c b^\zeta + b^c a^\zeta = \Delta a^b c^\zeta = 0$$

$$a^b d^\zeta - a^d b^\zeta + b^d a^\zeta = \Delta a^b d^\zeta = 0$$

$$a^b e^\zeta - a^e b^\zeta + b^e a^\zeta = \Delta a^b e^\zeta = 0$$

$$a^c d^\zeta - a^d c^\zeta + c^d a^\zeta = \Delta a^c d^\zeta = 0$$

$$a^c e^\zeta - a^e c^\zeta + c^e a^\zeta = \Delta a^c e^\zeta = 0$$

$$a^d e^\zeta - a^e d^\zeta + d^e a^\zeta = \Delta a^d e^\zeta = 0$$

$$b^c d^\zeta - b^d c^\zeta + c^d b^\zeta = \Delta b^c d^\zeta = 0$$

$$b^c e^\zeta - b^e c^\zeta + c^e b^\zeta = \Delta b^c e^\zeta = 0$$

$$b^d e^\zeta - b^e d^\zeta + d^e b^\zeta = \Delta b^d e^\zeta = 0$$

$$c^d e^\zeta - c^e d^\zeta + d^e c^\zeta = \Delta c^d e^\zeta = 0$$

che completano il numero $k = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot2\cdot4} = 15$ delle equazioni del sistema K.

VI.

Criterj avverati nei coefficienti della proposta equazione.

1. In questo articolo si tratta la questione di trovare il numero delle equazioni che entrano nel sistema integrale della proposta

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots\cdots + X_m dx_m = 0 \qquad (1)$$

quando sia avverato il sistema s_ω dei criterj d' integrabilità relativi al polinomio

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots\cdots + X_i dx_i$$

in cui sia $i =$ ovvero $< m$.

Per ottenerne colla maggiore generalità la soluzione conviene stabilire una proposizione che dipende dalle proprietà delle semi-alternanti di cui si è trattato nell' art. II.

E primieramente chiamerò per abbreviazione di discorso lettere *critiche* quelle che entrano nel sistema s_ω contenente i criterj d' integrabilità o che entrano nel sistema più generale H, e lettere *estranee* tutte quelle che sono estranee ai criterj stessi. Così per esempio essendovi la serie di lettere

$$\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c},\ \underline{d},\ \underline{e},\ f,\ g,\ h$$

si diranno lettere critiche le sottosegnate a, b, c, d, e quando sono esse tali che una qualsivoglia delle quaderne che da esse risulta soddisfi l' equazione generica del criterio data da $\Delta(\alpha^\beta\lambda^{(\omega)}) = 0$. Le altre lettere f, g, h diconsi estranee al criterio, giacchè una qualsivoglia quaderna di cui, anche una sola di esse faccia parte, fa cessare l'avveramento del criterio.

2. Una semi-alternante di un numero $= 2n$ di lettere, di cui un numero $= j$ sia di lettere critiche, sarà o non sarà zero secondo che la j sarà o non sarà $> n + 1$.
Per dimostrare questa proposizione si cerchi il minimo valore che deve avere la j acciò la semi-alternante stessa sia $= 0$. Una semi-alternante di $2n$ lettere si può esprimere dietro l'art. II per semi-alternanti di un numero $2n - 2$ di lettere, e queste esprimersi per semi-alternanti di un numero $2n - 4$ di lettere, e così dicasi successivamente. Se tali sviluppi si fanno per un indice, o per una base corrispondenti sempre ad una lettera estranea, le successive semi-alternanti, al diminuire di $2, 4, 6, \ldots\ldots 2y$ unità, diminuiranno di $1, 2, 3, \ldots\ldots y$ lettere estranee. Se tali sviluppi si spingono sino a contenere soltanto semi-alternanti della forma $\Delta(\alpha^{\beta}\lambda^{\omega})$, la semi-alternante proposta sarà zero, se tutte le semi-alternanti, di cui la $\Delta(\alpha^{\beta}\lambda^{\omega})$ è la generica, sono prive di lettere estranee. Sia pertanto x il massimo numero di lettere estranee che la semi-alternante di $2n$ lettere deve contenere, acciò sviluppata successivamente sino a non presentare che semi-alternanti di sole 4 lettere siano queste prive di lettere estranee. I valori di x, y risulteranno dalle due condizioni

$$2n - 2y = 4 , \qquad x - y = 0$$

da cui risulta $x = n - 2$. Dunque pel numero $n - 2$ di lettere estranee contenute nella proposta semi-alternante, ed a più forte ragione per un numero minore, la semi-alternante stessa sarà zero. Sia j il numero delle critiche contenute nella semi-alternante, il minimo numero di lettere critiche che dovrà contenere l'alternante stessa acciò sia zero sarà dato da $j = 2n - x = n + 2$, ed a più forte ragione sarà zero, se sarà $j > n + 2$. Risulta dunque che una semi-alternante di $2n$ lettere sarà o non sarà zero secondo che il numero j di lettere critiche che essa contiene sarà o non sarà maggiore di $n+1$.

3. Sia per un esempio $2n = 8$, si avrà la semi-alternante $\Delta(a^f c^d e^f g^h)$, la quale dovrà essere zero se il numero delle lettere critiche che essa contiene sarà $> n+1$, ossia > 5. Suppongasi che tale numero di critiche sia $= 6$ quali trovansi sottosegnate nella serie

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \underline{e}\,,\ \underline{f}\,,\ g\,,\ h.$$

Sviluppando per la base g appartenente ad una lettera estranea si avrà l' espressione

$$\Delta(a^b c^d e^f g^h) = g^h\Delta(a^b c^d e^f) - g^a\Delta(h^b c^d e^f) - g^b\Delta(a^h c^d e^f) - g^c\Delta(a^b h^d e^f)$$
$$- g^d\Delta(a^b c^h e^f) - g^e\Delta(a^b c^d h^f) - g^f\Delta(a^b c^d e^h)$$

Indicati quindi con H, A, B, C, D, E, F

i coefficienti delle g^h, g^a, g^b, g^c, g^d, g^e, g^f

si avrà sviluppando

$$H = e^f\Delta(a^b c^d) - e^a\Delta(f^b c^d) - e^b\Delta(a^f c^d) - e^c\Delta(a^b f^d) - e^d\Delta(a^b c^f)$$

$$A = h^b\Delta(c^d e^f) - h^c\Delta(b^d e^f) - h^d\Delta(c^b e^f) - h^e\Delta(c^d b^f) - h^f\Delta(c^d e^b)$$

$$B = a^h\Delta(c^d e^f) - c^h\Delta(a^d e^f) - d^h\Delta(c^a e^f) - e^h\Delta(c^d a^f) - f^h\Delta(c^d e^a)$$

$$C = h^d\Delta(a^b e^f) - h^a\Delta(d^b e^f) - h^b\Delta(a^d e^f) - h^e\Delta(a^b d^f) - h^f\Delta(a^b e^d)$$

$$D = c^h\Delta(a^b e^f) - a^h\Delta(c^b e^f) - b^h\Delta(a^c e^f) - e^h\Delta(a^b c^f) - f^h\Delta(a^b e^c)$$

$$E = h^f\Delta(a^b c^d) - h^a\Delta(f^b c^d) - h^b\Delta(a^f c^d) - h^c\Delta(a^b f^d) - h^d\Delta(a^b c^f)$$

$$F = e^h\Delta(a^b c^d) - a^h\Delta(e^b c^d) - b^h\Delta(a^e c^d) - c^h\Delta(a^b e^d) - d^h\Delta(a^b c^e)$$

Tutte le semi-alternanti contenute nei secondi membri, essendo

prive di lettere estranee, sono zero, e perciò sarà zero la semi-alternante proposta $\Delta(a^b c^d e^f g^h)$.
A più forte ragione sarà essa zero se il numero delle critiche sarà >6. Ma se il numero delle critiche fosse <6, per esempio $=5$, per cui la f diverrebbe una lettera estranea, i primi membri delle precedenti equazioni non sarebbero zero, non essendo zero quelle semi-alternanti $\Delta(\alpha^\beta \lambda^\omega)$ dei secondi membri, in cui entra la lettera estranea f. Quindi non sarà annullata la semi-alternante proposta.

4. Si riprenda l'equazione da integrarsi

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_i dx_i + \cdots + X_{m-1} dx_{m-1} + X_m dx_m = 0 \qquad (2)$$

e suppongasi che i primi termini sino all' i^{mo} inclusivo siano tali da soddisfare il sistema generale H dei criterj d'integrabilità. Si avrà la proposizione che il numero $=N$ di equazioni di cui consta il sistema finale che integra la proposta equazione differenziale sarà dato, per $m=$ ovvero $<2(i-1)$, da

$$N = m-(i-1) \qquad (3)$$

e per $m>2(i-1)$ sarà dato da

$$N = \frac{m}{2}, \quad \text{ovvero} \quad N = \frac{m+1}{2} \qquad (4)$$

secondo che m sarà pari o dispari.
Per dimostrarlo suppongasi primieramente m numero pari $=2n$ e sia $m=2(i-1)$, ossia $i=n+1$. Il 1.° sistema ausiliario conterrà la serie di $2n$ lettere

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \ldots\ldots\ \underline{\omega}\,,\ l\,,\ m\,,\ \ldots\ldots\ y\,,\ z \qquad (5)$$

delle quali un numero $=i$ di lettere sottosegnate saranno critiche e le restanti $n-1$ saranno lettere estranee. Stabilito il 1.° sistema ausiliario ridotto ad espressioni fatte di semi-alternanti, si consideri una fra esse, per esempio la

$$\Delta\Big(g(z=\zeta)\Big) = \Delta(a^b c^d \dots\dots \lambda^\omega l^m \dots\dots y^\zeta).$$

Questa semi-alternante fatta di $2n$ lettere, delle quali essendo la ζ che entra nel sistema H pur essa da considerarsi critica, un numero $= i+1$ sarà di critiche ed un numero $= 2n-i-1$ sarà di estranee, ossia supposto $i+1=j$ ed essendo $i=n+1$ sarà $j=n+2$. Sarà dunque $j>n+1$, e quindi la semi-alternante in questione sarà zero, e perciò il 1.° sistema ausiliario sarà insussistente. A più forte ragione saranno insussistenti i sistemi ausiliarj successivi e quindi tutti i termini della proposta equazione dall' i^{mo} sino all' ultimo in numero $= 2n-i$ dovranno conservarsi nella equazione finale. La somma dei termini sino all' i^{mo} inclusivo costituirà nell'equazione finale un termine unico, come sarà dimostrato nel seguente paragrafo, e quindi il numero N delle equazioni con cui la proposta si integra sarà dato da

$$N = 1+2n-i = 2n-(i-1),$$

come si è enunciato. Che se m è un numero qualunque $<2(i-1)$, a più forte ragione alcune delle semi-alternanti che entrano nei sistemi ausiliarj saranno zero e perciò insussistenti i sistemi stessi. Quindi il numero N sarà espresso più generalmente da $m-(i-1)$.

Suppongasi ora $m>2(i-1)$, per esempio $m=2(i-1)+1$: in tal caso essendo dispari il numero de' termini della proposta converrà esplorare se è soddisfatta l'equazione condizionale. Chiamata pertanto g' la serie dispari (5), sarà

$$\Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^d \dots\dots \lambda^\omega l^m \dots\dots x^y z^\zeta),$$

ove il numero totale delle lettere sarà $= m+1 = 2i$ ed il numero delle critiche sarà $= i+1 = j$, stante che la ζ è una lettera critica. Ma in tal caso non essendo j maggiore di $i+1$ l'equazione condizionale non è avverata, e perciò l' ultimo termine della proposta rimane esistente nell' equazione finale dal cui numero de' termini dipende quello delle equazioni integrali della proposta.

Se si fosse supposto $m = 2(i-1) + 2$ le semi-alternanti del 1.° sistema ausiliario non sarebbero zero e perciò sussisterebbe il sistema stesso. A più forte ragione sussisteranno i sistemi ausiliarj per

$$m = 2(i-1) + 4\ ,\quad 2(i-1) + 6\ ,\quad 2(i-1) + 8\ , \ldots\ldots$$

e non sussisteranno le equazioni condizionali pei valori di

$$m = 2(i-1) + 3\ ,\quad 2(i-1) + 5\ ,\quad 2(i-1) + 7\ \ldots\ldots$$

giacchè se alcuna di esse fosse avverata, per esempio per $m = 2(i-1) + 2l + 1$, ...non sussisterebbe, contro l' ipotesi, il sistema per $m = 2(i-1) + 2l + 2$. Lo stesso si dirà per gli altri valori dispari di m.

Posto $2(i-1) = m_1$ risulta che un' equazione proposta in cui sia m pari e $> m_1$ subisce un processo di trasformazione come nel caso generale dato all' art. I sino ad essere ridotta ad un polinomio di n unumero $= m_1 + \frac{2n-2(i-1)}{2} = m_1 + (n-i+1)$ di termini. Ma il polinomio di m_1 termini, che l' equazione trasformata contiene, è ulteriormente ridotto, in forza della già dimostrata proposizione, ad altro polinomio di un numero $= m_1 - (i-1) = i-1$ di termini: dunque l' equazione finale consterà di un numero N di termini dato da $N = (i-1) + (n-i+1) = n = \frac{m}{2}$. Se poi lo stesso numero $m > m_1$ fosse dispari ed $= 2n+1$ il numero de' termini dell' equazione finale sarebbe ridotto ad $n+1$, ossia ad $\frac{m+1}{2}$ come si è enunciato.

5. Resta a dimostrarsi come il polinomio che comprende tutti i termini i cui coefficienti verificano i criterj d' integrabilità,

si riduca nell' equazione finale ad un termine unico, come nel precedente paragrafo fu supposto, ed a vedersi quali modificazioni una tale circostanza induca nell' equazione finale stessa. Si tratterà questo caso ammettendo prima che sia $m = 2(i-1)$ per passare poscia a quello in cui sia $m > 2(i-1)$.

