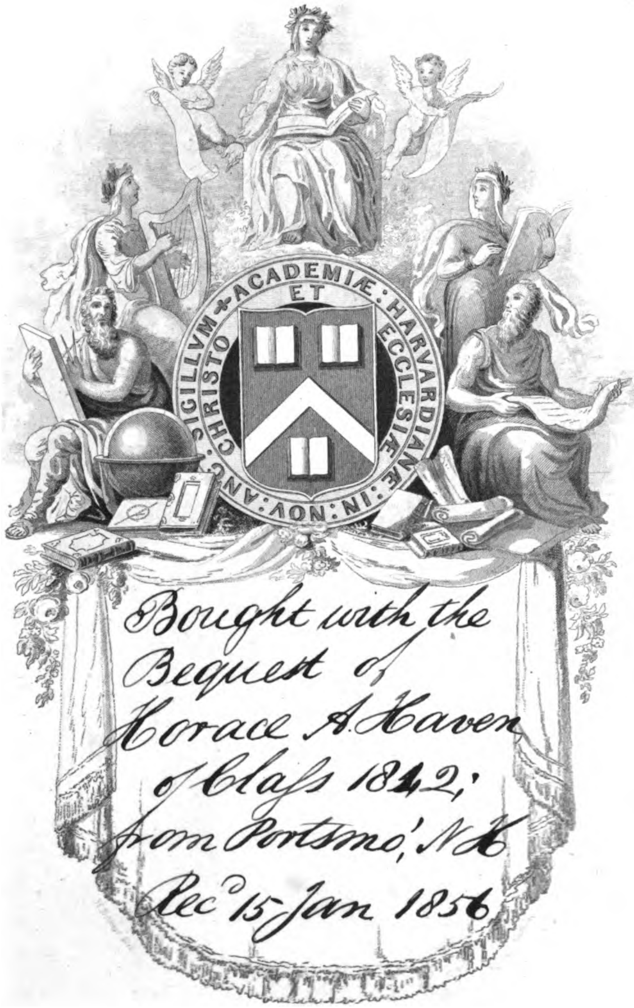
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ
Bought with the Bequest of Horace A. Haven of Class 1842; from Portsmo', N.H. Rec'd 15 Jan 1856

EFFEMERIDI ASTRONOMICHE

DI MILANO

PER L'ANNO 1847

CON

APPENDICE.

By Giovanni Capelli, Paolo Belgiojoso
Curzio Buzzetti and Roberto Stambucchi

MILANO
DALL' IMP. REGIA STAMPERIA
1846.

INDICE.

APPENDICE.

AVVERTIMENTO.

I calcoli delle presenti Effemeridi furono eseguiti come segue:

Quelli dei luoghi di Luna, dei Pianeti, ecc. dai signori *Sacerdote Giovanni Capelli* e *Paolo Belgiojoso;*

Dei luoghi di Sole dal signor *Curzio Buzzetti;*

Quelli degli Eclissi, congiunzioni ed occultazioni dai signori *Roberto Stambucchi* e *Paolo Belgiojoso.*

Effemeridi del 1846.

							Errori.	*Correzioni.*
Pag.	IX	linea	4	colonna	2		63 δ ♉ 5.ª	63 δ ♓ 5.ª

Appendice alle Effemeridi del 1846.

»	15	»	9	»	2	5 13 10	5 13 40
»	15	»	ultima	»	2	5 28 10	5 25 10
»	30	»	15	»	2	43 10	43 20
»	56	»	3	»	3	28,27	28,70
»	56	»	10	»	4	31,46	31,45
»	57	»	18	»	4	22 11	22 12
»	57	»	19	»	4	22 11	22 12

SPIEGAZIONE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIATURE.

Segni del Zodiaco.		Pianeti.	
♈	Ariete.	☿	Mercurio.
♉	Toro.	♀	Venere.
♊	Gemelli.	♁	Terra.
♋	Cancro.	♂	Marte.
♌	Leone.	⚳	Cerere.
♍	Vergine.	⚴	Pallade.
♎	Libra.	⚵	Giunone.
♏	Scorpione.	⚶	Vesta.
♐	Sagittario.	♃	Giove.
♑	Capricorno.	♄	Saturno.
♒	Aquario.	♅	Urano.
♓	Pesci.		

☉ Sole. ☽ Luna.

g	indica	Giorni.	M	indica	Mattina.
h		Ore.	S		Sera.
s		Segni.	A		Australe.
°		Gradi.	B		Boreale.
′		Minuti.	diff.		Differenza.
″		Secondi.	dist. min.		Distanza minima.
☌		Congiunzione.	imm.		Immersione.
☍		Opposizione.	em.		Emersione.
☊		Nodo ascendente.	AR.		Ascensione retta.
☋		Nodo discendente.	Lat.		Latitudine.

FESTE MOBILI.

Settuagesima	31	Gennajo.
Giorno delle Ceneri	17	Febbrajo.
Pasqua di Risurrezione	4	Aprile.
Litanie alla Romana	10 11 12	Maggio.
Ascensione del Signore	13	Maggio.
Litanie all'Ambrosiana	17 18 19	Maggio.
Pentecoste	23	Maggio.
Santissima Trinità	30	Maggio.
Corpus Domini	3	Giugno.
Avvento all'Ambrosiana	14	Novembre.
Avvento alla Romana	28	Novembre.

NUMERI DELL'ANNO.

Numero d'Oro	5.
Ciclo Solare	8.
Epatta	XIV.
Indizione Romana	5.
Lettera Domenicale	C.

QUATTRO TEMPORA.

Di Primavera	24 26 27	Febbrajo.
D'Estate	26 28 29	Maggio.
D'Autunno	15 17 18	Settembre.
D'Inverno	15 17 18	Dicembre.

ECLISSI DELL' ANNO 1847 IN TEMPO MEDIO.

31 Marzo. Eclisse parziale di Luna visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse a $9^h\ 0'\ 0''$.
Fine dell' Eclisse a $11^h\ 6'\ 50''$.
Quantità dell' Eclisse digiti 3 min. 28.

14 Aprile. Eclisse di Sole invisibile a Milano.
Congiunzione vera della Luna col Sole a $18^h\ 59'$.

24 Settem. Eclisse parziale di Luna invisibile a Milano.

8 Ottobre. Eclisse parziale di Sole visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse a $18^h\ 47'\ 6''$.
Nascere del Sole a $18^h\ 11'$.
Massima oscurazione a $20^h\ 5'\ 9''$.
Distanza minima dei centri = $1'\ 47''$.
Fine dell' Eclisse a $21^h\ 33'\ 12''$.
Quantità dell' Eclisse digiti 10 min. 51.
Il primo appulso avrà luogo a 22° di distanza dal diametro verticale del Sole.

Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.	Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.
0	23° 27' 24",5	+ 7",5	190	23° 27' 24",0	+ 4",9
10	24,6	+ 7,8	200	24,1	+ 5,1
20	24,8	+ 7,9	210	24,2	+ 5,2
30	25,0	+ 7,9	220	24,3	+ 5,1
40	25,2	+ 7,8	230	24,5	+ 4,8
50	25,3	+ 7,4	240	24,6	+ 4,5
60	25,5	+ 6,9	250	24,7	+ 4,0
70	25,6	+ 6,4	260	24,7	+ 3,4
80	25,5	+ 5,9	270	24,7	+ 2,8
90	25,4	+ 5,3	280	24,6	+ 2,2
100	25,3	+ 4,7	290	24,4	+ 1,7
110	25,2	+ 4,3	300	24,2	+ 1,3
120	24,9	+ 4,0	310	24,0	+ 1,0
130	24,6	+ 3,9	320	23,8	+ 0,9
140	24,4	+ 3,8	330	23,6	+ 0,9
150	24,3	+ 4,0	340	23,4	+ 1,1
160	24,2	+ 4,2	350	23,3	+ 1,4
170	24,1	+ 4,5	360	23,3	+ 1,7
180	24,0	+ 4,7	366	23,4	+ 1,9

Occultazioni dei pianeti e delle principali stelle dietro la Luna per l'anno 1847 *a Milano.*

Giorni del mese.	Astri occultati.	Tempo medio dell' immer.	Tempo medio dell' emers.	Distanza dal punto più alto della ☽ nell' em.	Cong. appar. sull' orbita.	Distanza minima dal lembo della ☽.
		h '	h '	°	h '	' "
Genn. 1	54 λ □ 4. 5.ª	15 7	16 12	94	.....	......
3	65 α^2 ♋ 5.	.....	.....	.....	15 21	(*)0 0 B
25	61 δ^1 ♉ 4.	14 56	15 58	41	.....	......
25	64 δ^2 ♉ 4. 5.	15 22	16 14	55	.....	......
26	104 m ♉ 5.	10 2	10 50	5	.....	......
Febb. 3	91 ι ♌ 4. 5.	.....	.....	.....	7 55	1 30 A
25	68 k □ 5.	10 39	11 46	105	.....	......
Marzo 2	91 ι ♌ 4. 5.	15 52	17 7	69	.....	......
8	7 χ Ofiuco 5.	15 52	16 26	43	.....	......
17	♀	22 29	23 40	67	.....	......
24	54 λ □ 4. 5.	9 34	10 34	23	.....	......
Aprile 29	100 λ ♍ 4.	17 8	17 56	101	.....	......
Maggio 18	68 k □ 5.	9 36	10 29	33	.....	......
23	91 ι ♌ 4. 5.	12 27	13 31	74	.....	......
29	7 χ Ofiuco 5.	10 25	10 58	33	.....	......
Giugno 1	44 ρ^1 ♐ 5.	13 14	14 35	82	.....	......
8	110 ο ♓ 5.	12 46	13 39	115	.....	......
16	65 α^2 ♋ 5.	.....	.....	.....	10 34	2 47 B
Agosto 28	80 e ♓ 3.	.....	.....	.....	17 31	12 40 A
Sett. 4	68 k □ 5.	12 35	13 32	153	.....	......
28	Aldebaran.	.....	.....	.....	15 13	13 0 A
Ottob. 1	54 λ □ 4. 5.	11 29	12 5	84	.....	......
16	44 ρ^1 ♐ 5.	.....	.....	.....	10 46	7 55 A
22	80 e ♓ 5.	.....	.....	.....	15 15	11 57 A
Nov. 25	68 k □ 5.	.....	.....	.....	11 57	5 48 A
29	58 α ♌ 5.	14 52	16 9	108	.....	......
Dicem. 16	80 e ♓ 5.	7 31	8 43	78	.....	......
22	54 λ □ 4. 3.	16 52	18 0	81	.....	......
25	29 π ♌ 4. 5.	18 47	19 54	91	.....	......

(*) Tangente il lembo della Luna.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Luna piena	$3^h 19'$
9	Ultimo quarto	7 17
16	Luna nuova	13 22
23	Primo quarto	4 54
30	Luna piena	21 6

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	51 □ 5.ª	12 44
1	54 λ □ 4. 5.ª	14 47
1	68 k □ 5.ª.............	22 8
3	65 α^2 ♋ 5.ª	15 16
7	9^1 ι ♌ 4. 5.ª	2 43
10	100 λ ♍ 4.ª	14 25
11	9 α^2 ♎ 3.ª..........	5 56
13	7 χ Ofiuco 5.ª	0 7
15	44 ρ^1 ♐ 5.ª	22 41
16	9 β ♑ 3. 4.ª..........	22 19
17	13 ν ♒ 5.ª	18 6
18	43 θ ♒ 4. 5.ª	21 10
25	61 δ^1 ♉ 4.ª	13 59
25	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	14 28
25	68 δ^3 ♉ 5.ª	15 13
26	104 m ♉ 5.ª	9 49
28	51 □ 5.ª..............	19 17
28	54 λ □ 4. 5.ª	21 27
29	68 k □ 5.ª...........	4 53
30	65 α^2 ♋ 5.ª	22 17

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	h ′ ″
* 1	14 57 23 em.
* 3	9 26 14
5	3 55 0
6	21 23 54
8	16 52 43
* 10	11 21 36
* 12	5 50 24
14	0 19 19
15	18 48 10
* 17	13 17 5
* 19	7 45 54
21	2 14 52
22	20 43 43
* 24	15 12 40
* 26	9 41 30
28	4 10 30
29	22 39 23
31	17 8 21
	II. Satellite.
3	22 29 46 em.
* 7	11 48 5
11	1 6 11
* 14	14 27 26
18	3 42 31
21	17 0 42
* 25	6 18 47
28	19 36 54
	III. Satellite.
3	2 4 0 imm.
3	4 28 35 em.
* 10	6 4 38 imm.
* 10	8 30 19 em.
* 17	10 5 23 imm.
* 17	12 31 59 em.
* 24	14 5 52 imm.
24	16 33 25 em.
31	18 6 27 imm.
31	20 34 58 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
1	1	Ven.	0 3 42,45	18 45 40,78	18 41 57,72	7 39	4 21
2	2	Sab.	0 4 10,67	18 50 5,62	18 45 54,27	7 38	4 22
3	3	Dom.	0 4 38,54	18 54 30,13	18 49 50,83	7 38	4 22
4	4	Lun.	0 5 6,04	18 58 54,27	18 53 47,39	7 37	4 23
5	5	Mart.	0 5 33,14	19 3 18,00	18 57 43,95	7 37	4 23
6	6	Merc.	0 5 59,82	19 7 41,30	19 1 40,50	7 36	4 24
7	7	Giov.	0 6 26,05	19 12 4,16	19 5 37,06	7 35	4 25
8	8	Ven.	0 6 51,81	19 16 26,55	19 9 33,62	7 34	4 26
9	9	Sab.	0 7 17,07	19 20 48,44	19 13 30,17	7 34	4 26
10	10	Dom.	0 7 41,81	19 25 9,81	19 17 26,73	7 33	4 27
11	11	Lun.	0 8 6,01	19 29 30,63	19 21 23,29	7 32	4 28
12	12	Mart.	0 8 29,64	19 33 50,88	19 25 19,84	7 32	4 28
13	13	Merc.	0 8 52,67	19 38 10,54	19 29 16,40	7 31	4 29
14	14	Giov.	0 9 15,08	19 42 29,55	19 33 12,95	7 30	4 30
15	15	Ven.	0 9 36,84	19 46 47,92	19 37 9,51	7 29	4 31
16	16	Sab.	0 9 57,93	19 51 5,63	19 41 6,07	7 28	4 32
17	17	Dom.	0 10 18,33	19 55 22,65	19 45 2,62	7 26	4 34
18	18	Lun.	0 10 38,02	19 59 38,95	19 48 59,18	7 25	4 35
19	19	Mart.	0 10 56,98	20 3 54,51	19 52 55,73	7 24	4 36
20	20	Merc.	0 11 15,19	20 8 9,32	19 56 52,29	7 23	4 37
21	21	Giov.	0 11 32,63	20 12 23,37	20 0 48,85	7 22	4 38
22	22	Ven.	0 11 49,29	20 16 36,64	20 4 45,40	7 21	4 39
23	23	Sab.	0 12 5,15	20 20 49,10	20 8 41,96	7 20	4 40
24	24	Dom.	0 12 20,20	20 25 0,75	20 12 38,51	7 18	4 42
25	25	Lun.	0 12 34,44	20 29 11,58	20 16 35,07	7 17	4 43
26	26	Mart.	0 12 47,86	20 33 21,59	20 20 31,62	7 16	4 44
27	27	Merc.	0 13 0,46	20 37 30,78	20 24 28,18	7 15	4 45
28	28	Giov.	0 13 12,23	20 41 39,14	20 28 24,73	7 14	4 46
29	29	Ven.	0 13 23,17	20 45 46,66	20 32 21,29	7 13	4 47
30	30	Sab.	0 13 33,28	20 49 53,35	20 36 17,84	7 12	4 48
31	31	Dom.	0 13 42,57	20 53 59,21	20 40 14,39	7 11	4 49

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	9 10 29 43,5	23 2 28,7	+ 0,20	0,38A	9,9926520
2	9 11 30 51,7	22 57 25,7	0,22	0,42	9,9926535
3	9 12 32 0,1	22 51 55,3	0,24	0,43	9,9926579
4	9 13 33 8,3	22 45 57,6	0,26	0,40	9,9926652
5	9 14 34 16,7	22 39 32,8	0,28	0,34	9,9926753
6	9 15 35 25,1	22 32 41,1	0,30	0,26	9,9926881
7	9 16 36 33,4	22 25 22,6	0,32	0,15	9,9927035
8	9 17 37 41,9	22 17 37,6	0,34	0,02	9,9927213
9	9 18 38 50,4	22 9 26,3	0,36	0,11B	9,9927414
10	9 19 39 58,9	22 0 48,9	0,37	0,24	9,9927638
11	9 20 41 7,2	21 51 45,7	0,39	0,37	9,9927883
12	9 21 42 15,5	21 42 16,9	0,41	0,48	9,9928148
13	9 22 43 23,5	21 32 22,8	0,43	0,58	9,9928431
14	9 23 44 31,4	21 22 3,7	0,45	0,65	9,9928731
15	9 24 45 38,8	21 11 19,9	0,46	0,69	9,9929047
16	9 25 46 45,8	21 0 11,7	0,48	0,71	9,9929379
17	9 26 47 52,1	20 48 39,4	0,50	0,70	9,9929727
18	9 27 48 58,0	20 36 43,4	0,51	0,66	9,9930091
19	9 28 50 2,9	20 24 24,1	0,53	0,59	9,9930471
20	9 29 51 7,1	20 11 41,7	0,54	0,50	9,9930867
21	10 0 52 10,5	19 58 36,6	0,56	0,39	9,9931280
22	10 1 53 12,5	19 45 9,2	0,57	0,26	9,9931711
23	10 2 54 13,7	19 31 19,9	0,59	0,11	9,9932161
24	10 3 55 13,8	19 17 9,1	0,60	0,02A	9,9932631
25	10 4 56 12,5	19 2 37,1	0,61	0,14	9,9933121
26	10 5 57 10,3	18 47 44,2	0,63	0,25	9,9933633
27	10 6 58 6,8	18 32 30,8	0,64	0,34	9,9934168
28	10 7 59 2,1	18 16 57,4	0,66	0,41	9,9934728
29	10 8 59 56,3	18 1 4,4	0,67	0,45	9,9935313
30	10 10 0 49,3	17 44 52,1	0,68	0,46	9,9935923
31	10 11 1 41,2	17 28 20,9	+ 0,70	0,45A	9,9936559

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	3 8 53 39	3 15 11 7	4 49 1A	4 56 19A	12 20
2	Sab.	3 21 25 36	3 27 37 6	4 59 59	5 0 4	13 9
3	Dom.	4 3 45 40	4 9 51 26	4 56 38	4 49 48	13 56
4	Lun.	4 15 54 31	4 21 55 11	4 39 44	4 26 36	14 40
5	Mart.	4 27 53 41	5 3 50 23	4 10 36	3 51 55	15 24
6	Merc.	5 9 45 40	5 15 40 3	3 30 46	3 7 24	16 8
7	Giov.	5 21 34 2	5 27 28 13	2 42 0	2 14 50	16 48
8	Ven.	6 3 23 13	6 9 19 41	1 46 8	1 16 9	17 30
9	Sab.	6 15 18 20	6 21 19 50	0 45 8	0 13 21	18 15
10	Dom.	6 27 24 55	7 3 34 15	0 18 53B	0 51 16B	19 1
11	Lun.	7 9 48 30	7 16 8 18	1 23 27	1 55 5	19 49
12	Mart.	7 22 34 13	7 29 6 43	2 25 43	2 54 57	20 43
13	Merc.	8 5 46 8	8 12 32 41	3 22 17	3 47 14	21 39
14	Giov.	8 19 26 25	8 26 27 11	4 9 18	4 27 59	22 36
15	Ven.	9 3 34 36	9 10 48 9	4 42 48	4 53 18	23 35
16	Sab.	9 18 7 4	9 25 30 24	4 59 9	5 0 3	* *
17	Dom.	10 2 57 5	10 10 25 56	4 55 53	4 46 38	0 33
18	Lun.	10 17 55 44	10 25 25 17	4 32 24	4 13 28	1 31
19	Mart.	11 2 53 26	11 10 19 9	3 50 13	3 23 9	2 26
20	Merc.	11 17 41 35	11 24 59 58	2 52 50	2 19 54	3 21
21	Giov.	0 2 13 48	0 9 22 44	1 45 1	1 8 50	4 14
22	Ven.	0 16 26 34	0 23 25 17	0 31 58	0 4 57A	5 6
23	Sab.	1 0 18 58	1 7 7 45	0 41 21A	1 16 45	5 58
24	Dom.	1 13 51 55	1 20 31 43	1 50 39	2 22 40	6 50
25	Lun.	1 27 7 26	2 3 39 22	2 52 24	3 19 34	7 42
26	Mart.	2 10 7 48	2 16 32 58	3 43 54	4 5 9	8 34
27	Merc.	2 22 55 7	2 29 14 26	4 23 8	4 37 45	9 25
28	Giov.	3 5 31 6	3 11 45 16	4 48 52	4 56 26	10 16
29	Ven.	3 17 57 2	3 24 6 31	5 0 26	5 0 53	11 4
30	Sab.	4 0 13 48	4 6 19 0	4 57 51	4 51 24	11 51
31	Dom.	4 12 22 11	4 18 23 29	4 41 42	4 28 52	12 37

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a		Diametro orizzontale della Luna a		Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
			mezzo dì medio.	mezza notte media.	mezzo dì medio.	mezza notte media.		
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	7 4	17 40B	55 37	55 23	30 22	30 14	4 52	19 43
2	7 57	15 58	55 9	54 57	30 6	29 59	5 49	20 23
3	8 48	12 54	54 45	54 34	29 53	29 47	6 47	20 56
4	9 36	9 38	54 25	54 17	29 42	29 38	7 46	21 25
5	10 24	5 59	54 11	54 7	29 34	29 32	8 45	21 54
6	11 10	2 8	54 5	54 5	29 31	29 31	9 44	22 22
7	11 56	1 49A	54 8	54 13	29 33	29 35	10 42	22 46
8	12 43	5 43	54 20	54 30	29 39	29 45	11 40	23 12
9	13 31	9 26	54 42	54 56	29 51	29 59	12 41	23 43
10	14 21	12 49	55 14	55 33	30 9	30 19	13 44	* *
11	15 14	15 40	55 55	56 19	30 31	30 44	14 47	0 13
12	16 12	17 45	56 44	57 11	30 58	31 13	15 50	0 48
13	17 10	18 51	57 38	58 6	31 27	31 43	16 51	1 33
14	18 12	18 45	58 35	58 59	31 57	32 12	17 50	2 26
15	19 15	17 20	59 23	59 45	32 25	32 37	18 46	3 23
16	* *	* *	60 4	60 20	32 47	32 56	19 30	4 30
17	20 18	14 38	60 32	60 39	33 3	33 7	20 11	5 43
18	21 20	10 54	60 43	60 42	33 9	33 8	20 48	6 59
19	22 20	6 25	60 37	60 29	33 6	33 1	21 23	8 14
20	23 18	1 33	60 17	60 2	32 54	32 47	21 56	9 29
21	0 15	3 18B	59 45	59 27	32 37	32 27	22 28	10 42
22	1 12	7 51	59 6	58 45	32 16	32 4	23 3	11 54
23	2 8	11 50	58 24	58 3	31 53	31 41	23 37	13 2
24	3 3	15 3	57 42	57 22	31 30	31 19	* *	14 6
25	3 59	17 20	57 2	56 44	31 8	30 58	0 19	15 11
26	4 56	18 37	56 26	56 9	30 48	30 39	1 3	16 7
27	5 51	18 52	55 54	55 39	30 31	30 23	1 51	16 57
28	6 46	18 6	55 26	55 13	30 16	30 8	2 45	17 43
29	7 38	16 27	55 1	54 50	30 1	29 56	3 41	18 22
30	8 30	14 1	54 40	54 31	29 50	29 46	4 38	18 56
31	9 19	10 59	54 22	54 15	29 41	29 37	5 37	19 28

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$10^h\ 28'$	Occidente
1	.2	○	1. 3. .4
2		○	.1 2☌3 .4
3	3. 1.	○	2. .4
4	3. 2.	○	.1 4.
5	.3 1. .2	○	4.
6	.3	○	1. .2,4.
7	.1,2.	○	4. .3
8	.2,4.	○	1. .3
9	4. .1	○	.2, 3.
10	4. 3. 1.	○	2.
11	4. 3. 2.	○	.1
12	.4 .3 1. .2	○	
13	.4 .3	○	.1 .2
14	.4 1.	○	2. .3
15	2. .4	○	1. .3
16	.1	○	2☌4 3.
17	●1 3.	○	2. .4
18	3. 2.	○	.1 .4
19	.3 .2,1.	○	.4
20	.3	○	.1 .2 .4
21	.1	○	2. .3 4.
22	2.	○	1. .3, 4.
23	.1	○	2. 4. 3.
24	●4	○	1☌3 2.
25	3. 4. 2.	○	10
26	4, 3. .2 1.	○	
27	4. .3	○	.1 .2
28	4. 1.	○	2. .3
29	.4 2.	○	1. .3
30	4. .1	○	3. 20
31	.4	○	1☌3 .2

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
8	Ultimo quarto	$2^h 15'$
15	Luna nuova	0 3
21	Primo quarto	16 36
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	29 π ♌ 4. 5.ª	5 38
3	91 ι ♌ 4. 5.ª	9 44
6	100 λ ♍ 4.ª	22 13
7	9 α^2 ♎ 3.ª	14 8
9	7 χ Ofiuco 5.ª	9 25
12	44 ρ^1 ♐ 5.ª	11 20
12	55 e^2 ♐ 5.ª	18 13
13	9 β ♑ 3. 4.ª	9 27
14	13 ν ♒ 5.ª	5 10
15	43 θ ♒ 4. 5.ª	7 45
18	110 ο ♓ 5.ª	23 25
21	61 δ^1 ♉ 4.ª	19 51
21	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	20 18
21	68 δ^3 ♉ 5.ª	21 1
22	104 m ♉ 5.ª	15 27
25	51 □ 5.ª	1 4
25	54 λ □ 4. 5.ª	3 12
25	68 k □ 5.ª	10 38
27	65 α^2 ♋ 5.ª	4 22
28	29 π ♌ 4. 5.ª	11 52

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	I. SATELLITE.
* 2	$11^h\ 37'\ 13''$ em.
* 4	6 6 12
6	0 35 6
7	19 4 5
* 9	13 32 58
* 11	8 1 58
13	2 30 53
14	20 59 53
16	15 28 46
* 18	9 57 47
20	4 26 43
21	22 55 43
23	17 24 37
* 25	11 53 38
* 27	6 22 34
	II. SATELLITE.
* 1	8 54 58 em.
4	22 13 1
* 8	11 31 2
12	0 49 2
* 15	14 7 2
19	3 24 59
22	16 42 56
26	6 0 50
	III. SATELLITE.
7	22 7 32 imm.
8	0 37 1 em.
15	2 8 34 imm.
15	4 39 0 em.
22	6 10 10 imm.
* 22	8 41 35 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
32	1	Lun.	0 13 51,04	20 58 4,25	20 44 10,95	7 9	4 51
33	2	Mart.	0 13 58,69	21 2 8,48	20 48 7,50	7 8	4 52
34	3	Merc.	0 14 5,53	21 6 11,90	20 52 4,06	7 6	4 54
35	4	Giov.	0 14 11,57	21 10 14,51	20 56 0,61	7 5	4 55
36	5	Ven.	0 14 16,80	21 14 16,31	20 59 57,16	7 3	4 57
37	6	Sab.	0 14 21,23	21 18 17,30	21 3 53,72	7 2	4 58
38	7	Dom.	0 14 24,86	21 22 17,49	21 7 50,27	7 1	4 59
39	8	Lun.	0 14 27,70	21 26 16,90	21 11 46,83	7 0	5 0
40	9	Mart.	0 14 29,77	21 30 15,53	21 15 43,38	6 58	5 2
41	10	Merc.	0 14 31,07	21 34 13,38	21 19 39,93	6 57	5 3
42	11	Giov.	0 14 31,60	21 38 10,47	21 23 36,49	6 55	5 5
43	12	Ven.	0 14 31,37	21 42 6,80	21 27 33,04	6 54	5 6
44	13	Sab.	0 14 30,39	21 46 2,37	21 31 29,60	6 53	5 7
45	14	Dom.	0 14 28,66	21 49 57,19	21 35 26,15	6 51	5 9
46	15	Lun.	0 14 26,19	21 53 51,27	21 39 22,70	6 49	5 11
47	16	Mart.	0 14 22,99	21 57 44,61	21 43 19,26	6 48	5 12
48	17	Merc.	0 14 19,06	22 1 37,22	21 47 15,81	6 46	5 14
49	18	Giov.	0 14 14,41	22 5 29,11	21 51 12,37	6 45	5 15
50	19	Ven.	0 14 9,06	22 9 20,30	21 55 8,92	6 43	5 17
51	20	Sab.	0 14 3,02	22 13 10,80	21 59 5,47	6 42	5 18
52	21	Dom.	0 13 56,30	22 17 0,62	22 3 2,03	6 40	5 20
53	22	Lun.	0 13 48,91	22 20 49,76	22 6 58,58	6 38	5 22
54	23	Mart.	0 13 40,87	22 24 38,25	22 10 55,13	6 37	5 23
55	24	Merc.	0 13 32,19	22 28 26,10	22 14 51,69	6 35	5 25
56	25	Giov.	0 13 22,89	22 32 13,33	22 18 48,24	6 34	5 26
57	26	Ven.	0 13 12,99	22 35 59,95	22 22 44,79	6 32	5 28
58	27	Sab.	0 13 2,50	22 39 45,99	22 26 41,34	6 31	5 29
59	28	Dom.	0 12 51,45	22 43 31,47	22 30 37,90	6 29	5 31

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1ʹ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ʹ ʺ	° ʹ ʺ	ʺ	ʺ	
1	10 12 2 32,0	17 11 31,2	+ 0,71	0,41A	9,9937220
2	10 13 3 21,7	16 54 23,4	0,72	0,33	9,9937906
3	10 14 4 10,4	16 36 57,8	0,73	0,23	9,9938616
4	10 15 4 58,2	16 19 14,8	0,74	0,11	9,9939349
5	10 16 5 44,9	16 1 14,9	0,76	0,03B	9,9940104
6	10 17 6 30,5	15 42 58,5	0,77	0,16	9,9940880
7	10 18 7 15,1	15 24 25,9	0,78	0,28	9,9941677
8	10 19 7 58,9	15 5 37,6	0,79	0,40	9,9942492
9	10 20 8 41,5	14 46 33,9	0,80	0,50	9,9943323
10	10 21 9 23,1	14 27 15,5	0,81	0,58	9,9944169
11	10 22 10 3,6	14 7 42,2	0,82	0,64	9,9945028
12	10 23 10 42,7	13 47 55,1	0,83	0,67	9,9945899
13	10 24 11 20,6	13 27 54,4	0,84	0,66	9,9946782
14	10 25 11 57,1	13 7 40,4	0,85	0,63	9,9947676
15	10 26 12 32,3	12 47 13,7	0,86	0,56	9,9948579
16	10 27 13 5,9	12 26 34,6	0,87	0,47	9,9949490
17	10 28 13 37,9	12 5 43,6	0,88	0,35	9,9950410
18	10 29 14 8,1	11 44 41,2	0,89	0,22	9,9951340
19	11 0 14 36,5	11 23 27,8	0,89	0,09	9,9952280
20	11 1 15 3,2	11 2 3,8	0,90	0,04A	9,9953230
21	11 2 15 28,0	10 40 29,5	0,91	0,17	9,9954192
22	11 3 15 50,8	10 18 45,5	0,91	0,29	9,9955166
23	11 4 16 11,6	9 56 52,3	0,92	0,39	9,9956153
24	11 5 16 30,4	9 34 50,1	0,92	0,47	9,9957153
25	11 6 16 47,2	9 12 39,3	0,93	0,52	9,9958168
26	11 7 17 2,1	8 50 20,4	0,93	0,53	9,9959199
27	11 8 17 15,0	8 27 53,8	0,94	0,51	9,9960246
28	11 9 17 25,9	8 5 19,8	0,94	0,46A	9,9961309

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.				Longitudine della Luna a mezzanotte media.				Latitudine della Luna a mezzodì medio.			Latitudine della Luna a mezza notte media.			Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.	
		s	°	'	"	s	°	'	"	°	'	"	°	'	"	h	'
1	Lun.	4	24	23	1	5	0	20	55	4	13	5A	3	54	35A	13	19
2	Mart.	5	6	17	25	5	12	12	44	3	53	31	3	10	11	14	3
3	Merc.	5	18	7	11	5	24	1	5	2	44	49	2	17	41	14	45
4	Giov.	5	29	54	52	6	5	48	59	1	49	2	1	19	8	15	27
5	Ven.	6	11	43	54	6	17	40	11	0	48	16	0	16	44	16	10
6	Sab.	6	23	38	24	6	29	39	10	0	15	11B	0	47	12B	16	54
7	Dom.	7	5	43	8	7	11	50	56	1	18	58	1	50	10	17	41
8	Lun.	7	18	3	15	7	24	20	42	2	20	28	2	49	29	18	31
9	Mart.	8	0	43	57	8	7	13	34	3	16	50	3	42	6	19	22
10	Merc.	8	13	50	2	8	20	33	46	4	4	51	4	24	39	20	17
11	Giov.	8	27	25	0	9	4	23	49	4	41	2	4	53	34	21	14
12	Ven.	9	11	30	8	9	18	43	35	5	1	49	5	5	26	22	13
13	Sab.	9	26	3	38	10	3	29	28	5	4	8	4	57	42	23	11
14	Dom.	10	11	0	7	10	18	34	24	4	46	6	4	29	23	*	*
15	Lun.	10	26	11	2	11	3	48	40	4	7	48	3	41	44	0	9
16	Mart.	11	11	25	55	11	19	1	28	3	11	41	2	38	18	1	6
17	Merc.	11	26	34	7	0	4	2	49	2	2	18	1	24	26	2	1
18	Giov.	0	11	26	40	0	18	44	59	0	45	31	0	6	16	2	56
19	Ven.	0	25	57	19	1	3	3	23	0	32	35A	1	10	23A	3	50
20	Sab.	1	10	3	5	1	16	56	27	1	46	34	2	20	40	4	44
21	Dom.	1	23	43	40	2	0	25	0	2	52	16	3	21	2	5	37
22	Lun.	2	7	0	47	2	13	31	23	3	46	42	4	9	5	6	30
23	Mart.	2	19	57	12	2	26	18	39	4	28	1	4	43	25	7	22
24	Merc.	3	2	36	9	3	8	50	5	4	55	12	5	3	22	8	13
25	Giov.	3	15	0	51	3	21	8	48	5	7	54	5	8	52	9	2
26	Ven.	3	27	14	17	4	3	17	36	5	6	18	5	0	19	9	49
27	Sab.	4	9	19	1	4	15	18	49	4	51	0	4	38	31	10	34
28	Dom.	4	21	17	12	4	27	14	24	4	23	0	4	4	39	11	18

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	10 7	7 30B	54 9	54 4	29 33	29 31	6 34	19 54
2	10 53	3 44	54 1	53 59	29 30	29 29	7 35	20 23
3	11 39	0 10A	53 58	54 0	29 28	29 29	8 33	20 49
4	12 26	4 4	54 3	54 8	29 31	29 33	9 31	21 15
5	13 13	7 49	54 15	54 24	29 36	29 41	10 30	21 43
6	14 1	11 17	54 36	54 50	29 48	29 56	11 30	22 12
7	14 52	14 18	55 6	55 25	30 5	30 15	12 31	22 46
8	15 45	16 41	55 46	56 9	30 26	30 39	13 33	23 25
9	16 41	18 14	56 34	57 1	30 53	31 7	14 33	* *
10	17 40	18 46	57 29	57 58	31 22	31 38	15 31	0 9
11	18 41	18 6	58 28	58 57	31 55	32 10	16 25	1 3
12	19 44	16 10	59 25	59 52	32 26	32 41	17 16	2 5
13	20 46	13 1	60 16	60 37	32 54	33 5	18 0	3 14
14	* *	* *	60 54	61 7	33 15	33 22	18 41	4 29
15	21 48	8 53	61 15	61 18	33 26	33 28	19 18	5 46
16	22 49	4 6	61 16	61 9	33 27	33 23	19 53	7 4
17	23 49	0 55B	60 58	60 43	33 17	33 9	20 28	8 11
18	0 48	5 47	60 24	60 2	32 58	32 46	21 3	9 38
19	1 46	10 9	59 38	59 12	32 33	32 19	21 39	10 46
20	2 44	13 46	58 46	58 19	32 5	31 50	22 20	11 59
21	3 41	16 27	57 52	57 25	31 35	31 21	23 3	13 0
22	4 38	18 6	57 0	56 37	31 7	30 54	23 50	14 0
23	5 34	18 41	56 15	55 54	30 42	30 31	* *	14 52
24	6 29	18 16	55 35	55 18	30 21	30 11	0 41	15 42
25	7 22	16 56	55 3	54 50	30 3	29 56	1 35	16 24
26	8 13	14 47	54 38	54 28	29 50	29 44	2 32	16 58
27	9 3	12 0	54 19	54 12	29 39	29 35	3 30	17 30
28	9 51	8 42	54 6	54 1	29 32	29 29	4 28	17 59

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$9^h\ 52'$	*Occidente*
1	3. 2☌1☌4	○	
2	●1 3. .2	○	.4
3	.3	○	.1 .2 .4
4	1.	○	.3,2. .4
5	2.	○	.1 .3 .4
6	.1 .2	○	3. 4.
7		○	3. 1. 2. 4.
8	3. .1,2.	○	4.
9	3. .2	○	1. 4.
10	.3 4.	○	.1 .2
11	4. 1.	○	.3 2.
12	4. 2.	○	.1 .3
13	4. 1. .2	○	.3
14	.4	○	1☌3,2.
15	.4 3. .1	○	2●
16	.4,3. 2.	○	1.
17	.3 .4 .1	○	.2
18	o3 1.	○	2. 4o
19	2.	○	.1 .4 .3
20	1☌2	○	.3 .4
21		○	1.3. .2 .4
22	3☌1	○	2. .4
23	3. 2.	○	1. 4.
24	.3 .1	○	.2 4.
25	●1 .3	○	2. 4.
26	2.	○	.1,4. .3
27	.2,4.1.	○	.3
28	4.	○	.1 .2,3.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Luna piena	15ʰ 45′
9	Ultimo quarto	17 15
16	Luna nuova	9 48
23	Primo quarto	6 16
31	Luna piena	9 54
	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	91 ι ♌ 4. 5.ª	15 55
6	110 λ ♍ 4.ª	4 28
8	7 χ Ofiuco 5.ª	16 45
11	44 ρ^1 ♐ 5.ª	19 19
12	55 e^2 ♐ 5.ª	4 10
12	9 β ♑ 3. 4.ª	19 51
13	13 ν ♒ 5.ª	16 2
14	43 θ ♒ 4. 5.ª	19 4
17	♀	23 21
18	110 ο ♓ 5.ª	9 31
21	61 δ^1 ♉ 4.ª	3 40
21	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	4 7
21	68 δ^3 ♉ 5.ª	4 49
21	104 m ♉ 5.ª	22 41
24	51 ♊ 5.ª	7 16
24	54 λ ♊ 4. 5.ª	9 22
24	68 k ♊ 5.ª	16 45
26	65 α^2 ♋ 5.ª	10 24
27	29 π ♌ 4. 5.ª	17 58
29	91 ι ♌ 4. 5.ª	22 10

Giorni.	Ecclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	ʰ ′ ″
1	0 51 35 em.
2	19 20 28
4	13 49 30
* 6	8 18 25
8	2 47 26
9	21 16 20
11	15 45 21
* 13	10 14 17
15	5 43 17
16	23 12 10
18	17 41 12
* 20	12 10 7
22	6 39 7
24	1 8 0
25	19 37 1
27	14 5 55
* 29	8 34 55
31	3 3 48
	II. Satellite.
1	19 28 44 em.
* 5	8 36 36
8	21 54 28
* 12	11 12 17
16	0 29 6
19	13 47 53
23	3 5 40
26	16 23 25
30	5 41 10
	III. Satellite.
* 1	10 11 10 imm.
* 1	12 43 32 em.
8	14 12 6 imm.
8	16 45 28 em.
15	18 12 43 imm.
15	20 47 4 em.
22	22 13 22 imm.
23	0 48 42 em.
30	2 14 25 imm.
30	4 50 44 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.			Tempo sidereo a mezzodì vero.			Tempo sidereo a mezzodì medio.			Nascere del Sole a tempo vero.		Tramontare del Sole a tempo vero.	
			h	'	"	h	'	"	h	'	"	h	'	h	'
60	1	Lun.	0	12	39,87	22	47	16,41	22	34	34,45	6	26	5	34
61	2	Mart.	0	12	27,78	22	51	0,83	22	38	31,00	6	25	5	35
62	3	Merc.	0	12	15,19	22	54	44,76	22	42	27,55	6	24	5	36
63	4	Giov.	0	12	2,12	22	58	28,21	22	46	24,11	6	22	5	38
64	5	Ven.	0	11	48,60	23	2	11,20	22	50	20,66	6	21	5	39
65	6	Sab.	0	11	34,66	23	5	53,77	22	54	17,21	6	19	5	41
66	7	Dom.	0	11	20,32	23	9	35,94	22	58	13,76	6	18	5	42
67	8	Lun.	0	11	5,59	23	13	17,72	23	2	10,31	6	16	5	44
68	9	Mart.	0	10	50,48	23	16	59,13	23	6	6,87	6	15	5	45
69	10	Merc.	0	10	35,02	23	20	40,18	23	10	3,42	6	13	5	47
70	11	Giov.	0	10	19,24	23	24	20,91	23	13	59,97	6	12	5	48
71	12	Ven.	0	10	3,16	23	28	1,33	23	17	56,52	6	10	5	50
72	13	Sab.	0	9	46,79	23	31	41,47	23	21	53,07	6	9	5	51
73	14	Dom.	0	9	30,15	23	35	21,34	23	25	49,63	6	7	5	53
74	15	Lun.	0	9	13,25	23	39	0,95	23	29	46,18	6	5	5	55
75	16	Mart.	0	8	56,12	23	42	40,32	23	33	42,73	6	4	5	56
76	17	Merc.	0	8	38,77	23	46	19,47	23	37	39,28	6	2	5	58
77	18	Giov.	0	8	21,22	23	49	58,42	23	41	35,83	6	1	5	59
78	19	Ven.	0	8	3,48	23	53	37,19	23	45	22,39	5	59	6	1
79	20	Sab.	0	7	45,57	23	57	15,79	23	49	28,94	5	58	6	2
80	21	Dom.	0	7	27,51	0	0	54,23	23	53	25,49	5	56	6	4
81	22	Lun.	0	7	9,32	0	4	32,54	23	57	22,04	5	54	6	6
82	23	Mart.	0	6	51,02	0	8	10,74	0	1	18,59	5	53	6	7
83	24	Merc.	0	6	32,62	0	11	48,84	0	5	15,14	5	51	6	9
84	25	Giov.	0	6	14,14	0	15	26,85	0	9	11,69	5	50	6	10
85	26	Ven.	0	5	55,60	0	19	4,81	0	13	8,26	5	48	6	12
86	27	Sab.	0	5	37,02	0	22	42,74	0	17	4,80	5	46	6	14
87	28	Dom.	0	5	18,44	0	26	20,66	0	21	1,35	5	45	6	15
88	29	Lun.	0	4	59,88	0	29	58,60	0	24	57,90	5	43	6	17
89	30	Mart.	0	4	41,36	0	33	36,57	0	28	54,45	5	41	6	19
90	31	Merc.	0	4	22,89	0	37	14,60	0	32	51,00	5	40	6	20