Sia dunque da integrarsi la (2), ove si supponga $m = 2(i-1)$. Si è già veduto che non si può in tal caro servirsi dei sistemi ausiliarj, onde far scomparire alcuni termini e ridur così la proposta ad un' espressione di un minor numero de' termini. Sarà dunque essa da considerarsi come l' equazione finale stessa nella quale però si abbia riguardo alla condizione che i coefficienti dei primi termini in numero $= i$ soddisfano ai criterj d' integrabilità. Sia μ il moltiplicatore che rende l' espressione

$$\mu(X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots\ldots + X_i dx_i) \qquad (6)$$

una differenziale esatta rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots\ldots x_i$. Sia f l' integrale della (6). Se della f si prende la differenziale totale, cioè la differenziale rispetto a tutte le variabili

$$x_1, \; x_2, \ldots\ldots x_i, \ldots\ldots x_{m-1}, \; x_m$$

e si rifletta essere

$$\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_1}\right) = \mu X_1, \quad \left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_2}\right) = \mu X_2, \ldots\ldots \left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_i}\right) = \mu X_i,$$

si avrà

$$d\mathrm{f} = \left\{ \begin{array}{l} \mu X_1 dx_1 + \mu X_2 dx_2 + \ldots\ldots + \mu X_i dx_i \\ + \left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_{i+1}}\right) dx_{i+1} + \ldots\ldots + \left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_{m-1}}\right) dx_{m-1} + \left(\frac{d\mathrm{f}}{dx_m}\right) dx_m \end{array} \right.$$

Posta quindi la (2) sotto la forma

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\mu} \left\{ \mu X_1 dx_1 + \mu X_2 dx_2 + \ldots\ldots + \mu X_i dx_i \right\} \\ + X_{i+1} dx_{i+1} + \ldots\ldots + X_{m-1} dx_{m-1} + X_m dx_m \end{array} \right\} = 0$$

essa sarà ridotta alla

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\mu}df+\left(X_{i+1}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{i+1}}\right)\right)dx_{i+1}+\left(X_{i+2}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{i+2}}\right)\right)dx_{i+2}+\cdots\\ \cdots\cdots+\left(X_{m-1}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{m-1}}\right)\right)dx_{m-1}+\left(X_m-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_m}\right)\right)dx_m\end{array}\right\}=0$$

È questa l'equazione finale in questione. Essa potrà integrarsi colle equazioni

$$f=\alpha_1\ ,\quad x_{i+1}=\alpha_2\ ,\ \cdots\cdots\ x_{m-1}=\alpha_{N-1}\ ,\quad x_m=\alpha_N \qquad (7)$$

essendo α_1, α_2, ... α_N costanti arbitrarie.
Ovvero, supponendo $f=\phi(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\ldots x_m)$ per cui

$$df=\left(\frac{d\phi}{dx_{i+1}}\right)dx_{i+1}+\left(\frac{d\phi}{dx_{i+2}}\right)dx_{i+2}+\cdots\cdots+\left(\frac{d\phi}{dx_m}\right)dx_m$$

onde l'equazione finale precedente diventa

$$\left.\begin{array}{l}\left\{X_{i+1}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{i+1}}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\phi}{dx_{i+1}}\right)\right\}dx_{i+1}\\ +\left\{X_{i+2}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{i+2}}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\phi}{dx_{i+2}}\right)\right\}dx_{i+2}\\ \quad\vdots\\ +\left\{X_{m-1}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_{m-1}}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\phi}{dx_{m-1}}\right)\right\}dx_{m-1}\\ +\left\{X_m-\frac{1}{\mu}\left(\frac{df}{dx_m}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\phi}{dx_m}\right)\right\}dx_m\end{array}\right|=0$$

s'integrerà la proposta, lasciando alle x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_m la loro generalità, col sistema

$$f - \phi(x_{i+1}\,,\ x_{i+2}\,,\ \ldots\ldots\ x_m) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{i+1} + \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{d(\phi-f)}{dx_{i+1}} = 0 \\[2ex] X_{i+2} + \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{d(\phi-f)}{dx_{i+2}} = 0 \\ \vdots \\ X_m \quad + \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{d(\phi-f)}{dx_m} = 0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

6. Dalle cose dette nel paragrafo precedente si vede come sia da trattarsi il caso in cui fosse $m > 2(i-1)$. Si procederà allora col metodo generale col quale il polinomio proposto viene ridotto ad un altro diminuito successivamente de' termini in posto pari sino a che si ottenga un polinomio fatto dei soli ultimi termini in posto dispari e della somma dei primi $2(i-1)$ termini affetti da un coefficiente, le diverse quantità essendo controdistinte da apici. Considerato un tal risultato come l' equazione finale s' introdurrà, come si è fatto nel precedente paragrafo, il fattore μ che rende una differenziale esatta rispetto alle variabili $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_i$ affette da apici il polinomio fatto dei primi termini in numero $= i$. Chiamato f l' integrale del polinomio stesso, se ne prenderà la differenziale totale rispetto a tutte quelle variabili di cui l' equazione finale contiene le differenziali, e si procederà come si è già accennato doversi fare pel caso precedente di $m = 2(i-1)$.

Sia per un esempio $m = 2(i-1) + 2 = 2i$. La (2) diverrà

$$\left.\begin{array}{l} X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X_i dx_i + X_{i+1} dx_{i+1} \\ + \ldots\ldots + X_{2(i-1)} dx_{2(i-1)} + X_{2(i-1)+1} dx_{2(i-1)+1} + X_{2i} dx_{2i} \end{array}\right\} = 0$$

ove il numero $= i$ indica sempre il numero de' coefficienti che soddisfano ai criterj d' integrabilità. Stabilito il 1.° sistema ausiliario risulterà esso dato dai rapporti di semi-alternanti di un numero $=2i$ di lettere. Alcune di tali semi-alternanti conterranno un numero $=i+1$ di lettere critiche, altre soltanto un numero $=i$. Essendo per le prime $j=i+1$ e per le seconde $j=i$ non sarà in ambi i casi j maggiore di $i+1$. Sussisterà dunque il sistema ausiliario, ed il 1.° membro della proposta equazione si ridurrà, dietro la (19), art. I, alla

$$S_1 = N_n \left\{ X'_1 dx'_1 + X'_2 dx'_2 \cdots\cdots + X'_{2(i-1)} dx'_{2(i-1)} \right\} + H_n dx'_{2(i-1)+1} \qquad (9)$$

Rappresentando S_1 un polinomio dispari si dovrà esplorare se l' equazione condizionale è soddisfatta. Questa essendo data da una semi-alternante di $2i$ lettere, delle quali il numero $=j$ di critiche non è maggiore di $i+1$ non sarà avverata. L' ultimo termine della (9) rimane perciò nell' espressione finale. Ma, dietro quanto che si è avvertito indietro, anche tutti i termini della (9) al di là del termine $N_n X'_i dx'_i$ rimangono nell' equazione finale; non resterà dunque che a trasformarsi in un termine unico il polinomio

$$\frac{1}{\mu} N_n \left\{ \mu X'_1 dx'_1 + \mu X'_2 dx'_2 + \cdots\cdots\cdots + \mu X'_i dx'_i \right\}$$

ove μ è il solito fattore d' integrabilità. Sia f l' integrale del polinomio fra parentesi. Considerata la x'_{2i} come costante mancando nella (9) la dx'_{2i}, e la f come funzione delle variabili

$$x'_1 \;,\quad x'_2 \;,\ \cdots\cdots\ x'_i \;,\quad x'_{i+1} \;,\ \cdots\cdots\ x'_{2(i-1)} \;,\quad x'_{2(i-1)+1}$$

l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\mu} N_n \left\{ \mu X'_1 dx'_1 + \mu X'_2 dx'_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \mu X'_i dx'_i \right\} \\ + N_n X'_{i+1} dx'_{i+1} + \cdots\cdots + N_n X'_{2(i-1)} dx'_{2(i-1)} + H_n dx'_{2(i-1)+1} \end{array}\right\} = 0$$

sarà ridotta alla

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\mu}N_n\left\{df-\left(\frac{df}{dx'_{i+1}}\right)dx'_{i+1}-\left(\frac{df}{dx'_{i+2}}\right)dx'_{i+2}-\dots-\left(\frac{df}{dx'_{2(i-1)+1}}\right)dx'_{2(i-1)+1}\right\}\\ +N_nX'_{i+1}dx'_{i+1}+N_nX'_{i+2}dx'_{i+2}+\dots+N_nX'_{2(i-1)}dx'_{2(i-1)}+H_ndx'_{2(i-1)+1}\end{array}\right\}=0$$

Posto per H_n il valore $N_nX'_{2(i-1)+1}$ quale risulta dalla (18), art. I e diviso per N_n, si avrà l'equazione finale

$$\left.\begin{array}{r}df+\left(\mu X'_{i+1}-\left(\frac{df}{dx'_{i+1}}\right)\right)dx'_{i+1}+\dots+\left(\mu X'_{2(i-1)}-\left(\frac{df}{dx'_{2(i-1)}}\right)\right)dx'_{2(i-1)}\\ +\left(\mu X'_{2(i-1)+1}-\left(\frac{df}{dx'_{2(i-1)+1}}\right)\right)dx'_{2(i-1)+1}\end{array}\right\}=0$$

Sarà questa soddisfatta, o col supporre

$$df=0\,,\quad dx'_{i+1}=0\,,\;\dots\dots\; dx'_{2(i-1)+1}=0\,,$$

ovvero con un simil numero $= i$ di equazioni contenenti una funzione arbitraria ϕ risultanti dal già esposto processo, col supporre

$$f=\phi\left(x'_{i+1}\,,\quad x'_{i+2}\,,\;\dots\dots\; x'_{2(i-1)+1}\right).$$

Un tale andamento indica come si debba procedere pel caso in cui fosse $m>2i$.

7. Per venire ad esempj più speciali suppongasi nella (2) $m=4$, $i=3$. Sarà $m<2(i-1)$ ed il numero N di equazioni con cui è integrata l'equazione

$$X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3+X_4dx_4=0\,,$$

sarà dato da $N=m-(i-1)=2$.

Infatti la serie delle lettere si ridurrà in tal caso alla $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, d, ove le lettere critiche sono le sottosegnate. Il 1.° sistema ausiliario sarà dato da

$$dx_1:dx_2:dx_3:dx_4=\Delta\big(g(a=\zeta)\big):\Delta\big(g(b=\zeta)\big):\Delta\big(g(c=\zeta)\big):\Delta\big(g(d=\zeta)\big)$$

ossia da

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 = \Delta(\zeta^b c^d) : \Delta(a^\zeta c^d) : \Delta(a^o \zeta^h) : \Delta(a^b c^\zeta).$$

Ma pei criterj avverati essendo $\Delta(a^b c^\zeta) = o$ il sistema sarà incompleto e si dovrà perciò lasciar sussistere l'ultimo termine. Sia f l'integrale del trinomio

$$\mu X_1 dx_1 + \mu X_2 dx_2 + \mu X_3 dx_3$$

essendo μ il solito fattore d'integrabilità. Sarà

$$df = \mu X_1 dx_1 + \mu X_2 dx_2 + \mu X_3 dx_3 + \left(\frac{df}{dx_4}\right) dx_4 .$$

Quindi l'equazione finale

$$df + \left(\mu X_4 - \left(\frac{df}{dx_4}\right)\right) dx_4 = o$$

fatta di due termini sarà soddisfatta colle due equazioni

$$dx_4 = o \ . \qquad df = o \ ,$$

ossia colle $\qquad x_4 = \alpha_1 \ , \qquad f = \alpha_2$

essendo α_1, α_2 costanti arbitrarie: ovvero sarà soddisfatta con due equazioni ed una funzione arbitraria operando come si è fatto indietro.

Sia $m = 5$, $i = 3$. Essendo $m > 2(i-1)$ ed inoltre numero dispari, sarà $N = \frac{m+1}{2} = 3$.

Infatti essendo dispari il numero de' termini a cui si riduce la (2) converrà prima vedere se l'equazione condizionale è soddisfatta. Rappresentata con g' la serie

$$\underline{a} \ , \ \underline{b} \ , \ \underline{c} \ , \ \underline{d} \ , \ e$$

l'espressione dell'equazione condizionale sarà

$$\Delta(g' + \zeta^f) = \Delta(a^b c^d e^\zeta).$$

Questa semi-alternante fatta di 6 lettere, fra le quali sono critiche le 4 lettere a, b, c, ζ non sarà zero, giacchè per essere nulla deve contenere non più di una lettera estranea. L'ultimo termine adunque rimane nell'equazione finale che sarà così ridotta a tre termini, e quindi l'equazione, a cui si riduce la (2), sarà integrabile con tre equazioni.

Sia $m=6$, $i=3$. Essendo $m>2(i-1)$ sarà $N=\frac{m}{2}=3$. Infatti la serie delle lettere sarà $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, d, e, f ed il 1.° sistema ausiliario dipenderà dalle semi-alternanti

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta(\zeta^b c^d e^f), & \Delta(a^\zeta c^d e^f), & \Delta(a^b \zeta^d e^f) \\ \Delta(a^b c^\zeta e^f), & \Delta(a^b c^d \zeta^f), & \Delta(a^b c^d e^\zeta) \end{array}\right\} \quad (10)$$

nessuna delle quali essendo zero il sistema ausiliario sussiste. L'equazione sarà ridotta cogl'integrali del sistema a 5 termini, e saremo così nel caso precedente, in cui l'equazione finale si riduce a 3 termini. L'equazione pertanto a cui si riduce la (2) in questa ipotesi sarà integrabile con tre equazioni.

Sia ora $m=6$, $i=5$. Essendo $m<2(i-1)$, sarà $N=m-(i-1)=2$. Infatti la serie delle lettere sarà in questo caso

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \underline{e}\,,\ f$$

ed il 1.° sistema ausiliario conterrà le stesse semi-alternanti (10), le quali saranno zero contenendo od una sola o nessuna lettera estranea. Non ha quindi luogo alcuna trasformazione. L'ultimo termine rimane nell'equazione finale che sarà ridotta a due termini. Quindi l'equazione che deriva in questo caso dalla (2) sarà integrabile con due equazioni come si è trovato.

Per $i=5$, $m=7$, essendo $m<2(i-1)$ sarà $N=m-(i-1)=3$. Infatti si avrà la serie g' di lettere

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \underline{e}\,,\ f\,,\ g$$

ed essendo m dispari, converrà prima vedere se l'equazione condizionale è soddisfatta, ossia se la $\Delta(g'+\zeta) = \Delta(a^b c^d e^f g^\zeta)$ è zero. Essendo $2n = 8$ il numero delle lettere di questa semi-alternante, fra le quali un numero $j = 6$ essendo critiche, sarà pel § 2 $j > n+1$, e perciò sarà zero la semi-alternante ed avverata l'equazione condizionale. Si dovrà formare quindi il relativo sistema ausiliario. Ma questo contenendo le semi-alternanti

$$\Delta(g'-a) = \Delta(b^c d^e f^g)\ ,\quad \Delta(g'-b) = \Delta(a^c d^e f^g)\ ,\quad \Delta(g'-c) = \Delta(a^b d^e f^g)$$

$$\Delta(g'-d) = \Delta(a^b c^e f^g)\ ,\quad \Delta(g'-e) = \Delta(a^b c^d f^g)$$

$$\Delta(g'-f) = \Delta(a^b c^d e^g)\ ,\quad \Delta(g'-g) = \Delta(a^b c^d e^f)$$

delle quali le ultime due contenenti una sola lettera estranea sono zero, il sistema sarà incompleto, nè avendo luogo per questo caso la trasformazione, l'ultimo termine rimarrà nell'equazione finale. Ma per $m = 6$ riducendosi l'equazione finale del caso precedente ad un numero $= 2$ di termini, l'equazione finale del caso attuale consterà di tre termini. L'equazione a cui si riduce la (2) sarà dunque integrabile con tre equazioni come si è enunciato.