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	11 10 17 34,9	7 42 38,8	+ 0,95	0,39A	9,9962389
2	11 11 17 42,2	7 19 51,2	0,95	0,29	9,9963486
3	11 12 17 47,7	6 56 57,3	0,96	0,18	9,9964599
4	11 13 17 51,2	6 33 57,6	0,96	0,06	9,9965728
5	11 14 17 53,1	6 10 52,4	0,97	0,07B	9,9966872
6	11 15 17 53,4	5 47 42,0	0,97	0,20	9,9968030
7	11 16 17 52,0	5 24 26,9	0,97	0,32	9,9969201
8	11 17 17 48,8	5 1 7,4	0,98	0,43	9,9970383
9	11 18 17 44,2	4 37 43,8	0,98	0,52	9,9971574
10	11 19 17 38,0	4 14 16,6	0,98	0,58	9,9972772
11	11 20 17 29,9	3 50 46,1	0,98	0,61	9,9973977
12	11 21 17 20,4	3 27 12,8	0,98	0,61	9,9975187
13	11 22 17 8,9	3 3 37,0	0,98	0,58	9,9976400
14	11 23 16 55,7	2 39 59,0	0,99	0,52	9,9977614
15	11 24 16 40,7	2 16 19,3	0,99	0,43	9,9978829
16	11 25 16 23,8	1 52 38,3	0,99	0,32	9,9980044
17	11 26 16 5,0	1 28 56,4	0,99	0,20	9,9981258
18	11 27 15 44,0	1 5 13,9	0,99	0,07	9,9982471
19	11 28 15 20,9	0 41 31,2	0,99	0,06A	9,9983683
20	11 29 14 55,6	0 17 48,8	0,99	0,19	9,9984894
21	0 0 14 28,2	0 5 53,0 Boreale	0,99	0,31	9,9986104
22	0 1 13 58,6	0 29 33,8	0,99	0,41	9,9987314
23	0 2 13 26,5	0 53 13,2	0,99	0,49	9,9988525
24	0 3 12 52,2	1 16 50,9	0,98	0,54	9,9989739
25	0 4 12 15,3	1 40 26,5	0,98	0,57	9,9990956
26	0 5 11 36,4	2 3 59,6	0,98	0,57	9,9992176
27	0 6 10 55,0	2 27 29,9	0,98	0,54	9,9993400
28	0 7 10 11,4	2 50 57,1	0,98	0,47	9,9994629
29	0 8 9 25,6	3 14 20,9	0,97	0,37	9,9995864
30	0 9 8 37,6	3 37 41,0	0,97	0,26	9,9997105
31	0 10 7 47,5	4 0 57,0	+ 0,97	0,14A	9,9998352

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio. s ° ′ ″	Longitudine della Luna a mezzanotte media. s ° ′ ″	Latitudine della Luna a mezzodì medio. ° ′ ″	Latitudine della Luna a mezza notte media. ° ′ ″	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio. h ′
1	Lun.	5 3 10 37	5 9 6 4	3 43 41A	3 20 18A	12 0
2	Mart.	5 15 0 56	5 20 55 28	2 54 47	2 27 21	12 44
3	Merc.	5 26 49 54	6 2 44 29	1 58 18	1 27 56	13 26
4	Giov.	6 8 39 31	6 14 35 21	0 56 32	0 24 25	14 8
5	Ven.	6 20 32 19	6 26 30 49	0 8 7B	0 40 44B	14 52
6	Sab.	7 2 31 17	7 8 34 8	1 13 5	1 44 52	15 37
7	Dom.	7 14 39 51	7 20 48 55	2 15 43	2 45 18	16 25
8	Lun.	7 27 1 53	8 3 19 14	3 13 16	3 39 14	17 15
9	Mart.	8 9 41 31	8 16 9 15	4 2 51	4 23 43	18 7
10	Merc.	8 22 42 53	8 29 22 50	4 41 28	4 55 44	19 1
11	Giov.	9 6 9 28	9 13 2 59	5 6 9	5 12 22	19 57
12	Ven.	9 20 3 27	9 27 10 49	5 14 4	5 10 59	20 53
13	Sab.	10 4 24 46	10 11 44 52	5 2 58	4 49 54	21 50
14	Dom.	10 19 10 26	10 26 40 35	4 31 50	4 8 55	22 47
15	Lun.	11 4 14 19	11 11 50 26	3 41 29	3 9 58	23 43
16	Mart.	11 19 27 43	11 27 4 51	2 34 58	1 57 11	* *
17	Merc.	0 4 40 34	0 12 13 40	1 17 24	0 36 27	0 39
18	Giov.	0 19 43 2	0 27 7 44	0 4 50A	0 45 38A	1 35
19	Ven.	1 4 26 58	1 11 40 8	1 25 11	2 2 50	2 31
20	Sab.	1 18 46 49	1 25 46 47	2 38 1	3 10 16	3 26
21	Dom.	2 2 39 58	2 9 26 27	3 39 13	4 4 36	4 22
22	Lun.	2 16 6 25	2 22 40 9	4 26 14	4 44 2	5 16
23	Mart.	2 29 8 2	3 5 30 31	4 57 56	5 7 56	6 8
24	Merc.	3 11 48 2	3 18 1 5	5 14 6	5 16 29	6 58
25	Giov.	3 24 10 11	4 0 15 51	5 15 11	5 10 21	7 46
26	Ven.	4 6 18 35	4 12 18 51	5 2 5	4 50 33	8 32
27	Sab.	4 18 17 8	4 24 13 51	4 35 55	4 18 22	9 16
28	Dom.	5 0 9 25	5 6 4 13	3 58 5	3 35 18	10 0
29	Lun.	5 11 58 35	5 17 52 52	3 10 13	2 43 6	10 42
30	Mart.	5 23 47 22	5 29 42 23	2 14 13	1 43 49	11 24
31	Merc.	6 5 38 9	6 11 34 59	1 12 13	0 39 43	12 7

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	10 36	5 4B	53 58	53 56	29 28	29 27	5 27	18 25
2	11 24	1 14	53 55	53 56	29 26	29 27	6 27	18 53
3	12 10	2 39A	53 58	54 1	29 28	29 29	7 25	19 19
4	12 57	6 27	54 6	54 12	29 32	29 35	8 22	19 47
5	13 45	10 0	54 19	54 28	29 38	29 43	9 22	20 16
6	14 34	13 8	54 39	54 52	29 49	29 57	10 20	20 48
7	15 26	15 43	55 6	55 23	30 5	30 14	11 21	21 24
8	16 20	17 34	55 41	56 2	30 24	30 35	12 22	22 5
9	17 16	18 30	56 24	56 48	30 47	31 0	13 19	22 54
10	18 14	18 23	57 13	57 40	31 14	31 29	14 14	23 49
11	19 14	17 6	58 8	58 36	31 44	31 59	15 4	* *
12	20 14	14 39	59 4	59 31	32 14	32 29	15 49	0 53
13	21 15	11 8	59 57	60 20	32 43	32 56	16 31	2 2
14	22 16	6 45	60 40	60 58	33 7	33 17	17 9	3 14
15	23 16	1 52	61 10	61 18	33 24	33 28	17 45	4 33
16	* *	* *	61 22	61 20	33 30	33 29	18 22	5 49
17	0 17	3 10B	61 13	61 1	33 25	33 19	18 57	7 6
18	1 17	7 56	60 46	60 26	33 11	32 59	19 36	8 22
19	2 17	12 3	60 2	59 37	32 47	32 33	20 15	9 36
20	3 16	15 16	59 9	58 40	32 18	32 2	20 58	10 45
21	4 16	17 25	58 11	57 42	31 46	31 30	21 46	11 50
22	5 14	18 26	57 14	56 47	31 15	31 0	22 37	12 47
23	6 10	18 23	56 22	55 58	30 46	30 33	23 30	13 38
24	7 4	17 20	55 36	55 17	30 21	30 11	* *	14 22
25	7 56	15 27	55 0	54 45	30 1	29 53	0 27	14 59
26	8 47	12 53	54 32	54 21	29 46	29 40	1 24	15 33
27	9 35	9 46	54 12	54 6	29 35	29 32	2 22	16 1
28	10 22	6 15	54 1	53 58	29 29	29 28	3 22	16 29
29	11 9	2 30	53 57	53 57	29 27	29 27	4 19	16 57
30	11 55	1 22A	53 59	54 2	29 28	29 30	5 16	17 24
31	12 42	5 12	54 7	54 12	29 33	29 36	6 14	17 52

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$9^h\ 22'$	Occidente
1	4. 1. 3.	○	2.
2	4. 3. 2.	○	1.
3	4. .3 .1	○	20
4	.4 .3	○	1. .2
5	○1 .4 2.	○	.3
6	.4 .2,1.	○	.3
7		○	.1 .2 3. 4○
8	●3 1.	○	2. .4
9	3. 2.	○	1. .4
10	3. .1 .2	○	.4
11	.3	○	1. 2. .4
12	2♂1	○	.3 4.
13	.2 1.	○	.3 4.
14		○	.1 .2 4. 3.
15	1.	○	4♂3,2.
16	2♂3,4.	○	1.
17	4. .3 .1 .2	○	
18	4. .3	○	1. .2
19	4. .1	○	2. .3
20	.4 .2	○	.3 1●
21	.4 1.	○	.2 3.
22	.4 1.	○	3. 2.
23	3. 2♂4	○	.1
24	3. 2♂1	○	.4
25	.3	○	1. .2 .4
26	.1	○	2♂3 .4
27	2.	○	1. .3 .4
28	○1	○	.2 .3 .4
29	1.	○	3. 2. 4.
30	2♂3	○	.1 4.
31	3. .2,1.	○	4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
8	Ultimo quarto	4^h 3′
14	Luna nuova	18 59
21	Primo quarto	21 45
30	Luna piena	2 3

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	100 λ ♍ 4.ª	10 26
4	7 χ Ofiuco 5.ª	22 32
8	44 ρ¹ ♐ 5.ª	2 32
8	55 e² ♐ 5.ª	11 41
9	9 β ♑ 3, 4.ª	3 55
10	13 ν ♒ 5.ª	0 52
11	43 θ ♒ 4. 5.ª	4 46
14	110 ο ♓ 5.ª	20 31
17	61 δ¹ ♉ 4.ª	13 23
17	64 δ² ♉ 4. 5.ª	13 50
17	68 δ³ ♉ 5.ª	14 32
18	104 m ♉ 5.ª	7 54
20	51 ♊ 5.ª	14 52
20	54 λ ♊ 4. 5.ª	16 59
21	68 k ♊ 5.ª	9 13
22	65 α⁶ ♋ 5.ª	17 16
24	29 π ♌ 4. 5.ª	0 38
26	91 ι ♌ 4. 5.ª	4 55
29	100 λ ♍ 4.ª	16 47
30	9 α² ♎ 3.ª	8 38

Giorni.	Ecclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	21 52 47 em.
3	16 1 41
* 5	10 30 41
7	4 59 32
8	23 28 31
10	17 57 24
12	12 26 23
14	6 55 13
16	1 24 11
17	19 53 3
19	14 22 0
* 21	8 50 59
23	3 19 46
24	21 48 37
26	16 17 34
* 28	10 46 22
30	5 15 17
	II. Satellite.
3	18 58 53 em.
* 6	8 16 55
9	21 34 17
* 13	10 51 58
17	0 9 39
20	13 28 18
24	2 44 58
27	16 2 36
	III. Satellite.
6	6 15 18 imm.
* 6	8 52 37 em.
* 13	10 16 40 imm.
13	12 54 57 em.
20	14 17 19 imm.
20	16 56 36 em.
27	18 17 48 imm.
27	20 58 5 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
91	1	Giov.	0 4 4,49	0 40 52,70	0 36 47,55	5 39	6 21
92	2	Ven.	0 3 46,19	0 44 30,91	0 40 44,10	5 37	6 23
93	3	Sab.	0 3 28,02	0 48 9,25	0 44 40,66	5 36	6 24
94	4	Dom.	0 3 10,00	0 51 47,73	0 48 37,21	5 34	6 26
95	5	Lun.	0 2 52,15	0 55 26,38	0 52 33,76	5 33	6 27
96	6	Mart.	0 2 34,49	0 59 5,23	0 56 30,31	5 31	6 29
97	7	Merc.	0 2 17,04	1 2 44,29	1 0 26,86	5 30	6 30
98	8	Giov.	0 1 59,83	1 6 23,58	1 4 23,42	5 28	6 32
99	9	Ven.	0 1 42,87	1 10 3,12	1 8 19,97	5 26	6 34
100	10	Sab.	0 1 26,18	1 13 42,93	1 12 16,52	5 24	6 36
101	11	Dom.	0 1 9,77	1 17 23,03	1 16 13,07	5 23	6 37
102	12	Lun.	0 0 53,65	1 21 3,42	1 20 9,63	5 21	6 39
103	13	Mart.	0 0 37,84	1 24 44,12	1 24 6,18	5 19	6 41
104	14	Merc.	0 0 22,35	1 28 25,15	1 28 2,73	5 18	6 42
105	15	Giov.	0 0 7,20	1 32 6,51	1 31 59,29	5 16	6 44
106	16	Ven.	23 59 52,40	1 35 48,22	1 35 55,84	5 14	6 46
107	17	Sab.	23 59 37,96	1 39 30,29	1 39 52,39	5 13	6 47
108	18	Dom.	23 59 23,81	1 43 12,73	1 43 48,94	5 11	6 49
109	19	Lun.	23 59 10,19	1 46 55,55	1 47 45,50	5 10	6 50
110	20	Mart.	23 58 56,88	1 50 38,76	1 51 42,05	5 8	6 52
111	21	Merc.	23 58 43,97	1 54 22,37	1 55 38,60	5 7	6 53
112	22	Giov.	23 58 31,48	1 58 6,40	1 59 35,16	5 5	6 54
113	23	Ven.	23 58 19,42	2 1 50,86	2 3 31,71	5 3	6 55
114	24	Sab.	23 58 7,80	2 5 35,76	2 7 28,27	5 2	6 58
115	25	Dom.	23 57 56,63	2 9 21,11	2 11 24,82	5 1	6 59
116	26	Lun.	23 57 45,93	2 13 6,93	2 15 21,37	5 0	7 0
117	27	Mart.	23 57 35,70	2 16 53,23	2 19 17,93	4 58	7 2
118	28	Merc.	23 57 25,96	2 20 40,02	2 23 14,48	4 57	7 3
119	29	Giov.	23 57 16,72	2 24 27,31	2 27 11,04	4 56	7 4
120	30	Ven.	23 57 8,00	2 28 15,12	2 31 7,59	4 54	7 6

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	0 11 6 55,3	4 24 8,5	+ 0,97	0,01A	9,9999604
2	0 12 6 1,2	4 47 15,2	0,96	0,12B	0,0000861
3	0 13 5 5,2	5 10 16,8	0,96	0,25	0,0002123
4	0 14 4 7,1	5 33 13,0	0,95	0,36	0,0003389
5	0 15 3 7,3	5 56 3,5	0,95	0,45	0,0004658
6	0 16 2 5,9	6 18 48,0	0,95	0,51	0,0005928
7	0 17 1 2,5	6 41 26,1	0,94	0,55	0,0007197
8	0 17 59 57,5	7 3 57,5	0,94	0,56	0,0008463
9	0 18 58 50,8	7 26 21,9	0,93	0,54	0,0009725
10	0 19 57 42,4	7 48 38,9	0,93	0,48	0,0010982
11	0 20 56 32,3	8 10 48,1	0,92	0,40	0,0012232
12	0 21 55 20,2	8 32 49,1	0,92	0,30	0,0013474
13	0 22 54 6,5	8 54 41,6	0,91	0,18	0,0014706
14	0 23 52 51,0	9 16 25,3	0,91	0,05	0,0015928
15	0 24 51 33,3	9 37 59,8	0,90	0,09A	0,0017139
16	0 25 50 13,9	9 59 24,8	0,90	0,22	0,0018338
17	0 26 48 52,5	10 20 40,0	0,89	0,34	0,0019524
18	0 27 47 28,9	10 41 44,9	0,88	0,44	0,0020698
19	0 28 46 3,3	11 2 39,2	0 87	0,52	0,0021861
20	0 29 44 35,5	11 23 22,5	0,86	0,58	0,0023013
21	1 0 43 5,5	11 43 54,5	0,86	0,62	0,0024155
22	1 1 41 33,5	12 4 14,9	0,85	0,62	0,0025288
23	1 2 39 59,3	12 24 23,3	0,84	0,58	0,0026413
24	1 3 38 22,8	12 44 19,4	0,83	0,52	0,0027530
25	1 4 36 44,3	13 4 2,9	0,82	0,44	0,0028641
26	1 5 35 3,8	13 23 33,5	0,81	0,33	0,0029747
27	1 6 33 21,1	13 42 50,9	0,80	0,20	0,0030848
28	1 7 31 36,5	14 1 54,8	0,79	0,06	0,0031944
29	1 8 29 50,1	14 20 44,8	0,78	0,07B	0,0033036
30	1 9 28 1,9	14 39 20,7	+ 0,77	0,19B	0,0034124

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna								Latitudine della Luna						Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.	
		a mezzodì medio.				a mezzanotte media.				a mezzodì medio.			a mezza notte media.				
		s	°	′	″	s	°	′	″	°	′	″	°	′	″	h	′
1	Giov.	6	17	33	6	6	23	32	45	0	6	39A	0	26	38B	12	51
2	Ven.	6	29	34	14	7	5	37	46	0	59	47B	1	52	28	13	36
3	Sab.	7	11	43	38	7	17	52	5	2	4	18	2	34	56	14	22
4	Dom.	7	24	3	24	8	0	17	52	3	4	0	3	31	6	15	11
5	Lun.	8	6	35	46	8	12	57	25	3	55	55	4	18	4	16	2
6	Mart.	8	19	23	7	8	25	53	10	4	37	13	4	53	3	16	55
7	Merc.	9	2	27	15	9	9	7	27	5	5	14	5	13	30	17	48
8	Giov.	9	15	52	10	9	22	42	12	5	17	34	5	17	14	18	43
9	Ven.	9	29	37	38	10	6	38	28	5	12	19	5	2	44	19	37
10	Sab.	10	13	44	37	10	20	55	51	4	48	25	4	29	26	20	32
11	Dom.	10	28	11	51	11	5	32	5	4	5	56	3	58	11	21	27
12	Lun.	11	12	55	56	11	20	22	38	3	6	34	2	31	37	22	21
13	Mart.	11	27	51	19	0	5	21	1	1	53	53	1	14	6	23	17
14	Merc.	0	12	50	42	0	20	19	19	0	33	3	0	8	28A	*	*
15	Giov.	0	27	45	50	1	5	9	15	0	49	39A	1	29	41	0	13
16	Ven.	1	12	28	40	1	19	43	17	2	7	52	2	43	33	1	9
17	Sab.	1	26	52	28	2	3	55	41	3	16	12	3	45	22	2	6
18	Dom.	2	10	52	36	2	17	43	1	4	10	44	4	32	6	3	3
19	Lun.	2	24	26	54	3	1	4	19	4	49	20	5	2	23	3	58
20	Mart.	3	7	35	30	3	14	0	45	5	11	19	5	16	11	4	50
21	Merc.	3	20	20	28	3	26	35	8	5	17	7	5	14	16	5	40
22	Giov.	4	2	45	13	4	8	51	18	5	7	49	4	57	56	6	28
23	Ven.	4	14	53	57	4	20	53	45	4	44	50	4	28	43	7	13
24	Sab.	4	26	51	17	5	2	47	9	4	9	47	3	48	16	7	57
25	Dom.	5	8	41	52	5	14	36	0	3	24	23	2	58	21	8	40
26	Lun.	5	20	30	3	5	26	24	31	2	30	26	2	0	53	9	22
27	Mart.	6	2	19	50	6	8	16	24	1	29	58	0	57	59	10	4
28	Merc.	6	14	14	38	6	20	14	51	0	25	14	0	7	57B	10	49
29	Giov.	6	26	17	20	7	2	22	21	0	41	15B	1	14	17	11	34
30	Ven.	7	8	30	7	7	14	40	49	1	46	40	2	18	2	12	20

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	13 29	8 51A	54 19	54 27	29 39	29 43	7 14	18 20
2	14 19	12 9	54 36	54 46	29 48	29 54	8 15	18 51
3	15 9	14 56	54 57	55 10	30 0	30 7	9 15	19 24
4	16 2	17 1	55 23	55 38	30 14	30 22	10 15	20 4
5	16 57	18 14	55 54	56 11	30 31	30 40	11 14	20 49
6	17 54	18 28	56 29	56 49	30 50	31 1	12 8	21 43
7	18 52	17 38	57 10	57 32	31 12	31 24	12 58	22 41
8	19 50	15 42	57 54	58 17	31 36	31 49	13 44	23 47
9	20 49	12 44	58 41	59 3	32 2	32 14	14 25	* *
10	21 48	8 52	59 26	59 47	32 27	32 38	15 3	0 55
11	22 46	4 20	60 6	60 22	32 48	32 57	15 39	2 8
12	23 45	0 34B	60 36	60 46	33 5	33 10	16 14	3 23
13	0 45	5 27	60 52	60 55	33 14	33 15	16 50	4 38
14	* *	* *	60 52	60 45	33 14	33 10	17 27	5 54
15	1 45	9 57	60 34	60 19	33 4	32 55	18 6	7 9
16	2 46	13 43	60 1	59 39	32 46	32 34	18 48	8 21
17	3 47	16 29	59 14	58 48	32 20	32 6	19 36	9 30
18	4 47	18 5	58 21	57 53	31 51	31 36	20 26	10 33
19	5 46	18 31	57 25	56 58	31 21	31 6	21 18	11 30
20	6 43	17 51	56 32	56 7	30 52	30 38	22 18	12 19
21	7 37	16 15	55 44	55 23	30 25	30 14	23 15	12 58
22	8 28	13 53	55 5	54 48	30 4	29 55	* *	13 34
23	9 18	10 55	54 35	54 24	29 48	29 42	0 13	14 4
24	10 6	7 32	54 15	54 9	29 37	29 34	1 11	14 33
25	10 53	3 50	54 5	54 3	29 32	29 30	2 11	15 1
26	11 39	1 0	54 4	54 6	29 31	29 32	3 9	15 27
27	12 25	3 52A	54 10	54 16	29 34	29 38	4 6	15 54
28	13 14	7 37	54 23	54 32	29 41	29 46	5 8	16 22
29	14 3	11 5	54 42	54 53	29 52	29 58	6 10	16 53
30	14 53	14 5	55 4	55 17	30 4	30 11	7 8	17 27

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$8^h\ 51'$	Occidente
1	.3	○	4. 1. .2
2	4. .1 .3	○	2.
3	4. 2.	○	1. .3
4	4. 2☌1	○	1.3
5	4. 1.	○	2☌3
6	.4 2☌3	○	.1
7	.4 3. .2,1.	○	
8	3☌4	○	2☌1
9	2☌1☌4	○	3.
10	2.	○	1☌4 .3
11	2☌1	○	3☌4
12		○	1. 2. 3. .4
13	•3 2.	○	.1 .4
14	3. .2 1.	○	.4
15	3.	○	.2.1 4.
16	3☌1	○	2. 4.
17	2.	○	1☌3,4.
18	2☌1,4.	○	.3
19	4.	○	1. .2,3.
20	4.	○	2.3. 1○
21	4. 3. 2. 1.	○	
22	4. 3.	○	.2.1
23	.4 .3,1.	○	2.
24	.4 2.	○	.3 1.
25	.4 2☌1	○	.3
26	.4	○	1. .2 3.
27	.1	○	2.3. .4
28	3☌2 1.	○	.4
29	3.	○	.2,1. .4
30	.3 1.	○	2. .4

Giorni	Fasi della Luna in tempo medio.	h	'
7	Ultimo quarto	11	26
14	Luna nuova	4	0
21	Primo quarto	14	36
29	Luna piena	15	22

Giorni	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	h	'
2	7 χ Ofiuco 5.ª	4	19
5	44 ρ^1 ♐ 5.ª	8	8
5	55 e^1 ♐ 5.ª	17	21
6	9 β ♑ 3. 4.ª	9	50
7	13 ν ♒ 5.ª	7	14
8	43 θ ♒ 4. 5.ª	12	0
12	110 ο ♓ 5.ª	1	22
14	61 δ^1 ♉ 4.ª	23	33
15	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	0	0
15	68 δ^3 ♉ 5.ª	0	41
15	α ♉ (Aldebaran) 1.ª	4	32
15	104 m ♉ 5.ª	17	52
17	61 ◻ 5.ª	23	53
18	54 λ ◻ 4. 5.ª	1	54
18	68 k ◻ 5.ª.	9	1
20	65 α^1 ♋ 5.ª	1	14
21	29 π ♌ 4. 5.ª	8	16
23	91 ι ♌ 4. 5.ª	12	18
27	100 λ ♍ 4.ª	6	15
29	7 χ Ofiuco 5.ª	11	19

Giorni	Ecclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.			
	I. Satellite.			
	h	'	"	
1	23	14	7	em.
3	18	13	2	
5	12	52	49	
7	7	10	43	
9	1	39	31	
10	20	8	25	
12	14	37	10	
14	9	6	3	
16	3	34	49	
17	22	3	42	
19	16	32	26	
21	11	1	16	
23	5	30	2	
	II. Satellite.			
1	5	20	16	em.
4	18	37	54	
8	7	55	33	
11	21	13	10	
15	10	30	49	
18	23	48	27	
22	13	6	6	
	III. Satellite.			
4	22	17	57	imm.
5	0	59	13	em.
12	5	0	29	em.
19	9	1	48	em.

Dopo il giorno 23 non sono visibili gli Eclissi dei satelliti di Giove per la vicinanza del Sole.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
121	1	Sab.	23 56 59,81	2 32 3,47	2 35 4,15	4 53	7 7
122	2	Dom.	23 56 52,16	2 35 52,36	2 39 0,70	4 52	7 8
123	3	Lun.	23 56 45,06	2 39 41,79	2 42 57,26	4 50	7 10
124	4	Mart.	23 56 38,52	2 43 31,78	2 46 53,81	4 49	7 11
125	5	Merc.	23 56 32,55	2 47 22,35	2 50 50,37	4 48	7 12
126	6	Giov.	23 56 27,16	2 51 13,50	2 54 46,92	4 46	7 14
127	7	Ven.	23 56 22,35	2 55 5,24	2 58 43,48	4 45	7 15
128	8	Sab.	23 56 18,13	2 58 57,58	3 2 40,03	4 44	7 16
129	9	Dom.	23 56 14,51	3 2 50,51	3 6 36,59	4 43	7 17
130	10	Lun.	23 56 11,48	3 6 44,02	3 10 33,14	4 41	7 19
131	11	Mart.	23 56 9,04	3 10 38,12	3 14 29,70	4 40	7 20
132	12	Merc.	23 56 7,19	3 14 32,81	3 18 26,25	4 39	7 21
133	13	Giov.	23 56 5,92	3 18 28,09	3 22 22,81	4 38	7 22
134	14	Ven.	23 56 5,23	3 22 23,96	3 26 19,36	4 37	7 23
135	15	Sab.	23 56 5,12	3 26 20,40	3 30 15,92	4 36	7 24
136	16	Dom.	23 56 5,58	3 30 17,41	3 34 12,47	4 34	7 26
137	17	Lun.	23 56 6,60	3 34 14,99	3 38 9,03	4 33	7 27
138	18	Mart.	23 56 8,18	3 38 13,13	3 42 5,58	4 32	7 28
139	19	Merc.	23 56 10,31	3 42 11,82	3 46 2,14	4 31	7 29
140	20	Giov.	23 56 12,98	3 46 11,05	3 49 58,69	4 30	7 30
141	21	Ven.	23 56 16,18	3 50 10,81	3 53 55,25	4 29	7 31
142	22	Sab.	23 56 19,89	3 54 11,09	3 57 51,80	4 28	7 32
143	23	Dom.	23 56 24,11	3 58 11,88	4 1 48,36	4 27	7 33
144	24	Lun.	23 56 28,83	4 2 13,17	4 5 44,91	4 26	7 34
145	25	Mart.	23 56 34,05	4 6 14,96	4 9 41,47	4 25	7 35
146	26	Merc.	23 56 39,76	4 10 17,24	4 13 38,03	4 24	7 36
147	27	Giov.	23 56 45,95	4 14 20,01	4 17 34,58	4 23	7 37
148	28	Ven.	23 56 52,62	4 18 23,25	4 21 31,14	4 22	7 38
149	29	Sab.	23 56 59,76	4 22 26,96	4 25 27,69	4 21	7 39
150	30	Dom.	23 57 7,35	4 26 31,13	4 29 24,25	4 20	7 40
151	31	Lun.	23 57 15,38	4 30 35,74	4 33 20,81	4 19	7 41

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	1 10 26 12,1	14 57 42,2	+ 0,76	0,30B	0,0035207
2	1 11 24 20,5	15 15 48,9	0,75	0,40	0,0036285
3	1 12 22 27,2	15 33 40,6	0,74	0,47	0,0037357
4	1 13 20 32,6	15 51 17,0	0,73	0,51	0,0038423
5	1 14 18 36,6	16 8 37,8	0,72	0,52	0,0039481
6	1 15 16 39,2	16 25 42,6	0,71	0,51	0,0040530
7	1 16 14 40,3	16 42 31,1	0,70	0,47	0,0041568
8	1 17 12 40,4	16 59 3,3	0,69	0,39	0,0042593
9	1 18 10 38,9	17 15 18,5	0,68	0,29	0,0043604
10	1 19 8 36,2	17 31 16,5	0,66	0,17	0,0044600
11	1 20 6 32,2	17 46 57,0	0,65	0,04	0,0045578
12	1 21 4 27,0	18 2 19,8	0,64	0,09A	0,0046538
13	1 22 2 20,2	18 17 24,5	0,63	0,23	0,0047480
14	1 23 0 12,1	18 32 10,9	0,62	0,36	0,0048402
15	1 23 58 2,7	18 46 38,6	0,60	0,47	0,0049304
16	1 24 55 51,7	19 0 47,2	0.59	0,55	0,0050185
17	1 25 53 39,3	19 14 36,5	0,58	0,61	0,0051045
18	1 26 51 25,3	19 28 6,3	0,56	0,64	0,0051885
19	1 27 49 9,7	19 41 16,2	0,55	0,65	0,0052705
20	1 28 46 52,6	19 54 6,0	0,53	0,62	0,0053507
21	1 29 44 33,9	20 6 35,5	0,52	0,56	0,0054292
22	2 0 42 13,6	20 18 44,4	0,50	0,48	0,0055060
23	2 1 39 51,9	20 30 32,5	0,49	0,37	0,0055812
24	2 2 37 28,5	20 41 59,5	0,47	0,24	0,0056549
25	2 3 35 3,7	20 53 5,1	0,45	0,11	0,0057272
26	2 4 32 37,5	21 3 49,1	0,44	0,02B	0,0057983
27	2 5 30 10,0	21 14 11,3	0,42	0,15	0,0058682
28	2 6 27 41,2	21 24 11,6	0,41	0,26	0,0059369
29	2 7 25 11,3	21 33 49,8	0,39	0,36	0,0060044
30	2 8 22 40,4	21 43 5,6	0,38	0,44	0,0060707
31	2 9 20 8,3	21 51 58,8	+ 0,36	0,49B	0,0061359

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Sab.	7 20 54 36	7 27 11 34	2 48 0B	3 16 10B	13 8
2	Dom.	8 3 31 49	8 9 55 25	3 42 9	4 5 34	13 59
3	Lun.	8 16 22 25	8 22 52 52	4 26 4	4 43 18	14 51
4	Mart.	8 29 26 46	9 6 4 10	4 56 58	5 6 49	15 45
5	Merc.	9 12 45 4	9 19 29 29	5 12 36	5 14 9	16 39
6	Giov.	9 26 17 25	10 3 8 51	5 11 18	5 4 1	17 32
7	Ven.	10 10 3 44	10 17 2 1	4 52 17	4 36 9	18 25
8	Sab.	10 24 3 35	11 1 8 19	4 15 46	3 51 20	19 18
9	Dom.	11 8 16 2	11 15 26 28	3 23 10	2 51 38	20 11
10	Lun.	11 22 39 20	11 29 54 14	2 17 12	1 40 25	21 4
11	Mart.	0 7 10 40	0 14 28 6	1 1 53	0 22 17	21 58
12	Merc.	0 24 45 53	0 29 3 21	0 17 42A	0 57 20A	22 53
13	Giov.	1 6 19 45	1 13 34 19	1 35 53	2 12 41	23 50
14	Ven.	1 20 46 18	1 27 54 56	2 47 6	3 18 36	* *
15	Sab.	2 4 59 33	2 11 59 34	3 46 42	4 11 2	0 47
16	Dom.	2 18 54 28	2 25 43 54	4 31 21	4 47 30	1 43
17	Lun.	3 2 27 37	3 9 5 30	4 59 25	5 7 6	2 38
18	Mart.	3 15 37 34	3 22 3 57	5 10 39	5 10 12	3 31
19	Merc.	3 28 24 52	4 4 40 42	5 5 55	4 58 0	4 20
20	Giov.	4 10 51 51	4 16 58 48	4 46 41	4 32 13	5 8
21	Ven.	4 23 2 6	4 29 2 21	4 14 50	3 54 46	5 52
22	Sab.	5 5 0 8	5 10 56 7	3 32 17	3 7 37	6 36
23	Dom.	5 16 50 57	5 22 45 15	2 41 2	2 12 47	7 18
24	Lun.	5 28 39 40	6 4 34 49	1 43 6	1 12 15	8 0
25	Mart.	6 10 31 18	6 16 29 39	0 40 32	0 8 14	8 43
26	Merc.	6 22 30 24	6 28 34 0	0 24 21B	0 56 52B	9 27
27	Giov.	7 4 40 50	7 10 51 15	1 28 59	2 0 20	10 13
28	Ven.	7 17 5 30	7 23 23 47	2 30 52	2 59 10	11 2
29	Sab.	7 29 46 12	8 6 12 48	3 25 51	3 50 9	11 52
30	Dom.	8 12 43 34	8 19 18 21	4 11 43	4 30 8	12 45
31	Lun.	8 25 57 0	9 2 39 18	4 45 5	4 56 14	13 41

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	15 45	16 27A	55 30	55 43	30 17	30 25	8 9	18 3
2	16 40	18 0	55 57	56 11	30 35	30 41	9 8	18 47
3	17 37	18 34	56 26	56 41	30 49	30 57	10 4	19 38
4	18 34	18 4	56 57	57 12	31 5	31 13	10 57	20 36
5	19 32	16 29	57 28	57 45	31 22	31 31	11 44	21 38
6	20 30	13 52	58 1	58 18	31 40	31 49	12 25	22 44
7	21 27	10 23	58 34	58 50	31 58	32 7	13 2	23 54
8	22 24	6 11	59 5	59 19	32 15	32 23	13 37	* *
9	23 21	1 33	59 32	59 43	32 31	32 36	14 13	1 5
10	0 18	3 14B	59 53	60 0	32 41	32 46	14 47	2 19
11	1 16	7 51	60 4	60 6	32 48	32 49	15 21	3 31
12	2 16	11 58	60 5	60 5	32 48	32 48	15 58	4 44
13	3 16	15 15	59 53	59 42	32 42	32 36	16 39	5 57
14	* *	* *	59 28	59 11	32 28	32 19	17 23	7 9
15	4 17	17 29	58 52	58 30	32 8	31 56	18 13	8 16
16	5 17	18 31	58 7	57 43	31 44	31 31	19 6	9 16
17	6 16	18 22	57 19	56 55	31 17	31 4	20 3	10 8
18	7 13	17 10	56 31	56 8	30 52	30 39	21 2	10 54
19	8 7	15 5	55 46	55 26	30 27	30 16	22 2	11 33
20	8 58	12 18	55 9	54 53	30 7	29 58	23 0	12 6
21	9 47	9 1	54 40	54 29	29 51	29 45	* *	12 34
22	10 35	5 24	54 21	54 15	29 41	29 38	0 1	13 3
23	11 21	1 55	54 12	54 11	29 35	29 34	0 58	13 30
24	12 7	2 18A	54 13	54 17	29 36	29 38	1 55	13 57
25	12 54	6 7	54 23	54 31	29 41	29 46	2 54	14 24
26	13 42	9 44	54 41	54 53	29 51	29 58	3 55	14 53
27	14 33	12 58	55 6	55 20	30 5	30 13	4 56	15 23
28	15 25	15 39	55 36	55 52	30 21	30 30	5 58	16 1
29	16 20	17 34	56 8	56 25	30 38	30 48	6 59	16 42
30	17 17	18 33	56 41	56 57	30 57	31 5	7 58	17 31
31	18 15	18 27	57 12	57 27	31 14	31 22	8 55	18 28

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	8^h 28′	Occidente
1	o3 2.	○	.1 4.
2	.2,1.	○	.3 4.
3		○	1. .2 ; 3. 4.
4	.1	○	2. 4.3.
5	2. 3. 4.	○	1.
6	3. 4. .2	○	.1
7	4. .3 1.	○	.2
8	4. 2☌3	○	.1
9	.4 .2,1.	○	.3
10	.4	○	1☌2 .3
11	.4 .1	○	2. 3.
12	.4,2. 3.	○	1.
13	o1 3. .2	○	4o
14	.3 1.	○	2☌4
15	●2 .3	○	.1 .4
16	.2 1.	○	.3 .4
17		○	.2,1. .3 .4
18	.1	○	2. 3. 4.
19	2. 3.	○	1. 4.
20	3. .2 .1	○	4.
21	●1 3.	○	4. .2
22	3☌4	○	2. .1
23	4. 2. 1.	○	.3
24	4.	○	.2 .1 .3
25	4. .1	○	2. 3.
26	,4 2.	○	3. 1.
27	.4 3. .2 .1	○	
28	3☌4	○	1. .2
29	.3.4	○	.1,2.
30	2. .1	○	.4. 3
31		○	.2 .1 34☌

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
5	Ultimo quarto	16ʰ 43′
12	Luna nuova	13 29
20	Primo quarto.	8 9
28	Luna piena.	1 59

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	44 ρ^1 ♐ 5.ª	13 54
1	55 e^2 ♐ 5.ª	22 59
2	9 β ♑ 3. 4.ª	15 19
3	13 ν ♒ 5.ª	12 38
4	43 θ ♒ 4. 5.ª	17 28
8	110 o ♓ 5.ª	13 49
11	61 δ^1 ♉ 4.ª	8 31
11	64 δ^2 ♉ 4. 5.ª	8 59
11	68 δ^3 ♉ 5.ª	9 40
12	104 m ♉ 5.ª	3 1
14	51 □ 5.ª	8 59
14	54 λ □ 4. 5.ª	10 58
14	68 k □ 5.ª	18 1
16	65 α^2 ♋ 5.ª	9 48
17	29 π ♌ 4. 5.ª	16 28
19	91 ι ♌ 4. 5.ª	20 13
23	100 λ ♍ 4.ª	8 31
25	7 χ Ofiuco 5.ª	19 41
28	44 ρ^1 ♐ 5.ª	21 16
29	9 β ♑ 4. 5.ª	22 7