Per $i = 5$, $m = 8$, essendo $m = 2(i-1)$, sarà $N = m-(i-1) = 4$. Infatti si avrà la serie delle lettere

$$\underline{a}\ ,\ \underline{b}\ ,\ \underline{c}\ ,\ \underline{d}\ ,\ \underline{e}\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h$$

ed il 1.° sistema ausiliario conterrà le semi-alternanti di $2n = 8$ lettere

$$\Delta(\zeta^b c^d e^f g^h)\ ,\quad \Delta(a^\zeta c^d e^f g^h)\ ,\quad \Delta(a^b \zeta^d e^f g^h)\ ,\quad \Delta(a^b c^\zeta e^f g^h)$$

$$\Delta(a^b c^d \zeta^f g^h)\ ,\quad \Delta(a^b c^d e^\zeta g^h)\ ,\quad \Delta(a^b c^d e^f \zeta^h)\ ,\quad \Delta(a^b c^d e^f g^\zeta)$$

le tre ultime delle quali, essendo $j = 6$ e quindi $j > n+1$, saranno eguali a zero. Il sistema sarà incompleto. A più forte ragione lo saranno i sistemi secondarj, onde l' equazione finale consterà di 4 termini, e perciò con 4 equazioni sarà integrabile la proposta derivata dalla (2).

Per $i = 5$, $m = 9$, essendo $m > 2(i-1)$, sarà $N = \frac{m+1}{2} = 5$. Infatti si avrà la serie di lettere

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \underline{e}\,,\ f\,,\ g\,,\ h\,,\ l.$$

L' equazione condizionale

$$\Delta(g^j+\zeta) = \Delta(a^b c^d e^f g^h l^\zeta) = 0$$

non è soddisfatta, giacchè essendo $2n = 10$ il numero delle lettere di questa semi-alternante, fra le quali un numero $j = 6$ di critiche, sarà $j = n + 1$, e quindi non potrà essere zero la semi-alternante stessa. Rimarrà dunque nell' equazione finale l' ultimo termine. Siccome nel precedente caso di $m = 8$ l' equazione finale si riduceva a quattro termini, così in questo si ridurrà ad un numero $= 5$ di termini, e tale sarà il numero delle equazioni che integra la proposta.

Per $i = 5$, $m = 10$, essendo $m > 2(i-1)$, sarà $N = \frac{m}{2} = 5$. Di fatto la serie delle lettere sarà

$$\underline{a}\,,\ \underline{b}\,,\ \underline{c}\,,\ \underline{d}\,,\ \underline{e}\,,\ f\,,\ g\,,\ h\,,\ l\,,\ m$$

ed il 1.° sistema ausiliario conterrà le semi-alternanti di $2n = 10$ lettere

$$\Delta(\zeta^b c^d e^f g^h l^m)\,,\quad \Delta(a^\zeta c^d e^f g^h l^m)\,,\quad \Delta(a^b \zeta^d e^f g^h l^m)\,,\quad \Delta(a^b c^\zeta e^f g^h l^m)$$

$$\Delta(a^b c^d \zeta^f g^h l^m)\,,\quad \Delta(a^b c^d e^\zeta g^h l^m)\,,\quad \Delta(a^b c^d e^f \zeta^h l^m)$$

$$\Delta(a^b c^d e^f g^\zeta l^m)\,,\quad \Delta(a^b c^d e^f g^h \zeta^m)\,,\quad \Delta(a^b c^d e^f g^h l^\zeta)$$

nelle quali essendo $n = 5$ ed il numero delle critiche $j \gtreqless n + 1$, le semi-alternanti stesse pel § 2 non sono zero.

Sussiste perciò il 1.° sistema ausiliario, in forza del quale la proposta equazione si trasforma in altra di 9 termini. Questa pel caso antecedente si riduce ad un' equazione finale di 5 termini, onde la proposta sarà integrabile con 5 equazioni.

8. Il processo indicato ne' precedenti paragrafi sussiste nella ammessa condizione che i coefficienti pei quali è avverato il criterio siano tutti ordinati in principio dell' equazione proposta da integrarsi. Essendo quindi data un' equazione della forma (2), converrà ordinarla in modo che una tale condizione sia adempita. Per ottenerlo si disporranno tutte le equazioni dei criterj corrispondenti a tutti i coefficienti nel modo indicato all' art. V, e si osserverà quale è il massimo numero $= i$ dei coefficienti che adempiono le condizioni stesse. Il polinomio fatto di tali coefficienti, apponendo gl' indici $1, 2, 3, \ldots\ldots i$ alle variabili dei cui differenziali sono essi affetti, si porrà in principio dell' equazione, senza aver riguardo ad altri polinomj di un minor numero di termini i cui coefficienti adempissero pure i relativi criterj. Si riserberanno per le altre variabili gli indici superiori all' i^{mo}. Fatto un tale scambio d' indici a tutte le variabili che l' equazione contiene, si tratterà questa nel modo superiormente prescritto, come se i criterj fossero soltanto adempiti pel polinomio in questione di un numero $= i$ di termini.

Nel caso speciale però in cui l' equazione proposta si componesse di due o più polinomj per ciascun de' quali, oltre essere adempiti i relativi criterj, le variabili di un polinomio mancassero negli altri, si procederebbe allora nel seguente modo. Sia data, per esempio, l' equazione $P_1 + P_2 = 0$, in cui i due polinomj P_1, P_2 godono della proprietà sopr' accennata. Si chiami μ_1 il moltiplicatore che rende P_1 una differenziale esatta e sia μ_2 quello che rende tale il polinomio P_2. La proposta equazione, moltiplicata per $\mu_1 \mu_2$ e supposto $\int \mu_1 P_1 = \mathfrak{f}_1$, $\int \mu_2 P_2 = \mathfrak{f}_2$, diverrà

$$\mu_2 d\mathfrak{f}_1 + \mu_1 d\mathfrak{f}_2 = 0.$$

Sarà questa l' equazione finale alla quale si soddisfa o colle equazioni

$$f_1 = \alpha_1 \ , \qquad f_2 = \alpha_2$$

essendo α_1, α_2 due costanti arbitrarie, ovvero colle due

$$f_1 - \phi(f_2) = 0 \ , \qquad \mu_2\left(\frac{d\phi}{df_2}\right) + \mu_1 = 0$$

essendo ϕ una funzione arbitraria.

9. Quando in un' equazione della forma (2) il numero dei termini dato da m fosse maggiore di $2(i-1)$ ed i coefficienti sino all' i^{mo} inclusivo avverassero i criterj d' integrabilità, e fosse inoltre adempita qualche equazione condizionale al di là del termine $2(i-1)^{mo}$, dovrà la proposta stessa essere considerata come soggetta, rispetto a quest' ultima condizione, alle stesse modificazioni di cui si è parlato all' art. IV, ove si è supposto che i coefficienti rendessero soddisfatte alcune equazioni condizionali.

10. Quando sia adempita la condizione $\alpha^\beta = 0$ per tutti i valori che α, β assumono sostituendo ad esse le lettere di ciascuna combinazione a due a due della serie a, b, c, d, ... ω in numero $= i$, i criterj d' integrabilità di cui si è parlato indietro sono avverati rispetto al polinomio fatto di un numero $= i$ di termini. Un tale caso adunque sarà soggetto allo stesso processo indicato ne' precedenti paragrafi, non essendo questo che un caso particolare di quello già trattato. Il polinomio infatti divenendo per tal modo una differenziale esatta, il moltiplicatore diverrà in tale ipotesi superfluo, e si dovrà porre $\mu = 1$.

11. Se essendo avverata la condizione generica $\alpha^\beta = 0$ pei valori di α, β nati dalle $\frac{i(i-1)}{2}$ combinazioni a due a due, come nell' antecedente paragrafo, sia inoltre avverata per altre combinazioni non comprese nell' accennata serie di

lettere, tali relazioni ulteriori o non renderanno o renderanno per loro stesse insussistente od incompleto qualche sistema ausiliario. Nel 1.° caso si seguirà il processo dell' antecedente paragrafo e nel 2.°, stante l' avveramento contemporaneo di condizioni di diversa natura, si dovrà procedere come verrà indicato al § 4 del seguente articolo, ove l' esempio ivi dato servirà di norma in casi simili.

12. Un caso in cui rendesi insussistente il sistema ausiliario, e che è da riguardarsi quale condizione di natura diversa delle precedenti, è quello in cui la $\alpha^\beta = 0$ sia verificata per un valore fisso di β e per tutti i valori di α della serie totale di lettere comprese nella (2), art. III. Dall' ispezione del sistema (3) del citato articolo si rileva scomparire da esso la dx_μ. Ma per la proprietà $\alpha^\beta = -\beta^\alpha$ verificandosi anche $\beta^\alpha = 0$, la μ^{esima} equazione si ridurrebbe a $\beta^\zeta = 0$, ossia alla $X_\mu = 0$ contro l' ipotesi, non ammettendosi per ora mancanza di termini nella proposta equazione. Questo caso si verifica quando la proposta contenga un termine $X_\mu dx_\mu$ tale, che la X_μ sia una costante e la variabile x_μ non entri negli altri coefficienti. Quando ciò si verifichi, si porrà in fine alla proposta un tal termine, che lasciato intatto, ed eseguite le trasformazioni effettuabili sul restante polinomio, si conserverà nell' equazione finale. Lo stesso avrà luogo quando più termini di tal fatta esistano nella proposta equazione.

VII.

Equazioni incomplete.
Applicazione alle equazioni differenziali parziali.

1. Sia proposta un' equazione differenziale ordinaria fra un numero $m > n$ di variabili della forma

$$\bar{X}_1 dx_1 + \bar{X}_2 dx_2 + \cdots + \bar{X}_n dx_n + X_{n+1} dx_{n+1} + \cdots + X_m dx_m = 0 \quad (1)$$

ove sia $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 = \dots\dots = \bar{X}_n = 0$ (2)

Ogni equazione mancante di un certo numero di termini si dirà *Incompleta* e verrà sempre rappresentata sotto la forma (1), riducendo in principio dell' equazione stessa le differenziali affette da coefficienti zero. Si distingueranno nella (1) i due seguenti casi: 1.° di $m =$ ovvero $< 2n$, 2.° di $m = 2(n+\mu)$ per tutti i valori di μ escluso lo zero, e di $m = 2(n+\mu)+1$ per tutti i valori di μ compreso lo zero.

2. Essendo $m =$ ovvero $< 2n$, nessun sistema ausiliario è sussistente. La proposta equazione (1) è essa stessa l' equazione finale ed ha per integrale un sistema di $m-n$ equazioni contenenti altrettante costanti arbitrarie od in lor vece una funzione arbitraria.

Infatti sia primieramente $m = 2n$, si stabilisca il 1.° sistema ausiliario e si rifletta che per tutti i valori di α, β compresi nella serie $1, 2, 3, \dots\dots n$ sarà sempre $(\alpha, \beta) = 0$. Considerando del sistema stesso fatto di $2n-1$ equazioni le sole prime n equazioni ed avuto riguardo alle (2), tali equazioni forniranno il sistema

$$
\begin{array}{l}
(1, n+1)dx_{n+1} + (1, n+2)dx_{n+2} + \dots\dots + (1, 2n)dx_{2n} = 0 \\
(2, n+1)dx_{n+1} + (2, n+2)dx_{n+2} + \dots\dots + (2, 2n)dx_{2n} = 0 \\
\vdots \\
(n, n+1)dx_{n+1} + (n, n+2)dx_{n+2} + \dots\dots + (n, 2n)dx_{2n} = 0
\end{array}
$$

In questo sistema non verificandosi la condizione diagonale, comunque sia n, pari o dispari, la risultante dell' eliminazione delle n differenziali fornirà una relazione fra i coefficienti che dovrebbe avverarsi acciò il sistema non sia incompatibile. Non essendosi ammesse altre condizioni fra i coefficienti della proposta, tranne quelle date dalle (2), ne segue che il sistema ausiliario in questione sarà insussistente.

Tale conclusione avrà luogo a più forte ragione quando un maggior numero di coefficienti fosse zero, ossia, ciò che è lo stesso, quando fosse $m < 2n$. Sarà quindi insussistente ogni sistema che si volesse stabilire per trasformare il polinomio della (1), ommessi uno o più de' suoi ultimi termini. Dunque l'equazione proposta, non essendo suscettibile di alcuna trasformazione o riduzione, è l'equazione finale stessa. Siccome questa, ommesse le quantità nulle, consta di $m-n$ termini, così sarà essa integrabile col porre

$$dx_{n+1}=0\ ,\quad dx_{n+2}=0\ ,\ \ldots\ldots\ dx_m=0$$

i cui integrali introducono $m-n$ costanti arbitrarie, ovvero supposta una delle variabili, per esempio la x_{n+1} funzione arbitraria delle altre $x_{n+2}\ ,\ x_{n+3}\ ,\ \ldots\ldots\ x_m$, sarà integrabile con un numero $m-n$ di equazioni ottenute collo stesso processo seguito nei precedenti articoli con cui si ottenne l'ulteriore trasformazione dell'equazione finale.

3. Essendo $m=2(n+\mu)$, ovvero $m=2(n+\mu)+1$, potendo in questo 2.° caso essere $\mu=0$, sussisteranno i sistemi ausiliarj atti a ridurre la proposta ad un'equazione finale contenente un numero di termini $=n+\mu$ nel 1.° caso ed $=n+\mu+1$ nel 2.°, e tale sarà il numero delle equazioni di cui consterà il sistema integrale della proposta (1).
Di fatti suppongasi primieramente $\mu=1$ onde sia $m=2(n+1)$. Si formi l'intero sistema ausiliario, ritenendovi le $\bar{X}_1\ ,\ \bar{X}_2\ ,\ \ldots\ldots\ \bar{X}_n$ come se non fossero zero. Si riguardi la proposta come quell'equazione in cui, essendo n il numero delle lettere critiche e $2(n+1)$ il numero totale delle lettere, sono verificati i criterj d'integrabilità rispetto ai primi n coefficienti. Supposta g la serie delle $2(n+1)$ lettere $a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ x,\ y,\ z,$ il 1.° sistema ausiliario conterrà le semi-alternanti

$$\Delta\big(g(a=\zeta)\big)\ ,\quad \Delta\big(g(b=\zeta)\big)\ ,\ \ldots\ldots\ \Delta\big(g(z=\zeta)\big).$$

Si vuol provare che nessuna di queste semi-alternanti è zero e che quindi il sistema ausiliario sussiste. Si sviluppino esse infatti a seconda della lettera ζ. Si avrà, per esempio, dall' ultima

$$\Delta\big(g(z=\zeta)\big) = y^{\zeta}\Delta(a^b c^d \ldots v^x) - x^{\zeta}\Delta(a^b c^d \ldots v^y) - \ldots - a^{\zeta}\Delta(y^b c^d \ldots v^x)$$

Siccome si ha

$$a^{\zeta} = b^{\zeta} = c^{\zeta} = \ldots\ldots = \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \ldots\ldots = \bar{X}_n = 0\,,$$

così gli ultimi n termini del precedente sviluppo scompariranno; ma le Δ che rimangono, contenendo un numero $= 2(n+1) - 2 = 2n$ totale di lettere, fra le quali un numero $= n$ di critiche, non saranno zero dietro quanto si è mostrato al § 2 del precedente articolo.

Parimente la prima semi-alternante $\Delta\big(g(a=\zeta)\big)$ sviluppata per la ζ darà

$$\Delta\big(g(a=\zeta)\big) = \zeta^b\Delta(c^d e^f \ldots v^x y^z) - \zeta^c\Delta(b^d e^f \ldots v^x y^z) - \zeta^d\Delta(c^b e^f \ldots v^x y^z)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \zeta^z\Delta(c^d e^f \ldots v^x y^b)$$

I primi $n-1$ termini di questo sviluppo scompajono per essere

$$\zeta^b = -b^{\zeta} = -\bar{X}_2 = 0\;, \qquad \zeta^c = -c^{\zeta} = -\bar{X}_3 = 0\ldots\ldots$$

Ma le semi-alternanti contenute negli altri termini composte di $2n$ lettere, fra le quali un numero $= n-1$ di critiche, non saranno zero a più forte ragione. Lo stesso avrà luogo per le semi-alternanti intermedie fra la prima e l' ultima.

Seguendo lo stesso processo, nell' ipotesi di $\mu > 1$, risulterà *a fortiori* che i sistemi ausiliarj relativi sussistono, in quanto il numero delle lettere critiche sarà in tal caso minore in confronto del numero totale delle lettere contenute nelle semi-alternanti di cui constano i sistemi stessi. Sono dunque sussistenti i sistemi ausiliarj per tutti i valori di μ escluso, pel § 2, il valore $\mu = 0$. Saranno dunque sussistenti i sistemi pel caso che m abbia i valori

$$2n + 2 \;,\quad 2n + 4 \;,\quad 2n + 6 \;,\; \ldots\ldots\; 2n + 2\mu.$$

Ne deriva quindi che le equazioni condizionali corrispondenti ai valori di m dati da

$$2n + 1 \;,\quad 2n + 3 \;,\quad 2n + 5 \;,\; \ldots\ldots\; 2n + 2\mu - 1 \;,$$

le quali equivalgono alle semi-alternanti che entrerebbero nei valori delle ultime differenziali

$$dy_{2n+2} \;,\quad dx_{2n+4} \;,\quad dx_{2n+6} \;,\; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

non sono adempite. Quindi la proposta equazione dovrà trattarsi come si è fatto nel metodo generale in cui non si ammettevano relazioni fra i coefficienti, sino a che sarà trasformato il suo primo membro in un polinomio, il quale oltre contenere μ, ovvero $\mu + 1$ termini secondo che sarà $m = 2n + 2\mu$, ovvero $m = 2n + 2\mu + 1$, conterrà altri n termini, non contando i primi in numero $= n$ che sono per sè stessi eguali a zero, perchè affetti dai coefficienti (2). Questa sarà l'equazione finale contenente $n + \mu$ termini nel 1.° caso, ed $n + \mu + 1$ nel 2.°, e quindi sarà integrabile la proposta equazione con un simil numero d'equazioni contenenti o altrettante costanti arbitrarie od una funzione arbitraria.

Sarà bene osservare che la dimostrazione data al § 2 può essere anche supplita dalla precedente, essendo facile il mostrare che tutte le semi-alternanti in quell'ipotesi sono zero e le equazioni fornite dai sistemi ausiliarj riducendosi tutte a $0 = 0$, i sistemi stessi sono insussistenti.

4. Si è trattato sin quì di relazioni che godono ancora di una certa generalità. Ma nel caso speciale di un'equazione da integrarsi può accadere, o che le relazioni stesse trattate separatamente si avverino congiuntamente, ovvero che esistano altre

relazioni, in forza delle quali i sistemi ausiliarj o introducendo nuove relazioni fra i coefficienti divengano per tal modo insussistenti, o riducendo a zero alcune delle differenziali, divengano incompleti, o finalmente per equazioni condizionali soddisfatte, oltre quelle già discusse, divengano o incompleti od insussistenti. Senza entrare in troppo minute particolarità, qualora alcuno de' precedenti casi si avveri, si dovranno avere sempre presenti quelle avvertenze che si sono usate nei casi analoghi già trattati, i quali indicano abbastanza per sè stessi il modo di procedere in casi simili. Si dovrà per norma generale ritenere che quando per speciali relazioni un sistema ausiliario diventa insussistente od incompleto, si deve dal polinomio da trasformarsi escludere uno o più termini secondo che ad uno o più termini è dovuta l'insussistenza del sistema stesso, i quali posti in fine dell'equazione devono rimanere intatti nella equazione finale. Si dovrà inoltre ritenere che quando più condizioni di questa specie si avverano congiuntamente, scelta quella che per un maggior numero di termini rende insussistenti i sistemi, e determinato un tal numero, le altre condizioni, quantunque potessero per avventura rendere insussistenti i sistemi anche per un ulterior numero di termini non potranno però diminuire il numero superiormente determinato. Queste avvertenze saranno da usarsi in tutte le espressioni o polinomj secondarj da trasformarsi. Da ciò risulta evidente con quanta cautela e con quali moltiplici avvertenze sia da usarsi un tal metodo d'integrazione, quando sia da cercarsi quel sistema integrale che contenga il minor numero possibile di equazioni. Senza le quali avvertenze potrebbe una soluzioue ottenuta ritenersi erroneamente per la più generale, mentre un'altra possa trovarsi che, per esser fatta di un minor numero di equazioni, godesse di maggiore generalità.

Giova avvertire del resto che quando in una particolare questione non trattisi di ottenere il minor numero di equazioni, si potrà sempre limitare le trasformazioni quanto si vuole ed arrestarsi a quell' espressione finale che più ci piace, dalla quale, poste a zero le differenziali dei valori iniziali pei quali è ordinata, nascerà sempre un sistema integrale soddisfacente la data equazione. E sebbene il numero delle ottenute equazioni non sia il minimo, con cui possa soddisfarsi la proposta, e la soluzione non goda perciò di un' assoluta generalità, potrà godere però di quella generalità che comporta la natura particolare della questione che trattasi di risolvere.

5. Per dare un esempio dell' integrazione di un' equazione incompleta e mostrare inoltre come si proceda nel caso in cui condizioni di diversa natura siano contemporaneamente adempite, si sceglierà quell' equazione che risulta dà una proposta equazione differenziale parziale di 1.° ordine. Da tale applicazione si vedrà in pari tempo come la soluzione di un' equazione differenziale parziale di 1.° ordine fra un numero qualunque di variabili si desuma dall' integrazione di un' equazione differenziale ordinaria ed incompleta.

Supposto nel § 3 $\mu = 1$, sarà $m = 2(n+1)$. Fatto quindi $2(n+1) = 2i$, il numero de' termini mancanti sarà dato da $n = i - 1$ e la (1) diverrà

$$\bar{X}_1 dx_1 + \bar{X}_2 dx_2 \cdots\cdots + \bar{X}_{i-1} dx_{i-1} + X_i dx_i \cdots\cdots + X_{2i} dx_{2i} = 0 \qquad (2)$$

Risulta dal § 3 che in questo caso sussiste il solo 1.° sistema ausiliario e che l' equazione trasformata che ne risulta è essa stessa l' equazione finale la quale, tolti i termini affetti da coefficienti zero, consta di un numero $= (2i-1) - (i-1) = i$ di termini. Quindi l' equazione (2) è integrabile con un sistema di un numero $= i$ di equazioni.

6. Sia data ora un' equazione differenziale parziale di 1.° ordine espressa da

$$\psi\left(x_i\,, \quad x_{i+1}\,, \quad x_{i+2}\,, \cdots\cdots x_{2i}\,, \quad p_1\,, \quad p_2\,, \cdots\cdots p_i\right) = 0 \qquad (3)$$

ove la x_i sia funzione delle variabili indipendenti x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_{2i} in numero $= i$ e le p_1, p_2, ... p_i rappresentino le differenziali parziali della x_i rispetto alle variabili indipendenti. Suppongasi cavata dalla (3) la p_i e posto

$$p_1 = x_1 \;,\quad p_2 = x_2 \;,\quad p_3 = x_3 \;,\; \ldots\ldots\ldots \; p_{i-1} = x_{i-1}$$

sia essa determinata dalla

$$p_i = F\left(x_1 \;,\quad x_2 \;, \ldots\ldots\ldots x_{i-1} \;,\quad x_i \;,\quad x_{i+1} \;, \ldots\ldots\ldots x_{2i}\right) \tag{4}$$

Siccome è indifferente il dedurre dalla (3) piuttosto l'una che l'altra delle differenziali parziali, così si dovrà da principio scegliere quella differenziale parziale che può essere con maggiore semplicità cavata dalla (3), e quindi, per servire all'uniformità, sia essa designata da p_i disponendo opportunamente degl'indici di cui ci siam sempre serviti per designar le variabili.

Essendo la x_i funzione delle variabili indipendenti x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_{2i}, pigliandone la differenziale totale, si avrà

$$dx_i = p_1 dx_{i+1} + p_2 dx_{i+2} + \ldots\ldots\ldots + p_{i-1} dx_{2i-1} + p_i dx_{2i} \,,$$

ossia indicando con F il valore di p_i dato dalla (4), sarà

$$-dx_i + x_1 dx_{i+1} + x_2 dx_{i+2} \ldots\ldots + x_{i-1} dx_{2i-1} + F dx_{2i} = 0 \tag{5}$$

Dall'integrazione di questa equazione a differenziali ordinarie si dovrà desumere, come siegue, la soluzione della proposta equazione differenziale parziale.

Considerata la (5) come un'equazione incompleta, mancando in essa i termini contenenti le differenziali delle variabili x_1, x_2, ... x_{i-1}, se si completa, diverrà

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_1 dx_1 + \bar{X}_2 dx_2 + \bar{X}_3 dx_3 + \ldots\ldots + \bar{X}_{i-1} dx_{i-1} - dx_i \\ + x_1 dx_{i+1} + x_2 dx_{i+2} + x_3 dx_{i+3} + \ldots\ldots + x_{i-1} dx_{2i-1} + F dx_{2i} \end{array}\right\} = 0 \tag{6}$$

ove sarà $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_3 = \ldots\ldots\ldots = \bar{X}_{i-1} = 0.$

È questa un caso particolare dell' equazione (2) dalla quale deriva ammettendo la restrizione che i coefficienti X_i, X_{i+1}, ... X_{2i+1} in luogo di essere funzioni qualunque di tutte le variabili, si riducano alle sole variabili

$$X_i = -1\,,\quad X_{i+1} = x_1\,,\quad X_{i+2} = x_2\,,\ \ldots\ldots\ X_{2i-1} = x_{i-1} \tag{7}$$

la sola $X_{2i} = F$ mantenendosi nella sua generalità funzione di tutte le $2i$ variabili

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_{i-1}\,,\quad x_i\,,\quad x_{i+1}\,,\ \ldots\ldots\ x_{2i}.$$

L' equazione (2) pertanto in forza di tali valori particolari dei coefficienti X_i, X_{i+1}, ... X_{2i-1} è soggetta alla duplice condizione di essere un' equazione incompleta e di contenere un polinomio che è una differenziale esatta rispetto ad un certo numero di variabili. Ciò che si può esprimere anche dicendo che la (2) è un' equazione nella quale, oltre la deficienza di alcuni termini, sono zero alcuni simboli (α, β). Considerate separatamente queste due condizioni, per la 1.ª risulta che, essendo $i-1$ il numero de' termini mancanti, i sistemi ausiliarj relativi ad un polinomio sono, come si è già detto, insussistenti pel polinomio esteso sino al termine $2(i-1)^{\text{mo}}$ inclusivo, e per la 2.ª risulta parimente che, essendo avverati i criterj d' integrabilità per un numero $= i$ di coefficienti, saranno (art. VI) insussistenti i sistemi ausiliarj relativi al polinomio esteso sino al $2(i-1)^{\text{mo}}$ termine inclusivo. Dunque dietro i riflessi del § 4 i sistemi saranno al certo insussistenti sino all' indicato termine $2(i-1)^{\text{mo}}$ inclusivo. Resterà a vedersi se la contemporanea sussistenza delle due accennate condizioni possa rendere insussistente un sistema relativo ad un polinomio di un maggior numero di termini. Si ammetta, ciò che si dimostrerà nel seguente paragrafo, che il 1.° sistema ausiliario per l' intero polinomio di $2i$ termini, non ostante la duplice condizione avverata, sia sussistente. Ne deriva che l' equazione condizionale relativa al polinomio di un numero dispari $2i-1$ di termini non è verificata, e quindi che l' equazione diminuita dell' ultimo termine, in cui la proposta si trasforma in forza del 1.° sistema ausiliario, sarà essa stessa l'equazione finale, alla quale si dovrà soddisfare (nei due modi più volte accennati) con un sistema di un numero $2i-1$ di equazioni.

7. Per dimostrare la sussistenza del 1.° sistema ausiliario in discorso e presentarlo sotto la forma più semplice, senza ricorrere alle riduzioni che in forza delle due ammesse condizioni subirebbero le relative semi-alternanti di cui esso consta, si riprenda invece il sistema (13), art. I. Postovi $n=i$, fatto

$$X_1 = \bar{X}_1\ ,\quad X_2 = \bar{X}_2\ ,\ \ldots\ldots\ X_{i-1} = \bar{X}_{i-1} \qquad (8)$$

ed aggiuntavi l' equazione (5), si avrà primieramente il sistema ausiliario competente all' equazione proposta (2). Quindi un coefficiente generico della 1.ª equazione di tal sistema, sarà $(1\ ,\ \alpha)$, ove la α assumerà tutti i valori $1, 2, 3, \ldots\ldots 2i$. Ammesse le (7), (8) è chiaro che per tutti i suddetti valori di α, tranne per $\alpha = i+1$, $\alpha = 2i$, sarà $(1\ ,\ \alpha) = 0$, e la 1.ª equazione del sistema sarà primieramente

$$(1\ ,\ i+1)dx_{i+1} + (1\ ,\ 2i)dx_{2i} = \theta\bar{X}_1.$$

Quindi

$$\left(\frac{d\bar{X}_1}{dx_{i+1}} - \frac{dX_{i+1}}{dx_1}\right)dx_{i+1} + \left(\frac{d\bar{X}_1}{dx_{2i}} - \frac{dX_{2i}}{dx_1}\right)dx_{2i} = 0\ ,$$

ossia

$$\frac{dX_{i+1}}{dx_1}dx_{i+1} + \frac{dX_{2i}}{dx_1}dx_{2i} = 0$$

e finalmente

$$dx_{i+1} + \left(\frac{dF}{dx_1}\right)dx_{2i} = 0. \qquad (9)$$

I simboli $(2, \alpha)$ della 2.ª equazione del sistema saranno tutti zero, tranne per $\alpha = i+2$, $\alpha = 2i$. Quindi la 2.ª equazione diverrà successivamente

$$(2, i+2)dx_{i+2} + (2, 2i)dx_{2i} = 0,$$

$$\left(\frac{d\bar{X}_2}{dx_{i+2}} - \frac{dX_{i+2}}{dx_2}\right)dx_{i+2} + \left(\frac{d\bar{X}_2}{dx_{2i}} - \frac{dX_{2i}}{dx_2}\right)dx_{2i} = 0,$$

$$dx_{i+2} + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)dx_{2i} = 0. \qquad (10)$$