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	In questo mese non si possono osservare gli Eclissi dei satelliti di Giove per essergli troppo vicino il Sole.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
152	1	Mart.	23 57 23,84	4 34 40,78	4 37 17,36	4 19	7 41
153	2	Merc.	23 57 32,72	4 38 46,23	4 41 13,92	4 18	7 42
154	3	Giov.	23 57 42,00	4 42 52,09	4 45 10,47	4 18	7 42
155	4	Ven.	23 57 51,67	4 46 58,35	4 49 7,03	4 17	7 43
156	5	Sab.	23 58 1,72	4 51 4,99	4 53 3,59	4 16	7 44
157	6	Dom.	23 58 12,14	4 55 11,99	4 57 0,14	4 16	7 44
158	7	Lun.	23 58 22,91	4 59 19,35	5 0 56,70	4 15	7 45
159	8	Mart.	23 58 34,01	5 3 27,03	5 4 53,25	4 15	7 45
160	9	Merc.	23 58 45,41	5 7 35,02	5 8 49,81	4 14	7 46
161	10	Giov.	23 58 57,09	5 11 43,29	5 12 46,37	4 14	7 46
162	11	Ven.	23 59 9,02	5 15 51,80	5 16 42,92	4 14	7 46
163	12	Sab.	23 59 21,17	5 20 0,54	5 20 39,48	4 13	7 47
164	13	Dom.	23 59 33,52	5 24 9,49	5 24 36,04	4 13	7 47
165	14	Lun.	23 59 46,05	5 28 18,61	5 28 32,60	4 13	7 47
166	15	Mart.	23 59 58,73	5 32 27,88	5 32 29,15	4 13	7 47
167	16	Merc.	0 0 11,53	5 36 37,27	5 36 25,71	4 13	7 47
168	17	Giov.	0 0 24,42	5 40 46,76	5 40 22,27	4 12	7 48
169	18	Ven.	0 0 37,38	5 44 56,31	5 44 18,82	4 12	7 48
170	19	Sab.	0 0 50,39	5 49 5,91	5 48 15,38	4 12	7 48
171	20	Dom.	0 1 3,42	5 53 15,53	5 52 11,94	4 12	7 48
172	21	Lun.	0 1 16,43	5 57 25,13	5 56 8,49	4 12	7 48
173	22	Mart.	0 1 29,40	6 1 34,70	6 0 5,05	4 12	7 48
174	23	Merc.	0 1 42,32	6 5 44,21	6 4 1,61	4 12	7 48
175	24	Giov.	0 1 55,17	6 9 53,65	6 7 58,17	4 12	7 48
176	25	Ven.	0 2 7,92	6 14 2,99	6 11 54,72	4 12	7 48
177	26	Sab.	0 2 20,55	6 18 12,21	6 15 51,28	4 13	7 47
178	27	Dom.	0 2 33,04	6 22 21,30	6 19 47,84	4 13	7 47
179	28	Lun.	0 2 45,38	6 26 30,23	6 23 44,39	4 13	7 47
180	29	Mart.	0 2 57,55	6 30 38,99	6 27 40,95	4 13	7 47
181	30	Merc.	0 3 9,53	6 34 47,56	6 31 37,51	4 13	7 47

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	2 10 17 35,4	22 0 29,3	+ 0,35	0,51B	0,0062060
2	2 11 15 1,8	22 8 36,9	0,33	0,50	0,0062628
3	2 12 12 27,2	22 16 21,4	0,31	0,46	0,0063242
4	2 13 9 52,1	22 23 42,7	0,30	0,39	0,0063841
5	2 14 7 16,4	22 30 40,6	0,28	0,30	0,0064423
6	2 15 4 40,2	22 37 14,9	0,27	0,19	0,0064987
7	2 16 2 3,3	22 43 25,5	0,25	0,06	0,0065532
8	2 16 59 26,0	22 49 12,2	0,23	0,08A	0,0066057
9	2 17 56 48,1	22 54 34,9	0,22	0,21	0,0066560
10	2 18 54 9,7	22 59 33,4	0,20	0,33	0,0067040
11	2 19 51 30,8	23 4 7,6	0,19	0,44	0,0067496
12	2 20 48 51,3	23 8 17,5	0,17	0,53	0,0067927
13	2 21 46 11,2	23 12 3,1	0,15	0,60	0,0068333
14	2 22 43 30,4	23 15 24,2	0,13	0,64	0,0068714
15	2 23 40 49,0	23 18 20,6	0,12	0,65	0,0069069
16	2 24 38 6,9	23 20 52,3	0,10	0,63	0,0069398
17	2 25 35 24,1	23 22 59,3	0,08	0,58	0,0069702
18	2 26 32 40,6	23 24 41,5	0,07	0,50	0,0069983
19	2 27 29 56,4	23 25 58,9	0,05	0,40	0,0070241
20	2 28 27 11,4	23 26 51,5	0,03	0,28	0,0070477
21	2 29 24 25,8	23 27 19,3	+ 0,01	0,15	0,0070693
22	3 0 21 39,4	23 27 22,3	0,00	0,01	0,0070890
23	3 1 18 52,6	23 27 0,5	− 0,02	0,12B	0,0071069
24	3 2 16 5,1	23 26 13,9	0,04	0,24	0,0071231
25	3 3 13 17,1	23 25 2,5	0,06	0,34	0,0071377
26	3 4 10 28,7	23 23 26,4	0,08	0,42	0,0071508
27	3 5 7 40,1	23 21 25,7	0,09	0,48	0,0071624
28	3 6 4 51,1	23 19 0,4	0,11	0,51	0,0071725
29	3 7 2 2,1	23 16 10,6	0,13	0,50	0,0071812
30	3 7 59 13,0	23 12 56,3	− 0,15	0,47B	0,0071885

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	9 9 24 59	9 16 13 46	5 3 21B	5 6 14B	14 34
2	Merc.	9 23 5 20	9 29 59 23	5 4 44	4 58 49	15 29
3	Giov.	10 6 55 38	10 13 53 46	4 48 30	4 33 51	16 22
4	Ven.	10 20 53 33	10 27 54 43	4 15 3	3 52 21	17 15
5	Sab.	11 4 57 4	11 12 0 26	3 26 4	2 56 35	18 7
6	Dom.	11 19 4 37	11 26 9 28	2 24 19	1 49 47	18 59
7	Lun.	0 3 14 49	0 10 20 31	1 13 32	0 36 7	19 51
8	Mart.	0 17 26 20	0 24 32 3	0 1 51A	0 39 46A	20 44
9	Merc.	1 1 37 23	1 8 41 59	1 16 59	1 52 54	21 38
10	Giov.	1 15 45 29	1 22 47 26	2 26 57	2 58 36	22 34
11	Ven.	1 29 47 24	2 6 44 51	3 27 21	3 52 48	23 29
12	Sab.	2 13 39 19	2 20 30 20	4 14 36	4 32 31	* *
13	Dom.	2 27 17 27	3 4 0 18	4 46 22	4 56 5	0 25
14	Lun.	3 10 38 38	3 17 12 12	5 1 39	5 3 9	1 19
15	Mart.	3 23 40 56	4 0 4 48	5 0 42	4 54 28	2 10
16	Merc.	4 6 23 55	4 12 38 28	4 44 41	4 31 36	3 0
17	Giov.	4 18 48 44	4 24 55 7	4 15 27	3 56 31	3 46
18	Ven.	5 0 58 2	5 6 58 1	3 35 5	3 11 25	4 31
19	Sab.	5 12 55 36	5 18 51 26	2 45 47	2 18 29	5 14
20	Dom.	5 24 46 9	6 0 40 26	1 49 45	1 19 53	5 56
21	Lun.	6 6 34 57	6 12 30 24	0 49 8	0 17 47	6 38
22	Mart.	6 18 27 28	6 24 26 48	0 13 54B	0 45 37B	7 21
23	Merc.	7 0 29 2	7 6 34 44	1 17 3	1 47 52	8 6
24	Giov.	7 12 44 26	7 18 58 35	2 17 43	2 46 15	8 53
25	Ven.	7 25 17 34	8 1 41 41	3 13 6	3 37 51	9 42
26	Sab.	8 8 11 6	8 14 45 53	4 0 6	4 19 27	10 35
27	Dom.	8 21 25 58	8 28 11 12	4 35 30	4 47 55	11 29
28	Lun.	9 5 1 16	9 11 55 47	4 56 21	5 0 32	12 25
29	Mart.	9 18 54 13	9 25 56 3	5 0 19	4 55 33	13 21
30	Merc.	10 3 0 37	10 10 7 18	4 46 14	4 32 26	14 16

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	19 14	17 14A	57 42	57 55	31 30	31 37	9 42	19 29
2	20 12	14 55	58 8	58 20	31 44	31 51	10 27	20 36
3	21 10	11 40	58 31	58 41	31 57	32 2	11 6	21 46
4	22 7	7 41	58 50	58 58	32 7	32 12	11 42	22 56
5	23 3	3 13	59 5	59 11	32 15	32 18	12 15	* *
6	23 59	1 28B	59 16	59 19	32 21	32 23	12 49	0 7
7	0 55	6 5	59 21	59 22	32 24	32 25	13 22	1 19
8	1 52	10 19	59 21	59 18	32 24	32 22	13 56	2 30
9	2 51	13 56	59 14	59 7	32 20	32 16	14 33	3 42
10	3 50	16 37	58 59	58 49	32 12	32 7	15 15	4 52
11	4 50	18 13	58 37	58 23	32 0	31 53	16 0	5 59
12	* *	* *	58 7	57 50	31 44	31 35	16 51	7 1
13	5 50	18 39	57 32	57 13	31 25	31 14	17 49	7 57
14	6 48	17 57	56 53	56 32	31 3	30 52	18 47	8 47
15	7 43	16 15	56 13	55 53	30 41	30 30	19 48	9 27
16	8 37	13 45	55 35	55 18	30 21	30 12	20 48	10 4
17	9 27	10 39	55 2	54 49	30 3	29 55	21 48	10 35
18	10 16	7 7	54 37	54 28	29 49	29 44	22 48	11 4
19	11 3	3 21	54 21	54 16	29 40	29 37	23 45	11 32
20	11 49	0 32A	54 14	54 15	29 36	29 37	* *	11 59
21	12 35	4 24	54 18	54 23	29 39	29 41	0 42	12 26
22	13 23	8 6	54 31	54 41	29 46	29 51	1 40	12 54
23	14 11	11 31	54 54	55 8	29 58	30 6	2 40	13 24
24	15 3	14 29	55 24	55 42	30 15	30 25	3 42	13 57
25	15 58	16 47	56 2	56 22	30 36	30 46	4 44	14 36
26	16 53	18 14	56 42	57 3	30 57	31 8	5 46	15 22
27	17 51	18 29	57 23	57 43	31 20	31 31	6 43	16 16
28	18 51	17 55	58 2	58 19	31 41	31 50	7 37	17 16
29	19 51	16 0	58 35	58 49	31 59	32 7	8 24	18 23
30	20 51	13 2	59 0	59 10	32 13	32 18	9 5	19 33

I SATELLITI DI GIOVE

NON SONO VISIBILI

IN QUESTO MESE.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
4	Ultimo quarto	21^h 19′
12	Luna nuova	0 15
20	Primo quarto	1 29
27	Luna piena	10 45

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	43 θ ♒ 4. 5.ª	23 16
5	110 o ♓ 5.ª	19 28
8	61 δ¹ ♉ 4.ª	15 28
8	64 δ² ♉ 4. 5.ª	15 56
8	68 δ³ ♉ 5.ª	16 39
9	104 m ♉ 5.ª	10 20
11	51 ♊ 5.ª	17 5
11	54 λ ♊ 4. 5.ª	19 5
12	68 k ♊ 5.ª	2 9
13	65 α² ♋ 5.ª	18 0
15	29 π ♌ 4. 5.ª	0 30
16	58 d ♌ 5.ª	7 37
17	91 ι ♌ 4. 5.ª	4 1
20	100 λ ♍ 4.ª	16 50
22	46 θ ♎ 4. 5.ª	13 31
23	7 χ Ofiuco 5.ª	4 44
26	44 ρ¹ ♐ 5.ª	6 27
26	55 e² ♐ 5.ª	15 16
27	9 β ♑ 3. 4.ª	6 58
29	43 θ ♒ 4. 5.ª	6 56

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
18	18^h 35′ 43″ imm.
20	13 4 18
22	7 32 48
24	2 1 21
25	20 29 50
27	14 58 21
29	9 26 52
31	3 55 23
	II. Satellite.
18	7 5 39 imm.
21	20 23 30
25	9 41 0
28	22 58 56
	III. Satellite.
22	18 16 36 imm.
29	22 15 38 imm.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
182	1	Giov.	0 3 21,30	6 38 55,92	6 35 34,06	4 14	7 46
183	2	Ven.	0 3 32,84	6 43 4,04	6 39 30,62	4 14	7 46
184	3	Sab.	0 3 44,13	6 47 11,92	6 43 27,18	4 14	7 46
185	4	Dom.	0 3 55,16	6 51 19,54	6 47 23,74	4 14	7 46
186	5	Lun.	0 4 5,91	6 55 26,87	6 51 20,29	4 15	7 45
187	6	Mart.	0 4 16,35	6 59 33,90	6 55 16,85	4 15	7 45
188	7	Merc.	0 4 26,47	7 3 40,60	6 59 13,41	4 16	7 44
189	8	Giov.	0 4 36,25	7 7 46,96	7 3 9,96	4 16	7 44
190	9	Ven.	0 4 45,66	7 11 52,96	7 7 6,52	4 17	7 43
191	10	Sab.	0 4 54,68	7 15 58,56	7 11 3,08	4 18	7 42
192	11	Dom.	0 5 3,29	7 20 3,75	7 14 59,63	4 18	7 42
193	12	Lun.	0 5 11,47	7 24 8,51	7 18 56,19	4 19	7 41
194	13	Mart.	0 5 19,21	7 28 12,82	7 22 52,74	4 21	7 39
195	14	Merc.	0 5 26,49	7 32 16,67	7 26 49,30	4 21	7 39
196	15	Giov.	0 5 33,28	7 36 20,04	7 30 45,86	4 22	7 38
197	16	Ven.	0 5 39,56	7 40 22,90	7 34 42,41	4 23	7 37
198	17	Sab.	0 5 45,32	7 44 25,24	7 38 38,97	4 24	7 36
199	18	Dom.	0 5 50,55	7 48 27,04	7 42 35,52	4 25	7 35
200	19	Lun.	0 5 55,23	7 52 28,29	7 46 32,08	4 26	7 34
201	20	Mart.	0 5 59,35	7 56 28,97	7 50 28,64	4 27	7 33
202	21	Merc.	0 6 2,90	8 0 29,08	7 54 25,19	4 28	7 32
203	22	Giov.	0 6 5,87	8 4 28,62	7 58 21,75	4 29	7 31
204	23	Ven.	0 6 8,26	8 8 27,57	8 2 18,31	4 30	7 30
205	24	Sab.	0 6 10,06	8 12 25,93	8 6 14,87	4 31	7 29
206	25	Dom.	0 6 11,27	8 16 23,70	8 10 11,42	4 32	7 28
207	26	Lun.	0 6 11,88	8 20 20,87	8 14 7,98	4 33	7 27
208	27	Mart.	0 6 11,89	8 24 17,44	8 18 4,53	4 34	7 26
209	28	Merc.	0 6 11,31	8 28 13,41	8 22 1,09	4 35	7 25
210	29	Giov.	0 6 10,14	8 32 8,79	8 25 57,64	4 36	7 24
211	30	Ven.	0 6 8,38	8 36 3,58	8 29 54,20	4 37	7 23
212	31	Sab.	0 6 6,02	8 39 57,77	8 33 50,75	4 38	7 22

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	3 8 56 24,0	23 9 17,5	− 0,17	0,41B	0,0071943
2	3 9 53 35,1	23 5 14,4	0,18	0,32	0,0071985
3	3 10 50 46,5	23 0 47,1	0,20	0,21	0,0072010
4	3 11 47 58,1	22 55 55,7	0,21	0,09	0,0072018
5	3 12 45 10,1	22 50 40,3	0,23	0,04A	0,0072007
6	3 13 42 22,4	22 45 1,0	0,25	0,17	0,0071975
7	3 14 39 35,2	22 38 58,0	0,26	0,30	0,0071921
8	3 15 36 48,3	22 32 31,4	0,28	0,42	0,0071845
9	3 16 34 1,9	22 25 41,3	0,29	0,52	0,0071745
10	3 17 31 15,8	22 18 28,0	0,31	0,59	0,0071621
11	3 18 28 30,2	22 10 51,6	0,32	0,63	0,0071471
12	3 19 25 44,8	22 2 52,2	0,34	0,64	0,0071295
13	3 20 22 59,9	21 54 30,0	0,36	0,62	0,0071092
14	3 21 20 15,2	21 45 45,3	0,37	0,58	0,0070863
15	3 22 17 30,8	21 36 38,2	0,39	0,51	0,0070608
16	3 23 14 46,6	21 27 9,1	0,40	0,40	0,0070328
17	3 24 12 2,7	21 17 18,1	0,42	0,28	0,0070024
18	3 25 9 19,0	21 7 5,4	0,43	0,15	0,0069696
19	3 26 6 35,5	20 56 31,3	0,45	0,02	0,0069346
20	3 27 3 52,3	20 45 36,0	0,46	0,11B	0,0068976
21	3 28 1 9,3	20 34 19,8	0,48	0,23	0,0068586
22	3 28 58 26,6	20 22 42,9	0,49	0,34	0,0068178
23	3 29 55 44,3	20 10 45,5	0,51	0,43	0,0067753
24	4 0 53 2,4	19 58 27,9	0,52	0,49	0,0067312
25	4 1 50 20,9	19 45 50,4	0,54	0,53	0,0066856
26	4 2 47 40,2	19 32 53,2	0,55	0,54	0,0066387
27	4 3 44 59,9	19 19 36,5	0,57	0,51	0,0065905
28	4 4 42 20,6	19 6 0,7	0,58	0,46	0,0065410
29	4 5 39 42,0	18 52 5,9	0,59	0,38	0,0064902
30	4 6 37 4,4	18 37 52,4	0,61	0,27	0,0064381
31	4 7 34 27,7	18 23 20,5	− 0,62	0,15B	0,0063847

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzanotte media.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Giov.	10 17 15 27	10 24 24 27	4 14 19B	3 52 10B	15 11
2	Ven.	11 1 33 44	11 8 42 49	3 26 20	2 57 15	16 4
3	Sab.	11 15 51 17	11 22 58 47	2 25 24	1 51 19	16 56
4	Dom.	0 0 5 3	0 7 9 54	1 15 35	0 38 47	17 48
5	Lun.	0 14 13 10	0 21 14 47	0 1 31	0 35 38A	18 40
6	Mart.	0 28 14 39	1 5 12 44	1 12 5A	1 47 16	19 33
7	Merc.	1 12 8 57	1 19 3 13	2 20 41	2 51 51	20 27
8	Giov.	1 25 55 26	2 2 45 27	3 20 20	3 45 46	21 21
9	Ven.	2 9 33 7	2 16 18 15	4 7 48	4 26 12	22 16
10	Sab.	2 23 0 38	2 29 40 2	4 40 46	4 51 22	23 10
11	Dom.	3 6 16 15	3 12 49 5	4 57 58	5 0 34	* *
12	Lun.	3 19 18 20	3 25 43 53	4 59 14	4 54 5	0 3
13	Mart.	4 2 5 39	4 8 23 36	4 45 18	4 33 5	0 52
14	Merc.	4 14 37 46	4 20 48 16	4 17 41	3 59 23	1 40
15	Giov.	4 26 55 18	5 2 59 6	3 38 27	3 15 10	2 25
16	Ven.	5 9 0 0	5 14 58 25	2 49 52	2 22 49	3 9
17	Sab.	5 20 54 49	5 26 49 42	1 54 20	1 24 42	3 51
18	Dom.	6 2 43 40	6 8 37 20	0 54 12	0 23 7	4 34
19	Lun.	6 14 31 21	6 20 26 24	0 8 15B	0 39 39B	5 16
20	Mart.	6 26 23 10	7 2 22 21	1 10 46	1 41 19	6 0
21	Merc.	7 8 24 37	7 14 30 37	2 10 59	2 39 27	6 45
22	Giov.	7 20 41 0	7 26 56 19	3 6 23	3 31 26	7 33
23	Ven.	8 3 17 4	8 9 43 41	3 54 14	4 14 24	8 23
24	Sab.	8 16 16 28	8 22 55 36	4 31 34	4 45 20	9 16
25	Dom.	8 29 41 10	9 6 33 2	4 55 21	5 1 16	10 11
26	Lun.	9 13 30 56	9 20 34 29	5 2 51	4 59 50	11 8
27	Mart.	9 27 43 4	10 4 55 59	4 52 8	4 39 43	12 5
28	Merc.	10 12 12 24	10 19 31 25	4 22 39	4 1 11	13 1
29	Giov.	10 26 52 6	11 4 13 30	3 35 35	3 6 21	13 56
30	Ven.	11 11 34 45	11 18 55 0	2 33 58	1 59 4	14 50
31	Sab.	11 26 13 29	0 3 29 39	1 22 18	0 44 21	15 44

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	21 49	9 13A	59 18	59 23	32 22	32 25	9 44	20 45
2	22 46	4 49	59 26	59 28	32 27	32 28	10 18	22 0
3	23 42	0 9	59 27	59 25	32 27	32 26	10 52	23 10
4	0 38	4 31B	59 22	59 16	32 25	32 22	11 25	* *
5	1 34	8 52	59 10	59 2	32 18	32 14	11 59	0 21
6	2 31	12 39	58 54	58 44	32 9	32 4	12 35	1 31
7	3 29	15 39	58 34	58 22	31 58	31 52	13 13	2 41
8	4 28	17 40	58 10	57 58	31 45	31 39	13 56	3 48
9	5 26	18 35	57 44	57 30	31 31	31 23	14 45	4 51
10	6 24	18 22	57 16	57 1	31 16	31 8	15 38	5 48
11	* *	* *	56 45	56 29	30 59	30 50	16 36	6 39
12	7 21	17 7	56 13	55 57	30 41	30 33	17 34	7 25
13	8 15	14 59	55 42	55 26	30 25	30 16	18 36	8 3
14	9 7	12 8	55 12	54 58	30 8	30 0	19 35	8 36
15	9 56	8 47	54 46	54 35	29 54	29 48	20 36	9 5
16	10 44	5 6	54 26	54 19	29 43	29 39	21 33	9 34
17	11 31	1 15	54 14	54 10	29 36	29 34	22 31	10 1
18	12 17	2 37A	54 10	54 12	29 34	29 35	23 28	10 29
19	13 4	6 23	54 16	54 22	29 37	29 41	* *	10 56
20	13 51	9 55	54 31	54 43	29 46	29 52	0 28	11 26
21	14 41	13 4	54 57	55 13	30 0	30 9	1 28	11 56
22	15 32	15 40	55 32	55 52	30 19	30 30	2 29	12 32
23	16 27	17 32	56 15	56 38	30 43	30 55	3 30	13 13
24	17 24	18 29	57 3	57 27	31 8	31 22	4 28	14 3
25	18 23	18 20	57 53	58 17	31 36	31 49	5 24	14 59
26	19 24	17 0	58 40	59 2	32 1	32 14	6 15	16 5
27	20 25	14 31	59 22	59 39	32 25	32 34	7 1	17 15
28	21 25	11 0	59 52	60 3	32 41	32 47	7 42	18 27
29	22 24	6 43	60 10	60 14	32 51	32 53	8 20	19 41
30	23 23	2 1	60 15	60 12	32 54	32 52	8 55	20 55
31	0 20	2 47B	60 6	59 58	32 49	32 44	9 30	22 8

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$15^h\ 46'$	*Occidente*
1	.4 .2 .1,3.	○	
2	3. .4	○	1☌2
3	.3 .1	○	.4 2.
4	●1 2. .3	○	.4
5	.2	○	.1 .3 .4
6	1.	○	.2 .3 .4
7		○	2. .1 3. .4
8	2. 1. 3.	○	4.
9	3.	○	.2.1 4.
10	.3 .1	○	4☌2
11	2☌3 , 4.	○	1.
12	4. .2	○	.1 .3
13	4. 1.	○	.2 .3
14	4.	○	2. .1 3.
15	4. 2. 1.	○	3.
16	.4 3.	○	.2 .1
17	.4,3. .1	○	2.
18	.4 .3,2.	○	1.
19	.2,1☌4	○	.3
20	.1	○	.4 .2 .3
21		○	2☌1 3. .4
22	2. 1.	○	3. .4
23	o2 3.	○	1. .4
24	3. 1.	○	2. 4.
25	.3 2.	○	1. 4.
26	.2 .1	○	.3 4.
27	●1	○	4☌2 .3
28	4.	○	.1,2. .3
29	4. 2. 1.	○	3.
30	4. 3. .2	○	.1
31	4. 3. 1.	○	2.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	h	′
3	Ultimo quarto	2	36
10	Luna nuova	13	5
18	Primo quarto	17	38
25	Luna piena	18	46

GIORNI.	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	h	′
2	110 o ♓ 5.ª	1	1
4	61 δ^1 ♉ 4.ª	21	1
4	61 δ^2 ♉ 4. 5.ª	21	29
4	α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	22	11
7	51 □ 5.ª	23	37
8	54 λ □ 4. 5.ª	1	40
8	68 k □ 5.ª	8	46
10	65 α^2 ♋ 5.ª	1	4
11	29 π ♌ 4. 5.ª	7	46
12	58 d ♌ 5.ª	14	51
13	91 ι ♌ 4. 5.ª	11	16
18	46 θ ♎ 4. 5.ª	22	17
19	7 χ Ofiuco 5.ª	13	27
19	24 m ♏ 5.ª	19	44
22	44 ρ^1 ♐ 5.ª	16	31
23	55 e^2 ♐ 5.ª	1	26
23	9 β ♑ 3. 4.ª	17	13
25	43 θ ♒ 4. 5.ª	16	46
28	80 e ♓ 5.ª	16	19
29	110 o ♓ 5.ª	8	20

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
	I. SATELLITE.			
	h	′	″	
1	22	23	51	imm.
3	13	52	23	
5	11	20	50	
7	5	49	19	
9	0	17	45	
10	18	46	16	
12	13	14	41	
14	7	43	9	
16	2	11	33	
17	21	40	2	
* 19	15	8	26	
21	9	36	52	
23	4	5	15	
24	22	33	42	
26	17	2	5	
28	11	30	29	
30	5	58	51	
	II. SATELLITE.			
1	12	16	26	imm.
5	1	34	27	
* 8	14	51	57	
12	4	10	2	
15	17	27	33	
19	6	45	43	
22	20	3	14	
26	9	21	29	
29	22	39	0	
	III. SATELLITE.			
6	2	14	28	imm.
6	5	8	17	em.
13	6	13	0	imm.
13	9	7	46	em.
20	10	11	31	imm.
20	13	7	12	em.
* 27	14	10	29	imm.
27	17	7	4	em.
	IV. SATELLITE.			
13	22	45	50	imm.
13	23	20	50	em.
* 30	16	33	41	imm.
30	17	45	23	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
213	1	Dom.	0 6 3,07	8 43 51,37	8 37 47,31	4 40	7 20
214	2	Lun.	0 5 59,53	8 47 44,38	8 41 43,86	4 42	7 18
215	3	Mart.	0 5 55,40	8 51 36,80	8 45 40,42	4 43	7 17
216	4	Merc.	0 5 50,69	8 55 28,63	8 49 36,97	4 44	7 16
217	5	Giov.	0 5 45,40	8 59 19,88	8 53 33,53	4 45	7 15
218	6	Ven.	0 5 39,53	9 3 10,55	8 57 30,08	4 46	7 14
219	7	Sab.	0 5 33,09	9 7 0,64	9 1 26,64	4 48	7 12
220	8	Dom.	0 5 26,08	9 10 50,16	9 5 23,19	4 49	7 11
221	9	Lun.	0 5 18,50	9 14 39,11	9 9 19,74	4 50	7 10
222	10	Mart.	0 5 10,35	9 18 27,49	9 13 16,30	4 52	7 8
223	11	Merc.	0 5 1,63	9 22 15,30	9 17 12,85	4 53	7 7
224	12	Giov.	0 4 52,33	9 26 2,53	9 21 9,41	4 55	7 5
225	13	Ven.	0 4 42,46	9 29 49,19	9 25 5,96	4 56	7 4
226	14	Sab.	0 4 32,03	9 33 35,29	9 29 2,51	4 58	7 2
227	15	Dom.	0 4 21,05	9 37 20,83	9 32 59,07	4 59	7 1
228	16	Lun.	0 4 9,53	9 41 5,83	9 36 55,62	5 0	7 0
229	17	Mart.	0 3 57,47	9 44 50,29	9 40 52,18	5 1	6 59
230	18	Merc.	0 3 44,88	9 48 34,22	9 44 48,73	5 3	6 57
231	19	Giov.	0 3 31,76	9 52 17,62	9 48 45,28	5 4	6 56
232	20	Ven.	0 3 18,12	9 56 0,50	9 52 41,84	5 5	6 55
233	21	Sab.	0 3 3,98	9 59 42,87	9 56 38,39	5 7	6 53
234	22	Dom.	0 2 49,36	10 3 24,77	10 0 34,94	5 8	6 52
235	23	Lun.	0 2 34,28	10 7 6,20	10 4 31,50	5 10	6 50
236	24	Mart.	0 2 18,76	10 10 47,19	10 8 28,05	5 11	6 49
237	25	Merc.	0 2 2,81	10 14 27,75	10 12 24,60	5 13	6 47
238	26	Giov.	0 1 46,45	10 18 7,89	10 16 21,15	5 14	6 46
239	27	Ven.	0 1 29,69	10 21 47,64	10 20 17,71	5 16	6 44
240	28	Sab.	0 1 12,55	10 25 27,01	10 24 14,26	5 17	6 43
241	29	Dom.	0 0 55,04	10 29 6,00	10 28 10,81	5 19	6 41
242	30	Lun.	0 0 37,18	10 32 44,65	10 32 7,37	5 21	6 39
243	31	Mart.	0 0 19,00	10 36 22,97	10 36 3,92	5 22	6 38

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	4 8 31 52,3	18 8 30,5	− 0,63	0,02B	0,0063299
2	4 9 29 18,0	17 53 22,7	0,64	0,11A	0,0062736
3	4 10 26 44,9	17 37 57,3	0,65	0,24	0,0062156
4	4 11 24 13,0	17 22 14,5	0,67	0,35	0,0061559
5	4 12 21 42,5	17 6 14,7	0,68	0,45	0,0060944
6	4 13 19 13,1	16 49 58,2	0,69	0,52	0,0060310
7	4 14 16 45,2	16 33 25,3	0,70	0,57	0,0059656
8	4 15 14 18,6	16 16 36,3	0,71	0,59	0,0058980
9	4 16 11 53,3	15 59 31,5	0,72	0,58	0,0058282
10	4 17 9 29,3	15 42 11,2	0,73	0,54	0,0057562
11	4 18 7 6,5	15 24 35,7	0,74	0,47	0,0056819
12	4 19 4 44,8	15 6 45,4	0,75	0,38	0,0056054
13	4 20 2 24,4	14 48 40,6	0,76	0,27	0,0055267
14	4 21 0 5,1	14 30 21,6	0,77	0,14	0,0054458
15	4 21 57 47,0	14 11 48,8	0,78	0,00	0,0053628
16	4 22 55 29,9	13 53 2,5	0,79	0,14B	0,0052778
17	4 23 53 13,8	13 34 3,1	0,79	0,27	0,0051910
18	4 24 50 58,9	13 14 50,8	0,80	0,38	0,0051025
19	4 25 48 44,9	12 55 26,0	0,81	0,47	0,0050125
20	4 26 46 32,2	12 35 48,9	0,82	0,54	0,0049211
21	4 27 44 20,6	12 15 59,9	0,83	0,58	0,0048284
22	4 28 42 10,2	11 55 59,4	0,83	0,59	0,0047346
23	4 29 40 1,1	11 35 47,6	0,84	0,57	0,0046398
24	5 0 39 53,2	11 15 24,8	0,85	0,52	0,0045442
25	5 1 35 46,8	10 54 51,4	0,86	0,45	0,0044478
26	5 2 33 41,9	10 34 7,6	0,87	0,35	0,0043507
27	5 3 31 38,6	10 13 13,7	0,87	0,23	0.0042529
28	5 4 29 36,9	9 52 10,0	0,88	0,10	0,0041543
29	5 5 27 37,0	9 30 56,8	0,89	0,04A	0,0040550
30	5 6 25 38,8	9 9 34,5	0,89	0,17	0,0039550
31	5 7 23 42,6	8 48 3,3	− 0,90	0,29A	0,0038542

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Dom.	0 10 43 0	0 17 53 11	0 5 53B	0 32 25A	16 37
2	Lun.	0 24 59 56	1 2 3 5	1 9 55A	1 46 3	17 30
3	Mart.	1 9 2 34	1 15 58 24	2 20 16	2 52 7	18 24
4	Merc.	1 22 50 35	1 29 39 12	3 21 11	3 47 6	19 17
5	Giov.	2 6 24 19	2 13 6 1	4 9 36	4 28 29	20 11
6	Ven.	2 19 44 23	2 26 19 27	4 43 33	4 54 43	21 4
7	Sab.	3 2 51 19	3 9 19 59	5 1 57	5 5 13	21 56
8	Dom.	3 15 45 32	3 22 7 58	5 4 35	5 0 9	22 46
9	Lun.	3 28 27 20	4 4 43 40	4 52 2	4 40 27	23 35
10	Mart.	4 10 57 1	4 17 7 26	4 25 36	4 7 43	* *
11	Merc.	4 23 15 1	4 29 19 53	3 47 4	3 23 57	0 21
12	Giov.	5 5 22 12	5 11 22 10	2 58 39	2 31 29	1 5
13	Ven.	5 17 20 3	5 23 16 8	2 2 46	1 32 49	1 48
14	Sab.	5 29 10 47	6 5 4 25	1 1 56	0 30 26	2 31
15	Dom.	6 10 57 30	6 16 50 33	0 1 23B	0 33 13B	3 13
16	Lun.	6 22 44 5	6 28 38 43	1 4 45	1 35 43	3 56
17	Mart.	7 4 35 3	7 10 33 43	2 5 49	2 34 45	4 40
18	Merc.	7 16 35 22	7 22 40 39	3 2 12	3 27 53	5 25
19	Giov.	7 28 50 11	8 5 4 37	3 51 27	4 12 36	6 14
20	Ven.	8 11 24 29	8 17 50 18	4 30 58	4 46 15	7 4
21	Sab.	8 24 22 32	9 1 1 30	4 58 5	5 6 7	7 57
22	Dom.	9 7 47 26	9 14 40 24	5 10 5	5 9 40	8 52
23	Lun.	9 21 40 17	9 28 46 49	5 4 40	4 54 56	9 48
24	Mart.	10 5 59 32	10 13 17 50	4 40 24	4 21 7	10 44
25	Merc.	10 20 40 53	10 28 7 45	3 57 17	3 29 12	11 41
26	Giov.	11 5 37 21	11 13 8 34	2 57 20	2 22 13	12 37
27	Ven.	11 20 40 16	11 28 11 20	1 44 33	1 5 5	13 33
28	Sab.	0 5 40 42	0 13 7 26	0 24 35	0 16 8A	14 28
29	Dom.	0 20 30 42	0 27 49 49	0 56 17A	1 35 10	15 23
30	Lun.	1 5 4 18	1 12 13 46	2 12 6	2 46 32	16 18
31	Mart.	1 19 17 58	1 26 16 49	3 18 0	3 46 6	17 13

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	1 17	7 20B	59 47	59 34	32 38	32 31	10 2	23 22
2	2 15	11 22	59 20	59 4	32 23	32 15	10 37	* *
3	3 12	14 38	58 48	58 31	32 6	31 57	11 16	0 33
4	4 10	16 58	58 14	57 56	31 47	31 38	11 55	1 41
5	5 8	18 15	57 39	57 21	31 28	31 18	12 42	2 44
6	6 5	18 27	57 4	56 48	31 9	31 1	13 33	3 42
7	7 1	17 36	56 32	56 17	30 52	30 44	14 27	4 34
8	7 56	15 50	56 2	55 47	30 35	30 27	15 25	5 21
9	8 48	13 17	55 33	55 20	30 20	30 12	16 25	6 0
10	* *	* *	55 7	54 55	30 5	29 59	17 25	6 37
11	9 38	10 9	54 44	54 34	29 53	29 47	18 24	7 9
12	10 26	6 37	54 25	54 17	29 42	29 38	19 23	7 37
13	11 14	2 51	54 11	54 6	29 35	29 32	20 21	8 5
14	12 0	1 1A	54 3	54 1	29 30	29 29	21 18	8 33
15	12 46	4 48	54 2	54 5	29 30	29 31	22 19	9 0
16	13 33	8 24	54 10	54 17	29 34	29 38	23 18	9 26
17	14 21	11 40	54 27	54 39	29 43	29 50	* *	9 57
18	15 11	14 27	54 53	55 10	29 58	30 7	0 16	10 30
19	16 3	16 37	55 29	55 50	30 17	30 29	1 16	11 10
20	16 58	17 59	56 13	56 38	30 42	30 55	2 13	11 53
21	17 55	18 23	57 5	57 32	31 10	31 25	3 10	12 45
22	18 54	17 41	58 0	58 28	31 40	31 55	4 2	13 45
23	19 54	15 50	58 56	59 22	32 10	32 25	4 49	14 52
24	20 55	12 51	59 47	60 8	32 38	32 50	5 32	16 2
25	21 56	8 55	60 27	60 41	33 0	33 8	6 13	17 16
26	22 56	4 19	60 52	60 58	33 14	33 17	6 50	18 32
27	23 55	0 35B	61 0	60 57	33 18	33 16	7 26	19 41
28	0 55	5 24	60 50	60 39	33 13	33 6	8 2	21 3
29	1 54	9 47	60 24	60 7	32 58	32 49	8 38	22 17
30	2 53	13 27	59 47	59 25	32 38	32 26	9 17	23 28
31	3 52	16 9	59 3	58 39	32 14	32 1	9 58	* *

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	15 h 13′	*Occidente*
1	4. .3	○	2. 1.
2	.4 .2 .1 .3	○	
3	.4	○	1. .2 .3
4	○1 .4	○	2. .3
5	2. 1☌4	○	3.
6	3☌2	○	.1 .4
7	3. 1.	○	.2 .4
8	.3	○	2. 1. .4
9	2. .1 .3	○	.4
10		○	.2,1. .3 4.
11	.1	○	2. .3 4.
12	●1 2.	○	3. 4.
13	.2 , 3.	○	.1,4.
14	. 3. 4☌1	○	.2
15	.3,4.	○	2. .1
16	4. 2. 3☌1	○	
17	4.	○	1. .3 2○
18	.4 .1	○	2. .3
19	.4 2.	○	1. 3.
20	●3 .4 .2	○	.1
21	3. .4 1.	○	.2
22	3.	○	2☌1 4○
23	3☌2,1.	○	.4
24	.2	○	.1,3. .4
25	.1	○	.2 .3 .4
26	2.	○	1. 3. .4
27	○1 .2	○	3. 4.
28	3. 1.	○	.2 4.
29	3.	○	.1,2. 4.
30	.3,2. 1.	○	4.
31	4. .2	○	.3,1.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Ultimo quarto	$9^h 51'$
9	Luna nuova	4 24
17	Primo quarto	7 57
24	Luna piena	3 2
30	Ultimo quarto	20 13

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	77 θ¹ ♉ 5.ª	4 41
1	α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	7 55
4	51 □ 5.ª	5 14
4	54 λ □ 4. 5.ª	7 16
4	68 k □ 5.ª.	14 29
6	65 α² ♋ 5.ª	7 7
7	29 π ♌ 4. 5.ª	14 2
8	58 d ♌ 5.ª	21 7
9	91 ι ♌ 4. 5.ª	17 45
15	46 θ ♎ 4. 5.ª.	4 54
15	7 χ Ofiuco 5.ª	20 47
16	24 m ♏ 5.ª	3 15
19	44 ρ¹ ♐ 5.ª	1 56
19	55 e² ♐ 5.ª.	11 5
20	9 β ♑ 3. 4.ª.	3 17
22	43 θ ♒ 4. 5.ª	3 41
25	80 e ♓ 5.ª	2 32
25	110 o ♓ 5.ª	18 6
28	77 θ¹ ♉ 5.ª	12 9
28	α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	15 17

	Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
		I. Satellite.
		h ′ ″
	1	0 27 17 imm.
	2	18 55 38
*	4	13 24 1
	6	7 52 22
	8	2 20 46
	9	20 49 7
*	11	15 17 28
	13	9 45 48
	15	4 14 11
	16	22 42 30
*	18	17 10 51
	20	11 39 9
	22	6 7 31
	24	0 35 50
	25	19 4 9
*	27	13 31 27
	29	8 0 48
		II. Satellite.
	2	11 57 20 imm.
	6	1 14 51
*	9	14 33 16
	13	3 50 48
*	16	17 9 16
	20	6 26 49
	23	19 45 21
	27	9 2 56
	30	22 21 31
		III. Satellite.
	3	18 9 7 imm.
	3	21 6 38 em.
	10	22 8 11 imm.
	11	1 6 35 em.
	18	2 6 30 imm.
	18	5 5 49 em.
	25	6 4 41 imm.
	25	9 4 52 em.
		IV. Satellite.
	16	10 27 42 imm.
*	16	12 2 39 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
244	1	Merc.	0 0 0,53	10 40 1,00	10 40 0,47	5 23	6 37
245	2	Giov.	23 59 41,78	10 43 38,75	10 43 57,03	5 25	6 35
246	3	Ven.	23 59 22,76	10 47 16,23	10 47 53,58	5 27	6 33
247	4	Sab.	23 59 3,48	10 50 53,45	10 51 50,13	5 29	6 31
248	5	Dom.	23 58 43,96	10 54 30,44	10 55 46,68	5 30	6 30
249	6	Lun.	23 58 24,23	10 58 7,21	10 59 43,24	5 31	6 29
250	7	Mart.	23 58 4,30	11 1 43,78	11 3 39,79	5 33	6 27
251	8	Merc.	23 57 44,18	11 5 20,15	11 7 36,34	5 35	6 25
252	9	Giov.	23 57 23,88	11 8 56,34	11 11 32,89	5 36	6 24
253	10	Ven.	23 57 3,41	11 12 32,37	11 15 29,45	5 38	6 22
254	11	Sab.	23 56 42,80	11 16 8,26	11 19 26,00	5 40	6 20
255	12	Dom.	23 56 22,07	11 19 44,02	11 23 22,55	5 42	6 18
256	13	Lun.	23 56 1,23	11 23 19,68	11 27 19,10	5 44	6 16
257	14	Mart.	23 55 40,29	11 26 55,24	11 31 15,65	5 45	6 15
258	15	Merc.	23 55 19,27	11 30 30,72	11 35 12,21	5 47	6 13
259	16	Giov.	23 54 58,20	11 34 6,13	11 39 8,76	5 48	6 12
260	17	Ven.	23 54 37,09	11 37 41,51	11 43 5,31	5 50	6 10
261	18	Sab.	23 54 15,96	11 41 16,87	11 47 1,86	5 51	6 9
262	19	Dom.	23 53 54,82	11 44 52,23	11 50 58,41	5 53	6 7
263	20	Lun.	23 53 33,70	11 48 27,61	11 54 54,97	5 55	6 5
264	21	Mart.	23 53 12,62	11 52 3,02	11 58 51,52	5 57	6 3
265	22	Merc.	23 52 51,61	11 55 38,50	12 2 48,07	5 58	6 2
266	23	Giov.	23 52 30,69	11 59 14,08	12 6 44,62	5 59	6 1
267	24	Ven.	23 52 9,88	12 2 49,77	12 10 41,17	6 1	5 59
268	25	Sab.	23 51 49,20	12 6 25,58	12 14 37,73	6 2	5 58
269	26	Dom.	23 51 28,68	12 10 1,55	12 18 34,28	6 3	5 57
270	27	Lun.	23 51 8,34	12 13 37,71	12 22 30,83	6 5	5 55
271	28	Mart.	23 50 48,21	12 17 14,08	12 26 27,38	6 6	5 54
272	29	Merc.	23 50 28,32	12 20 50,69	12 30 23,93	6 8	5 52
273	30	Giov.	23 50 8,69	12 24 27,56	12 34 20,48	6 9	5 51

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	5 8 21 48,2	8 26 23,5	− 0,91	0,39A	0,0037525
2	5 9 19 55,9	8 4 35,5	0,91	0,46	0,0036498
3	5 10 18 5,5	7 42 39,6	0,92	0,51	0,0035460
4	5 11 16 17,1	7 20 36,1	0,92	0,54	0,0034410
5	5 12 14 30,9	6 58 25,2	0,93	0,54	0,0033347
6	5 13 12 46,5	6 36 7,4	0,93	0,50	0,0032270
7	5 14 11 4,1	6 13 43,0	0,93	0,44	0,0031179
8	5 15 9 23,8	5 51 12,4	0,94	0,35	0,0030073
9	5 16 7 45,2	5 28 35,9	0,94	0,24	0,0028951
10	5 17 6 8,4	5 5 53,8	0,94	0,11	0,0027814
11	5 18 4 33,5	4 43 6,5	0,95	0,03B	0,0026663
12	5 19 3 0,5	4 20 14,3	0,95	0,17	0,0025499
13	5 20 1 29,2	3 57 17,6	0,95	0,30	0,0024321
14	5 20 59 59,4	3 34 16,8	0,95	0,42	0,0023131
15	5 21 58 31,4	3 11 12,2	0,96	0,51	0,0021930
16	5 22 57 5,1	2 48 4,2	0,96	0,58	0,0020719
17	5 23 55 40,3	2 24 53,0	0,96	0,63	0,0019499
18	5 24 54 17,1	2 1 39,0	0,96	0,65	0,0018273
19	5 25 52 55,7	1 38 22,6	0,96	0,64	0,0017043
20	5 26 51 36,0	1 15 4,0	0,97	0,60	0,0015810
21	5 27 50 18,0	0 51 43,7	0,97	0,52	0,0014575
22	5 28 49 1,6	0 28 22,0	0,97	0,42	0,0013340
23	5 29 47 47,1	0 4 59,1	0,97	0,31	0,0012105
24	6 0 46 34,6	0 18 24,7 Aust.	0,97	0,18	0,0010872
25	6 1 45 24,2	0 41 49,1	0,97	0,04	0,0009641
26	6 2 44 15,7	1 5 13,6	0,97	0,09A	0,0008412
27	6 3 43 9,4	1 28 38,0	0,97	0,21	0,0007183
28	6 4 42 5,2	1 52 1,9	0,97	0,31	0,0005960
29	6 5 41 3,2	2 15 25,1	0,97	0,39	0,0004737
30	6 6 40 3,6	2 38 47,1	− 0,97	0,45A	0,0003516

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzanotte media.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	2 3 10 19	2 9 58 33	4 10 32A	4 31 7A	18 8
2	Giov.	2 16 41 40	2 23 19 53	4 47 41	5 0 10	19 1
3	Ven.	2 29 53 26	3 6 22 35	5 8 34	5 12 54	19 53
4	Sab.	3 12 47 36	3 19 8 44	5 13 16	5 9 46	20 43
5	Dom.	3 25 26 18	4 1 40 33	5 2 32	4 51 47	21 31
6	Lun.	4 7 51 44	4 14 0 6	4 37 40	4 20 27	22 18
7	Mart.	4 20 5 54	4 26 9 21	4 0 22	3 37 41	23 3
8	Merc.	5 2 10 41	5 8 10 6	3 12 41	2 45 40	23 46
9	Giov.	5 14 7 49	5 20 4 6	2 16 55	1 46 46	* *
10	Ven.	5 25 59 10	6 1 53 17	1 15 33	0 43 34	0 29
11	Sab.	6 7 46 45	6 13 39 52	0 11 9	0 21 23B	1 11
12	Dom.	6 19 32 59	6 25 26 29	0 53 43B	1 25 31	1 53
13	Lun.	7 1 20 47	7 7 16 18	1 56 29	2 26 19	2 37
14	Mart.	7 13 13 30	7 19 12 54	2 54 43	3 21 23	3 22
15	Merc.	7 25 15 0	8 1 20 21	3 46 1	4 8 20	4 8
16	Giov.	8 7 29 29	8 13 42 58	4 28 2	4 44 49	4 57
17	Ven.	8 20 1 20	8 26 25 5	4 58 25	5 8 31	5 47
18	Sab.	9 2 54 43	9 9 30 38	5 14 52	5 17 12	6 39
19	Dom.	9 16 13 9	9 23 2 31	5 15 17	5 8 55	7 33
20	Lun.	9 29 58 50	10 7 2 3	4 57 58	4 42 22	8 28
21	Mart.	10 14 11 58	10 21 28 12	4 22 9	3 57 26	9 24
22	Merc.	10 28 50 11	11 6 17 10	3 28 29	2 55 39	10 19
23	Giov.	11 13 48 15	11 21 22 24	2 19 29	1 40 36	11 15
24	Ven.	11 28 58 28	0 6 35 16	0 59 45	0 17 46	12 12
25	Sab.	0 14 11 32	0 21 46 5	0 24 30A	1 6 12A	13 8
26	Dom.	0 29 17 49	1 6 45 41	1 46 28	2 24 35	14 5
27	Lun.	1 14 8 48	1 21 26 30	2 59 51	3 31 44	15 2
28	Mart.	1 28 38 14	2 5 43 36	3 59 49	4 23 47	15 59
29	Merc.	2 12 42 26	2 19 34 40	4 43 26	4 58 41	16 55
30	Giov.	2 26 20 26	3 2 59 53	5 9 31	5 15 59	17 49

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	4 50	17 48B	58 15	57 51	31 48	31 34	10 43	0 36
2	5 48	18 20	57 28	57 6	31 22	31 10	11 31	1 37
3	6 44	17 50	56 45	56 24	30 59	30 47	12 24	2 31
4	7 39	16 22	56 5	55 47	30 37	30 27	13 20	3 19
5	8 30	14 6	56 31	55 16	30 18	30 10	14 18	4 1
6	9 22	11 13	55 3	54 50	30 3	29 56	15 17	4 36
7	10 10	7 51	54 39	54 29	29 50	29 44	16 16	5 11
8	10 58	4 11	54 20	54 13	29 40	29 36	17 15	5 41
9	* *	* *	54 7	54 2	29 33	29 30	18 14	6 9
10	11 44	0 22	53 58	53 55	29 28	29 26	19 12	6 36
11	12 31	3 26A	53 55	53 55	29 26	29 26	20 10	7 2
12	13 17	7 6	53 58	54 1	29 28	29 30	21 9	7 30
13	14 5	10 28	54 7	54 14	29 33	29 37	22 8	7 59
14	14 53	13 25	54 24	54 35	29 42	29 48	23 5	8 32
15	15 44	15 47	54 49	55 4	29 55	30 4	* *	9 7
16	16 36	17 26	55 22	55 42	30 14	30 25	0 3	9 48
17	17 31	18 13	56 4	56 28	30 37	30 50	0 58	10 35
18	18 27	18 1	56 54	57 21	31 4	31 19	1 50	11 29
19	19 25	16 45	57 49	58 18	31 34	31 50	2 38	12 31
20	20 24	14 24	58 47	59 15	32 5	32 21	3 23	13 37
21	21 24	11 1	59 42	60 8	32 36	32 50	4 6	14 49
22	22 24	6 48	60 30	60 50	33 2	33 13	4 41	16 5
23	23 24	2 2	61 5	61 16	33 21	33 27	5 18	17 22
24	0 24	2 56B	61 22	61 23	33 30	33 31	5 55	18 39
25	1 25	7 40	61 19	61 10	33 28	33 24	6 33	19 53
26	2 26	11 49	60 56	60 39	33 16	33 7	7 11	21 9
27	3 27	15 4	60 18	59 54	32 55	32 42	7 52	22 20
28	4 28	17 13	59 28	59 1	32 28	32 13	8 38	23 25
29	5 28	18 11	58 33	58 4	31 58	31 42	9 27	* *
30	6 26	18 2	57 36	57 9	31 27	31 12	10 20	0 25

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Giorno	*Oriente*	$14^h\ 48'$	*Occidente*
1	4. .1	○	.2 .3
2	4.	○	2. 1. 3.
3	4. .2 .1	○	3.
4	4. 3.	○	1. .2
5	.4 3.	○	2. 10
6	.4 .3 2. 1.	○	
7	.4 .2	○	.3 .1
8	1.	○	.2 .3 40
9		○	2. 1. .4 3.
10	2. .1	○	3. .4
11	3.	○	1○2 .4
12	3. .1	○	2. .4
13	.3 2. 1.	○	4.
14	.2 .3	○	.1 4.
15	1.	○	.2.3,4.
16		○	4.2. 1. .3
17	2. 4. 1.	○	3.
18	4. 3. .2	○	1.
19	4. 3. .1	○	2.
20	4. .3 2.	○	1●
21	.4 .2 .3	○	.1
22	.4 1.	○	.2 .3
23	.4	○	2○1 .3
24	2. 1○4	○	3.
25	3○2	○	.4,1.
26	3. .1	○	2. .4
27	.3 2.	○	1. .4
28	01 .2 .3	○	.4
29	1.	○	.2 .3 .4
30		○	.1,2 .3 4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
8	Luna nuova	$21^h 44'$
16	Primo quarto	20 18
23	Luna piena	12 13
30	Ultimo quarto	10 33

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	51 □ 5.ª	11 8
1	54 λ □ 4. 5.ª	13 10
1	68 k □ 5.ª	20 22
3	65 α² ♋ 5.ª	12 51
4	29 π ♌ 4. 5.ª	19 53
6	58 d ♌ 5.ª	3 16
6	91 ι ♌ 4. 5.ª	23 48
12	46 θ ♎ 4. 5.ª	10 49
13	7 χ Ofiuco 5.ª	2 46
13	24 m ♏ 5.ª	9 18
16	44 ρ¹ ♐ 5.ª	9 25
17	9 β ♑ 3. 4.ª	11 35
19	43 θ ♒ 4. 5.ª	13 41
22	80 e ♓ 5.ª	13 48
23	110 o ♓ 5.ª	5 20
25	77 θ¹ ♉ 5.ª	22 0
26	α ♉ (Aldebaran) 1.ª	1 2
28	51 □ 5.ª	18 46
28	54 λ □ 4. 5.ª	20 44
29	68 k □ 5.ª	3 43
30	65 α² ♋ 5.ª	19 28

Giorni.	Ecclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	2 29 6 imm.
2	20 57 25
* 4	15 25 42
6	9 53 2
8	4 22 20
9	22 50 38
* 11	17 18 55
* 13	11 47 14
15	6 15 32
17	0 43 50
18	19 12 6
* 20	13 40 25
22	8 8 43
24	2 37 1
25	21 5 17
* 27	15 33 36
* 29	10 1 54
31	4 30 12
	II. Satellite.
* 4	11 39 6 imm.
8	0 57 45
* 11	14 15 21
15	3 34 2
* 18	16 51 41
22	6 10 25
25	19 28 3
29	8 46 50
	III. Satellite.
2	10 2 37 imm.
* 2	13 3 42 em.
* 9	14 0 38 imm.
* 9	17 2 35 em.
* 16	17 59 9 imm.
16	21 1 58 em.
23	21 56 25 imm.
24	1 1 5 em.
31	1 56 9 imm.
31	5 0 41 em.
	IV. Satellite.
3	4 24 1 imm.
3	6 17 44 em.
19	22 20 53 imm.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
274	1	Ven.	23 49 49,34	12 28 4,71	12 38 17,03	6 11	5 49
275	2	Sab.	23 49 30,29	12 31 42,16	12 42 13,59	6 13	5 47
276	3	Dom.	23 49 11,55	12 35 19,92	12 46 10,14	6 15	5 45
277	4	Lun.	23 48 53,15	12 38 58,02	12 50 6,69	6 16	5 44
278	5	Mart.	23 48 35,11	12 42 36,48	12 54 3,24	6 17	5 43
279	6	Merc.	23 48 17,45	12 46 15,32	12 57 59,79	6 18	5 42
280	7	Giov.	23 48 0,19	12 49 54,56	13 1 56,34	6 20	5 40
281	8	Ven.	23 47 43,34	12 53 34,21	13 5 52,89	6 21	5 39
282	9	Sab.	23 47 26,91	12 57 14,29	13 9 49,44	6 23	5 37
283	10	Dom.	23 47 10,92	13 0 54,81	13 13 46,00	6 24	5 36
284	11	Lun.	23 46 55,38	13 4 35,78	13 17 42,55	6 25	5 34
285	12	Mart.	23 46 40,31	13 8 17,22	13 21 39,10	6 27	5 33
286	13	Merc.	23 46 25,73	13 11 59,15	13 25 35,65	6 28	5 32
287	14	Giov.	23 46 11,66	13 15 41,59	13 29 32,20	6 30	5 30
288	15	Ven.	23 45 58,11	13 19 24,56	13 33 28,76	6 31	5 29
289	16	Sab.	23 45 45,09	13 23 8,06	13 37 25,31	6 33	5 27
290	17	Dom.	23 45 32,62	13 26 52,11	13 41 21,86	6 35	5 25
291	18	Lun.	23 45 20,72	13 30 36,73	13 45 18,41	6 37	5 23
292	19	Mart.	23 45 9,42	13 34 21,95	13 49 14,97	6 38	5 22
293	20	Merc.	23 44 58,73	13 38 7,78	13 53 11,52	6 40	5 20
294	21	Giov.	23 44 48,66	13 41 54,23	13 57 8,07	6 42	5 18
295	22	Ven.	23 44 39,23	13 45 41,33	14 1 4,63	6 43	5 17
296	23	Sab.	23 44 30,47	13 49 29,10	14 5 1,18	6 45	5 15
297	24	Dom.	23 44 22,39	13 53 17,55	14 8 57,73	6 47	5 13
298	25	Lun.	23 44 15,00	13 57 6,69	14 12 54,28	6 48	5 12
299	26	Mart.	23 44 8,33	14 0 56,56	14 16 50,84	6 49	5 11
300	27	Merc.	23 44 2,40	14 4 47,17	14 20 47,39	6 51	5 9
301	28	Giov.	23 43 57,22	14 8 38,53	14 24 43,94	6 52	5 8
302	29	Ven.	23 43 52,80	14 12 30,65	14 28 40,50	6 54	5 6
303	30	Sab.	23 43 49,16	14 16 23,56	14 32 37,05	6 56	5 4
304	31	Dom.	23 43 46,32	14 20 17,27	14 36 33,61	6 57	5 3

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	6 7 39 6,3	3 2 7,7	– 0,97	0,48A	0,0002295
2	6 8 38 11,2	3 25 26,5	0,97	0,48	0,0001074
3	6 9 37 18,6	3 48 43,1	0,97	0,45	9,9999851
4	6 10 36 28,2	4 11 57,2	0,97	0,39	9,9998625
5	6 11 35 40,2	4 35 8,4	0,96	0,30	9,9997396
6	6 12 34 54,1	4 58 16,4	0,96	0,19	9,9996164
7	6 13 34 10,9	5 21 20,8	0,96	0,07	9,9994927
8	6 14 33 29,5	5 44 21,1	0,96	0,06B	9,9993685
9	6 15 32 50,2	6 7 17,0	0,95	0,20	9,9992438
10	6 16 32 13,0	6 30 8,1	0,95	0,33	9,9991186
11	6 17 31 37,8	6 52 53,9	0,95	0,45	9,9989931
12	6 18 31 4,5	7 15 34,1	0,94	0,55	9,9988673
13	6 19 30 33,1	7 38 8,4	0,94	0,63	9,9987412
14	6 20 30 3,5	8 0 36,3	0,93	0,68	9,9986149
15	6 21 29 35,8	8 22 57,4	0,93	0,70	9,9984887
16	6 22 29 9,6	8 45 11,2	0,92	0,69	9,9983627
17	6 23 28 45,3	9 7 17,5	0,92	0,66	9,9982371
18	6 24 28 22,7	9 29 15,9	0,91	0,60	9,9981120
19	6 25 28 1,9	9 51 6,0	0,91	0,50	9,9979876
20	6 26 27 42,8	10 12 47,4	0,90	0,39	9,9978640
21	6 27 27 25,6	10 34 19,6	0,90	0,27	9,9977413
22	6 28 27 10,0	10 55 42,4	0,89	0,13	9,9976197
23	6 29 26 56,4	11 16 55,4	0,89	0,00	9,9974994
24	7 0 26 44,7	11 37 58,2	0,88	0,12A	9,9973804
25	7 1 26 34,9	11 58 50,4	0,87	0,23	9,9972627
26	7 2 26 27,2	12 19 31,7	0,86	0,32	9,9971463
27	7 3 26 21,6	12 40 1,6	0,85	0,39	9,9970312
28	7 4 26 18,1	13 0 19,8	0,84	0,42	9,9969174
29	7 5 26 16,7	13 20 25,9	0,83	0,43	9,9968049
30	7 6 26 17,4	13 40 19,5	0,82	0,41	9,9966936
31	7 7 26 20,4	14 0 0,2	– 0,81	0,36A	9,9965834

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	3 9 33 19	3 16 1 7	5 18 13A	5 16 22A	18 40
2	Sab.	3 22 23 40	3 28 41 27	5 10 37	5 1 11	19 29
3	Dom.	4 4 54 53	4 11 4 27	4 48 19	4 32 13	20 16
4	Lun.	4 17 10 36	4 23 13 48	4 13 11	3 51 27	21 1
5	Mart.	4 29 14 29	5 5 13 3	3 27 17	3 1 1	21 45
6	Merc.	5 11 9 55	5 17 5 26	2 32 53	2 3 13	22 27
7	Giov.	5 22 59 57	5 28 53 49	1 32 18	1 0 27	23 10
8	Ven.	6 4 47 20	6 10 40 48	0 28 0	0 4 45B	23 52
9	Sab.	6 16 34 29	6 22 28 40	0 37 28B	1 9 48	* *
10	Dom.	6 28 23 36	7 4 19 36	1 41 27	2 12 5	0 35
11	Lun.	7 10 16 53	7 16 15 46	2 41 23	3 9 2	1 20
12	Mart.	7 22 16 31	7 28 19 27	3 34 43	3 58 9	2 6
13	Merc.	8 4 24 55	8 10 33 14	4 19 3	4 37 8	2 53
14	Giov.	8 16 44 47	8 22 59 56	4 52 9	5 3 52	3 42
15	Ven.	8 29 19 5	9 5 42 36	5 12 2	5 16 26	4 33
16	Sab.	9 12 10 53	9 18 44 18	5 16 55	5 13 17	5 25
17	Dom.	9 25 23 11	10 2 7 48	5 5 27	4 53 20	6 18
18	Lun.	10 8 58 21	10 15 54 58	4 36 54	4 16 12	7 11
19	Mart.	10 22 57 40	11 0 6 21	3 51 21	3 22 35	8 4
20	Merc.	11 7 20 46	11 14 40 31	2 50 12	2 14 39	8 58
21	Giov.	11 22 5 3	11 29 33 38	1 36 27	0 56 17	9 53
22	Ven.	0 7 5 24	0 14 39 21	0 14 52	0 27 0A	10 49
23	Sab.	0 22 14 23	0 29 49 18	1 8 27A	1 48 39	11 46
24	Dom.	1 7 22 55	1 14 54 3	2 26 48	3 2 9	12 44
25	Lun.	1 22 21 35	1 29 44 31	3 34 5	4 2 4	13 43
26	Mart.	2 7 1 59	2 14 13 17	4 25 44	4 44 50	14 41
27	Merc.	2 21 17 56	2 28 15 36	4 59 15	5 8 59	15 38
28	Giov.	3 5 6 9	3 11 49 37	5 14 7	5 14 48	16 35
29	Ven.	3 18 26 12	3 24 56 13	5 11 16	5 3 47	17 24
30	Sab.	4 1 20 3	4 7 38 13	4 52 36	4 38 1	18 13
31	Dom.	4 13 51 15	4 19 59 43	4 20 21	3 59 54	18 59

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	7 21	16 51B	56 44	56 20	30 59	30 45	11 14	1 17
2	8 15	14 50	55 57	55 37	30 33	30 22	12 12	2 2
3	9 6	12 8	55 18	55 2	30 12	30 3	13 12	2 39
4	9 55	8 55	54 47	54 35	29 55	29 48	14 10	3 12
5	10 42	5 22	54 24	54 15	29 42	29 37	15 10	3 43
6	11 29	1 37	54 8	54 2	29 33	29 30	16 7	4 12
7	12 15	2 12A	53 58	53 55	29 28	29 26	17 5	4 32
8	13 2	5 55	53 54	53 54	29 26	29 26	18 3	5 7
9	* *	* *	53 56	53 58	29 27	29 28	19 3	5 33
10	13 49	9 25	54 2	54 7	29 30	29 33	20 2	6 1
11	14 37	12 31	54 14	54 22	29 37	29 41	21 0	6 33
12	15 27	15 5	54 32	54 43	29 46	29 52	21 57	7 9
13	16 19	16 59	54 55	55 9	29 59	30 6	22 52	7 48
14	17 12	18 3	55 25	55 42	30 15	30 25	23 44	8 31
15	18 7	18 13	56 1	56 22	30 35	30 46	* *	9 23
16	19 3	17 22	56 44	57 8	30 58	31 11	0 34	10 19
17	20 0	15 30	57 33	57 59	31 25	31 39	1 17	11 23
18	20 57	12 39	58 25	58 51	31 53	32 7	1 58	12 29
19	21 55	8 56	59 17	59 42	32 22	32 36	2 36	13 49
20	22 53	4 32	60 5	60 26	32 48	32 59	3 12	14 52
21	23 52	0 16B	60 44	60 58	33 9	33 17	3 49	16 6
22	0 52	5 8	61 8	61 14	33 23	33 26	4 25	17 23
23	1 53	9 41	61 15	61 11	33 26	33 24	5 1	18 41
24	2 55	13 31	61 2	60 49	33 19	33 12	5 41	19 56
25	3 58	16 19	60 31	60 10	33 2	32 51	6 26	20 6
26	5 1	17 55	59 46	59 19	32 38	32 23	7 14	22 11
27	6 1	18 16	58 51	58 22	32 8	31 52	8 8	23 8
28	7 0	17 29	57 53	57 24	31 36	31 20	9 5	23 57
29	7 56	15 43	56 56	56 29	31 5	30 50	10 3	* *
30	8 48	13 12	56 4	55 41	30 37	30 24	11 4	0 39
31	9 38	10 7	55 21	55 3	30 13	30 3	12 3	1 14

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	14^h $11'$	Occidente
1	2. 1.	○	3. 4.
2	.2	○	3. .1 4.
3	3. 1.	○	4. .2
4	.3 4.	○	1.☌2
5	4. .2 .3 .1	○	
6	4. 1.	○	.2 .3
7	4.	○	.1 2. .3
8	.4 2. 1.	○	3.
9	.4 .2	○	3. .1
10	.4 3. .1	○	.2
11	.3 .4	○	2. 1.
12	2☌3 .1	○	.4
13	●1	○	2☌3 .4
14		○	.1 2. .3 .4
15	2.1.	○	3. .4
16	.2	○	3. .1 4.
17	1☌2	○	.3 4.
18	3.	○	2.1. 4.
19	2☌3, .1	○	4.
20	4☌2	○	1. 3○
21	4.	○	.1 2. .3
22	4. 1.2.	○	3.
23	4. .2	○	.1, 3.
24	4. 1☌3	○	.2
25	.4 3.	○	1☌2
26	.4 .3, 2. .1	○	
27	.4 3☌2	○	1.
28	1☌4	○	2☌3
29	1☌2	○	.4 3.
30	.2	○	.1 3. .4
31	1.3.	○	.2 .4

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
7	Luna nuova	15h 48′
15	Primo quarto	6 52
21	Luna piena.	22 41
29	Ultimo quarto	4 59

GIORNI.	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	29 π ♌ 4. 5.ª	2 12
2	58 d ♌ 5.ª	9 32
3	91 ι ♌ 4. 5.ª	6 4
8	46 θ ♎ 4. 5.ª	16 41
9	7 χ Ofiuco 5.ª	8 30
9	24 m ♏ 5.ª	14 58
12	44 ρ¹ ♐ 5.ª	15 6
13	55 e² ♐ 5.ª	0 40
13	9 β ♑ 3. 4.ª	17 43
15	43 θ ♒ 4. 5.ª	21 17
19	80 e ♓ 5.ª	0 0
19	110 ο ♓ 5.ª	15 53
22	77 θ¹ ♉ 5.ª	8 57
22	α ♉ (Aldebaran) 1.ª	11 57
25	51 □ 5.ª	4 19
25	54 λ □ 4. 5.ª	6 4
25	68 k □ 5.ª	12 59
27	65 α² ♋ 5.ª	3 44
28	29 π ♌ 4. 5.ª	9 50
29	58 d ♌ 5.ª	16 47

	GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
		I. SATELLITE.			
		h	′	″	
	1	22	58	29	imm.
*	3	17	26	48	
*	5	11	55	6	
	7	6	23	24	
	9	0	51	42	
	10	19	20	1	
*	12	13	48	21	
	14	8	16	39	
	16	2	44	57	
	17	21	13	17	
*	19	15	41	38	
*	21	10	9	57	
	23	4	38	16	
	24	23	6	37	
*	26	17	34	58	
*	28	12	3	19	
	30	6	41	40	
		II. SATELLITE.			
	1	22	4	30	imm.
*	5	11	23	19	
	9	0	41	1	
*	12	13	59	51	
	16	3	17	34	
*	19	16	36	26	
	23	5	54	11	
*	26	19	13	4	
*	30	8	30	52	
		III. SATELLITE.			
	7	5	54	16	imm.
	7	8	59	38	em.
*	14	19	52	18	imm.
*	14	12	58	30	em.
*	21	13	50	14	imm.
*	21	16	57	16	em.
*	28	17	48	23	imm.
	28	20	56	13	em.
		IV. SATELLITE.			
*	5	16	18	32	imm.
*	5	18	42	1	em.
*	22	10	17	29	imm.
*	22	12	53	33	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
305	1	Lun.	23 43 44,29	14 24 11,78	14 40 30,16	6 58	5 2
306	2	Mart.	23 43 43,07	14 28 7,11	14 44 26,71	7 0	5 0
307	3	Merc.	23 43 42,67	14 32 3,27	14 48 23,27	7 1	4 59
308	4	Giov.	23 43 43,10	14 36 0,25	14 52 19,82	7 2	4 58
309	5	Ven.	23 43 44,36	14 39 58,07	14 56 16,38	7 4	4 56
310	6	Sab.	23 43 46,46	14 43 56,73	15 0 12,93	7 5	4 55
311	7	Dom.	23 43 49,40	14 47 56,23	15 4 9,49	7 6	4 54
312	8	Lun.	23 43 53,18	14 51 56.58	15 8 6,04	7 8	4 52
313	9	Mart.	23 43 57,80	14 55 57,77	15 12 2,60	7 9	4 51
314	10	Merc.	23 44 3,27	14 59 59,80	15 15 59,15	7 10	4 50
315	11	Giov.	23 44 9,18	15 4 2,68	15 19 55,71	7 12	4 48
316	12	Ven.	23 44 16,32	15 8 6,40	15 23 52,26	7 13	4 47
317	13	Sab.	23 44 24,69	15 12 10,95	15 27 48,82	7 14	4 46
318	14	Dom.	23 44 33,49	15 16 16,33	15 31 45,37	7 15	4 45
319	15	Lun.	23 44 43,12	15 20 22,54	15 35 41,93	7 16	4 44
320	16	Mart.	23 44 53,58	15 24 29,58	15 39 38,48	7 17	4 43
321	17	Merc.	23 45 4,86	15 28 37,45	15 43 35,04	7 19	4 41
322	18	Giov.	23 45 16,96	15 32 46,14	15 47 31,59	7 20	4 40
323	19	Ven.	23 45 29,88	15 36 55,65	15 51 28,15	7 21	4 39
324	20	Sab.	23 45 43,67	15 41 5,97	15 55 24,70	7 22	4 38
325	21	Dom.	23 45 58,14	15 45 17,10	15 59 21,26	7 23	4 37
326	22	Lun.	23 46 13,46	15 49 29,02	16 3 17,82	7 24	4 36
327	23	Mart.	23 46 29,57	15 53 41,73	16 7 14,37	7 25	4 35
328	24	Merc.	23 46 46,47	15 57 55,23	16 11 10,93	7 26	4 34
329	25	Giov.	23 47 4,16	16 2 9,51	16 15 7,48	7 27	4 33
330	26	Ven.	23 47 22,62	16 6 24,58	16 19 4,04	7 28	4 32
331	27	Sab.	23 47 41,84	16 10 40,42	16 23 0,60	7 29	4 31
332	28	Dom.	23 48 1,80	16 14 56,98	16 26 57,15	7 30	4 30
333	29	Lun.	23 48 22,48	16 19 14,27	16 30 53,71	7 31	4 29
334	30	Mart.	23 48 43,86	16 23 32,27	16 34 50,26	7 32	4 28

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' ''	° ' ''	''	''	
1	7 8 26 25,5	14 19 27,5	− 0,80	0,28A	9,9964742
2	7 9 26 32,8	14 38 41,1	0,79	0,18	9,9963659
3	7 10 26 42,2	14 57 40,6	0,78	0,05	9,9962585
4	7 11 26 53,5	15 16 25,5	0,77	0,09B	9,9961558
5	7 12 27 7,0	15 34 55,4	0,76	0,22	9,9960458
6	7 13 27 22,3	15 53 9,9	0,75	0,35	9,9959404
7	7 14 27 39,6	16 11 8,6	0,74	0,47	9,9958356
8	7 15 27 58,6	16 28 51,0	0,73	0,57	9,9957313
9	7 16 28 19,3	16 46 16,6	0,72	0,66	9,9956277
10	7 17 28 41,6	17 3 25,1	0,70	0,72	9,9955249
11	7 18 29 5,6	17 20 16,1	0,69	0,75	9,9954229
12	7 19 29 30,8	17 36 49,2	0,68	0,74	9,9953217
13	7 20 29 57,6	17 53 3,9	0,67	0,71	9,9952215
14	7 21 30 25,7	18 8 59,8	0,66	0,65	9,9951224
15	7 22 30 55,2	18 24 36,6	0,64	0,57	9,9950246
16	7 23 31 25,8	18 39 53,9	0,63	0,46	9,9949283
17	7 24 31 57,9	18 54 51,2	0,62	0,34	9,9948336
18	7 25 32 31,1	19 9 28,2	0,60	0,20	9,9947407
19	7 26 33 5,6	19 23 44,5	0,59	0,06	9,9946498
20	7 27 33 41,3	19 37 39,8	0,58	0,07A	9,9945610
21	7 28 34 18,4	19 51 13,7	0,56	0,18	9,9944743
22	7 29 34 56,8	20 4 25,9	0,55	0,27	9,9943899
23	8 0 35 36,6	20 17 16,0	0,53	0,34	9,9943078
24	8 1 36 17,7	20 29 43,6	0,52	0,39	9,9942280
25	8 2 37 0,4	20 41 48,5	0,50	0,40	9,9941505
26	8 3 37 44,5	20 53 30,3	0,48	0,38	9,9940752
27	8 4 38 30,9	21 4 48,7	0,47	0,34	9,9940021
28	8 5 39 17,2	21 15 43,3	0,45	0,27	9,9939311
29	8 6 40 5,7	21 26 13,8	0,43	0,17	9,9938622
30	8 7 40 55,8	21 36 20,0	− 0,41	0,05A	9,9937953

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Lun.	4 26 4 15	5 2 5 25	3 36 56A	3 11 47A	19 43
2	Mart.	5 8 3 51	5 14 0 8	2 44 43	2 16 3	20 26
3	Merc.	5 19 54 49	5 25 48 28	1 46 4	1 15 3	21 8
4	Giov.	6 1 41 35	6 7 34 38	0 43 18	0 11 7	21 50
5	Ven.	6 13 28 4	6 19 22 17	0 21 12B	0 53 18B	22 33
6	Sab.	6 25 17 36	7 1 14 23	1 24 54	1 55 39	23 17
7	Dom.	7 7 12 52	7 13 13 16	2 25 15	2 53 22	* *
8	Lun.	7 19 15 49	7 25 20 38	3 19 39	3 43 49	0 3
9	Mart.	8 1 27 55	8 7 37 45	4 5 32	4 24 32	0 51
10	Merc.	8 13 50 17	8 20 5 36	4 40 32	4 53 17	1 39
11	Giov.	8 26 23 51	9 2 45 10	5 2 35	5 8 14	2 30
12	Ven.	9 9 9 41	9 15 37 34	5 10 5	5 8 0	3 22
13	Sab.	9 22 8 58	9 28 44 4	5 1 56	4 51 50	4 13
14	Dom.	10 5 23 4	10 12 6 8	4 37 44	4 19 40	5 5
15	Lun.	10 18 53 26	10 25 45 7	3 57 48	3 32 17	5 57
16	Mart.	11 2 41 16	11 9 41 57	3 3 23	2 31 25	6 49
17	Merc.	11 16 47 8	11 23 56 42	1 56 48	1 20 1	7 41
18	Giov.	0 1 10 26	0 8 27 58	0 41 37	0 2 15	8 34
19	Ven.	0 15 48 49	0 23 12 22	0 37 27A	1 16 42A	9 29
20	Sab.	1 0 37 50	1 8 4 22	1 54 46	2 30 56	10 25
21	Dom.	1 15 30 58	1 22 56 36	3 4 29	3 34 46	11 23
22	Lun.	2 0 20 11	2 7 40 43	4 1 17	4 23 34	12 22
23	Mart.	2 14 57 12	2 22 8 47	4 41 20	4 54 23	13 21
24	Merc.	2 29 14 44	3 6 14 29	5 2 43	5 6 20	14 18
25	Giov.	3 13 7 38	3 19 53 59	5 5 46	5 0 13	15 13
26	Ven.	3 26 33 30	4 3 6 18	4 50 59	4 38 4	16 4
27	Sab.	4 9 32 38	4 15 52 55	4 21 47	4 2 31	16 53
28	Dom.	4 22 7 38	4 28 17 19	3 40 36	3 16 23	17 39
29	Lun.	5 4 22 37	5 10 24 9	2 50 13	2 22 23	18 22
30	Mart.	5 16 22 37	5 22 18 43	1 53 14	1 23 3	19 5

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	10 27	6 38B	54 47	54 33	29 55	29 47	13 1	1 46
2	11 13	2 55	54 22	54 13	29 41	29 36	14 1	2 15
3	12 0	0 53A	54 6	54 1	29 32	29 29	14 59	2 43
4	12 46	4 40	53 59	53 58	29 28	29 28	15 57	3 9
5	13 33	8 16	53 59	54 1	29 29	29 30	16 56	3 35
6	14 21	11 33	54 5	54 11	29 31	29 35	17 54	4 3
7	* *	* *	54 18	54 25	29 39	29 42	18 54	4 34
8	15 11	14 21	54 34	54 44	29 47	29 53	19 53	5 8
9	16 3	16 31	54 55	55 6	29 59	30 5	20 48	5 48
10	16 56	17 54	55 19	55 32	30 12	30 19	21 43	6 28
11	17 50	18 22	55 46	56 1	30 27	30 35	22 33	7 17
12	18 46	17 51	56 17	56 34	30 44	30 53	23 18	8 13
13	19 42	16 20	56 51	57 10	31 2	31 13	23 58	9 12
14	20 38	13 52	57 29	57 49	31 23	31 34	* *	10 17
15	21 34	10 32	58 9	58 30	31 45	31 56	0 37	11 24
16	22 29	6 31	58 50	59 10	32 7	32 18	1 11	12 35
17	23 26	2 0	59 29	59 47	32 28	32 38	1 44	13 46
18	0 23	2 44B	60 3	60 16	32 47	32 54	2 19	14 59
19	1 22	7 23	60 26	60 33	33 0	33 3	2 55	16 15
20	2 22	11 35	60 37	60 37	33 6	33 6	3 32	17 29
21	3 24	14 59	60 33	60 24	30 3	32 58	4 13	18 43
22	4 27	17 18	60 12	59 57	32 52	32 44	5 0	19 50
23	5 30	18 21	59 38	59 15	32 33	32 21	5 51	20 52
24	6 32	18 8	58 51	58 26	32 8	31 54	6 47	21 45
25	7 30	16 48	57 59	57 32	31 39	31 25	7 48	22 33
26	8 26	14 33	57 5	56 38	31 10	30 35	8 48	23 13
27	9 19	11 36	56 14	55 51	30 42	30 30	9 50	23 48
28	10 8	8 12	55 29	55 10	30 17	30 7	10 52	* *
29	10 56	4 31	54 54	54 39	29 58	29 50	11 57	0 18
30	11 43	0 41	54 28	54 18	29 44	29 38	12 59	0 55

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$13^h\ 21'$	Occidente
1	3.	○	.1,2. .4
2	.3 2. .1	○	4.
3	.3 .2	○	1. 4.
4	.1	○	.3 .2 4.
5		○	1♂2,4. .3
6	2. 4.	○	.1 3.
7	●3 4. 1.	○	.2
8	4. 3.	○	.1 , 2.
9	4. 3. 1♂2	○	
10	.4 .3 .2	○	1.
11	.4 .1	○	.3 .2
12	.4	○	1♂2 .3
13	○1 .2 .4	○	3.
14	1.	○	.2,3. 4○
15	3.	○	.1 2. .4
16	3. 1♂2	○	.4
17	.3 .2	○	1. .4
18	.1	○	.3 .2 .4
19		○	1♂2 .3 4.
20	2. .1	○	3. 4.
21	●1 .2	○	3. 4.
22	3.	○	4♂1 2.
23	3. 4. 1.2.	○	
24	4. .3 .2	○	.1
25	4. 1.	○	.2 3○
26	.4 2. .1	○	3.
27	.4 2. .1	○	3.
28	.4 .2	○	1. 3.
29	.4 3.	○	.1 .2
30	3. .4,1.2.	○	

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
7	Luna nuova	9^h 7′
14	Primo quarto	16 3
21	Luna piena	10 45
29	Ultimo quarto	2 25

GIORNI.	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
5	46 θ ♎ 4. 5.ª	23 35
6	7 χ Ofiuco 5.ª	15 16
6	24 m ♏ 5.ª	21 40
9	44 ρ^1 ♐ 5.ª	20 47
10	9 β ♑ 3. 4.ª	23 9
13	43 θ ♒ 4. 5.ª	2 51
16	80 e ♓ 5.ª	7 28
16	110 o ♓ 5.ª	23 58
19	77 θ^1 ♉ 5.ª	18 54
19	α ♉ (Aldebaran) 1.ª . . .	21 57
22	51 □ 5.ª	14 30
22	54 λ □ 4. 5.ª	16 24
22	68 k □ 5.ª	23 6
24	65 α^2 ♋ 5.ª	13 11
25	14 o ♌ 4.ª	9 4
25	29 π ♌ 4. 5.ª	18 44
27	58 d ♌ 5.ª	1 8
31	100 λ ♍ 4.ª	10 17