Avuto sempre riguardo alle (7), (8) ed alla $X_{2i} = F$, si otterranno le prime $i-1$ equazioni del sistema, che raccolte saranno espresse da

$$\left.\begin{array}{l} dx_{i+1} + \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)dx_{2i} = 0 \\[2ex] dx_{i+2} + \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right)dx_{2i} = 0 \\[2ex] dx_{i+3} + \left(\dfrac{dF}{dx_3}\right)dx_{2i} = 0 \\ \vdots \\ dx_{2i-1} + \left(\dfrac{dF}{dx_{i-1}}\right)dx_{2i} = 0 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Si considerino ora le restanti equazioni in numero $= i$ provenienti dal sistema (13), art. I. Il coefficiente generico della 1.ª di queste sarà espresso da (i, α), assumendo la α tutti i valori $1, 2, 3, \ldots\ldots 2i$. Ma per tutti questi valori di α, tranne per $\alpha = 2i$, si avrà $(i, \alpha) = 0$. L'equazione in discorso si ridurrà quindi alla

$$\left(\frac{dX_i}{dx_{2i}} - \frac{dX_{2i}}{dx_i}\right)dx_{2i} = \theta X_i,$$

ossia alla $$-\left(\frac{dF}{dx_i}\right)dx_{2i} = \theta X_i.$$

Il coefficiente generico della 2.ª delle anzidette equazioni sarà espresso da $(i+1, \alpha)$ per tutti i valori di α come sopra. Ma si avrà parimente $(i+1, \alpha) = 0$ per tutti i valori di α, tranne per $\alpha = 1$, $\alpha = 2i$. Tale equazione sarà ri dotta alla

$$\left(\frac{dX_{i+1}}{dx_1} - \frac{d\bar{X}_1}{dx_{i+1}}\right)dx_1 + \left(\frac{dX_{i+1}}{dx_{2i}} - \frac{dX_{2i}}{dx_{i+1}}\right)dx_{2i} = \theta X_{i+1},$$

ossia alla $$dx_1 - \left(\frac{dF}{dx_{i+1}}\right)dx_{2i} = \theta x_1.$$

Colle stesse avvertenze si troverà la 3.ª di queste equazioni espressa da

$$dx_2 - \left(\frac{dF}{dx_{i+2}}\right)dx_{2i} = \theta x_2$$

e così di seguito procedendo si troveranno tutte le equazioni che raccolte saranno espresse da

$$\left.\begin{array}{r}
-\left(\frac{dF}{dx_i}\right)dx_{2i} = \theta X_i \\[2ex]
dx_1 - \left(\frac{dF}{dx_{i+1}}\right)dx_{2i} = \theta x_1 \\[2ex]
dx_2 - \left(\frac{dF}{dx_{i+2}}\right)dx_{2i} = \theta x_2 \\[2ex]
dx_3 - \left(\frac{dF}{dx_{i+3}}\right)dx_{2i} = \theta x_3 \\
\vdots \\
dx_{i-1} - \left(\frac{dF}{dx_{2i-1}}\right)dx_{2i} = \theta x_{i-1}
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Se il valore di θ cavato dalla 1.ª di queste (12) si pone nelle restanti equazioni, avuto riguardo alla $X_i = -1$ e vi siano aggregate le (11), il sistema totale (13), (15) dell'art. I sarà ridotto, stante le ammesse relazioni, a

$$\left.\begin{array}{ll}
dx_1 - \left\{\left(\frac{dF}{dx_{i+1}}\right) - x_1\left(\frac{dF}{dx_i}\right)\right\}dx_{2i} = 0\,, & dx_{i+1} + \left(\frac{dF}{dx_1}\right)dx_{2i} = 0 \\
dx_2 - \left\{\left(\frac{dF}{dx_{i+2}}\right) - x_2\left(\frac{dF}{dx_i}\right)\right\}dx_{2i} = 0\,, & dx_{i+2} + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)dx_{2i} = 0 \\
dx_3 - \left\{\left(\frac{dF}{dx_{i+3}}\right) - x_3\left(\frac{dF}{dx_i}\right)\right\}dx_{2i} = 0\,, & dx_{i+3} + \left(\frac{dF}{dx_3}\right)dx_{2i} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
dx_{i-1} - \left\{\left(\frac{dF}{dx_{2i-1}}\right) - x_{i-1}\left(\frac{dF}{dx_i}\right)\right\}dx_{2i} = 0\,, & dx_{2i-1} + \left(\frac{dF}{dx_{i-1}}\right)dx_{2i} = 0
\end{array}\right\} \quad (13)$$

$$dx_i + \left\{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)x_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)x_2 + \left(\frac{dF}{dx_3}\right)x_3 + \cdots\cdots + \left(\frac{dF}{dx_{i-1}}\right)x_{i-1} - F\right\}dx_{2i} = 0 \quad (14)$$

ove la (14) è quella che tien luogo della (5) che doveva aggregarsi come si è detto. Risulta questa moltiplicando la 1.ª della 2.ª colonna verticale delle (13) per x_1, la 2.ª per x_2, e così di seguito, e l'ultima per x_{i-1}. La loro somma darà

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{x_1\left(\frac{dF}{dx_1}\right) + x_2\left(\frac{dF}{dx_2}\right) + \cdots\cdots\cdots + x_{i-1}\left(\frac{dF}{dx_{i-1}}\right)\right\}dx_{2i} \\
+ x_1 dx_{i+1} + x_2 dx_{i+2} + \cdots\cdots\cdots + x_{i-1} dx_{2i-1}
\end{array}\right\} = 0$$

ove la 2.ª linea, in forza della (5), si cambia in $dx_i - F dx_{2i}$ e si ottiene la (14). Il sistema totale (13), (14) fatto di $2i-1$ equazioni differenziali fra $2i$ variabili costituisce il cercato sistema ausiliario da integrarsi, da cui dipende l'integrazione della (5). Chiamati quindi

$$\chi_1\ ,\quad \chi_2\ ,\quad \chi_3\ ,\ \ldots\ldots\ \chi_{i-1}\ .\quad \chi_i\ ,\quad \chi_{i+1}\ ,\ \ldots\ldots\ \chi_{2i-1}$$

i coefficienti della dx_{2i} nelle rispettive equazioni della 1.ª colonna verticale delle (13), nella (14) ed in quelle della 2.ª colonna verticale delle (13), si otterrà il sistema sotto forma di proporzione continua

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : \ldots : dx_{2i-1} : dx_{2i} = \chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \ldots : \chi_{2i-1} : \chi_{2i} \qquad (15)$$

ove si è introdotto per la simetria $\chi_{2i} = 1$. Il sistema (15) terrà luogo del sistema (13), (14).

8. Suppongasi di aver ottenute le $2n-1$ equazioni integrali del 1.° sistema ausiliario espresse per valori iniziali. Si determinino con esse i valori delle

$$x'_1\ ,\quad x'_2\ ,\ \ldots\ldots\ x'_{i-1}\ ,\quad x'_i\ ,\quad x'_{i+1}\ ,\quad x'_{i+2}\ ,\ \ldots\ldots\ x'_{2i-1}$$

in funzione delle $2i$ variabili x_1 , x_2 , ... x_i , ... x_{2i} ed espresse tali funzioni genericamente con f_α risulti

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = f_{i+1}\ ,\quad x'_2 = f_{i+2}\ ,\quad x'_3 = f_{i+3}\ ,\ \ldots\ldots\ x'_{i-1} = f_{2i-1} \\ x'_i = f_1\ ,\quad x'_{i+1} = f_2\ ,\quad x'_{i+2} = f_3\ ,\ \ldots\ldots\ x'_{2i-1} = f_i \end{array}\right\} \qquad (16)$$

In forza degl' integrali del sistema ausiliario l' equazione proposta (2), ommessi i termini affetti da coefficienti zero, si riduce alla

$$X'_i dx'_i + X'_{i+1} dx'_{i+1} + X'_{i+2} dx'_{i+2} + \ldots\ldots + X'_{2i-1} dx'_{2i-1} = 0 \qquad (17)$$

Questa equazione fatta di un numero $= i$ di termini è l'equazione finale cercata, alla quale si soddisfa nei due seguenti modi:

1.° Ponendo

$$dx'_i = 0\ ,\quad dx'_{i+1} = 0\ ,\quad dx'_{i+2} = 0\ ,\ \ldots\ldots\ dx'_{2i-1} = 0$$

si avrà

$$x'_i = \alpha_1\ ,\quad x'_{i+1} = \alpha_2\ ,\quad x'_{i+2} = \alpha_3\ ,\ \ldots\ldots\ x'_{2i-1} = \alpha_i$$

ove le α_1, α_2, ... α_i saranno costanti. Quindi per la 2.ª linea delle (16) si avranno le

$$f_1 = \alpha_1 , \quad f_2 = \alpha_2 , \quad f_3 = \alpha_3 , \ldots\ldots\ldots f_i = \alpha_i \qquad (18)$$

che saranno le equazioni finite fra le $2i$ variabili ed un numero $= i$ di costanti, e nelle quali il valore x'_{2i} da cui dipendono i valori iniziali potrà farsi zero.

2.° Ponendo

$$f_1 = \phi(f_2 , \quad f_3 , \ldots\ldots\ldots f_i)$$

da cui

$$df_1 = \left(\frac{d\phi}{df_2}\right)df_2 + \left(\frac{d\phi}{df_3}\right)df_3 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{d\phi}{df_i}\right)df_i$$

la (17) si trasformerà nella

$$\left(X_i'\left(\frac{d\phi}{df_2}\right)+X'_{i+1}\right)df_2+\left(X_i'\left(\frac{d\phi}{df_3}\right)+X'_{i+2}\right)df_3\ldots+\left(X_i'\left(\frac{d\phi}{df_i}\right)+X'_{2i-1}\right)df_i = 0$$

onde sarà soddisfatta la proposta (2) col sistema di un numero $= i$ di equazioni

$$f_1 - \phi(f_2 , \quad f_3 , \ldots\ldots\ldots f_i) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} X_i'\left(\frac{d\phi}{df_2}\right) + X'_{i+1} = 0 \\ X_i'\left(\frac{d\phi}{df_3}\right) + X'_{i+2} = 0 \\ \vdots \\ X_i'\left(\frac{d\phi}{df_i}\right) + X'_{2i-1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

ove nelle diverse X' saranno da sostituirsi ai $2n-1$ valori iniziali x'_1, x'_2, ... x'_{2i-1}, che esse in generale contengono, le loro espressioni desunte dagl' integrali del sistema ausiliario in funzione delle variabili originarie x_1, x_2, ... x_{2i-1}, x_{2i} e del valore iniziale x'_{2i} che potrà farsi $=0$.

Ma nel caso attuale le X'_{i+1}, X'_{i+2}, ... X'_{2i-1} sono i valori iniziali delle stesse x_1, x_2, ... x_{i-1}, onde per essere

$$X_i' = -1 \ , \quad X'_{i+1} = x'_1 \ , \quad X'_{i+2} = x'_2 \ , \ \ldots\ldots\ X'_{2i-1} = x'_{i-1}$$

le (19) diventano

$$\mathrm{f}_1 = \phi(\mathrm{f}_2 \ , \ \mathrm{f}_3 \ , \ldots\ldots \mathrm{f}_i) \ , \quad \frac{d\phi}{d\mathrm{f}_2} = \mathrm{f}_{i+1} \ , \quad \frac{d\phi}{d\mathrm{f}_3} = \mathrm{f}_{i+2} \ ; \ \ldots\ldots \frac{d\phi}{d\mathrm{f}_i} = \mathrm{f}_{2i-1} \qquad (20)$$

Se ora col mezzo delle equazioni (18) in numero $=i$ si eliminano le $i-1$ differenziali parziali

$$p_1 = x_1 \ , \quad p_2 = x_2 \ , \quad p_3 = x_3 \ , \ \ldots\ldots\ p_{i-1} = x_{i-1} \qquad (21)$$

che esse contengono, si ottiene un' equazione sola fra la variabile principale x_i e le variabili indipendenti x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_{2i} in numero $=i$ ed altrettante costanti arbitrarie che sarà una soluzione completa dell' equazione (3). Se invece si eliminano le stesse differenziali parziali col sistema (20), ove non entra la p_i, se non quale funzione delle altre data dalla (4), si otterrà un' equazione unica contenente una funzione arbitraria che fornirà la soluzione generale.

L' equazione (3) non è più d' uopo che concorra a questa eliminazione essendosi essa già impiegata colla (4) per esprimere la

$$X_{2i} = p_i = F\Big(x_i \ , \ x_{i+1} \ , \ldots\ldots\ x_{2i} \ , \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ldots\ldots\ x_{i-1}\Big)$$

in funzione delle altre variabili. L' influenza della (3) si esercita soltanto sul sistema ausiliario (15) ove entra la X_{2i}, ossia la F desunta dalla (3).

Qualora però non si volesse da principio cavare dalla proposta (3) il valore di p_i, ma ridurre alle equazioni finali l'eliminazione della stessa p_i, allora si sostituirà nelle trovate equazioni (13), (14) la p_i alla F. Quindi osservando essere

$$\left(\frac{dp_i}{dx'_\alpha}\right) = -\left(\frac{d\psi}{dx_\alpha}\right) : \left(\frac{d\psi}{dp_i}\right),$$

per tutti i valori di α della serie

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ i-1,\ i,\ i+1,\ \ldots\ldots,\ 2i-1,$$

si dovrà al risultante sistema di $2i-1$ equazioni aggregare la proposta (3) e con queste $2i$ equazioni eliminare la p_i, onde avere il sistema ausiliario di $2i-1$ equazioni da integrarsi.

Quì parimente, in luogo di determinare gl' integrali del sistema (15), si potranno cercare (come si è ammesso al § 12, art. III, e come verrà dimostrato in fine di questo articolo) quei $2i-1$ valori di f fra loro indipendenti che soddisfano l' equazione differenziale parziale lineare

$$\chi_1\left(\frac{df}{dx_1}\right)+\chi_2\left(\frac{df}{dx_2}\right)+\ldots\ldots+\chi_{2i-1}\left(\frac{df}{dx_{2i-1}}\right)+\chi_{2i}\left(\frac{df}{dx_{2i}}\right)=0 \qquad (22)$$

Siano f_1, f_2, ... f_{2i-1} tali valori. Stabilite le equazioni

$$f_1 = f'_1,\qquad f_2 = f'_2,\ \ldots\ldots\ f_{2i-1} = f'_{2i-1} \qquad (23)$$

ove i secondi membri sono quelli che risultano dai primi cambiando in essi le variabili nei loro valori iniziali, le (23) saranno gl' integrali del sistema anzidetto, e cavati da esse le x'_1, x'_2, ... x'_{2i-1} in funzione delle $2i$ variabili e del valore iniziale x'_{2i} che potrà farsi zero, tali funzioni saranno coincidenti colle $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, ... $\mathfrak{f}_{2i-1}$ date dalle (16).

D' onde risulta che la soluzione di un' equazione differenziale parziale di 1.° ordine fra un numero $= i$ di variabili indipendenti è ridotta alla ricerca dei $2i - 1$ valori di f fra loro indipendenti che soddisfano ad un' equazione differenziale parziale di 1.° ordine e lineare fra un numero doppio $2i$ di variabili indipendenti.