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	I. SATELLITE.
	h ′ ″
2	1 0 2 imm.
3	19 28 26
* 5	13 56 47
* 7	8 25 10
9	2 53 33
10	21 21 59
* 12	15 50 22
* 14	10 18 46
16	4 47 11
17	23 15 39
* 19	17 44 4
* 21	12 12 30
* 23	6 40 57
25	1 9 27
26	19 37 53
* 28	14 6 22
* 30	8 34 51
	II. SATELLITE.
3	21 49 45 imm.
* 7	11 7 35
11	0 26 29
* 14	13 44 20
18	3 3 15
* 21	16 21 9
* 25	5 40 2
* 28	18 57 59
	III. SATELLITE.
5	21 47 9 imm.
13	1 45 46
20	5 44 55
* 27	9 43 35
	IV. SATELLITE.
9	4 16 35 imm.
* 9	7 3 57 em.
25	22 16 26 imm.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
335	1	Merc.	23 49 5,93	16 27 50,96	16 38 46,82	7 33	4 27
336	2	Giov.	23 49 28,68	16 32 10,33	16 42 43,38	7 33	4 27
337	3	Ven.	23 49 52,09	16 36 30,36	16 46 39,93	7 34	4 26
338	4	Sab.	23 50 16,12	16 40 51,01	16 50 36,49	7 35	4 25
339	5	Dom.	23 50 40,74	16 45 12,25	16 54 33,04	7 36	4 24
340	6	Lun.	23 51 5,92	16 49 34,06	16 58 29,60	7 36	4 24
341	7	Mart.	23 51 31,64	16 53 56,41	17 2 26,16	7 37	4 23
342	8	Merc.	23 51 57,87	16 58 19,26	17 6 22,71	7 37	4 23
343	9	Giov.	23 52 24,57	17 2 42,59	17 10 19,27	7 38	4 22
344	10	Ven.	23 52 51,71	17 7 6,37	17 14 15,83	7 38	4 22
345	11	Sab.	23 53 19,26	17 11 30,56	17 18 12,39	7 39	4 21
346	12	Dom.	23 53 47,19	17 15 55,12	17 22 8,94	7 39	4 21
347	13	Lun.	23 54 15,47	17 20 20,03	17 26 5,50	7 40	4 20
348	14	Mart.	23 54 44,05	17 24 45,24	17 30 2,06	7 40	4 20
349	15	Merc.	23 55 12,91	17 29 10,74	17 33 58,61	7 40	4 20
350	16	Giov.	23 55 42,01	17 33 36,47	17 37 55,17	7 41	4 19
351	17	Ven.	23 56 11,31	17 38 2,41	17 41 41,73	7 41	4 19
352	18	Sab.	23 56 40,79	17 42 28,53	17 45 48,28	7 41	4 19
353	19	Dom.	23 57 10,42	17 46 54,80	17 49 44,84	7 42	4 18
354	20	Lun.	23 57 40,17	17 51 21,19	17 53 41,40	7 42	4 18
355	21	Mart.	23 58 10,01	17 55 47,67	17 57 37,96	7 42	4 18
356	22	Merc.	23 58 39,91	18 0 14,21	18 1 34,51	7 42	4 18
357	23	Giov.	23 59 9,83	18 4 40,77	18 5 31,07	7 42	4 18
358	24	Ven.	23 59 39,75	18 9 7,33	18 9 27,63	7 42	4 18
359	25	Sab.	0 0 9,64	18 13 33,85	18 13 24,18	7 41	4 19
360	26	Dom.	0 0 39,47	18 18 0,31	18 17 20,74	7 41	4 19
361	27	Lun.	0 1 9,20	18 22 26,68	18 21 17,30	7 41	4 19
362	28	Mart.	0 1 38,80	18 26 52,92	18 25 13,85	7 40	4 20
363	29	Merc.	0 2 8,24	18 31 19,00	18 29 10,41	7 40	4 20
364	30	Giov.	0 2 37,49	18 35 44,89	18 33 6,97	7 39	4 21
365	31	Ven.	0 3 6,52	18 40 10,56	18 37 3,53	7 39	4 21

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	8 8 41 47,2	21 46 1,5	− 0,39	0,08B	9,9937303
2	8 9 42 40,1	21 55 18,0	0,37	0,21	9,9936670
3	8 10 43 34,4	22 4 9,2	0,36	0,34	9,9936054
4	8 11 44 29,9	22 12 34,9	0,34	0,46	9,9935454
5	8 12 45 26,8	22 20 34,8	0,32	0,57	9,9934868
6	8 13 46 24,6	22 28 8,6	0,30	0,66	9,9934296
7	8 14 47 23,4	22 35 16,0	0,28	0,72	9,9933738
8	8 15 48 23,3	22 41 56,8	0,26	0,75	9,9933194
9	8 16 49 24,1	22 48 10,8	0,25	0,76	9,9932665
10	8 17 50 25,5	22 53 57,9	0,23	0,74	9,9932152
11	8 18 51 27,6	22 59 17,8	0,21	0,69	9,9931655
12	8 19 52 30,3	23 4 10,4	0,19	0,60	9,9931175
13	8 20 53 33,4	23 8 35,4	0,17	0,48	9,9930713
14	8 21 54 37,1	23 12 32,7	0,16	0,36	9,9930270
15	8 22 55 41,1	23 16 2,3	0,14	0,23	9,9929848
16	8 23 56 45,5	23 19 4,0	0,12	0,10	9,9929447
17	8 24 57 50,3	23 21 37,6	0,10	0,03A	9,9929069
18	8 25 58 55,4	23 23 43,1	0,08	0,14	9,9928716
19	8 27 0 0,6	23 25 20,5	0,06	0,24	9,9928300
20	8 28 1 6,4	23 26 29,7	0,04	0,32	9,9928091
21	8 29 2 12,5	23 27 10,7	− 0,02	0,37	9,9927820
22	9 0 3 18,9	23 27 23,4	0,00	0,39	9,9927578
23	9 1 4 25,7	23 27 7,7	+ 0,02	0,38	9,9927364
24	9 2 5 32,8	23 26 23,7	0,04	0,34	9,9927178
25	9 3 6 40,5	23 25 11,4	0,06	0,28	9,9927020
26	9 4 7 48,6	23 23 30,9	0,08	0,19	9,9926889
27	9 5 8 57,3	23 21 22,2	0,10	0,08	9,9926784
28	9 6 10 6,3	23 18 45,3	0,12	0,04B	9,9926704
29	9 7 11 15,8	23 15 40,3	0,14	0,17	9,9926649
30	9 8 12 25,8	23 12 7,2	0,16	0,30	9,9926617
31	9 9 13 36,1	23 8 6,2	+ 0,18	0,43B	9,9926607

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	5 28 13 8	6 4 6 32	0 52 7A	0 20 44A	19 46
2	Giov.	6 9 59 34	6 15 52 54	0 10 48B	0 42 14B	20 30
3	Ven.	6 21 47 5	6 27 42 40	1 13 14	1 43 31	21 13
4	Sab.	7 3 40 8	7 9 39 53	2 12 48	2 40 46	21 58
5	Dom.	7 15 42 19	7 21 47 41	3 7 4	3 31 25	22 46
6	Lun.	7 27 56 13	8 4 8 5	3 53 29	4 12 57	23 35
7	Mart.	8 10 23 22	8 16 42 4	4 29 33	4 42 58	* *
8	Merc.	8 23 4 11	8 29 29 38	4 52 59	4 59 22	0 25
9	Giov.	9 5 58 18	9 12 30 6	5 1 57	5 0 37	1 17
10	Ven.	9 19 4 52	9 25 42 27	4 55 17	4 45 56	2 10
11	Sab.	10 2 22 43	10 9 5 35	4 32 38	4 15 28	3 3
12	Dom.	10 15 50 57	10 22 38 46	3 54 37	3 30 18	3 55
13	Lun.	10 29 28 59	11 6 21 37	3 2 49	2 32 30	4 46
14	Mart.	11 13 16 41	11 20 14 11	1 59 45	1 25 2	5 37
15	Merc.	11 27 14 9	0 4 16 33	0 48 49	0 11 39	6 28
16	Giov.	0 11 21 20	0 18 28 24	0 25 54A	1 3 13A	7 20
17	Ven.	0 25 17 32	1 2 48 27	1 39 41	2 14 42	8 14
18	Sab.	1 10 0 45	1 17 13 57	2 47 38	3 17 54	9 9
19	Dom.	1 24 27 27	2 1 40 33	3 44 59	4 8 23	10 6
20	Lun.	2 8 52 30	2 16 2 31	4 27 45	4 42 47	11 4
21	Mart.	2 23 9 50	3 0 13 40	4 53 16	4 59 9	12 2
22	Merc.	3 7 13 21	3 14 8 16	5 0 28	4 57 19	12 58
23	Giov.	3 20 57 55	3 27 41 58	4 49 54	4 38 31	13 52
24	Ven.	4 4 2 12	4 10 52 33	4 23 29	4 5 9	14 43
25	Sab.	4 17 19 5	4 23 39 59	3 43 55	3 20 10	15 31
26	Dom.	4 29 55 36	5 6 6 19	2 54 16	2 26 37	16 16
27	Lun.	5 12 12 39	5 18 15 11	1 57 35	1 27 29	17 0
28	Mart.	5 24 14 31	6 0 11 20	0 56 40	0 25 25	17 43
29	Merc.	6 6 6 20	6 12 0 13	0 5 58B	0 37 10B	18 25
30	Giov.	6 17 53 44	6 23 47 34	1 7 57	1 38 0	19 8
31	Ven.	6 29 42 25	7 5 38 57	2 7 4	2 34 52	19 52

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	12 29	3 9A	54 12	54 7	29 35	29 33	13 47	1 21
2	13 16	6 51	54 6	54 6	29 32	29 32	14 46	1 37
3	14 3	10 18	54 9	54 14	29 34	29 36	15 45	2 6
4	14 52	13 20	54 20	54 28	29 40	29 44	16 43	2 35
5	15 44	15 49	54 38	54 49	29 49	29 55	17 44	3 8
6	16 37	17 33	55 2	55 15	30 2	30 10	18 42	3 44
7	* *	* *	55 29	55 43	30 17	30 25	19 37	4 25
8	17 32	18 24	55 57	56 12	30 33	30 41	20 29	5 12
9	18 28	18 16	56 27	56 41	30 49	30 57	21 17	6 6
10	19 25	17 5	56 56	57 10	31 5	31 12	22 1	7 6
11	20 21	14 54	57 24	57 37	31 20	31 27	22 39	8 10
12	21 17	11 50	57 51	58 4	31 35	31 42	23 14	9 17
13	22 13	8 2	58 17	58 30	31 49	31 56	23 47	10 25
14	23 8	3 44	58 42	58 54	32 3	32 9	* *	11 35
15	0 3	0 51B	59 5	59 15	32 15	32 21	0 17	12 45
16	0 59	5 26	59 24	59 31	32 26	32 30	0 52	13 56
17	1 57	9 44	59 37	59 41	32 33	32 35	1 29	15 9
18	2 56	13 27	59 43	59 42	32 36	32 35	2 8	16 20
19	3 57	16 17	59 38	59 32	32 34	32 30	2 50	17 29
20	4 59	18 0	59 23	59 12	32 25	32 19	3 36	18 34
21	6 1	18 28	58 58	58 41	32 12	32 2	4 50	19 32
22	7 1	17 44	58 23	58 2	32 52	31 41	5 29	20 23
23	8 0	15 55	57 41	57 18	31 29	31 17	6 30	21 8
24	8 55	13 16	56 56	56 33	31 5	30 52	7 33	21 44
25	9 47	10 0	56 11	55 50	30 40	30 29	8 34	22 18
26	10 36	6 22	55 30	55 12	30 18	30 8	9 35	22 47
27	11 24	2 32	54 56	54 43	29 59	29 52	10 36	23 16
28	12 11	1 21A	54 32	54 23	29 46	29 41	11 34	23 44
29	12 57	5 9	54 17	54 13	29 38	29 36	12 32	* *
30	13 44	8 44	54 12	54 13	29 35	29 36	13 31	0 10
31	14 32	11 58	54 17	54 23	29 38	29 41	14 29	0 37

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$12^h\ 48'$	*Occidente*
1	.3 .2	○	.4 .1
2	1.	○	.3 .2 .4
3		○	1.2. .3 .4
4	2. .1	○	3. .4
5	.2	○	1. 3. 4.
6	3.	○	.1 .2 4.
7	3. 1.	○	2. .4
8	.3,2.	○	.1 4.
9	•4 1. .3	○	.2
10	4.	○	1.2. .3
11	4. 2. .1	○	3.
12	4. .2	○	1. 3.
13	.4 3. .1	○	.2
14	.4 3.	○	2. 1•
15	.4 .3,2.	○	.1
16	.4 1. .3	○	.2
17	.4	○	.1,2δ3
18	2δ1	○	.4 .3
19	.2	○	1. 3. .4
20	3δ1	○	.2 .4
21	3.	○	1. 2. .4
22	.3, 2.	○	.1 .4
23	.31. .2	○	4.
24		○	3δ1 .2 4.
25	1. 2.	○	4. .3
26	.2 4.	○	1. 3.
27	4. .1	○	3. .2
28	4. 3.	○	1. 2.
29	4. 3. 2.	○	1○
30	4. .3, 1δ2	○	
31	.4	○	3δ1 .2

**Semidiametro del Sole,
tempo sidereo impiegato dal Sole a passare pel meridiano,
e longitudine del nodo della Luna
a mezzodì medio.**

	Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.		Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.
		′ ″	′ ″	s ° ′			′ ″	′ ″	s ° ′
Gennajo	1	16 17,8	2 22,1	6 24 12	Luglio	6	15 45,6	2 17,2	6 14 21
	7	16 17,7	2 21,4	6 23 53		12	15 45,7	2 16,6	6 14 2
	13	16 17,5	2 20,5	6 23 34		18	15 46,0	2 15,8	6 13 43
	19	16 17,0	2 19,5	6 23 15		24	15 46,5	2 14,8	6 13 24
	25	16 16,3	2 18,1	6 22 56		30	15 47,1	2 13,8	6 13 5
	31	16 15,5	2 16,7	6 22 37	Agosto	5	15 47,8	2 12,6	6 12 45
Febbrajo	6	16 14,8	2 15,4	6 22 18		11	15 48,8	2 11,6	6 12 26
	12	16 13,6	2 14,0	6 21 59		17	15 49,9	2 10,7	6 12 7
	18	16 12,3	2 12,7	6 21 40		23	15 51,1	2 9,8	6 11 48
	24	16 11,0	2 11,5	6 21 21		29	15 52,4	2 9,1	6 11 29
Marzo	2	16 9,3	2 10,7	6 21 2	Settembre	4	15 53,7	2 8,6	6 11 10
	8	16 8,0	2 9,9	6 20 42		10	15 55,3	2 8,3	6 10 51
	14	16 6,5	2 9,3	6 20 23		16	15 56,8	2 8,1	6 10 32
	20	16 4,8	2 9,0	6 20 4		22	15 58,4	2 8,2	6 10 13
	26	16 3,1	2 8,8	6 19 45		28	16 0,1	2 8,5	6 9 54
Aprile	1	16 1,7	2 8,9	6 19 26	Ottobre	4	16 1,7	2 8,9	6 9 35
	7	15 59,7	2 9,2	6 19 7		10	16 3,3	2 9,7	6 9 16
	13	15 58,2	2 9,7	6 18 48		16	16 5,0	2 10,6	6 8 57
	19	15 56,6	2 10,3	6 18 29		22	16 6,6	2 11,7	6 8 38
	25	15 55,1	2 11,1	6 18 10		28	16 8,1	2 12,9	6 8 19
Maggio	1	15 53,7	2 12,0	6 17 51	Novembre	3	16 9,8	2 14,3	6 8 0
	7	15 52,3	2 12,9	6 17 32		9	16 11,2	2 15,7	6 7 41
	13	15 50,9	2 13,9	6 17 13		15	16 12,4	2 17,0	6 7 21
	19	15 49,8	2 14,8	6 16 54		21	16 13,7	2 18,3	6 7 2
	25	15 48,7	2 15,7	6 16 35		27	16 14,8	2 19,6	6 6 45
	31	15 47,9	2 16,5	6 16 16	Dicembre	3	16 15,7	2 20,8	6 6 24
Giugno	6	15 47,0	2 17,2	6 15 56		9	16 16,4	2 21,6	6 6 5
	12	15 46,5	2 17,6	6 15 37		15	16 17,1	2 22,2	6 5 46
	18	15 46,0	2 17,8	6 15 18		21	16 17,4	2 22,5	6 5 27
	24	15 45,7	2 17,8	6 14 59		27	16 17,6	2 22,4	6 5 8
	30	15 45,5	2 17,5	6 14 40					

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	8 17 53	1 48B	17 8	21 7A	17 55	22 26	2 57
	7	8 24 52	0 56	17 38	22 26	18 7	22 32	2 57
	13	9 2 51	0 13B	18 12	23 20	18 23	22 43	3 3
	19	9 11 25	0 40A	18 50	23 37	18 39	22 57	3 15
	25	9 20 26	1 16	19 29	23 10	18 52	23 12	3 32
	31	9 29 51	1 45	20 9	21 54	19 2	23 29	3 56
Febbrajo	6	10 9 42	2 1	20 51	19 47	19 9	23 47	4 25
	12	10 20 1	2 4	21 32	16 49	19 13	0 5	4 57
	18	11 0 51	1 51	22 14	12 56	19 13	0 22	5 31
	24	11 12 6	1 18	22 56	7 46	19 10	0 41	6 12
Marzo	2	11 23 47	0 24A	23 36	3 1	19 7	0 58	6 49
	8	0 3 44	0 49B	0 12	0 52B	19 3	1 10	7 17
	14	0 11 10	2 7	0 39	6 31	18 43	1 13	7 43
	20	0 15 7	3 7	0 51	8 52	18 22	1 2	7 42
	26	0 14 8	3 24	0 47	8 44	17 55	0 34	7 13
Aprile	1	0 9 57	2 40	0 32	6 25	17 27	23 56	6 28
	7	0 5 34	1 14B	0 18	3 20	17 1	23 18	5 35
	13	0 3 31	0 22A	0 13	1 3	16 42	22 49	4 56
	19	0 4 30	1 39	0 19	0 15	16 27	22 31	4 35
	25	0 7 56	2 31	0 34	0 54	16 15	22 22	4 29
Maggio	1	0 14 14	2 56	0 55	2 45	16 6	22 20	4 34
	7	0 20 14	2 58	1 23	5 31	15 58	22 24	4 50
	13	1 0 0	2 38	1 55	8 59	15 53	22 33	5 13
	19	1 10 4	1 59	2 33	12 55	15 49	22 47	5 45
	25	1 21 23	1 5	3 17	17 3	15 51	23 7	6 23
	31	2 3 61	0 2A	4 7	20 53	15 59	23 34	7 9
Giugno	6	2 16 58	0 58B	5 3	23 45	16 16	0 6	7 56
	12	2 29 52	1 41	5 59	25 7	16 42	0 39	8 36
	18	3 11 49	1 58	6 12	24 53	17 11	1 8	9 5
	24	3 22 29	1 49	7 38	23 23	17 42	1 30	9 18
	30	4 1 46	1 18B	8 17	21 3	18 11	1 46	9 21

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	4 9 36	0 26B	8 49	18 17B	18 31	1 53	9 15
	12	4 15 50	0 41A	9 12	15 27	18 44	1 53	9 2
	18	4 20 6	1 55	9 27	12 55	18 47	1 45	8 43
	24	4 21 54	3 19	9 33	11 4	18 38	1 27	8 16
	30	4 20 48	4 26	9 27	10 21	18 13	0 57	7 43
Agosto	5	4 17 3	4 52	9 13	11 4	17 29	0 18	7 7
	11	4 12 33	4 17	8 55	12 55	16 40	23 38	6 36
	17	4 10 10	2 51	8 47	14 59	15 59	23 6	6 13
	23	4 11 53	1 6A	8 56	16 12	15 39	22 51	6 3
	29	4 18 0	0 25B	9 22	15 52	15 43	22 54	6 5
Settem.	4	4 27 26	1 24	10 0	13 43	16 6	23 7	6 8
	10	5 8 29	1 47	10 43	10 4	16 42	23 26	6 10
	16	5 19 49	1 42	11 25	5 37	17 18	23 44	6 10
	22	6 0 48	1 18	12 2	0 54	17 54	0 1	6 8
	28	6 11 14	0 44	12 42	3 45A	18 24	0 16	6 8
Ottobre	4	6 21 9	0 3B	13 18	8 11	18 59	0 28	5 57
	10	7 0 36	0 39A	13 53	12 16	19 25	0 39	5 51
	16	7 9 36	1 19	14 27	15 56	19 53	0 49	5 45
	22	7 18 10	1 57	15 0	19 6	20 18	0 59	5 40
	28	7 26 11	2 26	15 33	21 40	20 40	1 8	5 36
Novem.	3	8 3 23	2 44	16 3	23 21	20 56	1 15	5 34
	9	8 9 3	2 42	16 28	24 29	21 1	1 15	5 29
	15	8 11 42	2 5	16 40	24 18	20 50	1 4	5 18
	21	8 9 12	0 40A	16 30	22 32	20 7	0 31	4 55
	27	8 1 56	1 17B	16 0	19 18	18 57	23 37	4 17
Dicem.	3	7 26 20	2 33	15 38	16 51	18 0	22 52	3 44
	9	7 26 49	2 39	15 40	16 51	17 43	22 35	3 27
	15	8 1 47	2 7	16 0	18 26	17 41	22 26	3 11
	21	8 8 58	1 22	16 30	20 26	17 57	22 32	3 7
	27	8 17 10	0 34B	17 4	22 15	18 18	22 43	3 8

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	9 14 28	0 49A	19 3	23 29A	20 2	0 21	4 40
	7	9 22 1	1 1	19 36	22 39	20 7	0 30	4 53
	13	9 29 13	1 10	20 8	21 24	20 9	0 39	5 9
	19	10 7 6	1 18	20 39	19 47	20 8	0 46	5 24
	25	10 14 38	1 24	21 10	19 48	20 6	0 53	5 40
	31	10 22 9	1 27	21 40	15 32	20 2	1 0	5 58
Febbr.	6	10 29 39	1 29	22 9	13 0	19 56	1 5	6 14
	12	11 7 9	1 28	22 38	10 16	19 50	1 10	6 30
	18	11 14 39	1 25	23 5	7 22	19 41	1 14	6 47
	24	11 22 7	1 19	23 33	4 21	19 33	1 18	7 3
Marzo	2	11 29 35	1 11	0 0	1 16	19 24	1 22	7 20
	8	0 7 1	1 1	0 27	1 50B	19 15	1 25	7 35
	14	0 14 36	0 49	0 54	4 56	19 4	1 28	7 52
	20	0 21 50	0 35	1 21	7 57	18 56	1 32	8 8
	26	0 29 13	0 20	1 49	10 53	18 52	1 36	8 20
Aprile	1	1 6 34	0 4A	2 17	13 39	18 39	1 40	8 41
	7	1 13 53	0 13B	2 45	16 13	18 32	1 45	8 58
	13	1 21 11	0 31	3 14	18 33	18 27	1 50	9 13
	19	1 28 26	0 48	3 44	20 35	18 22	1 56	9 30
	25	2 5 50	1 5	4 14	22 19	18 21	2 3	9 45
Maggio	1	2 12 52	1 20	4 50	23 40	18 20	2 10	10 0
	7	2 20 2	1 34	5 16	24 38	18 22	2 17	10 12
	13	2 27 8	1 47	5 47	25 12	18 26	2 25	10 24
	19	3 4 11	1 57	6 18	25 20	18 33	2 32	10 31
	25	3 11 12	2 5	6 49	25 3	18 43	2 40	10 37
	31	3 18 10	2 9	7 20	24 22	18 54	2 47	10 40
Giugno	6	3 25 3	2 11	7 50	23 17	19 5	2 53	10 41
	12	4 1 54	2 8	8 19	21 51	19 18	2 58	10 38
	18	4 8 38	2 2	8 46	20 5	19 32	3 2	10 32
	24	4 15 18	1 52	9 13	18 3	19 44	3 5	10 26
	30	4 21 50	1 38B	9 39	15 47	19 57	3 7	10 17

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	4 28 15	1 18B	10 3	13 19B	20 9	3 8	10 7
	12	5 4 32	0 55	10 27	10 43	20 21	3 8	9 55
	18	5 10 38	0 27B	10 49	8 0	20 30	3 6	9 42
	24	5 16 33	0 7A	11 10	5 13	20 39	3 4	9 29
	30	5 22 12	0 44	11 30	2 26	20 47	3 0	9 13
Agosto	5	5 27 32	1 27	11 49	0 27A	20 54	2 55	8 50
	11	6 2 31	2 13	12 6	3 2	20 58	2 49	8 40
	17	6 7 1	3 4	12 21	5 37	21 0	2 40	8 20
	23	6 10 56	3 58	12 34	8 0	21 0	2 30	8 0
	29	6 14 7	4 56	12 44	10 8	20 55	2 16	7 37
Settem.	4	6 16 22	6 4	12 57	12 55	20 50	1 59	7 8
	10	6 17 30	6 50	12 54	13 13	20 32	1 39	6 46
	16	6 17 18	7 39	12 52	13 54	20 8	1 13	6 18
	22	6 15 42	8 11	12 45	13 47	19 36	0 42	5 48
	28	6 12 54	8 20	12 34	12 48	18 58	0 8	5 18
Ottobre	4	6 9 22	7 59	12 22	11 3	18 14	23 32	4 50
	10	6 5 57	7 6	12 10	8 51	17 29	22 56	4 23
	16	6 3 21	5 51	12 3	6 39	16 49	22 25	4 1
	22	6 2 12	4 27	12 0	4 51	16 16	21 59	3 42
	28	6 2 12	3 4	12 3	3 38	15 50	21 38	3 26
Novem.	3	6 3 41	1 48	12 10	3 4	15 31	21 22	3 13
	9	6 6 19	0 43A	12 22	3 5	15 19	21 10	3 1
	15	6 9 52	0 17B	12 36	3 37	15 13	21 1	2 49
	21	6 14 10	1 3	12 54	4 35	15 10	20 54	2 38
	27	6 19 3	1 41	13 13	6 22	15 13	20 50	2 27
Dicem.	3	6 24 24	2 11	13 33	7 25	15 13	20 47	2 20
	9	7 0 8	2 33	13 56	9 7	15 18	20 45	2 12
	15	7 6 9	2 47	14 19	10 56	15 27	20 45	2 3
	21	7 12 24	2 55	14 43	12 46	15 36	20 46	1 56
	27	7 18 52	2 58B	15 9	14 34	15 46	20 48	1 50

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo 1	8 2 8	0 12B	16 1	20 27A	16 43	21 17	1 51
7	8 6 17	0 8	16 19	21 17	16 42	21 12	1 42
13	8 10 25	0 4	16 36	22 0	16 38	21 5	1 32
19	8 14 35	0 0	16 54	22 36	16 37	21 0	1 25
25	8 18 46	0 5A	17 12	23 5	16 33	20 54	1 15
31	8 22 57	0 9	17 31	23 26	16 29	20 49	1 9
Febbrajo 6	8 27 9	0 14	17 48	23 40	16 25	20 43	1 1
12	9 1 23	0 19	18 7	23 46	16 21	20 38	0 55
18	9 5 37	0 24	18 26	23 43	16 15	20 33	0 51
24	9 9 52	0 29	18 46	23 33	16 9	20 28	0 47
Marzo 2	9 14 9	0 35	19 3	23 15	16 3	20 23	0 43
8	9 18 26	0 41	19 22	22 54	16 0	20 18	0 36
14	9 22 43	0 47	19 40	22 20	15 48	20 12	0 36
20	9 27 1	0 53	19 58	21 34	15 39	20 7	0 35
26	10 1 19	0 59	20 17	20 44	15 29	20 2	0 35
Aprile 1	10 5 38	1 5	20 35	19 53	15 18	19 56	0 34
7	10 9 57	1 12	20 52	18 50	15 7	19 50	0 33
13	10 14 27	1 18	21 10	17 42	14 56	19 44	0 32
19	10 18 36	1 25	21 27	16 30	14 45	19 38	0 31
25	10 23 55	1 31	21 44	15 13	14 32	19 31	0 30
Maggio 1	10 27 14	1 38	22 1	13 49	14 18	19 24	0 30
7	11 1 33	1 45	22 18	12 27	14 6	19 18	0 30
13	11 5 51	1 52	22 34	10 59	13 52	19 10	0 28
19	11 10 6	1 58	22 50	9 29	13 39	19 3	0 27
25	11 14 21	2 5	23 6	7 58	13 25	18 55	0 25
31	11 18 34	2 12	23 22	6 25	13 10	18 47	0 24
Giugno 6	11 22 45	2 18	23 38	4 52	12 56	18 39	0 22
12	11 26 53	2 24	23 52	3 19	12 41	18 30	0 19
18	0 0 57	2 30	0 9	1 47	12 26	18 22	0 18
24	0 4 59	2 36	0 23	0 17	12 12	18 14	0 16
30	0 8 55	2 41	0 38	1 11B	11 57	18 5	0 13

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	0 12 41	2 46A	0 52	2 37B	11 41	17 55	0 9
	12	0 16 27	2 50	1 6	3 59	11 27	17 46	0 5
	18	0 20 10	2 54	1 19	5 18	11 10	17 35	0 0
	24	0 23 42	2 58	1 33	6 32	10 59	17 25	23 51
	30	0 27 2	3 1	1 45	7 41	10 39	17 14	23 49
Agosto	5	1 0 13	3 3	1 58	8 46	10 23	17 2	23 41
	11	1 3 12	3 5	2 9	9 45	10 8	16 51	23 34
	17	1 5 58	3 6	2 19	10 39	9 50	16 37	23 24
	23	1 8 25	3 7	2 29	11 26	9 31	16 22	23 13
	29	1 10 36	3 6	2 37	12 13	9 14	16 8	23 2
Settem.	4	1 12 26	3 4	2 44	12 42	8 54	15 50	22 46
	10	1 13 52	3 0	2 50	13 11	8 33	15 32	22 31
	16	1 14 52	2 56	2 53	13 32	8 11	15 12	22 13
	22	1 15 22	2 49	2 55	13 47	7 49	14 50	21 51
	28	1 15 21	2 40	2 54	13 55	7 24	14 26	21 28
Ottobre	4	1 14 50	2 25	2 52	13 56	6 58	14 0	21 2
	10	1 13 46	2 14	2 47	13 50	6 30	13 32	20 34
	16	1 12 15	1 57	2 41	13 39	6 1	13 2	20 3
	22	1 10 24	1 38	2 33	13 23	5 31	12 30	19 29
	28	1 8 21	1 17	2 25	13 3	5 0	11 58	18 56
Novem.	3	1 6 19	0 56	2 17	12 44	4 30	11 26	18 22
	9	1 4 25	0 35	2 8	12 26	4 0	10 55	17 50
	15	1 2 50	0 14A	2 2	12 14	3 30	10 25	17 20
	21	1 1 41	0 5B	1 57	12 8	3 3	9 56	16 49
	27	1 0 59	0 22	1 55	12 10	2 35	9 29	16 23
Dicem.	3	1 0 48	0 36	1 54	12 20	2 10	9 5	16 0
	9	1 0 52	0 49	1 54	12 38	1 36	8 42	15 38
	15	1 1 47	1 0	1 57	13 4	1 31	8 29	15 27
	21	1 2 54	1 8	2 1	13 35	1 1	8 2	15 3
	27	1 4 22	1 15	2 7	14 13	0 40	7 43	14 46

Posizioni di Cerere di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Giugno	1	3 3 20	2 45B	6 12	26 11B	17 29	1 33	9 37
	7	3 5 10	2 53	6 23	26 15	17 16	1 20	9 24
	13	3 7 51	3 2	6 35	26 17	17 3	1 8	9 13
	19	3 10 32	3 13	6 47	26 16	16 51	0 56	9 1
	25	3 13 0	3 23	6 58	26 11	16 40	0 44	8 48
Luglio	1	3 15 42	3 32	7 10	26 3	16 30	0 33	8 30
	7	3 18 24	3 43	7 22	25 53	16 19	0 21	8 23
	13	3 21 7	3 52	7 34	25 38	16 8	0 9	8 10
	19	3 23 37	4 2	7 45	25 22	15 58	23 57	7 56
	25	3 26 21	4 13	7 57	25 2	15 48	23 45	7 42
	31	3 29 6	4 24	8 9	24 40	15 38	23 33	7 28
Agosto	6	4 1 39	4 35	8 20	24 15	15 28	23 21	7 14
	12	4 4 25	4 46	8 32	23 48	15 19	23 9	6 59
	18	4 7 0	4 55	8 43	23 18	15 8	22 56	6 44
	24	4 9 35	5 6	8 54	22 47	15 0	22 44	6 28
	30	4 12 25	5 20	9 6	22 13	14 50	22 32	6 14

Posizioni di Pallade di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Giugno	1	2 6 14	23 8A	4 33	1 29A	17 53	23 54	5 55
	7	2 9 46	23 27	4 46	1 15	17 41	23 43	5 45
	13	2 13 19	23 45	4 59	1 3	17 33	23 32	5 31
	19	2 16 52	24 2	5 12	0 56	17 22	23 21	5 20
	25	2 20 8	24 19	5 24	0 53	17 11	23 10	5 9
Luglio	1	2 23 42	24 26	5 37	0 54	17 0	22 59	4 58
	7	2 27 15	24 27	5 50	0 59	16 50	22 49	4 48
	13	3 0 50	24 37	6 3	1 9	16 39	22 38	4 37
	19	3 4 24	24 47	6 16	1 21	16 30	22 28	4 26
	25	3 8 0	24 55	6 29	1 38	16 21	22 17	4 13
	31	3 11 36	25 3	6 42	2 0	16 11	22 6	4 1
Agosto	6	3 15 13	25 14	6 55	2 26	16 1	21 55	3 49
	12	3 18 50	25 20	7 8	2 55	15 54	21 45	3 36
	18	3 22 29	25 23	7 21	3 27	15 45	21 34	3 23
	24	3 25 51	25 29	7 33	4 3	15 36	21 23	3 10
	30	3 29 31	25 29	7 46	4 42	15 27	21 11	2 55

Posizioni di Giunone di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
Maggio	1	9s 23° 55'	14° 46' B	19h 33'	6° 46' A	11h 20'	16h 56'	22h 32'
	7	9 24 15	15 12	19 34	6 18	10 56	16 33	22 10
	13	9 24 34	15 37	19 35	5 52	10 31	16 10	21 49
	19	9 24 39	16 0	19 35	5 28	10 6	15 47	21 28
	25	9 24 27	16 21	19 34	5 7	9 39	15 22	21 5
	31	9 24 0	16 44	19 32	4 49	9 13	14 57	20 41
Giugno	6	9 23 31	17 7	19 30	4 34	8 46	14 30	20 14
	12	9 22 46	17 22	19 27	4 24	8 19	14 4	19 49
	18	9 21 47	17 37	19 23	4 19	7 52	13 37	19 22
	24	9 20 28	17 50	19 18	4 19	7 24	13 9	18 54
	30	9 19 25	17 51	19 14	4 25	6 55	12 40	18 25
Luglio	6	9 18 5	17 47	19 9	4 36	6 28	12 12	17 56
	12	9 16 30	17 43	19 3	4 53	5 59	11 42	17 25
	18	9 15 9	17 29	18 58	5 15	5 32	11 13	16 54
	24	9 13 49	17 10	18 53	5 41	5 4	10 44	16 24
	30	9 12 28	16 47	18 48	6 11	4 38	10 16	15 54
Agosto	5	9 11 23	16 23	18 44	6 44	4 13	9 49	15 25
	11	9 10 34	15 46	18 41	7 20	3 49	9 22	14 55
	17	9 9 54	15 10	18 38	7 57	3 25	8 55	14 25
	23	9 9 27	14 34	18 37	8 35	3 2	8 30	13 58
	29	9 9 9	13 58	18 36	9 12	2 41	8 6	13 31
Settem.	4	9 9 7	13 21	18 36	9 50	2 19	7 42	13 5
	10	9 9 20	12 44	18 37	10 26	2 0	7 20	12 40
	16	9 9 47	12 9	18 39	11 0	1 40	6 58	12 16
	22	9 10 30	11 33	18 42	11 33	1 22	6 37	11 52
	28	9 11 12	10 58	18 45	12 3	1 4	6 17	11 30
Ottobre	4	9 12 24	10 24	18 50	12 31	0 46	5 57	11 8
	10	9 13 36	9 53	18 55	12 56	0 30	5 39	10 48
	16	9 15 2	9 22	19 1	13 18	0 14	5 21	10 28
	22	9 16 28	8 53	19 7	13 37	23 58	5 4	10 10
	28	9 18 9	8 27	19 14	13 52	23 42	4 47	9 52

Posizioni di Vesta di sei in sei giorni
a 12^h di tempo medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo 1	6 11 42	7 1B	12 54	1 50B	12 0	18 10	0 20
7	6 13 27	7 25	13 1	1 31	11 43	17 53	0 3
13	6 14 56	7 48	13 7	1 16	11 27	17 36	23 45
19	6 16 24	8 12	13 13	1 8	11 10	17 18	23 26
25	6 17 35	8 37	13 18	1 5	10 52	16 59	23 6
31	6 18 44	9 0	13 22	1 7	10 32	16 40	22 48
Febbr. 6	6 19 33	9 30	13 25	1 17	10 10	16 19	22 28
12	6 19 45	10 1	13 28	1 34	9 48	15 58	22 8
18	6 19 51	10 27	13 29	1 55	9 25	15 36	21 47
24	6 19 40	10 53	13 29	2 23	9 4	15 17	21 30
Marzo 2	6 19 38	11 18	13 29	2 57	8 33	14 48	21 3
8	6 18 46	11 49	13 27	3 36	8 5	14 23	20 41
14	6 17 45	12 11	13 24	4 18	7 35	13 56	20 17
20	6 16 31	12 28	13 20	5 1	6 56	13 20	19 44
26	6 15 18	12 44	13 16	5 44	6 34	13 0	19 26
Aprile 1	6 13 52	12 53	13 11	6 24	6 3	12 32	19 1
7	6 12 18	12 51	13 5	7 0	5 31	12 3	18 35
13	6 10 51	12 49	13 0	7 30	5 0	11 34	18 8
19	6 9 18	12 33	12 54	7 51	4 29	11 5	17 41
25	6 8 18	12 20	12 50	8 2	4 1	10 37	17 13
Maggio 1	6 7 8	11 53	12 45	8 5	3 33	10 9	16 45
7	6 6 28	11 30	12 42	7 59	3 6	9 42	16 18
13	6 6 6	11 3	12 40	7 43	2 41	9 16	15 51
19	6 6 16	10 35	12 40	7 19	2 18	8 51	15 24
25	6 6 16	10 7	12 39	6 48	1 57	8 28	14 59
31	6 6 44	9 38	12 40	6 10	1 57	8 5	14 33
Giugno 6	6 7 50	9 10	12 43	5 10	1 19	7 43	14 7
12	6 8 45	8 45	12 46	4 37	1 1	7 23	13 45
18	6 9 48	8 18	12 49	3 43	0 45	7 3	13 21
24	6 11 20	7 53	12 54	2 46	0 26	6 44	12 58
30	6 12 54	7 26	12 59	1 45	0 16	6 26	12 36

Posizioni di Giove di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	2 8 7	0 40A	4 26	21 0B	2 8	9 43	17 18
	13	2 7 20	0 37	4 22	20 54	1 16	8 51	16 26
	25	2 6 42	0 35	4 20	20 53	0 26	8 1	15 36
Febb.	6	2 6 41	0 31	4 20	20 55	23 39	7 14	14 49
	18	2 7 9	0 29	4 22	21 3	22 54	6 29	14 4
Marzo	2	2 7 56	0 26	4 26	21 14	22 9	5 46	13 23
	14	2 9 21	0 25	4 31	21 29	21 26	5 4	12 42
	26	2 11 5	0 22	4 39	21 46	20 46	4 23	12 2
Aprile	7	2 8 33	0 21	4 47	22 3	20 3	3 44	11 25
	19	2 10 4	0 18	4 56	22 20	19 24	3 6	10 52
Maggio	1	2 12 1	0 17	5 7	22 36	18 45	2 29	10 13
	13	2 14 5	0 15	5 18	22 50	18 8	1 57	9 38
	25	2 16 24	0 14	5 29	23 2	17 31	1 17	9 3
Giugno	6	2 18 40	0 13	5 41	23 10	16 55	0 42	8 29
	18	2 21 15	0 12	5 53	23 15	16 18	0 6	7 54
	30	2 23 52	0 10	6 5	23 17	15 43	23 31	7 19
Luglio	12	2 26 51	0 10	6 16	23 14	15 8	22 56	6 44
	24	2 29 35	0 8	6 28	23 9	14 33	22 20	6 7
Agosto	5	3 2 6	0 7	6 39	23 2	13 57	21 43	5 29
	17	3 4 46	0 6	6 49	22 52	13 21	21 7	4 53
	29	3 7 23	0 5	6 59	22 41	12 45	20 29	4 13
Settem.	10	3 9 49	0 4	7 8	22 29	12 7	19 50	3 33
	22	3 12 14	0 3	7 15	22 17	11 28	19 10	2 52
Ottobre	4	3 14 32	0 1A	7 21	22 7	10 48	18 29	2 10
	16	3 16 26	0 0	7 26	21 59	10 5	17 46	1 27
	28	3 18 0	0 2B	7 28	21 55	9 20	17 1	0 42
Novem.	9	3 19 10	0 3	7 29	21 56	8 34	16 15	23 56
	21	3 20 2	0 5	7 28	22 0	7 45	15 26	23 7
Dicem.	3	3 20 30	0 6	7 24	22 9	6 55	14 36	22 17
	15	3 20 26	0 8	7 19	22 20	6 1	13 43	21 25
	27	3 19 55	0 10	7 13	22 34	5 7	12 50	20 33

Posizioni di Saturno di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	10 27 28	1 29A	22 1	13 42A	22 11	3 17	8 23
	13	10 28 39	1 29	22 6	13 18	21 27	2 34	7 41
	25	11 0 0	1 28	22 11	12 50	20 43	1 52	7 1
Febb.	6	11 1 25	1 29	22 16	12 20	19 58	1 10	6 22
	18	11 2 51	1 29	22 22	11 50	19 19	0 29	5 39
Marzo	2	11 4 18	1 30	22 27	11 19	18 31	23 47	5 3
	14	11 5 44	1 30	22 33	10 48	17 46	23 5	4 24
	26	11 7 9	1 32	22 38	10 18	17 3	22 23	3 43
Aprile	7	11 8 26	1 34	22 43	9 51	16 18	21 40	3 2
	19	11 9 36	1 36	22 48	9 26	15 33	20 57	2 21
Maggio	1	11 10 38	1 38	22 51	9 4	14 48	20 14	1 40
	13	11 11 31	1 40	22 53	8 47	14 2	19 30	0 58
	25	11 12 11	1 43	22 57	8 34	13 18	18 46	0 14
Giugno	6	11 12 38	1 45	22 59	8 26	12 31	18 0	23 29
	18	11 12 53	1 49	23 0	8 24	11 44	17 13	22 42
	30	11 12 55	1 51	23 0	8 27	10 57	16 26	21 55
Luglio	12	11 12 50	1 54	22 59	8 35	10 10	15 38	21 6
	24	11 12 10	1 57	22 57	8 48	9 21	14 49	20 17
Agosto	5	11 11 28	1 59	22 55	9 5	8 33	13 59	19 25
	17	11 10 43	2 1	22 52	9 25	7 44	13 9	18 34
	29	11 9 50	2 2	22 48	9 47	6 55	12 18	17 41
Settem.	10	11 8 57	2 2	22 45	10 8	6 6	11 27	16 48
	22	11 8 10	2 2	22 44	10 28	5 17	10 37	15 57
Ottobre	4	11 7 20	2 2	22 39	10 44	4 28	9 47	15 6
	16	11 6 37	2 1	22 37	10 56	3 39	8 57	14 15
	28	11 6 20	2 0	22 35	11 3	2 50	8 8	13 26
Novem.	9	11 6 12	1 58	22 35	11 4	2 3	7 21	12 39
	21	11 6 19	1 56	22 35	11 0	1 16	6 34	11 52
Dicem.	3	11 6 41	1 54	22 37	10 50	0 30	5 48	11 6
	15	11 7 16	1 53	22 39	10 35	23 44	5 3	10 22
	27	11 8 3	1 51A	22 42	10 15	22 59	4 19	9 39

Posizioni di Urano di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	0 10 25	0 40A	0 39	3 30B	23 38	5 55	12 12
	13	0 10 36	0 40	0 40	3 35	22 51	5 9	11 27
	25	0 10 57	0 39	0 41	3 43	22 5	4 23	10 41
Febb.	6	0 11 22	0 39	0 43	3 53	21 18	3 37	9 56
	18	0 11 49	0 39	0 45	4 6	20 33	2 52	9 11
Marzo	2	9 12 24	0 38	0 47	4 20	19 46	2 7	8 28
	14	0 13 3	0 38	0 49	4 35	19 0	1 22	7 44
	26	0 13 39	0 38	0 52	4 50	18 15	0 37	6 59
Aprile	7	0 14 25	0 38	0 54	5 6	17 28	23 52	6 16
	19	0 15 4	0 38	0 57	5 22	16 42	23 7	5 32
Maggio	1	0 15 44	0 38	0 59	5 37	15 56	22 22	4 48
	13	0 16 20	0 38	1 1	5 51	15 9	21 37	4 5
	25	0 16 56	0 38	1 3	6 4	14 24	20 52	3 20
Giugno	6	0 17 18	0 38	1 5	6 14	13 37	20 6	2 35
	18	0 17 46	0 39	1 7	6 23	12 51	19 20	1 49
	30	0 18 3	0 39	1 8	6 29	12 5	18 34	1 3
Luglio	12	0 18 13	0 40	1 8	6 32	11 17	17 47	0 17
	24	0 18 15	0 40	1 8	6 33	10 30	17 0	23 30
Agosto	5	0 18 12	0 40	1 8	6 31	9 43	16 13	22 43
	17	0 18 3	0 40	1 8	6 27	8 56	15 25	21 54
	29	0 17 46	0 41	1 7	6 21	8 7	14 36	21 5
Settem.	10	0 17 16	0 41	1 5	6 12	7 19	13 48	20 17
	22	0 16 57	0 41	1 4	6 2	6 31	12 59	19 27
Ottobre	4	0 16 27	0 41	1 2	5 51	5 42	12 10	18 38
	16	0 16 3	0 41	1 0	5 40	4 55	11 21	17 47
	28	0 15 34	0 41	0 58	5 30	4 7	10 32	16 57
Novem.	9	0 15 0	0 40	0 57	5 20	3 18	9 43	16 8
	21	0 14 50	0 40	0 57	5 12	2 30	8 54	15 18
Dicem.	3	0 14 33	0 40	0 54	5 7	1 42	8 6	14 30
	15	0 14 25	0 40	0 54	5 4	0 54	7 18	13 42
	27	0 14 20	0 39	0 54	5 4	0 7	6 31	12 55

	Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Gennajo	1	Distanza minima del Sole.
	6	☾ apogea.
	13	♀ nell' afelio.
	13	☿ in ♈.
	17	♂ in ♈.
	18	☾ perigea.
	20	☉ entra in ♒ a 3^h 29′,4.
	23	☿ nell' afelio.
Febbrajo	2	☾ apogea.
	5	♀ nella massima lat. A.
	13	☿ nella massima lat. A.
	15	☾ perigea.
	16	☿ ☌ super. ☉.
	18	☉ entra in ♓ a 18^h 12′,7.
	22	♄ ☌ ☉.
	26	♃ in quadratura col ☉.
Marzo	2	☾ apogea.
	4	☿ in ♌.
	8	☿ nel perielio.
	13	☿ nella mass. elong. orient.
	16	☾ perigea.
	17	Occultazione di Venere.
	19	☿ nella massima lat. B.
	20	☉ entra in ♈ a 18^h 2′,9.
	29	☾ apogea.
	31	☿ ☌ inf. ☉.
	31	Eclisse parziale di Luna visibile a Milano.

	Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	2	♀ in ♌.
	3	[illegible] ☍ ☉.
	4	♅ ☌ ☉.
	11	☿ in ♈.
	13	☾ perigea.
	20	☉ entra in ♉ a 6^h 19′,1.
	21	☿ nell' afelio.
	25	☾ apogea.
	28	☿ nella mass. elongaz. occid.
Maggio	5	♀ nel perielio.
	11	☾ perigea.
	12	☿ nella massima lat. A.
	21	☉ entra in ♊ a 6^h 25′,3.
	23	☾ apogea.
	27	♀ nella massima lat. B.
	31	☿ in ♌.
Giugno	3	♄ in quadratura col ☉.
	4	☿ ☌ super. ☉.
	4	☿ nel perielio.
	7	☾ perigea.
	15	☿ nella massima lat. B.
	20	☾ apogea.
	20	♃ ☌ ☉.
	21	☉ entra in ♋ a 14^h 55′,0.
	29	♂ nella massima lat. A.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Luglio	2	☾ perigea.
	3	♂ in quadratura col ☉.
	3	Distanza massima del Sole.
	8	☿ in ☊.
	9	‡ ☍ ☉.
	10	♅ in quadratura col ☉.
	10	☿ nella mass. elong. orient.
	17	☾ apogea.
	18	☿ nell' afelio.
	18	♂ nel perielio.
	22	♀ in ☊.
	23	☉ entra in ♌ a 1^h $47',0$.
	25	♀ nella mass. elong. orient.
	29	☾ perigea.
Agosto	7	☿ ☌ inf. ☉.
	8	♀ nella massima lat. A.
	14	☾ apogea.
	15	♀ nel mass. splend. vespertino.
	23	☉ entra in ♍ a 8^h $16',9$.
	25	☿ nella massima elong. occid.
	26	♀ nell' afelio.
	27	☾ perigea.
	27	☿ in ☋.
	31	☿ nel perielio.
Settembre	2	♄ ☍ ☉.
	11	♀ nella massima latitud. B.
	11	☾ apogea.
	17	☿ nella massima latitud. A.
	19	☿ ☌ super. ☉.
	23	☉ entra in ♎ a 4^h $59',5$.
	24	☾ perigea.
Ottobre	4	☿ in ☊.
	8	☾ apogea.
	8	Eclisse di Sole visibile a Milano
	9	♅ ☍ ☉.
	13	♃ in quadratura col ☉.
	14	☿ nell' afelio.
	18	♃ in ☋.
	22	☾ perigea.
	23	☉ entra in ♏ a 13^h $15',9$.
	30	♂ ☍ ☉.
Novembre	4	☿ nella massima lat. A.
	4	☾ apogea.
	5	♀ nella mass. elong. orient.
	13	♀ in ☋.
	17	♂ in ☋.
	20	☾ perigea.
	22	☉ entra in ♐ a 9^h $54',8$.
	23	☿ in ☋.
	25	♀ nel mass. splend. mattutino.
	25	☿ ☌ inf. ☉.
	27	☿ nel perielio.
	28	♄ in quadratura col ☉.
Dicembre	2	☾ apogea.
	7	♀ nella massima lat. B.
	14	☿ nella massima elong. occid.
	14	♀ nella massima elong. occid.
	16	♀ nel perielio.
	18	☾ perigea.
	21	☉ entra in ♑ a 22^h $41',5$.
	29	☾ apogea.
	31	Distanza minima del Sole.
	31	☿ in ☊.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

DELL' ANNO 1847.

METODI D'APPROSSIMAZIONE

NELLA RICERCA

DELLE RADICI DELLE EQUAZIONI

DI

PAOLO FRISIANI.

1. Quantunque la questione che tratta della natura delle radici delle equazioni sia algebriche che trascendenti e del processo per calcolarne i valori reali sia completamente sciolta dietro i principj esposti nella Memoria sull'analisi delle equazioni pubblicata nel 1844 ed inserita nelle Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1845, siccome l'analisi possiede altri mezzi per giungere alla stessa soluzione, così onde formarci della questione che ci occupa, riguardata sotto più aspetti, una completa conoscenza, ho creduto opportuno, seguendo sempre le tracce dell'autore dell'analisi delle equazioni, di esporli in questa Memoria qual continuazione della già citata. Avendo però raccolto sotto un sol punto di vista, quello cioè della ricorrenza in genere, i diversi principj da cui dipendono i metodi d'approssimazione nella risoluzione delle equazioni, così ho creduto opportuno d' indicare altre questioni che dipendono dagli stessi principj, ritenendo di chiamare in generale relazioni ricorrenti quelle in cui una quantità che entra in esse

riguardata come funzion qualsivoglia di un indice dipende sia dalle relazioni antecedenti, sia dalle seguenti.
Ai metodi di risoluzione già accennati nella citata Memoria tien dietro pel primo quello delle frazioni continue applicato alla ricerca delle radici delle equazioni algebriche. Dall'esame di questo metodo si farà manifesto che senza l'impiego dell'equazione ausiliaria alle differenze di cui si è servito Lagrange o di qualsivoglia processo dipendente dalle proprietà delle funzioni simmetriche, il calcolo delle frazioni continue combinato col teorema degl'indici, da cui si desume quante radici sono indicate fra due limiti dati comprendenti un intervallo unitario, basta per distinguere la natura di tali radici se reali o deficienti e per calcolarne nel primo caso i valori approssimati. In questo processo, come in quelli già esposti sull'approssimazione lineare, si suppone che l'equazione algebrica proposta non contenga radici multiple, dovendo quì pure un tal caso trattarsi separatamente. Lo sviluppo e la dimostrazione di questo processo riposano sui principj esposti ne' seguenti paragrafi.

2. Se nell'espressione $y_0 - \frac{1}{\omega_0}$, ove $\frac{1}{\omega_0}$ rappresenta una quantità reale positiva o negativa, si pongono per le diverse y i valori che nascono dalla relazione ricorrente

$$y_r = \frac{1}{\omega_r} - \omega_{r+1} + \frac{1}{y_{r+1}} \qquad (1)$$

coll'attribuire ad r successivamente i valori $0, 1, 2, 3, 4 \ldots. r \ldots.$ si ottiene, posto $\frac{1}{\omega_0} = \alpha$, l'espressione

$$y_0 - \alpha = \pm \frac{\omega_1\, \omega_2\, \omega_3 \ldots . \omega_r}{y_1\, y_2\, y_3 \ldots . y_r}\left(y_r - \frac{1}{\omega_r}\right) \qquad (2)$$

ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che r sarà pari o dispari.

Se inoltre si stabilisce la relazione ricorrente

$$\frac{1}{\omega_r} - \omega_{r+1} = n_{r+1} \tag{3}$$

avendo la r i diversi valori come sopra, la (2) si trasforma nella

$$y_0 - \alpha = \pm \frac{\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\ldots\ldots\,\omega_r}{d_2\,d_3\,d_4\,\ldots\ldots\,d_r\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)}\left(y_r - \frac{1}{\omega_r}\right) \tag{4}$$

ove una qualunque ω_r comune alla (2) sarà data dalla frazione continua

$$\omega_r = -n_r + \cfrac{1}{-n_{r-1} + \cfrac{1}{-n_{r-2} + \ldots\ldots + \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + \alpha}}}} \tag{5}$$

ed una qualunque d_r dipendente dalla relazione ricorrente

$$d_r = n_r + \frac{1}{d_{r-1}} \tag{6}$$

ove r può ricevere i soli valori $2, 3, 4 \ldots\ldots r \ldots\ldots$ sarà data dalla frazione continua

$$d_r = n_r + \cfrac{1}{n_{r-1} + \cfrac{1}{n_{r-2} + \ldots\ldots + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_2}}}} \tag{7}$$

Di fatto la relazione (1) per $r = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ fornisce la serie

$$y_0 = \frac{1}{\omega_0} - \omega_1 + \frac{1}{y_1},\quad y_1 = \frac{1}{\omega_1} - \omega_2 + \frac{1}{y_2},\quad y_2 = \frac{1}{\omega_2} - \omega_3 + \frac{1}{y_3}\ldots\ldots$$

Dalla 1.ª di queste espressioni risulta

$$y_0 - \frac{1}{\omega_0} = -\frac{\omega_1}{y_1}\left(y_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)$$

ove cambiato y_0, ω_0 in y_1, ω_1 si avrà parimente

$$y_1 - \frac{1}{\omega_1} = -\frac{\omega_2}{y_2}\left(y_2 - \frac{1}{\omega_2}\right)$$

e per lo stesso motivo sarà

$$y_2 - \frac{1}{\omega_2} = -\frac{\omega_3}{y_3}\left(y_3 - \frac{1}{\omega_3}\right), \;\ldots\; y_{r-1} - \frac{1}{\omega_{r-1}} = -\frac{\omega_r}{y_r}\left(y_r - \frac{1}{\omega_r}\right)$$

Quindi colla successiva sostituzione si ottiene pel valore di $y_0 - \frac{1}{\omega_0} = y_0 - \alpha$ l'espressione data (1).

Cambiata nella relazione (3) la r in $r - 1$ e dedotto il valore di ω_r risulta $\omega_r = -n_r + \frac{1}{\omega_{r-1}}$, ove posto successivamente $r - 1$ in luogo di r si ha colla continua sostituzione la frazione continua (5). Parimente se nella espressione (1) si pone il valore del 1.° membro della (3) si ha la relazione generale

$$y_r = n_{r+1} + \frac{1}{y_{r+1}} \tag{8}$$

Se nel binomio $y_r + \frac{1}{d_r}$ si pone per y_r la sua espressione (8), si ottiene

$$y_r + \frac{1}{d_r} = \frac{n_{r+1} + \frac{1}{d_r}}{y_{r+1}}\left(y_{r+1} + \frac{1}{n_{r+1} + \frac{1}{d_r}}\right)$$

che per la relazione stabilita (6) si riduce a

$$y_r + \frac{1}{d_r} = \frac{d_{r+1}}{y_{r+1}}\left(y_{r+1} + \frac{1}{d_{r+1}}\right) \tag{9}$$

Avendo supposto che nella d_r l'indice r ha la sola escursione dei valori $2, 3, 4 \ldots . r \ldots .$, se si vuole che la (9) sussista per l'escursione totale $r = 0, 1, 2, 3 \ldots .$ converrà determinare le arbitrarie d_0, d_1 in modo che le due equazioni risultanti dalla (9) per $r = 1$, $r = 0$ coincidano con quelle che risultano dalla (8) per gli stessi valori $r = 1$, $r = 0$. Avuto riguardo che dalla (6) risulta $d_2 = n_2$ in quanto essa sussiste solo per $r = 2, 3 \ldots .$ la (9) per $r = 1$ darà $y_1 + \frac{1}{d_1} = n_2 + \frac{1}{y_2}$, e la (8) darà $y_1 = n_2 + \frac{1}{y_2}$; dunque dev' essere $d_1 = \frac{1}{0}$. Per $r = 0$ le equazioni (9), (8) diventano

$$y_0 = \left(d_1 - \frac{1}{d_0}\right) + \frac{1}{y_1}, \qquad y_0 = n_1 + \frac{1}{y_1},$$

dunque $d_1 - \frac{1}{d_0} = n_1$, e per essere $d_1 = \frac{1}{0}$ dovrà essere $d_0 = 0$, acciò l' espressione indeterminata $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ possa esser eguale ad n_1. Posti nell'espressione (9) in luogo di r successivamente i termini

$$r-1, \; r-2, \; r-3, \; r-4 \ldots . r-p,$$

si ottiene dalla sostituzione continua

$$y_{r-1} + \frac{1}{d_{r-1}} = \frac{d_r}{y_r}\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)$$

$$y_{r-2} + \frac{1}{d_{r-2}} = \frac{d_{r-1}}{y_{r-1}}\left(y_{r-1} + \frac{1}{d_{r-1}}\right) = \frac{d_r d_{r-1}}{y_r y_{r-1}}\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)$$

$$y_{r-3} + \frac{1}{d_{r-3}} = \frac{d_{r-2}}{y_{r-2}}\left(y_{r-2} + \frac{1}{d_{r-2}}\right) = \frac{d_r d_{r-1} d_{r-2}}{y_r y_{r-1} y_{r-2}}\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)$$

$$\vdots$$

$$y_{r-p} + \frac{1}{d_{r-p}} = \frac{d_{r-(p-1)}}{y_{r-(p-1)}}\left(y_{r-(p-1)} + \frac{1}{d_{r-(p-1)}}\right) = \frac{d_r d_{r-1} d_{r-2} \ldots . d_{r-(p-1)}}{y_r y_{r-1} y_{r-2} \ldots . y_{r-(p-1)}}\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)$$

Supposto $p = r + 1$, quest' ultima si riduce a

$$y_1 + \frac{1}{d_1} = \frac{d_2 d_3 d_4 \ldots . d_r}{y_2 y_3 y_4 \ldots . y_r}\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)$$

e per essere $\frac{1}{d_1} = 0$, risulterà

$$y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots . y_r = d_2 d_3 d_4 \ldots . d_r \left(y_r + \frac{1}{d_r}\right).$$

Posto questo valore nella (1), essa si cambia nella (3). Finalmente posti successivamente nella relazione ricorrente (6) in luogo di r i valori $r - 1$, $r - 2$, $r - 3 \ldots .$ colla continua sostituzione nel secondo membro della (6) dei valori che risultano dal far variare la r si otterrà la frazione continua (7).

I valori di y_r che annullano l'espressione (4) sono tutti compresi nella radice unica dell' equazione $y_r - \frac{1}{\omega_r} = 0$ secondo ciò che si è avvertito al § 15 della citata Memoria. Una qualunque delle espressioni nate dalla $y_r - \frac{1}{\omega_r}$ col dare ad r i diversi valori $0, 1, 2 \ldots .$ verrà chiamata fattore di 1.° grado, ed $\frac{1}{\omega_r}$ la costante di esso fattore rispetto a cui si verificano le seguenti proprietà:

1.° Se la costante $\frac{1}{\omega_r}$ di un qualunque fattore $y_r - \frac{1}{\omega_r}$ è compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ senza che coincida con alcun numero intero, la costante $\frac{1}{\omega_{r+1}}$ del fattor successivo $y_{r+1} - \frac{1}{\omega_{r+1}}$ sarà pure compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, purchè la n_{r+1} sia il numero intero immediatamente inferiore ad $\frac{1}{\omega_r}$. Ne deriva che essendo $\alpha = \frac{1}{\omega_0}$ compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ e non coincidente con alcun numero intero, ed essendo n_1 il numero intero in essa compreso, e lo stesso dicendosi di n_2 rispetto ad $\frac{1}{\omega_1}$, di n_3 rispetto ad $\frac{1}{\omega_2}\ldots$, di n_{r+1} rispetto ad $\frac{1}{\omega_r}$ le costanti di tutti i fattori di 1.° grado nati dalle successive trasformazioni indefinitamente prolungate saranno comprese fra 1 ed $\frac{1}{0}$.

2.° Se, essendo α compresa fra $-\frac{1}{0}$ e $+\frac{1}{0}$, sia n_1 un numero qualsivoglia delle serie $1, 2, 3, 4\ldots$ escluso quello che potrebbe essere contenuto in α, e le $n_2, n_3, n_4\ldots$ siano numeri comunque presi nella stessa serie, la costante $\frac{1}{\omega_1}$ sarà compresa fra 1 e $-\frac{1}{0}$, la $\frac{1}{\omega_2}$ sarà compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, e le successive costanti $\frac{1}{\omega_3}, \frac{1}{\omega_4}\ldots$ saranno comprese fra 0 e -1.
Di fatto sia α compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, la $\omega_1 = \alpha - n_1$ sarà compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, ed $\frac{1}{\omega_1}$ giacerà pure fra gli stessi limiti. Sia α compresa fra 0 ed $\frac{1}{0}$, la ω_1 sarà compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$ ovvero fra 1 ed $\frac{1}{0}$ secondo che sarà $n_1 > \alpha$ ovvero $n_1 < \alpha - 1$, e la $\frac{1}{\omega_1}$ sarà nel 1.° caso compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, e nel 2.° fra 0 ed 1. Dunque per α compresa fra $-\frac{1}{0}$ e $+\frac{1}{0}$ la $\frac{1}{\omega_1}$ sarà compresa fra 1 e $-\frac{1}{0}$ come si è enunciato. Ne deriva pertanto che la $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1} - n_2$, in cui n_2 è uno qualsivoglia della serie de' numeri naturali, sarà negativa e compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, fra i quali limiti sarà perciò compresa la $\frac{1}{\omega_2}$ come si è detto. Inoltre essendo $\omega_3 = \frac{1}{\omega_2} - n_3$, ove n_3 è parimente un numero intero, sarà ω_3 compresa fra -1 e $-\frac{1}{0}$ e perciò $\frac{1}{\omega_3}$ sarà compresa fra 0 e -1. Si ha parimente $\omega_4 = \frac{1}{\omega_3} - n_4$, e risultando, per ciò che si è

detto, la ω_4 pure compresa fra -1 e $-\frac{1}{0}$, sarà $\frac{1}{\omega_4}$ compresa fra 0 e -1, e lo stesso avrà luogo indefinitamente rispetto alle $\frac{1}{\omega_5}$, $\frac{1}{\omega_6}\ldots\ldots$ in quanto tutte le $\omega_5, \omega_6\ldots\ldots$ saranno, come la ω_4, comprese fra -1 e $-\frac{1}{0}$.

3. Essendo p e q_1 quantità reali qualunque, l'espressione $(x-p)^2+q_1^2$ ha sempre un valor positivo qualunque siasi la x. Siccome essa rappresenta il prodotto delle due espressioni immaginarie conjugate $x-(p\pm q_1\sqrt{-1})$, così la chiameremo fattore di 2.° grado, e delle due costanti che esso contiene diremo *parametro* la quantità positiva o negativa p ed *argomento* la quantità positiva o negativa q_1.

Se nel proposto fattore di 2.° grado si sostituiscono successivamente ad x, y_1, $y_2\ldots\ldots y_{r-1}$ i diversi valori nati dalla relazione ricorrente

$$y_{r-1}=p_{r-1}-\omega_r+\frac{1}{y_r} \qquad (1)$$

da cui si deduce la serie

$$x=p-\omega_1+\frac{1}{y_1}, \quad y_1=p_1-\omega_2+\frac{1}{y_2}, \quad y_2=p_2-\omega_3+\frac{1}{y_3}, \ldots\ldots$$

ove le p_1, p_2, $p_3\ldots\ldots p_{r-1}$ sono determinate dalla relazione ricorrente

$$p_{r-1}=\frac{\omega_{r-1}}{\omega_{r-1}^2+q_{r-1}^2} \qquad (2)$$

che fornisce la serie

$$p_1=\frac{\omega_1}{\omega_1^2+q_1^2}, \quad p_2=\frac{\omega_2}{\omega_2^2+q_2^2}, \quad p_3=\frac{\omega_3}{\omega_3^2+q_3^2}, \ldots\ldots$$

in cui le diverse q_2, $q_3\ldots\ldots q_r$ sono date dalla relazione

$$q_r=\frac{q_{r-1}}{q_{r-1}^2+\omega_{r-1}^2} \qquad (3)$$

ossia della serie

$$q_2 = \frac{q_1}{q_1^2 + \omega_1^2}\,, \quad q_3 = \frac{q_2}{q_2^2 + \omega_2^2}\,, \quad q_4 = \frac{q_3}{q_3^2 + \omega_3^2}\,, \ldots\ldots$$

il fattore $(x - p)^2 + q_1^2$ si trasforma nell'espressione

$$\frac{(\omega_1^2+q_1^2)(\omega_2^2+q_2^2)(\omega_3^2+q_3^2)\cdots\cdot(\omega_r^2+q_r^2)}{y_1^2\, y_2^2\, y_3^2 \cdots\cdot y_r^2}\left\{\left(y_r - \frac{\omega_r}{\omega_r^2+q_r^2}\right)^2 + \left(\frac{q_r}{q_r^2+\omega_r^2}\right)^2\right\} \qquad (4)$$

Se si suppongono inoltre le relazioni ricorrenti

$$p_{r-1} - \omega_r = n_r \qquad (5)\,, \qquad\qquad d_r = n_r + \frac{1}{d_{r-1}} \qquad (6)$$

che danno rispettivamente le serie

$$p - \omega_1 = n_1\,, \quad p_1 - \omega_2 = n_2\,, \quad p_2 - \omega_3 = n_3\,, \ldots\ldots$$

$$d_2 = n_2\,, \quad d_3 = n_3 + \frac{1}{d_2}\,, \quad d_4 = n_4 + \frac{1}{d_3}\,, \ldots\ldots$$

si avrà

$$\frac{(\omega_1^2+q_1^2)(\omega_2^2+q_2^2)(\omega_3^2+q_3^2)\cdots\cdot(\omega_r^2+q_r^2)}{d_2^2\, d_3^2\, d_4^2 \cdots\cdot d_r^2\left(y_r + \frac{1}{d_r}\right)^2}\left\{\left(y_r - \frac{\omega_r}{\omega_r^2+q_r^2}\right)^2 + \left(\frac{q_r}{q_r^2+\omega_r^2}\right)^2\right\} \qquad (7)$$

ove una qualunque ω_r sarà data dall'espressione (5) dell'antecedente paragrafo cambiatovi α in p, ed una qualunque d_r sarà data dalla (7) del citato paragrafo in quanto esse risultano dalle relazioni ricorrenti rispettive (5) e (6).
Queste espressioni si ottengono col processo analogo seguito nel paragrafo antecedente per trasformare il fattore di 1.° grado $y_0 - \alpha$ nell'espressione (4). Se nella (7) si pone $p = \alpha$, e $q_1 = 0$ essa si trasforma, come era da aspettarsi, nel quadrato di quella ottenuta nel citato paragrafo. La precedente espressione non conterrà in ultima analisi che il parametro p e l'argomento q_1 del fattore proposto, la y_r e le quantità arbitrarie n_1, n_2, $n_3 \ldots\ldots n_r$. Qualunque siasi l'indice r,

la (7) è il prodotto di un fattore di 2.° grado e di un fattore che non si annulla per qualunque valore finito di y_r. I valori di y_r qualunque essi siano che annullano la (7) sono tutti compresi, in forza del § 15 della citata Memoria, nei soli valori immaginarj conjugati che annullano il fattor di 2.° grado.

Se nel fattore di 2.° grado della (7) si suppone $\omega_r > 1$, il parametro e l'argomento di esso saranno < 1 qualunque siasi q_r. E se si suppone $q_r > 1$, il parametro e l'argomento saranno parimente < 1 qualunque siasi ω_r. Essendo ω_r e q_r entrambi < 1, il parametro diverrà $<$ od $=$ ovvero $>$ di uno, secondo che q_r^2 sarà $>$ od $=$ ovvero $<$ di $\omega_r(1-\omega_r)$. L'argomento diverrà > 1 se essendo parimente ω_r e q_r entrambi < 1 sarà $\omega_r^2 < q_r(1-q_r)$. Dalle precedenti cose risultano le seguenti proposizioni:

1.ª Essendo p compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, se le lettere $n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots n_r \ldots\ldots$ rappresentano i numeri interi contenuti rispettivamente nei parametri $p, p_1, p_2 \ldots\ldots p_{r-1} \ldots\ldots$ le successive sostituzioni eseguite nel proposto fattore di 2.° grado $(x-p)^2 + q_1^2$ spinte siano ad un numero r opportunamente grande trasformeranno il proposto fattore in un altro il cui parametro $p_r = \frac{\omega_r}{\omega_r^2 + q_r^2}$ sarà < 1. Di fatto essendo n_1 il numero intero compreso in p, dalla (3) per $r = 2$, risulterà $\omega_1 < 1$ senza essere $= 0$. Se la $p_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + q_1^2}$ data della (2) per $r = 2$ non sarà < 1, ciò che esclude il caso di $n_1 = p$ ossia di $\omega_1 = 0$, dovrà essere $\omega_1^2 + q_1^2 \overline{\gtreqless} \omega_1$, e perciò fatta astrazione dal segno di q_1 sarà $\frac{q_1}{\omega_1^2 + q_1^2} \overline{\gtreqless} \frac{q_1}{\omega_1}$ ossia $q_2 \overline{\gtreqless} q_1$ astrazion fatta dal segno, e supposto $h_1 \overline{\gtreqless} 1$ sarà $q_2 = q_1 h_1$. Sia n_2 il numero intero contenuto in p_1, si avrà dalla (5) $\omega_2 < 1$. Se la $p_2 = \frac{\omega_2}{\omega_2^2 + q_2^2}$ data dalla (2) per $r = 3$ non sarà

< 1 non potrà essere $\omega_2 = 0$, onde non potrà essere $p_1 = 1$, giacchè in tal caso dovrebbe essere $n_2 = 1$ e $p_1 - n_2 = \omega_2 = 0$. Ma se p_1 non può essere $= 1$ non potrà essere $\omega_1^2 + q_1^2 = \omega_1$ e quindi nemmeno $\frac{q_1}{\omega_1^2 + q_1^2} = \frac{p_1}{\omega_1}$, dunque h_1 non potrà essere $= 1$, ma sarà > 1. Potrà essere $\omega_2^2 + q_2^2 \overline{\gtrless} \omega_2$, e quindi, astrazion fatta dal segno, $\frac{q_2}{\omega_2^2 + q_2^2} \overline{\gtrless} \frac{q_2}{\omega_2}$, ossia supposto $h_2 \overline{>} 1$ sarà $q_3 = q_2 h_2 = q_1 h_1 h_2$. Se parimente la p_3 non sarà < 1 non potrà essere $h_2 = 1$, e così progredendo se supponiamo che nessuno dei parametri successivi p_3, p_4, $p_5 \ldots . p_{r-2}$ riesca < 1, supposte sempre le relative n_4, n_5, $n_6 \ldots . n_{r-1}$ eguali ai numeri interi compresi in essi parametri si giungerà al fattore $(y_{r-1} - p_{r-1})^2 + q_r^2$, il cui parametro p_{r-1} se non sarà < 1, ciò che esclude il caso di $\omega_{r-1} = 0$ e di $p_{r-2} = 1$ e perciò di $h_{r-2} = 1$, risulterà, astrazion fatta dal segno, $q_r = q_1 h_1 h_2 h_3 \ldots . h_{r-2} h_{r-1}$ ove ciascuna delle h_1, h_2, $h_3 \ldots . h_{r-2}$ sarà > 1. Ne segue che qualunque siasi q_1 si potrà assumere r abbastanza grande che, essendo $\omega_r = p_{r-1} - n_r$, risulti $q_r^2 > \omega_r(1 - \omega_r)$ ossia $\omega_r^2 + q_r^2 > \omega_r$.

Ciò ritenuto, il fattore di 2.° grado che nascerà da una nuova sostituzione sarà $(y_r - p_r)^2 + q_{r+1}^2$, ove sarà $p_r = \frac{\omega_r}{\omega_r^2 + q_r^2}$ e per essere $\omega_r^2 + q_r^2 > \omega_r$ sarà $p_r < 1$. Giunti a questo fattore, la n_{r+1} che servirebbe ad un'ulteriore trasformazione, supposta sempre un numero della serie 1, 2, 3.... non potrà più essere soggetta a rappresentare il numero intero contenuto nella p_r per essere $p_r < 1$. Lo stesso si dirà rispetto alle n_{r+2}, $n_{r+3} \ldots .$ delle successive trasformate.

2.ª Se, essendo il parametro dato p qualsivoglia, siano n_1, n_2, $n_3 \ldots .$ numeri compresi nella serie 1, 2, 3, 4....

escludendo per valore di n_1 quel solo de' numeri di detta serie che potrebbe trovarsi compreso nella p, la p_1 sarà compresa fra 1 e $-\frac{1}{0}$, la p_2 fra 0 e $-\frac{1}{0}$ e tutti i successivi parametri p_3, p_4, $p_r \ldots$, saranno compresi fra 0 e -1.
Di fatto se p è compresa fra -1 e $-\frac{1}{0}$ sarà ω_1 compresa fra -1 e $-\frac{1}{0}$, quindi $p_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + q_1^2}$ sarà compresa fra 0 e -1. Se p è compresa fra 0 e -1 sarà ω_1 compresa fra 0 e -1 ovvero fra -1 e $-\frac{1}{0}$ secondo che sarà $n_1 =$ ovvero $>$ di 1 e perciò p_1 sarà compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$ nel 1.° caso, e fra 0 e -1 nel 2.° Se la p è compresa fra 0 ed 1 sarà ω_1 compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$, e perciò p_1 sarà compresa fra 0 e -1 ovvero fra -1 e $-\frac{1}{0}$ secondo che sarà $n_1 > 1$ ovvero $n_1 = 1$ ed $\omega_1^2 + q_1^2 > \omega_1$. Dunque essendo p compresa fra 1 e $-\frac{1}{0}$, il parametro p_1 del successivo fattore di 2.° grado sarà compreso fra 0 e $-\frac{1}{0}$. Se finalmente la p è compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ sarà ω_1 compresa fra 0 e $-\frac{1}{0}$ ovvero fra 1 ed $\frac{1}{0}$ secondo che n_1 sarà $>p$ ovvero $<$ di $p-1$, essendo per ipotesi escluso il caso di n_1 coincidente col numero intero compreso in p; dunque in ambo i casi sarà p_1 compreso fra 1 e $-\frac{1}{0}$. Ne risulta dunque che qualunque siasi p compresa fra $-\frac{1}{0}$ e $+\frac{1}{0}$, purchè n_1 non coincida col numero intero compreso nella p, sarà p_1 compresa fra 1 e $-\frac{1}{0}$.
Se ora si considera p_1 come se fosse il parametro di un proposto fattore $(y_1 - p_1)^2 + q_2^2$, essendo p_1 compreso fra 1 e $-\frac{1}{0}$, il parametro p_2 del successivo fattore, per ciò che si è detto rispetto alla p, sarà compreso fra 0 e $-\frac{1}{0}$. Se parimente si considera p_2, compreso fra questi limiti, come il parametro di un proposto fattore $(y_2 - p_2)^2 + q_3^2$, il

parametro p_3 del successivo fattore, dietro ciò che si è detto sopra rispetto a p, sarà compreso fra 0 e -1. Considerato nuovamente p_3 come il parametro di un proposto fattore, il parametro p_4 del successivo fattore sarà pure compreso fra 0 e -1, e così progredendo si conchiuderà che tutti i successivi parametri p_5, $p_6 \ldots p_r \ldots$ indefinitamente saranno compresi fra 0 e -1 qualunque siasi il proposto parametro p.

3.ª Qualunque siasi il parametro p e l'argomento q_1 di un fattore di 2.° grado $(x-p)^2+q_1^2$, se le n_1, n_2, $n_3 \ldots n_r \ldots$ sono numeri della serie $1, 2, 3, 4 \ldots$ dopo un numero t di trasformazioni il proposto fattore sarà cambiato in $(y_t-p_t)^2+q_{t+1}^2$ ove non solo il parametro p_t al crescere da t rimarrà costantemente compreso fra 0 e -1, ma inoltre l'argomento $q_{t+1}=\frac{q_t}{q_t^2+\omega_t^2}$ diverrà minore di qualsivoglia data quantità.

Di fatto se la p è compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, per la proposizione 1.ª di questo paragrafo, si potranno continuare le trasformazioni sino a giungere ad un fattore $(y_r-p_r)^2+q_{r+1}^2$ in cui essendo adempita la condizione $q_r^2>\omega_r(1-\omega_r)$, il parametro p_r sia compreso fra 1 e $-\frac{1}{0}$. Una successiva trasformazione darà il fattore $(y_{r+1}-p_{r+1})^2-q_{r+2}^2$, ma per la proposizione 2.ª il parametro p_{r+1} sarà ora compreso fra 0 e $-\frac{1}{0}$. Una nuova trasformazione darà il fattore $(y_{r+2}-p_{r+2})^2+q_{r+3}^2$ in cui per la stessa proposizione il parametro p_{r+2} sarà compreso fra 0 e -1. Dietro la solita posizione $p_{r+2}-n_{r+3}=\omega_{r+3}$ risulterà la ω_{r+3} negativa, ed il suo valor numerico sarà compreso fra 1 ed $\frac{1}{0}$. Una terza trasformazione darà il fattore $(y_{r+3}-p_{r+3})^2+q_{r+4}^2$, ove p_{r+3} sarà compresa fra 0 e -1. Ma essendo $\omega_{r+3}^2>1$ la $q_{r+4}=q_{r+3}\frac{1}{\omega_{r+3}^2+q_{r+3}^2}$ sarà

$<$ di q_{r+3}. Supposto dunque $h_{r+3} > 1$ sarà $q_{r+4} = \frac{q_{r+3}}{h_{r+3}}$.
Siccome poi tutti i successivi parametri p_{r+4}, $p_{r+5} \dots p_t \dots$ saranno tutti compresi fra 0 e -1, tutte le ω_{r+4}, $\omega_{r+5} \dots \omega_t \dots$ saranno negative ed avranno valori numerici > 1 e perciò sarà indefinitamente

$$q_{r+5} = \frac{q_{r+4}}{h_{r+4}}, \quad q_{r+6} = \frac{q_{r+5}}{h_{r+5}}, \quad \dots q_t = \frac{q_{t-1}}{h_{t-1}}, \quad q_{t+1} = \frac{q_t}{h_t}$$

ossia

$$q_{t+1} = \frac{q_{r+3}}{h_{r+3}\, h_{r+4}\, h_{r+5} \dots h_t}$$

ove le diverse h saranno maggiori di 1. Qualunque sia risultato il valore di q_{r+3} si potrà assumere t così grande da ridurre la q_{t+1} minore di qualunque quantità assegnabile.
Se si suppone inoltre che il parametro p sia qualsivoglia e siano n_1, n_2, $n_3 \dots n_r \dots$ numeri presi nella serie $1, 2, 3, 4 \dots$ non coincidendo la n_1 col numero intero compreso in p, i parametri p_3, $p_4 \dots p_r \dots$ saranno, per la proposizione 2.ª di questo paragrafo, compresi fra 0 e -1, e perciò il fattore di 2.° grado $(y_3 - p_3)^2 + q_4^2$ sarà nel caso già contemplato del fattore $(y_{r+3} - p_{r+3})^2 + q_{r+4}^2$ e potrà ripetersi su di esso e sui successivi fattori quanto si è detto rispetto ai successivi fattori derivati da quest' ultimo.
Si giungerà dunque collo stesso criterio ad ottenere

$$q_4 = \frac{q_3}{h_3}, \quad q_5 = \frac{q_4}{h_4}, \quad q_6 = \frac{q_5}{h_5}, \quad \dots$$

$$q_r = \frac{q_{r-1}}{h_{r-1}}, \quad q_{r+1} = \frac{q_r}{h_r}, \quad q_{r+2} = \frac{q_{r+1}}{h_{r+1}}, \quad q_{r+3} = \frac{q_{r+2}}{h_{r+2}}$$

e perciò

$$q_{r+3} = \frac{q_3}{h_3\, h_4\, h_5 \dots h_{r+2}}$$

e quindi

$$q_{t+1} = \frac{q_3}{h_3\, h_4\, h_5 \ldots . h_t}$$

e perciò q_{t+1} sarà minore di qualsivoglia quantità, qualunque siasi q_3 e quindi qualunque siasi q_1 da cui dipende il valore di q_3.