9. Il metodo esposto onde ottenere la soluzione di un' equazione differenziale parziale col mezzo di opportune costanti arbitrarie o di una funzione arbitraria è quello che spontaneamente deriva dall' integrazione di un' equazione differenziale ordinaria soggetta alla duplice condizione di cui si è superiormente parlato. Ma l' introduzione de' valori iniziali che rende un rilevante servigio nel caso della sussistenza di più sistemi ausiliarj può ommettersi quando il solo primo sistema sussiste, come nel caso in discorso, ed avuti particolari riguardi giova meglio servirsi delle costanti arbitrarie fornite dall' immediata integrazione del sistema (13), (14), o fornite dai valori della f che soddisfano all' equazione (22), quali risultano dalle (23) in cui i secondi membri si riguardino come costanti arbitrarie. E tale processo è specialmente preferibile quando l' equazione ordinaria da integrarsi è quella che deriva da una equazione differenziale parziale di cui cercasi la soluzione completa, alla cui determinazione limiterò quì la ricerca, essendo noto come dal numero $= i$ di equazioni contenenti altrettante arbitrarie, e gli $i - 1$ differenziali parziali, da cui si mostrerà derivarne la soluzione completa, si passi con tutta facilità alla soluzione generale col supporre una delle costanti funzione arbitraria delle altre e collo stabilire altre $i - 1$ equazioni, dalle quali coll' eliminazione delle differenziali parziali ottenere l' equazione unica contenente una funzione arbitraria.

Ciò ammesso, si tratterà primieramente il caso generale in cui la proposta equazione differenziale parziale (3) sia completa, cioè contenga, oltre la variabile principale x_i, le differenziali parziali rispetto alle variabili indipendenti che pur esse riterremo contenersi nella (3). Si mostrerà quindi quali particolari conseguenze derivino quando la proposta equazione (3) è incompleta. Rispetto a questi casi converrà avvertire:

1.° Che se la (3) è omogenea di qualunque grado rispetto alle differenziali parziali

$$x_1 = p_1 , \quad x_2 = p_2 , \quad x_3 = p_3 , \ldots\ldots x_{i-1} = p_{i-1} , \quad p_i \tag{24}$$

la funzione F diventa omogenea di 1.° grado rispetto alle differenziali parziali che essa contiene. In forza quindi della nota proprietà delle funzioni omogenee l'equazione (4) diverrà

$$dx_i + \left\{ F - F \right\} dx_{2i} = 0 ,$$

ossia

$$dx_i = 0 , \qquad x_i = cost.^e \tag{25}$$

2.° Se la funzione F manca della variabile principale x_i, il sistema (13), (14) ri riduce a

$$\left.\begin{array}{ll}
dx_1 - \left(\dfrac{dF}{dx_{i+1}}\right) dx_{2i} = 0 , & dx_{i+1} + \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right) dx_{2i} = 0 \\[2ex]
dx_2 - \left(\dfrac{dF}{dx_{i+2}}\right) dx_{2i} = 0 , & dx_{i+2} + \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right) dx_{2i} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
dx_{i-1} - \left(\dfrac{dF}{dx_{2i-1}}\right) dx_{2i} = 0 , & dx_{2i-1} + \left(\dfrac{dF}{dx_{i-1}}\right) dx_{2i} = 0 \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{dx_i + \left\{ \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right) x_1 + \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right) x_2 + \cdots + \left(\dfrac{dF}{dx_{i-1}}\right) x_{i-1} - F \right\} dx_{2i} = 0}
\end{array}\right\} \tag{26}$$

l'ultima delle quali fornirà $dx_i = 0$, se l'equazione proposta sarà inoltre omogenea rispetto alle differenziali parziali

$$x_1 \,,\; x_2 \,,\; \ldots\ldots\; x_{i-1} \,,\; p_i .$$

3.° Se la proposta (3), oltre mancare della x_i, mancasse di alcune variabili indipendenti, per esempio delle x_{i+1}, x_{i+2} nel sistema (26) risulterà

$$dx_1 = 0 \,,\quad dx_2 = 0 \,,\quad \text{ossia} \quad x_1 = cost.^e \,,\quad x_2 = cost.^e$$

Per il che saranno da ritenersi eguali a costanti tante differenziali parziali quant'è il numero delle variabili indipendenti che mancano nell'equazione (3) supposta priva della variabile principale x_i.

10. Supposto il caso generale in cui la (3) non sia soggetta a particolari condizioni, si troverà una soluzione completa nel seguente modo. Ottenuti i $2i-1$ integrali del sistema (13), (14), ovvero i $2i-1$ valori della f fra loro indipendenti che soddisfano la (22), ottenute cioè le equazioni

$$f_1 = \alpha_1 \,,\quad f_2 = \alpha_2 \,,\ldots\ldots\; f_{2i-1} = \alpha_{2i-1} \qquad (27)$$

si dovranno con uno o coll'altro sistema eliminare gli $i-1$ differenziali parziali

$$x_1 \,,\quad x_2 \,,\quad x_3 \,,\;\ldots\ldots\; x_{i-1} \qquad (28)$$

ed inoltre eliminare altrettante $i-1$ costanti arbitrarie in modo che l'equazione unica che si ottiene contenga, oltre la variabile principale, le variabili indipendenti in numero $=i$ ed altrettante costanti arbitrarie. L'equazione risultante sarà una soluzione completa della proposta.

Sia per esempio data l'equazione differenziale parziale

$$z - \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \qquad (29)$$

in cui z è la variabile principale ed x, y le variabili indipendenti. Sarà in questo caso $i = 2$, e posto

$z = x_2$, $x = x_3$, $y = x_4$ sarà $\frac{dz}{dx} = x_1$, $\frac{dz}{dy} = p_2$.
La (29) posta sotto la forma (4) diverrà

$$p_2 = \frac{x_2}{x_1} = F$$

e le (13), (14) daranno

$$\left.\begin{aligned} dx_1 = dx_4 \ , \quad dx_3 = \frac{x_2}{x_1^2} dx_4 \\ dx_2 = \frac{2x_2}{x_1} dx_4 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

delle quali le due prime forniscono gl' integrali

$$x_4 = x_1 + \alpha_1 \quad (a) \ ; \qquad x_2 = \alpha_2 x_1^2 \quad (b)$$

Siccome la 2.ª delle (30) combinata colla 1.ª dà $dx_3 = \frac{x_2}{x_1^2} dx_1$ che per la (b) diventa $dx_3 = \alpha_2 dx_1$, così si avrà per terzo integrale la

$$x_3 = \alpha_2 x_1 + \alpha_3 \qquad (c)$$

Dalle equazioni ottenute eliminata la x_1 ed una costante, in modo che il risultato contenga, come si è detto, tutte le variabili, ciò che si otterrà eliminando colle (a), (b), (c) le x_1 , α_2 , si avrà per la cercata soluzione completa la

$$x_2 = (x_3 - \alpha_3)(x_4 - \alpha_1) \quad \text{ossia} \quad z = (x - \alpha_3)(y - \alpha_1)$$

essendo α_1 , α_3 le due costanti arbitrarie.
Si dedurrà parimente dal sistema (30)

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 = 1 : \frac{2x_2}{x_1} : \frac{x_2}{x_1^2} : 1$$

e la (22) diverrà

$$\frac{df}{dx_1} + \frac{2x_2}{x_1}\frac{df}{dx_2} + \frac{x_2}{x_1^2}\frac{df}{dx_3} + \frac{df}{dx_4} = 0 \qquad (31)$$

I tre valori di f fra loro indipendenti che la soddisfano sono

$$f_1 = x_4 - x_1 \;, \quad f_2 = x_3 - \frac{x_2}{x_1} \;, \quad f_3 = \frac{x_2}{x_1^2} \;,$$

Siccome fra queste non può eliminarsi alcuna costante, così di queste tre equazioni si sceglieranno per eliminare x_1 quelle due che forniscano per risultato un' equazione fra tutte le variabili. Dalle prime due si ottiene tosto $x_2 = (x_4 - \alpha_1)(x_3 - \alpha_2)$ come si è trovato sopra.

Sia proposta un' equazione fra tre variabili indipendenti x, y, v data da

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = h^2.$$

Essendo in questo caso $i = 3$ si porrà

$$z = x_3 \;, \quad x = x_4 \;, \quad y = x_5 \;, \quad v = x_6$$

e quindi

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x_1 \;, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = x_2 \;, \quad \left(\frac{dz}{dv}\right) = p_3 .$$

La proposta equazione messa sotto la forma (4) diverrà

$$p_3 = \pm\sqrt{h^2 - x_1^2 - x_2^2} = \pm F.$$

Assumendo il segno superiore il sistema (13), (14) si ridurrà a

$$dx_1 - \left\{\left(\frac{dF}{dx_4}\right) + x_1\left(\frac{dF}{dx_3}\right)\right\} dx_6 = 0 \;, \quad dx_4 + \left(\frac{dF}{dx_1}\right) dx_6 = 0$$

$$dx_2 - \left\{\left(\frac{dF}{dx_5}\right) + x_2\left(\frac{dF}{dx_3}\right)\right\} dx_6 = 0 \;, \quad dx_5 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) dx_6 = 0$$

$$dx_3 + \left\{\left(\frac{dF}{dx_1}\right) x_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) x_2 - F\right\} dx_6 = 0.$$

Siccome la F manca delle x_3, x_4, x_5, il sistema dietro i riflessi dell' antecedente paragrafo si ridurrà tosto a

$$\left.\begin{array}{ll} dx_1 = 0 \;, & dx_4 = \frac{x_1}{F}\,dx_6 \\ dx_2 = 0 \;, & dx_5 = \frac{x_2}{F}\,dx_6 \\ \multicolumn{2}{c}{dx_3 = \frac{h^2}{F}\,dx_6} \end{array}\right\} \qquad (32)$$

Siccome da queste si deduce $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, pei quali valori la F diventa costante ed eguale a $\sqrt{h^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} = F_1$, i coefficienti della dx_6 saranno costanti nelle altre tre equazioni che si ridurranno alle

$$dx_4 = \frac{\alpha_1}{h^2}\,dx_3 \;, \qquad dx_5 = \frac{\alpha_2}{h^2}\,dx_3 \;, \qquad dx_6 = \frac{F_1}{h^2}\,dx_3 .$$

Integrando si avrà

$$x_4 - \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{h^2}\,x_3 \;, \qquad x_5 - \alpha_4 = \frac{\alpha_2}{h^2}\,x_3 \;, \qquad x_6 - \alpha_5 = \frac{F_1}{h^2}\,x_3$$

dalle quali si dovranno eliminare le α_1, α_2. Si avrà primieramente

$$h^2(x_4 - \alpha_3)^2 = \frac{\alpha_1^2}{h^2}\,x_3^2 \;, \quad h^2(x_5 - \alpha_4)^2 = \frac{\alpha_2^2}{h^2}\,x_3^2 \;, \quad h^2(x_6 - \alpha_5)^2 = \frac{F_1^2}{h^2}\,x_3^2$$

Se queste si sommino e si osservi essere $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + F_1^2 = h^2$ si avrà per soluzione completa della proposta la

$$x_3^2 = h^2 \left\{ (x_4 - \alpha_3)^2 + (x_5 - \alpha_4)^2 + (x_6 - \alpha_5)^2 \right\} ,$$

ossia

$$z^2 = h^2 \left\{ (x - \alpha_3)^2 + (y - \alpha_4)^2 + (v - \alpha_5)^2 \right\}$$

ove le α_3, α_4, α_5 saranno le costanti arbitrarie.

Un' altra soluzione completa si otterrebbe integrando le equazioni (31) quali esse si presentano. Si avrebbero infatti gli integrali

$$x_1 = \alpha_1 , \quad x_2 = \alpha_2 , \quad x_3 = \alpha_3 = \frac{h^2}{F_1} x_6 , \quad x_4 - \alpha_4 = \frac{\alpha_1}{F_1} x_6 , \quad x_5 - \alpha_5 = \frac{\alpha_2}{F_1} x_6$$

I quadrati delle ultime tre danno

$$\frac{(x_3-\alpha_3)^2}{h^2} = \frac{h^2}{F_1^2} x_6^2 , \quad (x_4-\alpha_4)^2 = \frac{\alpha_1^2}{F_1^2} x_6^2 , \quad (x_5-\alpha_5)^2 = \frac{\alpha_2^2}{F_1^2} x_6^2$$

Colle quali, sottratte le due ultime dalla prima ed avvertito essere $\frac{h^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2}{F_1^2} = 1$, si ha

$$\frac{(x_3-\alpha_3)^2}{h^2} - (x_4-\alpha_4)^2 - (x_5-\alpha_5)^2 = x_6^2 ,$$

ove le α_3, α_4, α_5 sono le costanti.

Parimente dal sistema (32) si avrà

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 : dx_5 : dx_6 = 0 : 0 : \frac{h^2}{F} : \frac{x_1}{F} : \frac{x_2}{F} : 1$$

onde la (22) si riduce a

$$\frac{h^2}{F} \cdot \frac{df}{dx_3} + \frac{x_1}{F} \cdot \frac{df}{dx_4} + \frac{x_2}{F} \cdot \frac{df}{dx_5} + \frac{df}{dx_6} = 0 \qquad (33)$$

Essendo x_1, x_2 costanti, posto

$$h^2 = a , \quad x_1 = a_1 , \quad x_2 = a_2 , \quad F_1 = a_3 ,$$

ove la F_1 è il valore di F quando sono scambiate x_1, x_2 rispettivamente con a_1, a_2, la (33) diventa un' equazione differenziale parziale a coefficienti costanti rappresentata dalla

$$a \frac{df}{dx_3} + a_1 \frac{df}{dx_4} + a_2 \frac{df}{dx_5} + a_3 \frac{df}{dx_6} = 0.$$

I tre valori fra loro indipendenti che la soddisfano sono dati, come è noto, da

$$f_1 = x_4 - \frac{a_1 x_3}{a}, \quad f_2 = x_5 - \frac{a_2 x_3}{a}, \quad f_3 = x_6 - \frac{a_3 x_3}{a}.$$

Quindi gl' integrali del sistema saranno

$$x_4 - \frac{a_1 x_3}{a} = \alpha_1, \quad x_5 - \frac{a_1 x_3}{a} = \alpha_2, \quad x_6 - \frac{a_3 x_3}{a} = \alpha_3,$$

ossia

$$h^2(x_4-\alpha_1)^2 = x_3^2 \frac{\alpha_1^2}{h^2}, \quad h^2(x_5-\alpha_2)^2 = x_3^2 \frac{\alpha_2^2}{h^2}, \quad h^2(x_6-\alpha_3)^2 = x_3^2 \frac{F_1^2}{h^2}$$

Sommate queste equazioni onde eliminare le a_1, a_2, si otterrà come precedentemente

$$x_3^2 = h^2 \left\{ (x_4-\alpha_1)^2 + (x_5-\alpha_2)^2 + (x_6-\alpha_3)^2 \right\},$$

ove α_1, α_2, α_3 saranno le tre costanti dell' integrale completo.

Qualora la proposta (3) mancasse della variabile principale e non fosse omogenea rispetto alle differenziali parziali, si potranno dal sistema (13) ottenere i $2i-2$ integrali con altrettante costanti, e con tali equazioni si potranno determinare le $2i-2$ variabili

$$x_1, \quad x_2, \ldots\ldots\ldots x_{i-1}, \quad x_{i+1}, \quad x_{i+2}, \ldots\ldots\ldots x_{2i-1}$$

in funzione di x_{2i} e delle $2i-2$ costanti. Posti tali valori nella (14), il 2.° membro diverrà funzione della sola variabile x_{2i} e si otterrà x_i con una semplice quadratura che introdurrà un' altra costante α_i. Avendosi per tal modo le $i-1$ variabili indipendenti

$$x_{i+1}, \quad x_{i+2}, \ldots\ldots\ldots x_{2i-1}$$

in funzione di x_{2i} e di $2n-2$ costanti, si potrà con queste $i-1$ equazioni eliminare dall' integrale ottenuto un numero $i-1$ di costanti arbitrarie. L' integrale così determinato divenendo funzione di tutte le variabili indipendenti e della principale, e contenendo, oltre la costante α_i, le restanti $i-1$ arbitrarie, rappresenterà l' integrale completo della proposta equazione (3).