4. I valori critici di un' equazione qualunque $F(x) = 0$ sono compresi fra il più grande ed il più piccolo de' valori che presentano le radici o i parametri della stessa equazione. Di fatto chiaminsi $\ldots . \delta \ldots . \gamma \ldots . \rho \ldots .$ i parametri ed $\ldots . a,\ b \ldots . h \ldots . t,\ u \ldots .$ le radici della proposta. Supponiamo che ordinati i parametri e le radici a seconda delle loro grandezze, incominciando dalle negative a valori numerici più grandi sino al più grande valor positivo, si abbia la serie

$$\ldots . \delta,\ a,\ b \ldots . h,\ r \ldots . t,\ \rho,\ u \ldots . \qquad (1)$$

È noto che la $F(x)$ decomposta ne' suoi fattori di 1.° e 2.° grado darà

$$\begin{aligned} F(x) = \cdots \left\{(x-\delta)^2+\sigma_1^2\right\}(x-a)(x-b)\cdots(x-h)\left\{(x-r)^2+\sigma_2^2\right\}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots (x-t)\left\{(x-\rho)^2+\sigma_2^2\right\}(x-u)\cdots = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Pongasi $F(x) = X$. Se si pigliano le derivate X', X'', X'''....$X^{(r)}$.... una qualunque $X^{(r)}$ consterà di un polinomio a segni positivi di cui ciascun termine sarà un prodotto di fattori di 1.° grado o di 1.° e 2.° grado. Sia ν il valore dell'ultimo termine della serie (1). Se nel valore di $X^{(r)}$ si pone $x = \nu + \varepsilon$, essendo ε infinitamente piccola, tutti i termini saranno positivi e perciò positivi i termini della serie X, X', X'', X'''....X^r.... dunque per $x = \nu + \varepsilon$, $x = \frac{1}{0}$ la serie degl' indici sarà ..... 0000. Nessun valore critico adunque sarà compreso fra $x = \nu$, $x = \frac{1}{0}$. Ciò sussiste del pari quando l'ultimo termine della serie (1) essendo un parametro $= \tau$ ed il penultimo una radice $= u$ si avesse $u = \tau$ e perciò $v = u = \tau$.

Essendo $v_1 =$ ovvero $<$ del più piccolo valore della serie (1) non esistono parimente valori critici fra $x = v_1$, $x = -\frac{1}{0}$, per cui i valori critici saranno compresi fra v_1 e v. In fatti nella $F(x) = 0$, si ponga $x = v - y$ sarà $F(x) = F(v - y) = Y = 0$. Le radici reali della $F(v - y) = 0$ saranno

$$\ldots\ldots(v - u),\ (v - t),\ \ldots\ldots(v - h),\ \ldots\ldots(v - b),\ (v - a)\ldots\ldots$$

ed i parametri dei fattori di 2.° grado saranno

$$\ldots\ldots(v - \rho),\ \ldots\ldots(v - r),\ \ldots\ldots(v - \delta),\ \ldots\ldots$$

ed ordinati per le loro grandezze si avrà la serie

$$\ldots\ldots(v-u),\ (v-\rho),\ (v-t),\ldots\ldots(v-r),\ (v-h),\ldots\ldots(v-b),\ (v-a),\ (v-\delta)\ldots\ldots$$

La $v - v_1$ sarà una quantità maggiore dell' ultimo dei termini di questa serie, per conseguenza per $y = v - v_1$, $y = \frac{1}{0}$ la serie degl' indici competente alla serie delle derivate Y, Y', Y'', Y''' .... Y_r, ... sarà .... 0 0 0 0. Non esisterà dunque alcun valor critico fra i limiti $y = v - v_1$, $y = \frac{1}{0}$ ossia, stante il carattere del valor critico, non vi sarà fra detti limiti alcun valore di y che annullando una qualsivoglia derivata $Y^{(r)}$ renda dello stesso segno le due derivate laterali $Y^{(r-1)}$, $Y^{(r+1)}$. Dalla $F(x) = F(v - y)$ risulta

$$Y^{(r-1)} = \pm X^{(r-1)},\quad Y^{(r)} = \mp X^{(r)},\quad Y^{(r+1)} = \pm X^{(r+1)},$$

valendo tutti i segni superiori per r pari e gl' inferiori per r dispari. Per essere $x = v - y$ non esisterà fra i limiti $x = v_1$, $x = -\frac{1}{0}$ che corrispondono ai limiti

$y = v - v_1$, $y = \frac{1}{0}$ alcun valore che annullando $X^{(r)}$ renda dello stesso segno le derivate laterali $X^{(r-1)}$, $X^{(r+1)}$, perciò la $X = 0$ non avrà alcun valor critico fra i limiti $x = v_1$, $x = -\frac{1}{0}$.

5. Essendo ρ ed u un parametro ed una radice entrambi maggiori di tutti i parametri e di tutte le radici che la $f(x) = 0$ contiene, se sarà $\rho <$ od $= u$, il valor critico dovuto al fattore di 2.° grado a cui ρ appartiene, sarà $< u$ tranne pel caso di $f(x) = \left((x-u)^2 + \sigma^2\right)(x-u)$ in cui il valor critico sarà $= u$. Infatti una qualunque derivata $X^{(r)}$ sarà positiva per $x = u + h$, essendo h positiva, onde tutti i termini della serie X, X', X''....$X^{(r)}$.... saranno positivi per il § 4. Per $x = u - \varepsilon$, essendo ε piccola quanto si vuole, una qualunque $X^{(r)}$ sarà della forma $P - \varepsilon Q$, ove P, Q saranno positivi per $x = u - \varepsilon$. Si potrà dunque assumere ε così piccola che tutte le derivate X', X'', X'''....$X^{(r)}$.... siano positive. Ma la X risulterà negativa per $x = u - \varepsilon$, perciò la serie degl'indici per $x = u + h$, $x = u - \varepsilon$ sarà ....0001. Dunque fra $u - \varepsilon$ ed $\frac{1}{0}$ non esisterà valor critico, e quello competente al fattore di 2.° grado che contiene la ρ sarà $< u$. Ma pel caso in cui sia $\rho = u$ e non esistano altri fattori la $X'' = P - \varepsilon Q$ sarà negativa per essere $P = 0$. In tal caso il valore $x = u$ annullando X'' e riducendo dello stesso segno le due derivate laterali coinciderà col valore critico.

6. Un'equazione $F(x) = 0$ abbia una sola radice reale $= u > 1$ essendo tutte le altre radici ed i parametri delle immaginarie comprese fra 0 e -1. Se ciascuno degli argomenti potrà assumersi minore di una quantità data, l'equazione proposta pei limiti $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ fornirà $\Delta = 1$, essendo Δ l'ultimo della serie degl'indici competente ai detti limiti. Supposto infatti che P_1, P_2, P_3.... siano i fattori di 2.° grado della proposta aventi rispettivamente per

parametri le ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \ldots$ e per argomenti le σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots$ e sia $f(x)$ il prodotto di tutti i suoi m fattori di 1.° grado, sarà $F(x) = \ldots P_3\,P_2\,P_1\,f(x)$. La $f(x)$ non contenendo che una sola radice positiva $= u$ maggiore di uno pei limiti $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ darà $\Delta = 1$ per valore dell'ultimo indice. La serie dei segni delle derivate di $f(x)$ per $x = 1$ sarà come segue

$$\begin{array}{cccccc} f(1), & f'(1), & f''(1), & f'''(1) \ldots f^{(m-1)}(1), & & f^{(m)}(1) \\ - & \mp & \mp & \mp & \mp & + \end{array} \qquad (1)$$

Acciò pei limiti $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ possa risultare $\Delta = 1$, siccome debbono risultar positivi i segni di tutti i termini della (1) per $x = \frac{1}{0}$, dovrà nella (1) ripetersi il segno superiore sino ad una $f^{(r)}(1)$, indi succedere tutti i segni inferiori. Pongasi $P_1 f(x) = \phi(x)$. Una qualunque derivata $\phi^{(r)}(x)$ sarà data da

$$\phi^{(r)}(x) = P_1 f^{(r)}(x) + 2r(x-\rho_1) f^{(r-1)}(x) + r(r-1)\, f^{(r-2)}(x) \qquad (2)$$

Essendo per ipotesi $f^{(r)}(x)$ il primo termine della serie (1) che per $x = 1$ assume il segno $+$, ed essendo $x - \rho_1 = 1 - \rho_1$ una quantità positiva, tutte le $\phi^{(r-1)}(x)$, $\phi^{(r-2)}(x) \ldots \phi'(x)$, $\phi(x)$ per $x = 1$ saranno negative e tutte le $\phi^{(r-2)}(x)$, $\phi^{(r-3)}(x) \ldots$ sino all'ultima derivata costante saranno positive. Ora se la $\phi^{(r)}(1)$ sarà negativa comunque positiva o negativa sia la $\phi^{(r+1)}(1)$, si avrà nella serie

$$\phi(1),\ \phi'(1),\ \phi''(1) \ldots \phi^{(r)}(1),\ \phi^{(r+1)}(1),\ \phi^{(r+2)}(1) \ldots \phi^{(m+2)}(1) \qquad (3)$$

una sola variazioue di segno. Se poi la $\phi^{(r)}(1)$ è positiva, la successiva derivata $\phi^{(r+1)}(1)$ assumerà essa pure un segno positivo quando possa assumersi l'argomento σ_1 minore di una data quantità. Di fatto indicando con un apice al piede di f i valori numerici delle derivate negative $f^{(r-1)}(1)$, $f^{(r-2)}(1)$ dovrà essere

$$P_1 f^{(r)}(1) > 2r(1-\rho_1) f_1^{(r-1)}(1) + r(r-1) f_1^{(r-2)}(1)$$

ossia

$$(1-\rho_1)^2 f^{(r)}(1) + \sigma_1^2 f^{(r)}(1) > 2r(1-\rho_1) f_1^{(r-1)}(1) + r(r-1) f_1^{(r-2)}(1)$$

Se per l'arbitrarietà dell'argomento σ_1 si assume

$$\sigma_1^2 < \frac{r(r-1) f_1^{(r-2)}(1)}{f^{(r)}(1)} \quad \text{sarà} \quad (1-\rho_1) f^{(r)}(1) > 2r f_1^{(r-1)}(1)$$

ed a più forte ragione

$$2(r+1)(1-\rho_1) f^{(r)}(1) > (r+1) r f_1^{(r-1)}(1) \tag{4}$$

Cambiando nella (2) la r in $r+1$ fatto $x=1$ si ha

$$\phi^{(r+1)}(1) = P_1 f^{(r+1)}(1) + 2(r+1)(x-\rho_1) f^{(r)}(1) + (r+1) r f^{(r-1)}(1)$$

In questa è la sola $f^{(r-1)}(1)$ che è negativa ed in forza della (4) sarà $\phi^{(r+1)}(1)$ positiva. Ne deriva che la serie (3) tanto per $\phi^{(r)}(1)$ positiva che negativa pei limiti $x=1$, $x=\frac{1}{0}$ fornirà $\Delta=1$.

Pongasi ora $P_2\phi(x) = \chi(x)$, siccome la serie

$$\begin{array}{cccccc} \phi(1), & \phi'(1), & \phi''(1) \ldots\ldots \phi^{m+2}(1), & & \phi^{m+3}(1), & \phi^{m+4}(1) \\ - & \mp & \mp & \mp & \mp & + \end{array}$$

avrà rispetto ai segni la stessa proprietà accennata per la serie (1), così si potrà ripetere sulla $\chi(x)$ rispetto a $\phi(x)$ lo stesso ragionamento fatto sulla $\phi(x)$ rispetto alla $f(x)$ col disporre dell'argomento σ_2^2 in modo che sia $\sigma_2^2 < \frac{r(r-1)\phi_1^{(r-1)}(1)}{\phi^r(1)}$ e concludere che la $\chi(x)$ fra i limiti $x=1$, $x=\frac{1}{0}$ darà $\Delta=1$. In pari tempo avverandosi nell'analoga serie la proprietà di avere una sola variazione di segno, posto $P_3\chi(x) = \psi(x)$ si potrà passare alla conclusione che anche la $\psi(x)$ gode delle stesse proprietà delle funzioni precedenti, quando si disponga dell'argomento σ_3^2 in modo da ridursi minore di una quantità data. Continuando un simile discorso si giungerà alla proposizione enunciata rispetto alla $F(x) = 0$. La stabilita proposizione non si limita al caso in cui una sola delle radici della $F(x) = 0$ sia > 1, ma si può stabilire in generale che essendo m un numero qualunque di radici > 1, essendo tutte le altre ed i parametri delle radici immaginarie compresi fra 0 e -1, se gli argomenti possono assumersi minori di una qualsivoglia quantità, pei limiti $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ si avrà $\Delta = m$. Ciò riposa sul principio che la differenza fra il valor critico competente ad un fattore di 2.° grado, a cose d'altronde pari, ed il parametro di esso è tanto minore quanto più piccolo è l'argomento. Una tale differenza diventa zero, quando l'argomento è zero, giacchè il tal caso il valor critico coincide col parametro ed il parametro diventa una radice doppia. Col diminuire pertanto l'argomento si potrà ridurre la differenza fra il parametro ed il valor critico ad una quantità < 1. Ciò può dirsi di ciascuno dei fattori di 2.° grado che entrano nella $F(x)$, e siccome tutti i parametri per ipotesi si suppongono compresi fra 0 e -1 il valor critico dovuto a qualunque fattore di 2.° grado si ridurrà < 1. Quindi fra $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ non esistendo valori critici, ma un numero m di radici reali, dovrà essere per gli stessi limiti $\Delta = m$. Risulta inoltre che se una radice è compresa fra 0 ed $\frac{1}{0}$ e tutte le altre radici e parametri sono compresi fra 0 e -1 e gli argomenti possono assumersi minori di qualsivoglia quantità assegnabile la $F(x) = 0$ pei limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ darà $\Delta = 1$, e perciò essa avrà una sola variazione di segno.

7. Sia proposta l'equazione lineare $ax - b = 0$ da risolversi col metodo delle frazioni continue. Posto $\frac{b}{a} = \alpha$ si trasformi il 1.° membro dell'equazione $x - \alpha = 0$ col processo indicato al § 2. La trasformata r^{esima} ommesso il fattore che non si annulla per alcun valore di y_r darà $y_r - \frac{1}{\omega_r} = 0$. Posto per ω_r il valore (5) dello stesso § 2 e cavato α col rovesciare la frazione e portare successivamente nel 1.° membro le quantità n_1, n_2 ...., si otterrà

$$\alpha = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots + \cfrac{1}{n_r + \cfrac{1}{y_r}}}}$$

Se le n_1, n_2, n_3 .... n_r sono i numeri interi immediatamente inferiori alle rispettive $\frac{1}{\omega_0} = \alpha$, $\frac{1}{\omega_1}$, $\frac{1}{\omega_2}$ .... $\frac{1}{\omega_{r-1}}$ e per $\alpha < 1$ sia $n_1 = 0$, i valori delle n_1, $n_1 + \frac{1}{n_2}$,

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}, \dots\dots \quad n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \dots + \cfrac{1}{n_r}}}} \qquad (1)$$

saranno alternativamente minori e maggiori di α e convergeranno verso α sino a differirne, per r grandissimo, di una quantità minore di qualsivoglia dato valore. È questo il modo con cui si può esprimere in frazione continua un qualsivoglia numero α.

Giova osservare che l'equazione che fornisce α per y_r sussiste qualunque siano le arbitrarie n_1, n_2, n_3 .... n_r, purchè pongasi per y_r il valore $\frac{1}{\omega_r}$. Se pertanto si determina la y_r coll'equazione $y_r - \frac{1}{\omega_r} = 0$ dietro la condizione che le successive n_{r+1}, n_{r+2},.... siano i numeri interi immediatamente inferiori alle $\frac{1}{\omega_r}$, $\frac{1}{\omega_{r+1}}$, $\frac{1}{\omega_{r+2}}$,... il valore ottenuto differirà da y_r di una quantità minore di qualunque data quantità, e la serie (1) che sarebbe divergente sino al termine contenente la n_r in quanto le n_1, $n_2 \ldots . n_r$ sono numeri affatto arbitrarj, diverrebbe convergente nei successivi termini contenenti n_{r+1}, n_{r+2}, $n_{r+3} \ldots .$ e finirebbe per fornire il valore di α approssimato quanto si voglia.

8. La stessa α potrà esprimersi per una serie convergente a segni alternati i cui termini siano frazioni dell'unità, il valore di α essendo compreso fra la somma di r e di $r+1$ termini. In fatti posto

$$D_1 = 1\,,\quad D_2 = n_2\,,\quad D_3 = n_3 D_2 + D_1\,,\quad D_4 = n_4 D_3 + D_2$$

$$D_5 = n_5 D_4 + D_3\,,\ \ldots\ldots D_r = n_r D_{r-1} + D_{r-2}\,,\ \ldots . \tag{1}$$

ed

$$N_1 = n_1\,,\quad N_2 = n_2 N_1 + 1\,,\quad N_3 = n_3 N_2 + N_1\,,\quad N_4 = n_4 N_3 + N_2$$

$$N_5 = n_5 N_4 + N_3\,,\ \ldots\ldots\ldots N_r = n_r N_{r-1} + N_{r-2}\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

i diversi termini della (1) del precedente paragrafo saranno, come è noto, dati rispettivamente dalle frazioni

$$\frac{N_1}{D_1}\,,\ \frac{N_2}{D_2}\,,\ \frac{N_3}{D_3}\,,\ \frac{N_4}{D_4}\,,\ \ldots .\ \frac{N_r}{D_r}\,,\ \ldots .$$

i cui valori saranno alternativamente minori e maggiori di α e convergenti verso α; la stessa proprietà avrà dunque luogo nelle espressioni

$$\frac{N_1}{D_1},\quad \frac{N_1}{D_1}+\left(\frac{N_2}{D_2}-\frac{N_1}{D_1}\right),\quad \frac{N_1}{D_1}+\left(\frac{N_2}{D_2}-\frac{N_1}{D_1}\right)+\left(\frac{N_3}{D_3}-\frac{N_2}{D_2}\right),$$

$$\vdots$$

$$\frac{N_1}{D_1}+\left(\frac{N_2}{D_2}-\frac{N_1}{D_1}\right)+\left(\frac{N_3}{D_3}-\frac{N_2}{D_2}\right)+\left(\frac{N_4}{D_4}-\frac{N_3}{D_3}\right)+\cdots\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{N_r}{D_r}-\frac{N_{r-1}}{D_{r-1}}\right)+\left(\frac{N_{r+1}}{D_{r+1}}-\frac{N_r}{D_r}\right)+\cdots\cdot$$

Siccome qualunque siasi r è $N_r D_{r-1} - D_r N_{r-1} = \pm 1$, valendo il $+$ od il $-$ secondo che r è pari o dispari, sarà

$$\alpha = \frac{N_1}{D_1} + \frac{1}{D_1 D_2} - \frac{1}{D_2 D_3} + \frac{1}{D_3 D_4} \cdots \pm \frac{1}{D_{r-1} D_r} \mp \frac{1}{D_r D_{r+1}} \pm \cdots \quad (2)$$

Inoltre per le posizioni (1) e per essere n_1, n_2, $n_3 \ldots$ numeri interi, un denominatore generico $D_r D_{r-1}$ sarà per qualunque valore di r un numero intero, così la α data dalla serie (2) sarà espressa come si era enunciato.

9. Posto $F(n_r) = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots + \cfrac{1}{n_r}}}$

il valore di α sarà compreso, qualunque siasi r, fra i limiti $F(n_r)$, $F(n_r+1)$, per cui ottenuto colle trasformazioni sopra indicate un limite approssimato $F(n_r)$ maggiore o minore di α, si avrà un altro limite $F(n_r+1)$ minore o maggiore di α, senza ricorrere ad un'ulteriore trasformazione. Di fatto la $F(n_r)$ sarà $>$ ovvero $<$ di α secondo che r sarà pari o dispari, e se nella serie (2) dell'antecedente paragrafo si rappresenta con P la somma dei termini che precedono il termine $\mp \frac{1}{D_r D_{r+1}}$, si avrà $F(n_{r+1}) = P \mp \frac{1}{D_r D_{r+1}}$. Ponendo x in luogo di n_{r+1} ed osservando che

$$D_{r+1} = n_{r+1} D_r + D_{r-1} = x D_r + D_{r-1}$$

sarà

$$F(x) = P \mp \frac{1}{D_r(x D_r + D_{r-1})}$$

ove avrà luogo il segno $-$ ovvero il $+$ secondo che r sarà pari o dispari. Considerando la x come una variabile che abbia l'escursione da $x = 0$ ad $x = \frac{1}{0}$ la $F(x)$ sarà una funzione di x continuamente crescente o decrescente al crescere di x secondo che r sarà pari o dispari, giacchè la $\frac{dF(x)}{dx}$ che nel 1.° caso è data da $\left(\frac{1}{x D_r + D_{r-1}}\right)^2$ è costantemente positiva e la stessa $\frac{dF(x)}{dx}$ che nel 2.° caso è data da $-\left(\frac{1}{x D_r + D_{r-1}}\right)^2$ è costantemente negativa. Se si suppone $x = 0$ sarà $F(0) = F(n_{r-1})$, giacchè $\frac{1}{n_r + \frac{1}{0}} = 0$.
Supposto r pari, sarà $F(n_r) > \alpha$ ed $F(n_{r-1}) < \alpha$, quindi $F(0) < \alpha$. Variando x da $x = 0$ ad $x = \frac{1}{0}$, giungerà ad eguagliare il numero intero n_{r+1} che si otterrebbe dalla $(r+1)^{esima}$ trasformazione, ed in tal caso sarebbe $F(n_{r+1}) < \alpha$, e per essere $n_{r+1} >$ od $= 1$ e la $F(x)$ una funzione crescente con x sarà $F(1) < \alpha$. Quindi sarà α compresa fra $F(n_r)$ ed $F(n_r + 1) = F(1)$.
Supposto r dispari si avrà

$$F(n_r) < \alpha, \quad F(0) > \alpha, \quad F(n_{r+1}) > \alpha.$$

Essendo $F(x)$ costantemente decrescente da $x = 0$ ad $x = \frac{1}{0}$, ed inoltre $n_{r+1} >$ od $= 1$, sarà $F(1) > \alpha$. La α adunque sarà parimente compresa fra $F(n_r)$ ed $F(n_r + 1) = F(1)$.

10. Essendo reali, positive e disuguali le radici dell'equazione di 2.° grado $x^2 + Ax + B = 0$ entrambe comprese nell'intervallo unitario n_1, $n_1 + 1$, si dovrà giungere colla successiva sostituzione dei valori della relazione ricorrente del § 2 ad una trasformata r^{esima} della forma $y_r^2 + Py_r + Q = 0$ le cui radici giacciano in intervalli distinti per quanto piccola sia la differenza delle radici stesse, cioè ad un'equazione in cui i limiti inferiori n_{r+1}, m_{r+1} delle due radici differiscano di un numero $>$ od $= 1$. Si calcolerà la più piccola delle due radici della proposta pigliando de' due limiti n_{r+1}, m_{r+1} il più piccolo se r è pari, ed il più grande se r è dispari, l'altro limite servirà per calcolare l'altra radice. I due limiti n_{r+1}, m_{r+1} daranno due trasformate $(r+1)^{esime}$ fra loro distinte della forma

$$y_{r+1}^2 + P_1 y_{r+1} + Q_1 = 0\,, \quad y_{r+1}^2 + P_2 y_{r+1} + Q_2 = 0$$

una delle quali servirà a calcolare i successivi valori approssimati della più piccola radice, l'altra della più grande.
Di fatto la proposta sarà rappresentata da $(x-a)(x-b) = 0$, ove a, b saranno le radici in quistione, ossia si avrà il sistema delle due equazioni $x - a = 0$, $x - b = 0$. Se si tratta la $x - b = 0$ come si è fatto nel § 7 della $x - a = 0$ e si chiamino m_1, m_2, $m_3 \ldots . m_r$ i numeri interi immediatamente inferiori alle radici delle successive trasformate che nascono dalla relazione ricorrente del § 2, in cui si cambi la n in m, risulterà egualmente che la frazione continua

$$m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ldots \ldots + \cfrac{1}{m_r}}}$$

col crescere di r convergerà verso il limite b ed avran luogo rispetto al fattore $x - b$ le stesse proprietà che sussistono pel fattore $x - a$. Se nelle successive trasformazioni della proposta $x^2 + Ax + B = 0$ sino alla r^{esima} si trova che fra un intervallo unitario

$$n_1 \text{ ed } n_1 + 1, \quad n_2 \text{ ed } n_2 + 1, \ldots, n_r \text{ ed } n_r + 1,$$

l'indice Δ è sempre $= 2$, si avrà

$$n_1 = m_1, \quad n_2 = m_2, \quad n_3 = m_3, \ldots n_r = m_r \qquad (1)$$

ove il numero r sarà tanto più grande, quanto più piccola sarà la differenza fra le due radici a, b. Ma per quanto piccola sia tale differenza non potranno aver luogo le relazioni (1) per un valore di r grande quanto si vuole, ma si dovrà giungere ad un numero m_t diverso da n_t, giacchè se indefinitamente avessero luogo le relazioni (1), la frazione continua $n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots \cfrac{1}{n_r}}$

protratta indefinitamente avrebbe per limite sia la a, sia la b, vale a dire che si avrebbe contro l'ipotesi $b = a$. Si può anche osservare che le successive approssimazioni alla radice a che supporremo $< b$ possono essere spinte sino ad un numero r dispari così grande da differire dal vero di una quantità $< b - a$. Sia h un tal valore approssimato; sarà $h < a$. Si ammetta che le n_1, n_2, $n_3 \ldots n_r$ coincidano rispettivamente colle m_1, m_2, $m_3 \ldots m_r$. Si passi ad un successivo valore approssimato di a che chiameremo h_1. Essendo $r + 1$ un numero pari ed

$$h_1 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots + \cfrac{1}{n_r + \cfrac{1}{n_{r+1}}}}} \quad \text{sarà} \quad h_1 > a$$

ma siccome questo valore h_1 deve per la legge della convergenza essere più vicino ad a di quello che lo era il precedente valore h, dovrà essere $h_1 < b$. La stessa h sarà un valore approssimato di b e $< b$. Sia k il successivo valore approssimato di b, sarà

$$k = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_r + \cfrac{1}{m_{r+1}}}} \qquad \text{onde} \quad k > b$$

Se si supponesse che fosse $m_{r+1} = n_{r+1}$ sarebbe $h_1 = k$, e perciò h_1 riuscirebbe in pari tempo $<$ e $>$ di b; non potrà dunque per valori abbastanza grandi di r essere $m_{r+1} = n_{r+1}$. Le m_{r+1}, n_{r+1} dovranno divenire diverse, ma però una tale diversità potrà avverarsi anche prima che la h eguale al valore approssimato di a sia divenuta $<$ di $b - a$.

Supposto $b > a$ ed ammesso che le relazioni (1) si verifichino sino alla $m_r = n_r$, essendo m_{r+1} diversa da n_{r+1}, si vuol provare che sarà $n_{r+1} <$ ovvero $>$ di m_{r+1} secondo che r sarà pari o dispari. Di fatto la proposta equazione $(x - a)(x - b)$ dopo la r^{esima} trasformazione diverrà $\left(y_r - \frac{1}{\omega_r}\right)\left(y_r - \frac{1}{\theta_r}\right) = 0$ essendo θ_r il valore di ω_r dato dalla (5) del § 2 in cui si cambi a in b. Sarà n_{r+1} il limite inferiore della radice del 1.° fattore, ed m_{r+1} quello inferiore alla radice del 2.° fattore. Essendo $b > a$ si avranno le ineguaglianze

$$\frac{1}{-n_1 + a} > \frac{1}{-n_1 + b}, \quad \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + a}} < \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + b}}$$

$$\cfrac{1}{-n_3 + \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + a}}} > \cfrac{1}{-n_3 + \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + b}}}, \ldots\ldots\ldots$$

e così progredendo, posto

$$F_a = \cfrac{1}{-n_r + \cfrac{1}{-n_{r-1} + \cfrac{1}{-n_{r-2} + \cdots + \cfrac{1}{-n_2 + \cfrac{1}{-n_1 + a}}}}}$$

ed F_b eguale a ciò che diventa F_a col cambiare a in b, si avrà $F_a <$ ovvero $> F_b$ secondo che r sarà pari o dispari. Dunque anche il limite intero n_{r+1} inferiore ad $\frac{1}{\omega_r}$ sarà minore o maggiore del limite intero m_{r+1} inferiore alla $\frac{1}{\theta_r}$ secondo che r sarà pari o dispari. Quindi nell'equazione $y_r^2 + P y_r + Q = 0$ (2), le cui radici si troveranno col teorema degl'indici separate in intervalli distinti p, $p+1$ e q, $q+1$, si dovrà per calcolare la più piccola radice della proposta assumere il minore od il maggiore dei due limiti inferiori p, q secondo che r sarà pari o dispari ed impiegare l'altro limite per calcolare la radice più grande. Se pertanto nella (2) si pone $y_r = n_{r+1} + \frac{1}{y_{r+1}}$, essendo n_{r+1} quello dei due limiti p, q che serve a calcolare la più piccola radice della proposta, si avrà una trasformata della forma $y_{r+1}^2 + P_1 y_{r+1} + Q_1 = 0$. Se in vece nella (2) si pone $y_r = m_{r+1} + \frac{1}{y_{r+1}}$ essendo m_{r+1} l'altro limite si avrà la trasformata $y_{r+1}^2 + P_2 y_{r+1} + Q_2 = 0$. Entrambe queste trasformate che chiameremo *effettive* avranno una sola radice compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, giacchè la differenza fra n_{r+1} ed m_{r+1} sarà $>$ od $= 1$. La 1.ª servirà a calcolare i valori successivamente approssimantisi alla a, la 2.ª quelli approssimantisi alla b.

11. Un'equazione algebrica qualunque di grado $= m$ indicata come nel § 4 colla $F(x) = 0$ si rappresenti pe' suoi fattori di 1.° e di 2.° grado come segue

$$F(x) = \cdots (x-\alpha)\left\{(x-p)^2+q_1^2\right\}\cdots(x-\beta)\left\{(x-m)^2+n_1^2\right\}(x-\gamma)\cdots = 0 \quad (1)$$

Se s'indica con $\phi(y_r)$ ciò che diventa $F(x)$ quando si sostituiscano ad x, y_1, $y_2 \ldots\ldots y_{r-1}$ i valori della relazione ricorrente dei §§ 2 e 3, in modo che ommessi i fattori che non si annullano per alcun valore finito di y_r, si riduca alla forma

$$\phi(y_r) = y_r^m + A y_r^{m-1} + \cdots\cdots = 0$$

si avrà

$$\phi(y_r) = \cdots\cdots \left(y_r - \frac{1}{\varpi_r}\right) \left\{ \left(y_r - \frac{\omega_r}{\omega_r^2 + q_r^2}\right)^2 + \left(\frac{q_r}{q_r^2 + \omega_r^2}\right)^2 \right\} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \left(y_r - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \left\{ \left(y_r - \frac{\theta_r}{\theta_r^2 + n_r^2}\right)^2 + \left(\frac{n_r}{n_r^2 + \theta_r^2}\right)^2 \right\} \left(y_r - \frac{1}{\tau_r}\right) \cdots\cdots = 0 \qquad (2)$$

ove le $\varpi_r \ldots\ldots \varepsilon_r \ldots\ldots \tau_r \ldots\ldots$ hanno la stessa significazione che si è attribuita ad ω_r nel § 2, e le $\ldots(\omega_r, q_r)\ldots(\theta_r, n_r)\ldots$ la stessa significazione che si è attribuita alla (ω_r, q_r) nel § 3. Ciò risulta manifestamente dalla forma del 2.° membro della (1) composto di fattori di 1.° e di 2.° grado, avuto riguardo alle trasformazioni che un fattore di 1.° o di 2.° grado subisce dietro i riflessi del § 2 e del § 3.

12. Sia l'equazione $F(x) = 0$ esente da radici multiple. Se si conosce un processo atto a determinare i valori delle radici reali comprese fra 0 ed $\frac{1}{0}$, lo stesso processo farà conoscere le radici della proposta comprese fra 0 e $-\frac{1}{0}$, cercando della $F(-x) = 0$ le radici comprese fra 0 ed $\frac{1}{0}$. Inoltre il processo che farà conoscere della $F(x) = 0$ i valori delle radici comprese fra 1 ed $\frac{1}{0}$ farà pure conoscere i valori delle radici della stessa comprese fra 0 ed 1, quando si applichi lo stesso processo alla ricerca delle radici della $F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ comprese fra 1 ed $\frac{1}{0}$. Ma siccome la $F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ è quella che risulterebbe dalla stessa $F(x) = 0$ quando, postovi $x = n_0 + \frac{1}{y_0}$ si supponga $n_0 = 0$, così nel processo delle

trasformate per la ricerca delle radici della $F(x) = 0$ comprese fra i limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ si avrà l'avvertenza, quando si tratti dell'intervallo unitario $x = 0$, $x = 1$, di far precedere alla trasformata $\phi(y_1) = 0$ la trasformata ad indice zero che nasce dal porre $x = n_0 + \frac{1}{y_0}$ supponendo $n_0 = 0$ e nelle trasformate seguenti $\phi(y_1) = 0$, $\phi(y_2) = 0 \ldots$ nate dalla posizione di $y_0 = n_1 + \frac{1}{y_1}$, $y_1 = n_1 + \frac{1}{y_2} \ldots$ si cercheranno i valori di Δ pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ come si è fatto nel caso in cui si trattava di radici comprese fra 1 ed $\frac{1}{0}$. La ricerca pertanto di tutte le radici della $F(x) = 0$ comprese fra $-\frac{1}{0}$ e $+\frac{1}{0}$ è ridotta alla ricerca di radici comprese fra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ nelle due equazioni $F(x) = 0$, $F(-x) = 0$. Supponiamo che il teorema degl'indici applicato alla $F(x) = 0$ pei limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ fornisca $\Delta = h$, sarà h della forma $p + 2j$, indicando p il numero delle radici reali ed j il numero dei valori critici compresi in quell'intervallo. Il numero j di valori critici è indicatore di altrettante coppie di radici immaginarie e corrisponde a $2j$ radici deficienti. Il valor critico poi è quel valore che annullando una derivata della $F(x)$ rende dello stesso segno le due derivate laterali.

Si suddivida l'intervallo totale negl'intervalli unitarj n_τ, $n_\tau + 1$ che nascono dando a τ ed a n_τ i diversi valori della serie $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$. Siano Δ_0, Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \ldots\ldots \Delta_r$ i valori di Δ_τ competenti ai diversi intervalli n_τ ed $n_\tau + 1$. La suddivisione dell'intervallo totale 0, $\frac{1}{0}$ si dovrà arrestare quando risulti

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \ldots\ldots + \Delta_r + \ldots\ldots = h.$$

Esamineremo ne' seguenti paragrafi separatamente i casi in cui una qualsivoglia Δ_τ risulti eguale ad uno qualsivoglia dei numeri della serie $1, 2, 3, 4 \ldots$

13. Pei limiti n_τ ed $n_\tau + 1$ risulti $\Delta_\tau = 1$. Una radice reale, di cui $n_\tau = n_1$ sarà il numero intero immediatamente ad essa inferiore, sarà compresa fra n_1 ed $n_1 + 1$. Una tale radice coincida per ipotesi colla costante α del § 11. Risulta dai riflessi del § 2 applicati a ciascun fattore di 1.° grado delle equazioni (1) del § 11, che se nella (2) dello stesso paragrafo si fa $r = 1$, la trasformata $\phi(y_1) = 0$, che nel caso di $\tau = 0$ ossia di $n_\tau = n_0 = 0$ sarebbe la 2.ª trasformata, avrà una sola radice reale compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ data da $\frac{1}{\varpi_1}$. Tutte le altre radici $\ldots\frac{1}{\varepsilon_1}\ldots\frac{1}{\tau_1}\ldots$ saranno comprese fra 1 e $-\frac{1}{0}$. Posto nella $\phi(y_1) = 0$ successivamente $y_1 = 1, 2, 3 \ldots$ si troveranno i numeri n_2, $n_2 + 1$ comprendenti un intervallo unitario che renderanno di segno contrario la $\phi(y_1)$, tra i quali sarà compresa la radice $\frac{1}{\varpi_1}$. Fatto $r = 2$ la trasformata $\phi(y_2) = 0$ avrà una radice reale $= \frac{1}{\varpi_2}$ compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, tutte le altre essendo comprese fra 0 e $-\frac{1}{0}$. Trovati della $\phi(y_2) = 0$ i limiti n_3, $n_3 + 1$ pei quali essa cambia di segno, la trasformata $\phi(y_3) = 0$ risultante da $r = 3$ avrà una radice reale $= \frac{1}{\varpi_3}$ compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ e tutte le altre comprese fra 0 e -1. Tutte le trasformate successive $\phi(y_4) = 0$, $\phi(y_5) = 0 \ldots$ avranno sempre una radice reale compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$ e tutte le altre radici saranno comprese fra 0 e -1. Risulta poi dai riflessi del § 3 applicati a ciascun fattore di 2.° grado dell'equazione (1) del § 11 che tutti i parametri della (1) non compresi fra i limiti n_1, $n_1 + 1$ diverranno nella $\phi(y_1) = 0$ compresi fra 1 e $-\frac{1}{0}$, nella $\phi(y_2) = 0$ saranno compresi fra 0 e $-\frac{1}{0}$, nella $\phi(y_3) = 0$ e successive $\phi(y_4)$, $\phi(y_5) \ldots$ indefinitamente saranno compresi fra 0 e -1. Tutti i parametri compresi fra n_1

ed $n_i + 1$ dopo un numero $= r$ abbastanza grande di trasformazioni saranno compresi fra 1 e $-\frac{1}{0}$, e da questa trasformata $\phi(y_r) = 0$ in avanti si giungerà ad una trasformata $\phi(y_t) = 0$ in cui i parametri tutti che essa contiene saranno compresi fra 0 e -1. Un tale processo fornirà il valore approssimato della radice α che si cerca come se fosse stata proposta a risolversi per frazioni continue l'equazione lineare $x - \alpha = 0$ trattata al § 7, e si potrà continuare l'approssimazione sino ad ottenere un valore che differisca dalla radice che si cerca meno di qualsivoglia data quantità.

14. Pei limiti $x = n_\tau$, $x = n_\tau + 1$ risulti $\Delta_\tau = 2$. Un tal valore è indicatore o di due radici reali comprese in quell'intervallo o di radici mancanti in quell'intervallo stesso; essendovi in lor vece compreso un valor critico. In questa 2.ª ipotesi o fra il detto intervallo non è compreso alcun parametro dei fattori di 2.° grado indicati nell'equazione (1) del § 11, o vi sarà compreso un certo numero di essi. Nel 1.° caso la trasformata $\phi(y_1) = 0$, che sarà la 2.ª trasformata pel caso di $\tau = 0$, avrà le radici ed i parametri compresi fra 0 e $-\frac{1}{0}$ come risulta dei §§ 2 e 3. Dunque pel § 4 la $\phi(y_1) = 0$, pei limiti $y_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{0}$ entrambi maggiori dei parametri e radici di essa, darà $\Delta = 0$. Nel 2.° caso pei limiti $y_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{0}$ potrà ancor risultare $\Delta = 2$. Si troveranno due limiti n_2, $n_2 + 1$ coll'impiego del teorema degl'indici applicato a ciascun intervallo unitario in cui si divide l'intervallo compreso fra 1 ed $\frac{1}{0}$, pei quali se risulterà $\Delta = 2$ si passerà colla posizione $y_1 = n_2 + \dfrac{1}{y_2}$ alla trasformata $\phi(y_2) = 0$, la quale pei limiti $y_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{0}$ darà $\Delta = 2$ ovvero $\Delta = 0$. Se è $\Delta = 2$ si cercherà l'intervallo unitario n_3, $n_3 + 1$ coll'applicazione del teorema degl'indici pel quale

è $\Delta = 2$ e si passerà alla trasformata $\phi(y_3) = 0$, e così si continuerà fino che risulta $\Delta = 2$. Ma per la proposizione 1.ª del § 3 si dovrà necessariamente giungere ad una trasformata $\phi(y_r) = 0$, nella quale tutti i parametri e tutte le radici essendo comprese fra 1 e $-\frac{1}{0}$, pei limiti $y_r = 0$, $y_r = \frac{1}{0}$ dovrà pel § 4 risultare $\Delta = 0$. Si potrà però giungere a $\Delta = 0$ anche prima che siasi verificata la condizione accennata sui parametri. Si dovrà pertanto giungere in qualunque caso a $\Delta = 0$, sia che i parametri giacciano o no fra i limiti n_r, $n_r + 1$, quando fra detti limiti non esistano due radici reali disuguali della proposta. Il valore $\Delta = 2$ competente ad un valor critico od a due radici deficienti della $F(x) = 0$ dovrà nelle successive trasformate scomparire. È questo il criterio per la distinzione delle radici deficienti od immaginarie. Giacchè se si ammette la 1.ª ipotesi che cioè le due a, b radici indicate da $\Delta = 2$ siano reali, per qualunque valore di r, la $\phi(y_r) = 0$ pei limiti $y_r = 1$, $y_r = \frac{1}{0}$ darà costantemente $\Delta = 2$ come risulta dal § 2 e del § 10. Per quanto piccola sia la differenza $b - a$, purchè non sia $= 0$, si dovrà giungere ad una trasformata, la quale pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ dando $\Delta = 2$ vengono le radici di essa ad essere separate in intervalli unitarj distinti n_r, $n_r + 1$ ed m_r, $m_r + 1$. Le radici a, b della $F(x) = 0$ verranno così calcolate colle successive trasformate nella stessa guisa che fosse proposto a calcolarsi la sola equazione di 2.° grado del § 10, e giunti alle due trasformate, le quali pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ danno $\Delta = 1$ che chiameremo come nel citato paragrafo trasformate effettive, verrà calcolata ciascuna radice di esse, e perciò le a, b come se fosse stato proposto a calcolarsi l'equazione lineare del § 7.

Gli esempi seguenti serviranno d'applicazione delle cose dette in questo paragrafo, sia relativamente alla distinzione delle radici immaginarie, sia rispetto al calcolo della più piccola o della più grande delle radici a, b di cui si è parlato al § 10.