11. Siccome nella ricerca della soluzione completa di una proposta equazione (3) non si tratta in ultima analisi che di ottenere un numero $=i$ di equazioni contenenti altrettante costanti arbitrarie, oltre le $i-1$ differenziali parziali da eliminarsi, così basterà ottenere un numero $=i$ d' integrali del sistema (13), (14), ovvero basterà ottenere un numero $=i$ di valori di f che soddisfano la (23), purchè si scelgano tali integrali che contenendo, oltre le variabili, le $i-1$ differenziali parziali siano atti a fornire coll' eliminazione di queste ultime un' equazione fra le variabili stesse.

Si vede infatti dagli esempi esposti nel precedente paragrafo che bastava combinare opportunamente le equazioni differenziali (30) riferibili al 1.° esempio, onde ottenere due integrali soddisfacenti alla richiesta condizione. Infatti dalla 2.ª delle (30) combinata colla 1.ª, risulta la $dx_3 = \frac{x_2}{x_1^2} dx_1$ e dalla 1.ª colla 3.ª, la $dx_2 = \frac{2x_2}{x_1} dx_1$. Quest' ultima ha per integrale la $x_2 = \alpha_2 x_1^2$ col qual valore la prima ha per integrale la $x_3 = \alpha_2 x_1 + \alpha_3$. Da questi due integrali eliminata la differenziale parziale x_1, si ottiene con due sole integrazioni la cercata soluzione completa.

Parimente nel 1.° esempio bastava ottenere due valori di f soddisfacenti la (31). I valori infatti di f_2, f_3 ivi trovati danno due equazioni integrali colle quali eliminata la x_1 si ottiene la soluzione completa.

Per gli stessi riflessi s' impiegarono nell' esempio 2.° tre integrali soltanto, coi quali eliminare le differenziali parziali x_1, x_2, ovvero s' impiegarono tre soli valori f_1, f_2, f_3 soddisfacenti la (33) (coi quali, posti eguali a costanti) eliminare le x_1, x_2 ritenute pure come variabili.

Giova avvertire che potrà in alcuni casi essere necessario di trasformare col noto metodo il dato sistema di equazioni differenziali di 1.° ordine in un' equazione differenziale di ordine più elevato, ma fra due sole variabili, e ricercare di questa un integrale primo colla relativa costante arbitraria, il quale si riduca quindi ad un' equazione finita coll' impiego delle stesse equazioni del dato sistema. Processi analoghi serviranno ad ottenere i restanti $i-1$ integrali. Ciò in particolare dovrebbe farsi quando non fosse eseguibile l' integrazione immediata delle equazioni del sistema, o non si potesse adempiere alla condizione di ottenere colla eliminazione delle differenziali parziali un' equazione fra tutte le variabili e fra un numero $=i$ di costanti arbitrarie, come si è potuto eseguire negli addotti semplicissimi esempi.

12. Una soluzione completa potrà anche ottenersi impiegando soltanto un numero $=i-1$ d' integrali del sistema, avuto riguardo ai riflessi fatti in fine dell' antecedente paragrafo. O, ciò che è lo stesso, potrà ottenersi una soluzione completa impiegando un numero $=i-1$ di valori di f soddisfacenti la (22), con che si viene a risparmiare un' integrazione. Infatti colle $i-1$ equazioni integrali affette da altrettante costanti arbitrarie e soggette alla condizione di contenere in complesso le differenziali parziali x_1, x_2, ... x_{i-1}, si potranno determinare quest' ultime in funzione delle variabili. L' equazione (5), in cui siano posti gli anzidetti valori delle differenziali parziali che essa contiene, sarà integrabile con un' equazione unica introducente un' altra costante arbitraria. L' ottenuta equazione integrale sarà la cercata soluzione completa contenente un numero $=i$ di costanti arbitrarie.

Così nel 1.° esempio, ottenuto il solo integrale

$$x_4 - x_1 = \alpha_1 , \qquad \text{sarà} \qquad p_2 = F = \frac{x_2}{x_4 - \alpha_1} .$$

Quindi la $$dx_2 = x_1 dx_3 + p_2 dx_4 \qquad (34)$$

diventa $$dx_2 - (x_4 - \alpha_1) dx_3 - \frac{x_2}{x_4 - \alpha_1} dx_4 = 0$$

che moltiplicata pel fattore $\frac{1}{x_4 - \alpha_1}$ diventa una differenziale esatta

$$\frac{dx_2}{x_4 - \alpha_1} - dx_3 - \frac{x_2}{(x_4 - \alpha_1)^2} dx_4 = 0 ,$$

il cui integrale è $\frac{x_2}{x_4 - \alpha_1} - x_3 + \alpha_2 = 0$, dal quale si ha la già trovata soluzione completa $x_2 = (x_4 - \alpha_1)(x_3 - \alpha_2)$. Se s' impiega l' altro integrale già sopra trovato, $x_3 - \frac{x_2}{x_1} = \alpha_2$ la (34) diventa $dx_2 - \frac{x_2}{x_3 - \alpha_2} dx_3 - (x_3 - \alpha_2) dx_4 = 0$, che moltiplicata per $\frac{1}{x_3 - \alpha_2}$ ed integrata fornisce

$$\frac{x_2}{x_3 - \alpha_2} - x_4 + \alpha_1 = 0 , \quad \text{ossia} \quad x_2 = (x_4 - \alpha_1)(x_3 - \alpha_2).$$

Si troverà parimente che un qualunque valore di f che soddisfi alla (31) sarà atto, determinando colla $f = \alpha_1$ la differenziale parziale x_1 da porsi nella F e nella (34), a fornire coll' integrazione della stessa (34) una soluzione completa. Ciascuno infatti dei valori $f_1 = x_4 - x_1$, $f_2 = x_3 - \frac{x_2}{x_1}$ fornirà una soluzione coincidente colla già trovata. Impiegando invece il valore $f_3 = \frac{x_2}{x_1^2}$ si avrà $\frac{x_2}{x_1^2} = \alpha_3$, da cui $x_1 = \pm \sqrt{\frac{x_2}{\alpha_3}}$ e quindi la (34) diventa

$$\frac{dx_2}{\sqrt{x_2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} dx_3 \pm \sqrt{\alpha_3}\, dx_4$$

il cui integrale è

$$2\sqrt{x_2} = \pm\frac{x_3}{\sqrt{\alpha_3}} \pm \sqrt{\alpha_3}\, x_4 + \alpha_1 .$$

È questa pure una soluzione completa in quanto soddisfa alla proposta. Si deriva infatti da essa

$$\left(\frac{dx_2}{dx_3}\right) = \pm\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{\alpha_3}} \quad ; \quad \left(\frac{dx_2}{dx_3}\right) = \pm\sqrt{\alpha_3}\sqrt{x_2}$$

il cui prodotto dà $x_2 = \left(\frac{dx_2}{dx_3}\right)\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)$. Ponendo nella trovata soluzione $\pm\sqrt{\alpha_3} = \alpha_2$ e mettendo α_1 in luogo di $\alpha_1\alpha_2$, essa diventa $x_2 = \frac{1}{4\alpha_2^2}(x_4 + x_3 + \alpha_1)^2$.

Se nel 2.° esempio s' impiegano i soli due primi integrali ottenuti, cioè

$$x_1 = \alpha_1 , \quad x_2 = \alpha_2 , \quad \text{onde} \quad F = \sqrt{h^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

la $dx_3 = x_1 dx_4 + x_2 dx_5 + F dx_6$, postivi i precedenti valori, fornisce la soluzione completa

$$x_3 = \alpha_1 x_4 + \alpha_2 x_5 + \sqrt{(h^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\, x_6 + \alpha_3 \qquad (35)$$

la quale parimente soddisfa alla proposta.
Se invece si assumono i due valori

$$f_1 = x_4 - \frac{x_1 x_3}{h^2} , \quad f_2 = x_5 - \frac{x_2 x_3}{h^2}$$

che soddisfano la (33), e si rimpiazzino f_1, f_2 colle costanti α_1, α_2, cavati x_1, x_2 e posti nella (5), si avrà

$$dx_3 = \frac{(x_4-\alpha_1)h^2}{x_3}dx_4 + \frac{(x_5-\alpha_2)h^2}{x_3}dx_5 + \frac{h}{x_3}\sqrt{\left\{x_3^2 - h^2(x_4-\alpha_1)^2 - h^2(x_5-\alpha_2)^2\right\}}\,dx_6 .$$

Posto il radicale $= D$, si avrà

$$dx_6 = \frac{1}{h}\left(\frac{x_3}{D}dx_3 - \frac{h^2(x_4-\alpha_1)}{D}dx_4 - \frac{h^2(x_5-\alpha_2)}{D}dx_5\right)$$

il cui integrale essendo

$$x_6 = \frac{1}{h}\sqrt{\left\{x_3^2 - h^2(x_4-\alpha_1)^2 - h^2(x_5-\alpha_2)^2\right\}} + \alpha_3$$

si deduce la soluzione completa già trovata

$$x_3^2 = h^2\left\{(x_4-\alpha_1)^2 + (x_5-\alpha_2)^2 + (x_6-\alpha_3)^2\right\}.$$

13. Quantunque gli accennati processi siano atti a fornire una soluzione completa della proposta equazione (3), tanto nel caso che essa contenga la variabile principale x_i, quanto nell'ipotesi che la x_i vi manchi, pure in questo secondo caso la ricerca degli $i-1$ valori di f che soddisfano la (22), o la ricerca di altrettante equazioni integrali del sistema (13), (14) può essere semplificata, come vedremo, facendola dipendere dalla determinazione di valori di f soddisfacenti ad equazioni della stessa forma della (22), ma che vanno, ad ogni ottenuto valore di f, successivamente scemando di due termini e di due variabili, sino a ridursi ad un'equazione di soli tre termini. Ma un'equazione differenziale parziale (3) contenente la variabile principale x_i può sempre coll'introduzione di una nuova variabile principale x trasformarsi in altra mancante della variabile stessa, e quantunque la trasformata, col divenire omogenea rispetto alle differenziali parziali della nuova variabile, sia soggetta a particolari modificazioni, pure il metodo che esporremo applicato alla (3) supposta mancante della variabile principale dovrà ritenersi per generale. La trasformata in discorso si otterrà quando nella (3) alle differenziali parziali $\left(\frac{dx_i}{dx_j}\right)$ che nascono pei diversi valori di $j = 1, 2, 3, \ldots (i-1)$

si sostituiscano gli analoghi valori forniti dall' espressione

$$\left(\frac{dx_i}{dx_j}\right) = -\left(\frac{dx}{dx_j}\right) : \left(\frac{dx}{dx_i}\right).$$

Supponghasi pertanto che la (3), contenente per maggiore generalità tutte le variabili indipendenti e tutte le differenziali parziali ad esse relative, manchi della variabile x_i. Si ponga per maggior simetria nella (4) la x per x_i ed x_i in luogo di p_i onde sia

$$\left(\frac{dx_i}{dx_{i+1}}\right) = \left(\frac{dx}{dx_{i+1}}\right) = x_1 \,, \quad \left(\frac{dx_i}{dx_{i+2}}\right) = \left(\frac{dx}{dx_{i+2}}\right) = x_2 \,, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left(\frac{dx_i}{dx_{2i-1}}\right) = \left(\frac{dx}{dx_{2i-1}}\right) = x_{i-1} \,, \quad \left(\frac{dx_i}{dx_{2i}}\right) = \left(\frac{dx}{dx_{2i}}\right) = x_i$$

Chiamata F_1 ciò che diventa per tale sostituzione la F, la (4) si cambierà nella $x_i = F_1$, e la (5) diverrà

$$dx = x_1 dx_{i+1} + x_2 dx_{i+2} + \ldots\ldots + x_{i+1} dx_{2i-1} + F_1 dx_{2i} \tag{36}$$

La variabile principale x non entrando nelle equazioni (13) si potrà nel sistema ausiliario ommettere la (14), e cambiatovi x_i in x, ed avuto riguardo alla $\left(\frac{dF_1}{dx}\right) = 0$, il sistema (13) si ridurrà alle $2i-2$ equazioni seguenti

$$dx_1 = \left(\frac{dF_1}{dx_{i+1}}\right) dx_{2i} \,, \qquad dx_{i+1} = -\left(\frac{dF_1}{dx_1}\right) dx_{2i}$$

$$dx_2 = \left(\frac{dF_1}{dx_{i+2}}\right) dx_{2i} \,, \qquad dx_{i+2} = -\left(\frac{dF_1}{dx_2}\right) dx_{2i}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$dx_{i-1} = \left(\frac{dF_1}{dx_{2i-1}}\right) dx_{2i} \,, \qquad dx_{2i-1} = -\left(\frac{dF_1}{dx_{i-1}}\right) dx_{2i}$$

fra le $2i-1$ variabili

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_{i-1}\ ,\quad x_{i+1}\ ,\ \ldots\ldots\ x_{2i}$$

e l'equazione (22) diverrà

$$X_1\frac{df}{dx_1}+X_2\frac{df}{dx_2}+\ldots+X_{i-1}\frac{df}{dx_{i-1}}+X_{i+1}\frac{df}{dx_{i+1}}\ldots+X_{2i}\frac{df}{dx_{2i}}=0$$

Suppongasi aver ottenuto un valore f_1 che renda avverata la precedente equazione, e contenga una delle variabili indipendenti che, per procedere ordinatamente, supporremo essere la x_{2i}. Un integrale del sistema sarà $f_1=\alpha_1$. Lo stesso integrale può anche ottenersi seguendo il metodo ordinariamente in uso, di stabilire cioè colle $2i-2$ equazioni del sistema un'equazione differenziale, generalmente del $(2i-2)^{\text{esimo}}$ ordine, della quale ottenuto un integral primo con una costante arbitraria, passare coll'eliminazione delle differenziali all'equazione finita (che indicherò ancora con $f_1=\alpha_1$) col soccorso delle stesse equazioni del sistema e de' loro successivi differenziali. Cavato in ambi i casi dalla $f_1=\alpha_1$ il valore di x_{2i} in funzione delle altre variabili, e posto nella $x_i-F_1=0$ s' intenda da essa dedotta la $x_{i-1}=F_2$. Essendo questa un' equazione differenziale parziale mancante della variabile principale x e della variabile indipendente x_{2i}, ridotta la (22) alla

$$dx=x_1dx_{i+1}+x_2dx_{i+2}\ldots+x_{i-2}dx_{2i-2}+x_idx_{2i}+F_2dx_{2i-1}$$

e stabilito il sistema (13), risulterà $dx_i=0$, ossia $x_i=cost.^e$. Omessa nel sistema stesso l'equazione contenente la dx_{2i}, in quanto la x_{2i} manca nelle equazioni stabilite, il sistema si ridurrà ad un numero $2i-4$ di equazioni differenziali fra le sole $2i-3$ variabili

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\ \ldots\ldots\ x_{i-2}\ ,\quad x_{i+1}\ ,\ \ldots\ldots\ x_{2i-2}\ ,\quad x_{2i-1}$$

rappresentato da

$$dx_1 = \left(\frac{dF_2}{dx_{i+1}}\right)dx_{2i-1}\,, \qquad dx_{i+1} = -\left(\frac{dF_2}{dx_1}\right)dx_{2i-1}$$

$$dx_2 = \left(\frac{dF_2}{dx_{i+2}}\right)dx_{2i-1}\,, \qquad dx_{i+2} = -\left(\frac{dF_2}{dx_2}\right)dx_{2i-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$dx_{i-2} = \left(\frac{dF_2}{dx_{2i-2}}\right)dx_{2i-1}\,, \qquad dx_{2i-2} = -\left(\frac{dF_2}{dx_{i-2}}\right)dx_{2i-1}$$

In forza di questo sistema la (22) sarà espressa da

$$\chi_1 \frac{df}{dx_1} + \chi_2 \frac{df}{dx_2} \ldots + \chi_{i-2} \frac{df}{dx_{i-2}} + \chi_{i+1} \frac{df}{dx_{i+1}} \ldots + \chi_{2i-1} \frac{df}{dx_{2i-1}} = 0$$

ove le χ_1, χ_2, ... χ_{2i-1} sono ora le quantità relative a questo sistema da non confondersi colle precedenti, ed ove sarà $\chi_{2i-1} = 1$. Ottenuto un valore f_2 che la soddisfi, e contenga la variabile indipendente x_{2i-1}, un integrale del sistema precedente sarà $f_2 = \alpha_2$, il quale potrà anche essere ottenuto impiegando il citato metodo generalmente in uso deducendo dal sistema un'equazione dell' ordine $(2i-4)^{mo}$ fra due sole variabili, una delle quali sia la x_{2i-1}, come si è sopra avvertito. Cavato dall' integrale $f_2 = \alpha_2$, ottenuto coll' uno o coll' altro de' due modi, il valore della variabile indipendente x_{2i-1} e posto nella $x_{i-1} = F_2$, si caverà dalla risultante equazione il valore di x_{i-2} espresso da $x_{i-2} = F_3$. Riguardata parimente questa espressione come un' equazione differenziale parziale mancante delle variabili x, x_{2i}, x_{2i-1}, ed ove le x_i, x_{i-1} si riterranno per costanti, si otterrà un altro sistema di $2i-6$ equazioni fra le $2i-5$ variabili

$$x_1\,,\quad x_2\,,\ \ldots\ldots\ x_{i-3}\,,\quad x_{i+1}\,,\ \ldots\ldots\ x_{2i-3}\,,\quad x_{2i-2}$$

del quale ottenuto un integrale $f_3 = \alpha_3$ contenente la x_{2i-2}, si procederà come si è sopra indicato. Continuando in tal modo si giungerà finalmente ad un sistema di due sole equazioni

$$dx_1 = \left(\frac{dF_{i-1}}{dx_{i+1}}\right) dx_{i+2} \,, \qquad dx_{i+1} = -\left(\frac{dF_{i-1}}{dx_1}\right) dx_{i+1}$$

fra le sole tre variabili x_1, x_{i+1}, x_{i+2}, del quale ottenuto un integrale $f_{i-1} = \alpha_{i-1}$ contenente in tal caso la x_1, si avrà un numero $= i - 1$ di equazioni integrali con altrettante costanti, colle quali determinare le $i - 1$ differenziali parziali x_1, x_2, ... x_{i-1} in funzione delle variabili indipendenti. Posti gli ottenuti valori nella (36) e nella F_1, si otterrà quella definitiva equazione che integrata con un' equazione unica e con una costante α_i fornirà la soluzione completa della proposta equazione.

Quando l' equazione (3), in cui alla x_i siasi sostituita la x, come si è fatto in principio di questo paragrafo, oltre non contenere la variabile principale mancasse di già di qualche variabile indipendente, per esempio, delle x_{2i}, x_{2i-1}, dal sistema (13) risulterebbe $dx_i = 0$, $dx_{i-1} = 0$ i cui integrali $x_i = \alpha_1$, $x_{i-1} = \alpha_2$ terrebber luogo degli integrali $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$ che sarebbonsi ottenuti nel caso che le variabili stesse x_{2i}, x_{2i-1} non fossero mancate nella (3). Quindi la proposta, in cui sono da ritenersi costanti le x_i, x_{i-1}, sarà da riguardarsi come già ridotta alla $x_{i-2} = F_3$ che si tratterà col processo sopra indicato, onde ottenere i restanti $i - 3$ integrali. Il sistema degli $i - 1$ integrali

$$f_1 = \alpha_1 \,, \quad f_2 = \alpha_2 \,, \quad f_3 = \alpha_3 \,, \; \ldots\ldots\ldots \; f_{i-1} = \alpha_{i-1}$$

che si ottenevano prima di tale restrizione, e coi quali si dovevano determinare i valori delle differenziali parziali

$$x_1 \,, \quad x_2 \,, \quad x_3 \,, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; x_{i-1}$$

da sostituirsi nella (36), sarà nel caso attuale rimpiazzato dal sistema

$$x_i = \alpha_1 \ , \quad x_{i-1} = \alpha_2 \ , \quad f_3 = \alpha_3 \ , \ \ldots\ldots \ f_{i-1} = \alpha_{i-1} .$$

Un caso analogo ci si è già presentato nel trattare il 2.° esempio del § 12, da cui si ottenne la soluzione completa (35). Ivi infatti, la proposta mancando della variabile principale x_3 e delle variabili indipendenti x_4, x_5, le differenziali parziali rispetto a queste ultime risultarono costanti date da $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, e tali valori furono posti nella F e nell' equazione differenziale ordinaria dalla quale con un' integrazione si ottenne la soluzione completa.

14. Facciasi per ultimo l' applicazione al caso in cui la proposta equazione (3) si riduca ad un' equazione differenziale parziale lineare ed omogenea della forma (22), ove la f è la variabile principale e le variabili indipendenti in numero $= 2i$ sono le

$$x_1 \ , \quad x_2 \ , \quad x_3 \ , \ \ldots\ldots \ x_i \ , \quad x_{i+1} \ , \ \ldots\ldots \ x_{2i-1} \ , \quad x_{2i} .$$

Rappresentate le differenziali parziali di f rispetto alle precedenti variabili indipendenti rispettivamente con

$$p_1 \ , \quad p_2 \ , \quad p_3 \ , \ \ldots\ldots \ p_i \ , \quad p_{i+1} \ , \ \ldots\ldots \ p_{2i-1} \ , \quad p_{2i}$$

la (22) diverrà

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + X_3 p_3 + \ldots\ldots + X_i p_i + \ldots\ldots + X_{2i} p_{2i} = 0 \qquad (37)$$

che, posta sotto la forma (4), ed avvertendo essere $X_{2i} = 1$, sarà espressa da

$$p_{2i} = -\left\{ X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots\ldots + X_i p_i \ldots\ldots + X_{2i-1} p_{2i-1} \right\} = F \qquad (38)$$

e la (5) diverrà

$$df = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_i dx_i + \ldots + p_{2i-1} dx_{2i-1} + F dx_{2i} \qquad (39)$$

Quindi il sistema (13), (14) diverrà

$$\left.\begin{array}{ll}
dp_1 = \left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)dx_{2i}\ , & dx_1 = -\left(\dfrac{dF}{dp_1}\right)dx_{2i} = X_1 dx_{2i} \\
dp_2 = \left(\dfrac{dF}{dx_2}\right)dx_{2i}\ , & dx_2 = -\left(\dfrac{dF}{dp_2}\right)dx_{2i} = X_2 dx_{2i} \\
\vdots & \vdots \\
dp_{2i-1} = \left(\dfrac{dF}{dx_{2i-1}}\right)dx_{2i}\ , & dx_{2i-1} = -\left(\dfrac{dF}{dp_{2i-1}}\right)dx_{2i} = X_{2i-1} dx_{2i} \\
\multicolumn{2}{c}{df = 0\ , \quad \text{ossia} \quad f = \text{cost.}^e}
\end{array}\right\} \quad (40)$$

Le $2i-1$ equazioni differenziali della 2.ª colonna verticale contengono soltanto le variabili indipendenti. Suppongansi ottenuti gl' integrali e determinate con essi le $2i-1$ variabili in funzione di x_{2i} e delle $2i-1$ costanti arbitrarie α_1, α_2, ... α_{ni-1}. A completare il sistema integrale si esigerebbe, dietro il processo ordinario, di porre tali valori nelle equazioni della 1.ª colonna verticale del sistema (40), onde ottenere da esse le altre $2i-1$ equazioni integrali. Suppongansi ottenuti anche questi integrali e determinati col loro mezzo i valori delle $2i-1$ differenziali parziali

$$p_1\ ,\quad p_2\ ,\quad p_3\ \ldots\ldots\ldots\ p_{2i-1}$$

i quali risulteranno funzioni di x_{2i} e di $2i-1$ costanti β_1, β_2, ... β_{2i-1} oltre le costanti α_1, α_2, ... α_{2i-1} già introdotte. Tali valori sarebbero da sostituirsi nell' equazione (39), la quale, stante la (38), si ridurrebbe alla

$$df = p_1(dx_1 - X_1 dx_{2i}) + p_2(dx_2 - X_2 dx_{2i}) \cdots\cdots + p_{2i-1}(dx_{2i-1} - X_{2i-1} dx_{2i}) \quad (41)$$

Ma questa in forza della 2.ª colonna verticale e dell' ultima delle (40) è avverata indipendentemente dai valori di p_1, p_2, ...p_{2i-1}.

Gl' integrali adunque della 1.ª colonna del sistema (40) nulla contribuiscono alla soluzione che si cerca. All' incontro i valori delle costanti α_1, α_2, ... α_{2i-1} espressi, come si è detto, per le variabili indipendenti saranno altrettanti valori di f fra loro indipendenti ed espressi rispettivamente da f_1, f_2, ... f_{2i-1} che soddisfano alla proposta (37) ed all' ultima delle (40). Dovendo infatti essere $df = 0$, ossia $f = cost.^e$, la (41) diventa

$$0 = p_1(dx_1 - X_1 dx_{2i}) + p_2(dx_2 - X_2 dx_{2i}) + \cdots + p_{2i-1}(dx_{2i-1} X_{2i-1} dx_{2i}) \qquad (42)$$

la quale essendo soddisfatta per le equazioni differenziali della 2.ª colonna, lo sarà parimente per le equazioni integrali. Vale a dire che la (42), non contenendo le costanti, sarà soddisfatta da quel sistema di equazioni che nascerà esprimendo tutte le costanti in funzione delle variabili, e tali valori delle costanti saranno i valori f_1, f_2, ... f_{2i-1} che soddisfano la proposta.

Risulta quindi che cavati dagl' integrali delle equazioni della 2.ª colonna verticale i valori delle costanti arbitrarie α_1, α_2, ... α_{2i-1} in funzione delle variabili ed eguagliate rispettivamente alle f_1, f_2, ... f_{2i-1} saranno queste altrettante soluzioni della proposta. Risulta inoltre dall' ultima delle (40) cioè dalla $f = \alpha_{2i}$, essendo α_{2i} un' altra costante, che se si pone

$$\alpha_{2i} = \phi\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{2i-1}\right)$$

essendo ϕ una funzione arbitraria, la soluzione generale della proposta sarà data da

$$f = \phi\left(f_1, f_2, \ldots\ldots f_{2i-1}\right). \qquad (43)$$

Egli è per questi riflessi che nel § 12, art. III, ed in quelli dell' attuale articolo si sono agl' integrali del sistema sostituiti $2i-1$ valori di f che soddisfano alla (22) e poste le relazioni

$$f_1 = \alpha_1 \; ; \quad f_2 = \alpha_2 \; , \; \ldots\ldots \; f_{2i-1} = \alpha_{2i-1}$$

essendo α_1, α_2, ... α_{2i-1} costanti arbitrarie, si sono sostituite le precedenti equazioni agli equivalenti integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Non è superfluo l' avvertire che se fosse proposto un sistema di equazioni differenziali ordinarie costituito dalla 2.ª colonna verticale delle (40), e si conoscesse il valore di una qualunque delle funzioni f_j soddisfacenti la (37), ossia un integrale $f_j = \alpha_j$ del sistema stesso, sarebbero note le relative differenziali parziali p_1 ; p_2 , ... p_{2i-1} , i cui valori sostituiti nella (41) ridurrebbero il di lei 2.° membro una differenziale esatta, giacchè in forza della stessa (37) esso diverrebbe eguale alla differenziale totale della stessa funzione impiegata f_j. Deriva quindi spontanea la conseguenza, che i diversi sistemi di valori delle p_1, p_2 , ... p_{2i-1} , risultanti dalle f_j per tutti i valori di $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots 2i-1$, o dalla f data più generalmente dalla (43) e soddisfacenti la (37), costituiscono altrettanti sistemi di *Moltiplicatori* che, applicati alle proposte equazioni differenziali ordinarie, forniscono colla loro somma una espressione differenziale esatta.

Dai precedenti paragrafi si rileva finalmente che comunque si proceda alla ricerca di un integrale completo di una proposta equazione differenziale parziale (3), il fondamento di ogni soluzione è sempre il sistema ausiliario (13), (14) dotato della duplice proprietà, e di fornire il sistema integrale dell' equazione a differenziali ordinarie (5) soggetta a condizioni particolari che la distingnono dalla generale (1), e di prestarsi alla ricerca della soluzione completa dell' equazione differenziale parziale da cui la stessa (5) deriva. Le diverse soluzioni che si ottengono in questo secondo caso dal citato sistema ausiliario non differiscono, come si è veduto, che per semplici modificazioni nel modo di trattare le equazioni differenziali del sistema stesso, onde giungere allo scopo che si ha di mira.

OSSERVAZIONI DI NETTUNO

FATTE

AL CIRCOLO MERIDIANO DI STARK

DA

ROBERTO STAMBUCCHI.

Nel 9 ottobre 1846 giunse a questo Osservatorio l'avviso della scoperta del nuovo pianeta Nettuno. Nelle sere dei giorni 9 e 10 gli Astronomi Carlini, Frisiani e Colla ne hanno determinata la posizione col mezzo del settore equatoriale, e nella sera del giorno 11 ho incominciato le osservazioni al circolo meridiano, le quali stante il continuo cattivo tempo si limitano alle seguenti.

Giorni del mese.	Ascensione retta apparente.		Declinaz. australe apparente corretta dalla rifrazione.	
Ottobre 11	$21^h\ 52'\ 1'',87$		$13^\circ\ 30'\ 35'',5$	
13	51 57,42	nuvolo	. . . .	
Novembre 6	51 19,22		34 16,1	
7	51 19,44		34 18,4	
8	. . . . .		34 11,7	debolissimo, si vede a stento
12	51 21,28		34 2,7	
13	51 22,13		33 58,5	
14	51 23,06		33 54,5	
15	51 24,13	molto debole	33 49,6	
16	51 25,30	molto debole	33 42,4	
17	51 26,68		33 36,8	
23	51 37,39	deboliss.°	32 34,1	
27	51 47,57	fra le nubi	31 41,0	