15. Sia $F(x) = x^4 - 13x^3 + 59,26x^2 - 108,56x + 61,3 = 0$.

Impiegando il teorema degl' indici, per $x = 3$, $x = 3 + 1$, si trova $\Delta_r = 2$, onde sarà $n_1 = 3$. Chiamato X_i, X_i', X_i'', X_i''', X_i^{iv} i valori che assume la $F(x)$ e sue derivate per $x = 3$, la trasformata $\phi(y_1) = 0$, che è la 1.ª, per essere $n_r = n_1$ diverrà

$$\phi(y_i) = X_i y_i^4 + X_i' y_i^3 + \frac{1}{2} X_i'' y_i^2 + \frac{1}{2.3} X_i''' y_i + \frac{1}{2.3.4} X_i^{iv} = 0.$$

Posti i valori

$$X_i = -1,04, \quad X_i' = 4, \quad X_i'' = -7,48, \quad X_i''' = -6, \quad X_i^{iv} = 24$$

si avrà $-\phi(y_i) = 1,04y_i^4 - 4y_i^3 + 3,74y_i^2 + y_i - 1 = 0$.

L' impiego del teorema degl' indici pei limiti $y_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{0}$ fornisce $\Delta = 2$. Suddiviso l' intervallo in intervalli unitarj, per $y_1 = 1$, $y_1 = 1 + 1$, si trova $\Delta_r = 2$; è dunque $n_2 = 1$ e la trasformata $\phi(y_2) = 0$ sarà data da

$$\phi(y_2) = 0,78y_2^4 + 0,64y_2^3 - 2,02y_2^2 + 0,16y_2 + 1,04 = 0.$$

Se ora si applica a questo il teorema degl' indici, per $y_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{0}$, si trova $\Delta = 0$. Si conchiude che fra i limiti $x = 3$, $x = 4$ la proposta $F(x) = 0$ ha due radici deficienti, e perciò due delle 4 radici della stessa sono immaginarie.

Sia $F(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$. Col teorema degl' indici per $x = 0$, $x = 1$, si trova $\Delta_r = \Delta_0 = 2$. In questo caso, dietro il riflesso del § 12, si dovrà far precedere alle trasformate $\phi(y_1)$, $\phi(y_2)$, ... la trasformata ad indice zero, cioè $\phi(y_0) = 0$. Posto $x = n_0 + \frac{1}{y_0}$ si avrà, essendo $n_0 = 0$

$$\phi(y_0) = 2y_0^3 - 3y_0^2 + 1 = 0.$$

Siccome pei limiti $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 0$, le due radici indicate da $\Delta_0 = 2$ sono deficienti e corrispondono a due radici immaginarie della proposta.

Sia $$F(x) = x^3 + 11\,x^2 - 102\,x + 181 = 0.$$

Esplorata col teorema degl' indici o dal numero $= 2$ delle variazioni di segno che presenta la $F(x) = 0$, pei limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$, si ha $\Delta = 2$. Suddiviso l' intervallo in intervalli unitarj, per $x = 3$, $x = 3 + 1$, si trova $\Delta_r = 2$ onde $n_1 = 3$, e posto $x = 3 + \dfrac{1}{y_1}$ si avrà

$$\phi(y_1) = y_1^3 - 9y_1^2 + 20y_1 + 1 = 0.$$

Pei limiti $y_1 = 1$, $y_1 = \frac{1}{0}$ risulta ancora $\Delta = 2$. Suddiviso l' intervallo in intervalli unitarj, pei limiti $y_1 = 4$, $y_1 = 4 + 1$, si trova $\Delta_r = 2$, dunque $n_2 = 4$. Passando alla trasformata $\phi(y_2) = 0$ si avrà

$$\phi(y_2) = y_2^3 - 4y_2^2 + 3y_2 + 1 = 0.$$

Pei limiti $y_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{0}$ è ancora $\Delta = 2$. Suddiviso l' intervallo in intervalli unitarj, pei limiti $y_2 = 1$, $y_2 = 2$, risulta $\Delta_r = 1$ e pei limiti $y_2 = 2$, $y_2 = 3$, parimente $\Delta_r = 1$.

Posto successivamente $y_2 = 1 + \dfrac{1}{y_3}$, $y_2 = 2 + \dfrac{1}{y_3}$ si avranno due trasformate effettive, ciascuna delle quali pei limiti $y_3 = 1$, $y_3 = \frac{1}{0}$ darà $\Delta = 1$. Una di queste servirà a calcolare la più piccola radice, l' altra la più grande. Siccome la $\phi(y_2) = 0$ è quella in cui le radici giacciono in intervalli unitarj distinti, ed essendo $r = 2$ un numero pari, si dovrà dei due limiti inferiori 1, 2 prendere il più piccolo per calcolare la più piccola delle due radici della $F(x) = 0$ comprese fra $x = 3$, $x = 4$. L' altro limite inferiore $= 2$

darà la trasformata che serve a calcolare la più grande. Il valore approssimato della più piccola risulterà dalla frazione continua

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}} = 2 + \frac{1}{5} = 2 + \frac{9}{45}.$$

Il valore approssimato della più grande risulterà dalla frazione continua

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{2}{9} = 2 + \frac{10}{45}.$$

Sia $\quad F(x) = x^4 - 28\,x^3 + 370\,x^2 - 1070\,x + 1629 = 0.$

Esplorata questa col teorema degl' indici, pei limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ si trova $\Delta = 4$. Suddiviso l' intervallo in intervalli unitarj si trova che $x = 1$ annulla la $F(x)$ ed è perciò una radice. Esplorando i susseguenti intervalli si trova che per $x = 6$ la serie dei segni della $F(x) = X$ e sue derivate X', X'', X''', X^{IV} è data da

$$\begin{array}{ccccc} X^{IV}, & X''', & X'', & X', & X \\ + & - & + & + & - \end{array}$$

e per $x = 6 + 1$ da

$$\begin{array}{ccccc} X^{IV}, & X''', & X'', & X', & X \\ + & 0 & + & + & - \end{array}$$

Siccome $x = 7$ annulla la derivata X''' e rende dello stesso segno le due derivate laterali, così esso corrisponde ad un valor critico indicatore di due radici immaginarie. Ma se si suppone il 2.° limite $= 6 + 1 + \varepsilon$, essendo ε infinitamente piccola, la X''' assumerà un segno positivo e si avrà in questo caso $\Delta_1 = 2$. Per constatare che il processo delle continue trasformazioni conduce alla stessa conseguenza adotteremo per 2.° limite il valore $6 + 1 + \varepsilon$ onde risulti $\Delta_1 = 2$. Sarà in tal caso $n_1 = 6$, e posto $x = 6 + \frac{1}{y_1}$ si avrà

$$\phi(y_{\prime}) = 1635y_{\prime}^4 - 1210y_{\prime}^3 - 82y_{\prime}^2 + 4y_{\prime} - 1 = 0.$$

Ora pei limiti $y_{\prime} = 1$, $y_{\prime} = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 0$, e perciò si ha anche con tal processo il criterio che le due radici delle $F(x) = 0$ indicate fra i limiti $x = 6$, $x = 7 + \varepsilon$ sono deficienti, e perciò due radici immaginarie, per lo meno, ha la proposta equazione, e siccome una è già reale $= 1$ così lo sarà l' altra parimente, e la proposta avrà due radici immaginarie e due reali e positive.

Sia $F(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 11 = 0.$

Per $x = 0$, $x = 1$, si trova $\Delta_r = \Delta_0 = 2.$

Si ha quindi $\phi(y_0) = 11y_0^3 - 6y_0^2 + 2y_0 - 1 = 0.$

Pei limiti $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 0$, dunque le due radici che nella proposta erano indicate fra i limiti $x = 0$, $x = 1$ sono deficienti.

16. Pei limiti $x = n_r$, $x = n_r + 1$ sia $\Delta_r = 3$. Fra gli stessi limiti o sarà compreso, oltre la radice reale, un valor critico indicatore di due radici immaginarie, o saranno comprese tre radici reali. Nella 1.ª ipotesi passando alle equazioni trasformate dovrà accadere: 1.° o che una di esse pei limiti 1, $\frac{1}{0}$ dia $\Delta = 1$: 2.° o che dando $\Delta = 3$ il valor critico trovisi in un intervallo unitario n_r, $n_r + 1$ distinto da quello in cui trovasi la radice di questa trasformata: 3.° o che fra tutte le trasformate successive il valor critico trovisi costantemente compreso nello stesso intervallo unitario in cui trovasi la radice reale, per cui una trasformata $\phi(y_r) = 0$, per qualsivoglia valore di r, dia costantemente $\Delta = 3$ per un intervallo unitario n_r, $n_r + 1$.

Nel 1.° caso la disparizione di due unità nel valor di Δ pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ in una trasformata avvera il criterio dell'esistenza di un valor critico competente a radici deficienti, giacchè se le due radici fossero state esse pure reali, il processo delle trasformazioni avrebbe sempre mantenuto $\Delta = 3$ fra i limiti 1, $\frac{1}{0}$ della variabile y sino a che esse comparissero separate o in due intervalli distinti o in tre.

Nel 2.° caso una trasformata, pei limiti $y_r = n_r$, $y_r = n_r + 1$ dando $\Delta = 2$ saremmo nel caso del paragrafo antecedente, ove si è veduto che nelle successive trasformate dovrà scomparire pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ il valore $\Delta = 2$.

Abbia luogo dunque se è possibile il 3.° caso. Dalle riflessioni dei §§ 2 e 3 applicate a ciascun fattore di 1.° e 2.° grado della $F(x) = 0$ rappresentata coll'equazione (1) del § 11 risulta che dopo un certo numero di trasformazioni tutte le radici non comprese nell'intervallo originario n_r, $n_r + 1$ e tutti i parametri della proposta si cambiano nella trasformata ad indice opportunamente grande in radici e parametri compresi fra i limiti 0 e -1, e gli argomenti vanno continuamente diminuendo al crescere dell'indice r sino a divenire minori di qualsivoglia quantità. Sia $\phi(y_t) = 0$ una tale trasformata; verificandosi in essa le condizioni del § 6, pei limiti $y_t = 1$, $x_t = \frac{1}{0}$ si avrà $\Delta = 1$, e perciò siamo ricondotti al caso 1.°

Potrà accadere d'altronde che il valor critico che abbiamo supposto nella $F(x) = 0$ compreso fra $x = n_r$, $x = n_r + 1$, e che si è veduto dover in una delle trasformate successive assumere un valore compreso fra 1 e $-\frac{1}{0}$, assuma in una trasformata d'indice inferiore un valore che, sebben compreso fra 1 ed $\frac{1}{0}$, trovisi in un intervallo unitario distinto da quello in cui trovasi la radice reale di questa trasformata. Ma quando ciò accade siamo nel 2.° de' casi anteriormente contemplati. Sarà dunque impossibile che il valor critico e la radice reale rimangano costantemente nelle trasformate successive compresi nello stesso intervallo unitario: sarà quindi impossibile che per un tale intervallo unitario compreso fra 1 ed $\frac{1}{0}$

abbiasi costantemente $\Delta_r = 3$. Una tale conseguenza vale anche pel caso in cui il valor critico corrispondente a due radici deficienti coincidesse nella $F(x) = 0$ col valore della radice reale, nel qual caso sappiamo che per quanto si restringa l'intervallo n_r, $n_r + 1$, fra il quale è compresa la radice, si ha costantemente $\Delta_r = 3$.

Abbia luogo pertanto la 2.ª ipotesi che cioè tutte e tre le radici siano reali. Supposto in tal caso che le successive trasformate sino alla $\phi(y_r) = 0$ esclusiva abbiano dato nei loro intervalli unitarj il valore $\Delta = 3$, le 3 radici > 1 della $\phi(y_r) = 0$ che per $y_r = 1$, $y_r = \frac{1}{0}$ supporremo che diano ancora $\Delta = 3$, per quanto piccola sia la loro differenza diverranno comprese o in tre intervalli unitarj distinti, o in due. Nel 1.° caso coi limiti inferiori di questi intervalli si otterranno tre trasformate effettive $\phi(y_{r+1}) = 0$ colle quali calcolarne i valori come se si trattasse dell'equazione lineare di cui ci siamo occupati al § 7. Nel 2.° caso esistendo nella $\phi(y_r) = 0$ due intervalli unitarj n_r, $n_r + 1$, m_r, $m_r + 1$ per uno dei quali risultando $\Delta_r = 1$ e per l'altro $\Delta_r = 2$ saremo nel caso dei §§ 13 e 14 e varranno le stesse conseguenze rispetto al calcolo delle radici.

Sia $F(x) = x^4 - 6{,}4\,x^3 + 14{,}06\,x^2 - 13{,}044\,x + 4{,}392 = 0$.

Esplorata col teorema degl'indici, pei limiti $x = 1$, $x = \frac{1}{0}$ si ha $\Delta = 4$. Suddiviso l'intervallo 1, $\frac{1}{0}$ in intervalli unitarj, pei limiti $x = 1$, $x = 1 + 1$, si trova $\Delta_r = 3$, si ha dunque $n_1 = 1$ da cui si ottiene la trasformata

$$\phi(y_1) = 0{,}008\,y_1^4 - 0{,}124\,y_1^3 + 0{,}86\,y_1^2 - 2{,}4\,y_1 + 1 = 0.$$

Pei limiti $y_1 = 1$. $y_1 = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 3$. Suddiviso l'intervallo in intervalli unitarj si trova per $y_1 = 1$, $y_1 = 2$, $\Delta_r = 1$, e per $y_1 = 3$, $y_1 = 4$, $\Delta_r = 2$. La trasformata effettiva da cui dipende il calcolo della radice reale compresa fra 1 e 2 si otterrà ponendo $n_2 = 1$. Resterà a vedersi se le due radici indicate nella $\phi(y_I) = 0$ fra i limiti $y_I = 3$, $y_I = 4$ sono reali o deficienti; saremo dunque nel caso del § 14.

Sia $\quad F(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$

Pei limiti $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 3$, ciò che parimente si ottiene dal numero delle variazioni di segno della stessa $F(x) = 0$. Suddiviso l' intervallo,

pei limiti	$x = 0$,	$x = 1$,	trovasi	$\Delta_T = 0$,
pei limiti	$x = 1$,	$x = 2$,		$\Delta_T = 0$,
ma pei limiti	$x = 2$,	$x = 3$,		$\Delta_T = 2$,
pei limiti	$x = 3$,	$x = 10$,		$\Delta_T = 1$.

Si potrebbe, suddividendo l' intervallo 3, 10, scoprire entro qual intervallo unitario è compresa una tal radice cercando due valori che rendano di segno contrario la $F(x)$ onde col limite inferiore ottenere la trasformata effettiva. Ma intanto risulta che le tre radici della proposta indicate fra 0 ed $\frac{1}{0}$, di cui una è reale e le altre due possono essere reali o deficienti, sono separate in intervalli unitarj distinti. Per distinguere la natura delle due radici se reali o deficienti indicate da $\Delta_T = 2$ fra i limiti $x = 2$, $x = 3$ si dovrà procedere come nel § 14 e relativi esempj.

Sia $\quad F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 4 = 0.$

Dalle 3 variazioni di segno che quest' equazione presenta per $x = 0$, $x = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 3$. Suddiviso l' intervallo, pei limiti $x = 0$, $x = 1$ si trova $\Delta_T = 3$. Posto, dietro i riflessi del § 12, $x = n_0 + \dfrac{1}{y_0}$ essendo $n_0 = 0$ si ha per prima trasformata

$$\phi(y_0) = 4y_0^4 - y_0^3 - 4y_0^2 + y_0 - 1 = 0.$$

Pei limiti $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$ risulta $\Delta = 1$. Quindi una sola radice reale è compresa fra i limiti $x = 0$, $x = 1$. Le due altre radici indicate dalla $\Delta_r = 3$ sono deficienti in quanto nella $\phi(y_0) = 0$ sono esse scomparse ed uscite dai limiti $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$. Se si suddivide l'intervallo 1, $\frac{1}{0}$, si troverà un intervallo unitario n_1, $n_1 + 1$ in cui è compresa la radice reale della $\phi(y_0) = 0$. I limiti inferiori della $\phi(y_0) = 0$ e delle trasformate successive forniranno la frazione continua che serve al calcolo della radice. La $\phi(y_0) = 0$ è già una trasformata effettiva, giacchè per $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$ essa fornisce $\Delta = 1$.

17. Pei limiti $x = n_r$, $x = n_r + 1$ risulti $\Delta_r = 4$. La $F(x) = 0$ 1.° o avrà fra i detti limiti quattro radici reali, 2.° o due valori critici indicatori di quattro radici immaginarie, 3.° o due radici reali ed un valor critico indicatore di due radici immaginarie.

Nel 1.° caso, ripetuto il discorso fatto indietro, si verrà alla conseguenza che col processo delle trasformazioni si dovrà giungere necessariamente a quattro trasformate effettive distinte ciascuna delle quali abbia una sola radice reale compresa fra 1 ed $\frac{1}{0}$, e dal valore delle quali dipenderanno i valori delle 4 radici della proposta.

Nel 2.° caso si proverà come nell'antecedente paragrafo che non potrà per un intervallo unitario di una trasformata qualunque $\phi(y_r) = 0$ essere costantemente $\Delta_r = 4$. Quindi od uno de' valori critici potrà in una trasformata scomparire dai limiti 1, $\frac{1}{0}$, mentre, l'altro essendovi ancora compreso, per un solo intervallo unitario esistente fra 1 ed $\frac{1}{0}$ risulterà $\Delta_r = 2$, ovvero rimanendo entrambi compresi fra 1 ed $\frac{1}{0}$, si trovino in intervalli unitarj distinti per ciascun de' quali risulterà $\Delta_r = 2$. In entrambe queste ipotesi ricadendo nei casi del § 14, i due valori critici indicatori di 4 radici immaginarie dovranno scomparire dall' intervallo $1, \frac{1}{0}$ nelle successive trasformate.

Nel 3.° caso, due radici essendo reali e disuguali, potrà il valor critico coincidere con una di esse. Ma le trasformate successive separando le due radici in intervalli distinti, potrà accadere che pei limiti 1 ed $\frac{1}{0}$, o risulti $\Delta = 2$ e sarà scomparso il valor critico, ovvero che risultando $\Delta = 4$, per un intervallo unitario abbiasi $\Delta_r = 3$ e per l'altro $\Delta_r = 1$, e saremmo allora condotti ai casi contemplati nei §§ 13 e 15.

18. Lo stesso discorso verrebbe applicato ai diversi casi in cui pei limiti $x = n_r$, $x = n_r + 1$ risultasse $\Delta_r = 5, 6, 7 \ldots$ La soluzione di questi diversi casi verrebbe sempre ridotta a dipendere da casi già precedentemente contemplati, per cui si giungerebbe alla conclusione generale che qualunque risultasse il valore di Δ_r scomparirebbero dai limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ nelle successive trasformate i valori critici corrispondenti a quelli della proposta $F(x) = 0$ che si trovano compresi fra i limiti n_r, $n_r + 1$. E siccome ogni valor critico corrisponde a due radici deficienti ed è indicatore di due radici immaginarie conjugate, ne risulterebbe che il processo delle trasformazioni, facendo scomparire le radici deficienti, si rende atto al calcolo delle radici reali per frazioni continue, come se nella proposta non esistessero che radici reali.

Sarà bene osservare che nella precedente disamina si è tacitamente ammesso che il valore dell' indice Δ_r della proposta o di un indice qualunque di una trasformata non potesse aumentare nella successiva trasformazione. Quand'anche un tal caso fosse possibile, siccome l'aumento dovrebbe in ogni caso essere un numero pari $= 2j$ dovuto ad un numero j di valori critici, il processo delle trasformazioni successive farebbe parimente scomparire queste $2j$ radici deficienti, nello stesso modo che scomparirebbero se realmente fossero indicate sia nella proposta, sia nella trasformata antecedente.

19. Nella $F(x)=0$ pei limiti $x=n_r$, $x=m_r$ risulti $\Delta=H$. Si supponga aver diviso l'intervallo fra i detti limiti in intervalli unitarj ed essere giunti col mezzo delle successive trasformate ad un numero h di trasformate effettive. La differenza $H-h$ rappresenterà evidentemente il numero delle radici deficienti che sono scomparse, ossia eguaglierà il doppio del numero de' valori critici che la $F(x)=0$ contiene fra i limiti $x=n_r$, $x=m_r$. Se si suppone inoltre che nella $F(-x)=0$ pei limiti $x=n_r$, $x=m_r$ risulti $\Delta=K$ e sia k il numero delle trasformate effettive che fornirebbe la $F(-x)=0$ pei suddetti limiti, sarà parimente $K-k$ il numero delle radici deficienti od il doppio de' valori critici che la $F(x)=0$ contiene fra i limiti $x=-n_r$, $x=-m_r$. Se si suppone $n_r=0$, $m_r=\frac{1}{0}$ il numero delle radici deficienti della $F(x)=0$ fra i limiti $x=-\frac{1}{0}$, $x=+\frac{1}{0}$, ossia il doppio del numero de' valori critici compresi in questo intervallo sarà dato da $H+K-(h+k)$. Ed in fatti essendo m il grado della $F(x)=0$ sarà $K+k=m$ ed essendo p il numero delle radici reali sarà $h+k=p$. Ma $m-p$ eguaglia il numero delle radici immaginarie, ossia eguaglia il numero delle radici deficienti od il doppio del numero de' valori critici.

20. Colle successive trasformazioni si dovrà giungere ad una trasformata nella quale non vi sia che una sola variazione di segno che diremo trasformata *finale*. Donde risulta che la differenza fra il numero delle variazioni di segno che le $F(x)=0$, $F(-x)=0$ contengono ed il numero delle variazioni di segno che contengono le trasformate finali ottenute dalla $F(x)=0$, $F(-x)=0$ pei limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$ è eguale al numero delle radici immaginarie della $F(x)=0$. Quindi risulta che il numero sempre pari di variazioni che si perdono passando dal sistema delle due equazioni $F(x)=0$, $F(-x)=0$ al sistema delle trasformate finali corrisponde al numero delle radici immaginarie.

In fatti dalle riflessioni fatte al § 6 risulta che giunti ad una trasformata effettiva $\phi(y_r) = 0$ che pei limiti $y_r = 1$, $y_r = \frac{1}{0}$ dia $\Delta = 1$, se si continua il processo delle trasformazioni si deve giungere ad una trasformata $\phi(y_t) = 0$ nella quale i parametri e le altre radici rimanendo comprese fra i limiti 0 e -1 e divenendo gli argomenti minori di qualsivoglia quantità, dietro la proposizione del § 3, i valori critici si ridurranno ad essere compresi fra i limiti 0 e $-\frac{1}{0}$. La $\phi(y_t) = 0$, pei limiti $y_t = 0$, $y_t = \frac{1}{0}$ darà $\Delta = 1$, ed essa stessa avrà una sola variazione di segno, giacchè per $x = \frac{1}{0}$ la serie delle derivate fornisce termini tutti positivi. Sarà dunque essa una trasformata finale. Potendo quindi da ciascuna trasformata effettiva ottenersi una trasformata finale, avuto riguardo a ciò che si è detto nell'antecedente paragrafo, sarà $p =$ al numero delle trasformate finali, ossia eguale al numero delle variazioni di segno che esse contengono e siccome $H + K = m$ sarà eguale al numero delle variazioni di segno che contengono le $F(x) = 0$, $F(-x) = 0$, così la differenza $m - p$ sarà eguale al numero delle radici immaginarie della $F(x) = 0$.

21. Se colle trasformate effettive si calcolano per frazioni continue i valori approssimati delle h radici positive della $F(x) = 0$ che indicheremo con p_1, p_2, $p_3 \ldots . p_h$ (1) e siano ρ_1, ρ_2, $\rho_3 \ldots . \rho_h$ (2) ciò che diventano le precedenti quando nel calcolo delle frazioni continue si aumenta di una unità l'ultimo numero n_r che servì pel calcolo de' precedenti valori, e siano parimente indicati con q_1, q_2, $q_3 \ldots . q_k$ (3) i valori approssimati delle k radici positive della $F(-x) = 0$ e con σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots . \sigma_k$ (4) ciò che diventano le precedenti, aumentando di un'unità l' ultimo numero delle frazioni continue che servirono al calcolo delle precedenti, tutte le radici reali della proposta equazione $F(x) = 0$ saranno separate e comprese fra gli $h + k$ limiti dati da

$$(q_k, \sigma_k) \ldots (q_3, \sigma_3),\ (q_2, \sigma_2),\ (q_1, \sigma_1),\ (p_1, \rho_1),\ (p_2, \rho_2),\ (p_3, \rho_3) \ldots (p_h, \rho_h) \qquad (5)$$

Che se i valori (1) e (3) sono quelli che risultano da valori di trasformate opportunamente spinte oltre le trasformate finali si potrà ottenere che le radici tutte della $F(x) = 0$ non solo siano separate e comprese fra i limiti (5); ma che inoltre fra gli stessi limiti non si trovino valori critici e risulti per ciascun d'essi $\Delta = 1$, purchè nessuno dei valori critici della $F(x) = 0$ sia coincidente col valore di qualche radice reale. La 1.ª parte di questa proposizione risulta immediatamente dal § 9 applicato a ciascuna delle trasformate effettive osservando che, per ciò che si è detto, il calcolo di una radice della $F(x) = 0$ quando sia separata in un intervallo distinto si fa come se si trattasse di calcolare una semplice equazione lineare data da un fattore di 1.° grado. La 2.ª parte si appoggia al principio che non esistendo coincidenza fra un valor critico ed una radice, per quanto piccola sia la differenza de' loro valori, la rapida convergenza delle frazioni continue condurrà ad un valore così approssimato alla radice da differirne di una quantità minore della differenza fra il valor critico e la radice in questione.

22. Dalle cose esposte risulta che l'impiego del metodo delle frazioni continue nella ricerca delle radici reali di una equazione algebrica fornisce i valori di tutte le radici senza bisogno di far precedere il calcolo dell'equazione ausiliaria ai quadrati delle differenze. Il metodo delle frazioni continue è applicabile a qualunque equazione, ed il processo è lo stesso come se l'equazione proposta avesse tutte le sue radici reali. Con questo processo, fondato sul teorema degl'indici, si giunge alla distinzione delle radici immaginarie ed alla determinazione dei valori delle radici reali. Il metodo del signor Sturm col quale si assegna il numero delle radici reali comprese in un dato intervallo n, n_1, e che risulta dalla serie d'indici che

nascono non già dalla serie delle derivate, che è il fondamento del teorema degl' indici, ma dalla serie dei resti che si ottengono nella ricerca del massimo comun divisore della $F(x)$ e della sua derivata $F'(x)$ è compreso in questo. La sola differenza consiste in ciò che nel metodo dei resti si ottiene la cognizione del numero delle radici reali comprese fra i detti limiti anteriormente all' operazione che serve a determinarne i loro valori numerici, laddove in quello che si è esposto una tale cognizione o distinzione delle radici si ottiene nel processo stesso dell' operazione che s' impiega alla determinazione dei loro valori, operando come se le radici indicate dall' ultimo numero Δ nella serie degl' indici fossero tutte reali.

23. Nei seguenti paragrafi occorrendo l' uso di frazioni continue meno semplici delle già esposte, adotteremo per rappresentare la frazione continua

$$\cfrac{A}{a+\cfrac{B}{b+\cfrac{C}{c+\cdots\cdots+\cfrac{P}{p+\cfrac{Q}{q+\cfrac{R}{r}}}}}}$$

la notazione più semplice

$$A:\overline{a+B}:\overline{b+C}:\overline{c+}\ldots\ldots\overline{+P}:\overline{p+Q}:\overline{q+R}:\overline{r}$$

che non differisce dalla precedente che per una traslocazione in linea orizzontale dei denominatori successivi situati in linea obliqua. Ciascuna lineetta in alto indica che i termini ad essa sottoposti rappresentano il denominatore del termine precedente affetto dai due punti. Quando una quantità x sia data per y colla frazione continua finita

$$x = A : \overline{a+B} : \overline{b+c} : \overline{C+} \cdots \overline{+P} : \overline{p+Q} : \overline{q+R} : \overline{r+S} : \overline{y}$$

coll' inversione successiva delle frazioni si ottiene la y data per x colla frazione continua finita

$$y = S : \overline{-r+R} : \overline{-q+Q} : \overline{-p+} \cdots \overline{+C} : \overline{-b+B} : \overline{-a+A} : \overline{x}$$

Chiameremo una di queste frazioni continue la frazione *invertita* dell' altra.

Chiamasi poi metodo *esatto* di approssimazione od approssimazione *completa* ogni processo per mezzo del quale si ottiene il valore di una radice d' una equazione qualunque $F(x) = 0$ approssimato quanto si vuole, e che fornisce ad ogni approssimazione due limiti sempre più prossimi alla radice, ed entro i quali la radice stessa è compresa.

24. Se nell' equazione $x - \alpha = 0$ del § 7, posta sotto la forma $y_{-1} - p_{-1} = 0$, si sostituisce successivamente alle y_{-1}, y_0, y_1, $y_2 \ldots y_r \ldots$ il valore che nasce dalla relazione ricorrente

$$y_{r-1} = n_r + \frac{\alpha_r}{y_r - \beta_r} \qquad (1)$$

ove la r riceva successivamente i valori $0, 1, 2, 3 \ldots$, la trasformata r^{esima}, omesso il fattore frazionario, sarà $y_r - p_r = 0$ ove sarà

$$\begin{aligned} p_r = \beta_r + \alpha_r : \overline{(\beta_{r-1} - n_r) + \alpha_{r-1}} : \overline{(\beta_{r-2} - n_{r-1}) + \alpha_{r-2}} : \overline{(\beta_{r-3} - n_{r-2}) +} \cdots \\ \cdots \overline{+\alpha_2} : \overline{(\beta_1 - n_2) + \alpha_1} : \overline{(\beta_0 - n_1) + \alpha_0} : \overline{(-n_0) + \alpha} \end{aligned} \qquad (2)$$

ed il valore di α sarà espresso dalla frazione continua

$$\begin{aligned} \alpha = n_0 - \alpha_0 : \overline{(n_1 - \beta_0) + \alpha_1} : \overline{(n_2 - \beta_1) + \alpha_2} : \overline{(n_3 - \beta_2) +} \cdots \\ \cdots \overline{+\alpha_{r-1}} : \overline{(n_r - \beta_{r-1}) + \alpha_r} : \overline{(-\beta_r) + y_r} \end{aligned} \qquad (3)$$

ovvero dalla serie

$$\alpha = n_0 + \frac{\alpha_0}{D_1 D_2} - \frac{\alpha_0 \alpha_1}{D_2 D_3} + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}{D_3 D_4} - \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{D_4 D_5} + \cdots \pm \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_r}{D_{r+1} D_{r+2}} \tag{4}$$

ove è $D_1 = 1$ e le diverse D_r, pei valori di $r = 2, 3, 4, 5\ldots$ sono dati dalla relazione ricorrente

$$D_r = D_{r-1}(n_{r-1} - \beta_{r-2}) + D_{r-2}\,\alpha_{r-2} \tag{5}$$

Di fatto dalla (1) si deduce

$$y_r = \beta_r + \frac{\alpha_r}{-n_r + y_{r-1}} \tag{6}$$

fattovi $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ si ha

$$y_0 = p_0 = \beta_0 + \frac{\alpha_0}{-n_0 + \alpha},\quad y_1 = p_1 = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{-n_1 + y_0} = \beta_1 + \alpha_1 : \overline{(\beta_0 - n_1) + \alpha_0} : \overline{(-n_0) + \alpha}$$

$$y_2 = p_2 = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{-n_2 + y_1} = \beta_2 + \alpha_2 : \overline{(\beta_1 - n_2) + \alpha_1} : \overline{(\beta_0 - n_1) + \alpha_0} : \overline{(-n_0) + \alpha}$$

e così progredendo si ottiene colle successive sostituzioni nella (6)

$$y_r = p_r = \beta_r + \frac{\alpha_r}{-n_r + y_{r-1}} = \beta_r + \alpha_r : \overline{(\beta_{r-1} - n_r) + \alpha_{r-1}} : \overline{(-n_{r-1}) + y_{r-2}}$$

$$= \beta_r + \alpha_r : \overline{(\beta_{r-1} - n_r) + \alpha_{r-1}} : \overline{(\beta_{r-2} - n_{r-1}) + \alpha_{r-2}} : \overline{(-n_{r-2}) + y_{r-3}} = \cdots$$

che protratta sino alla $y_{r-(r+1)}$ diventa la (2).
Parimente se colla formola dell' antecedente paragrafo si cerca l' invertita della (2) si ottiene la (3). Per ottenerla direttamente, fatto nella (1) $r = 0$, si ha

$$y_{-1} = \alpha = n_0 + \frac{\alpha_0}{-\beta_0 + y_0} \tag{7}$$

Quindi per $r = 1, 2, 3, 4 \ldots$ si avrà dalla (1) l'espressione di $y_0, y_1, y_2 \ldots$ e dalla (7) colle successive sostituzioni risulterà

$$\alpha = n_0 + \frac{\alpha_0}{-\beta_0 + y_0} = n_0 + \alpha_0 : \overline{(-\beta_0 + n_1) + \alpha_1} : \overline{(-\beta_1) + y_1}$$

$$= n_0 + \alpha_0 : \overline{(n_1 - \beta_0) + \alpha_1} : \overline{(n_2 - \beta_1) + \alpha_2} : \overline{(-\beta_2) + y_2}$$

$$= n_0 + \alpha_0 : \overline{(n_1 - \beta_0) + \alpha_1} : \overline{(n_2 - \beta_1) + \alpha_2} : \overline{(n_3 - \beta_2) + \alpha_3} : \overline{(-\beta_3) + y_3}$$

e sostituendo successivamente i valori di $y_3, y_4, y_5 \ldots . y_{r-1}$ che nascono dalla (1) per $r = 4, 5, 6, \ldots . r$ si avrà la frazione continua (3).

La serie (4) risulta dallo stesso processo seguito per ottenere la (2) del § 8, ma applicato ad una frazione continua i cui numeratori in luogo di essere, come ivi, l' unità sono in vece espressi dai numeri $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots .$ La serie (2) del citato paragrafo non è che un caso particolare della (4), e risulta da questa quando per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots .$ si supponga $\beta_r = 0$ ed $\alpha_r = 1$ e si sostituisca n_{r+1} ad n_r. In questa ipotesi infatti la frazione continua (3) si cambia nella (1) data al § 7, la relazione ricorrente (6) diventa $D_r = D_{r-1} n_r + D_{r-2}$ che è la (1) del § 8, e la serie (4), aumentati di un' unità gl' indici di n, diventa la (2) del § 8.

Se le arbitrarie α_r, β_r sono numeri interi e positivi compresi fra limiti finiti h, k e le diverse $n_0, n_1, n_2, n_3 \ldots . n_r \ldots .$ sono i numeri interi immediatamente inferiori alle rispettive quantità $\alpha, p_0, p_1, p_2 \ldots . p_{r-1} \ldots .$, i cui valori risultano dalla formola generale (2), la frazione continua (3) e la serie (4) convergeranno al crescere di r verso il valore di α.

Una qualunque n_r essendo il numero immediatamente inferiore al valore di p_{r-1}, la frazione $\dfrac{\alpha_r}{y_r - \beta_r}$ nella relazione ricorrente (1) dovrà essere < 1, ossia dovrà essere

$y_r > \beta_r + \alpha_r$, e siccome la n_{r+1} è il numero intero immediatamente inferiore ad $y_r = p_r$, e per essere β_r ed α_r numeri interi e positivi sarà $n_{r+1} > \beta_r + \alpha_r$, ed a più forte ragione maggiore di ciascuno di essi. La differenza $n_{r+1} - \beta_r$ risulterà positiva e quindi positiva la $n_{r-1} - \beta_{r-2}$ che entra nell'espressione generica del valore di D_r il quale risulterà positivo.

25. Supposto $\alpha_r = n_r\delta_r$, $\beta_r = \delta_r$, pei valori di $r = 1, 2, 3, 4 \ldots$ ed $\alpha_0 = \delta_0$, $\beta_0 = 0$, le espressioni (1), (2), (3) del § 24 si riducono rispettivamente a

$$y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{\delta_r}{y_r - \delta_r}\right) \tag{1}$$

$$\begin{gathered} p_r = \delta_r + n_r\delta_r : \overline{(\delta_{r-1} - n_r) + n_{r-1}\delta_{r-1}} : \overline{(\delta_{r-2} - n_{r-1}) + n_{r-2}\delta_{r-2}} : \overline{(\delta_{r-3} - n_{r-2}) + \cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \overline{+ n_2\delta_2} : \overline{(\delta_1 - n_2) + n_1\delta_1} : \overline{(-n_1) + \delta_0} : \overline{(-n_0) + \alpha} \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \alpha = n_0 + \delta_0 : \overline{n_1 + n_1\delta_1} : \overline{(n_2 - \delta_1) + n_2\delta_2} : \overline{(n_3 - \delta_2) + n_3\delta_3} : \overline{(n_4 - \delta_3) + \cdots} \\ \cdots\cdots \overline{+ n_{r-2}\delta_{r-2}} : \overline{(n_{r-1} - \delta_{r-1}) + n_{r-1}\delta_{r-1}} : \overline{(n_r - \delta_{r-1}) + n_r\delta_r} : \overline{(-\delta_r + y_r} \end{gathered} \tag{3}$$

Il valore di α sarà espresso per la serie finita

$$\alpha = n_0 + \frac{\delta_0}{n_1} - \frac{\delta_0\delta_1}{n_1 n_2} + \frac{\delta_0\delta_1\delta_2}{n_1 n_2 n_3} - \frac{\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3}{n_1 n_2 n_3 n_4} + \cdots \pm \frac{\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_{r-1}}{n_1 n_2 n_3 \ldots n_{r-1} y_r} \tag{4}$$

Di fatto dalla (1) si deduce $\dfrac{1}{y_{r-1}} = \dfrac{1}{n_r} - \dfrac{\delta_r}{n_r y_r}$ (5)

che pei valori di $r = 1, 2, 3 \ldots$ si riduce a

$$\frac{1}{y_0} = \frac{1}{n_1} - \frac{\delta_1}{n_1 y_1}, \quad \frac{1}{y_1} = \frac{1}{n_2} - \frac{\delta_2}{n_2 y_2}, \quad \frac{1}{y_2} = \frac{1}{n_3} - \frac{\delta_3}{n_3 y_3}, \ldots \tag{6}$$

Parimente dalla (1) dell'antecedente paragrafo in cui sia

$\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = \delta_0$ risulta $y_{-1} = \alpha = n_0 + \frac{\delta_0}{y_0}$, e perciò da questa, in cui si pongano i valori (6), si otterrà

$$\alpha = n_0 + \frac{\delta_0}{n_1} - \frac{\delta_0\delta_1}{n_1 y_1} = n_0 + \frac{\delta_0}{n_1} - \frac{\delta_0\delta_1}{n_1 n_2} + \frac{\delta_0\delta_1\delta_2}{n_1 n_2 y_2} =$$

$$n_0 + \frac{\delta_0}{n_1} - \frac{\delta_0\delta_1}{n_1 n_2} + \frac{\delta_0\delta_1\delta_2}{n_1 n_2 n_3} - \frac{\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3}{n_1 n_2 n_3 y_3} = \dots\dots$$

che protratta sino alla y_r coincide colla (4). I numeri interi e positivi δ_r essendo compresi fra limiti finiti, se le diverse n_r, per $r = 0, 1, 2, 3 \dots\dots$ sono i numeri interi immediatamente inferiori alle rispettive p_{r-1}, le (3), (4) daranno valori sempre più convergenti verso il valore di α a misura che crescerà la r. Risulta infatti dalla relazione $n_{r+1} > \beta_r + \alpha_r$ dell'antecedente paragrafo che sarà $n_{r+1} > (n_r + 1)\delta_r$, e che quindi le diverse n_r che entrano nei denominatori della (4) saranno maggiori dei rispettivi numeri interi δ_{r-1} che entrano nei numeratori.

26. Se nelle espressioni (1), (2), (3), (4) del § 25 si pone $\delta_0 = \varepsilon_0$, $\delta_r = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{r-1}}$ per tutti i valori di $r = 1, 2, 3 \dots\dots$ si avrà

$$y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{\varepsilon_r}{y_r\varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r}\right) \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} p_r\varepsilon_{r-1} = {} & \varepsilon_r + n_r\varepsilon_r\varepsilon_{r-2} : \overline{(\varepsilon_{r-1} - n_r\varepsilon_{r-2}) + n_{r-1}\varepsilon_{r-1}\varepsilon_{r-3}} : \\ & \overline{(\varepsilon_{r-2} - n_{r-1}\varepsilon_{r-3}) + n_{r-2}\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-4}} : \overline{(\varepsilon_{r-3} - n_{r-2}\varepsilon_{r-4}) +} \dots\dots \qquad (2) \\ & \dots\dots \overline{+ n_3\varepsilon_3\varepsilon_1} : \overline{(\varepsilon_2 - n_3\varepsilon_1) + n_2\varepsilon_2\varepsilon_0} : \overline{(\varepsilon_1 - n_2\varepsilon_0) - n_1\varepsilon_1} : \overline{(-n_1) + \varepsilon_0} : \overline{(-n_0) + \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = {} & n_0 + \varepsilon_0 : \overline{(n_1) + n_1\varepsilon_1} : \overline{(n_2\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + n_2\varepsilon_2\varepsilon_0} : \\ & \overline{(n_3\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + n_3\varepsilon_3\varepsilon_1} : \overline{(n_4\varepsilon_2 - \varepsilon_3) +} \dots\dots + \overline{n_{r-2} + \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-4}} : \qquad (3) \\ & \overline{(n_{r-1}\varepsilon_{r-3} - \varepsilon_{r-2}) + n_{r-1}\varepsilon_{r-1}\varepsilon_{r-3}} : \overline{(n_r\varepsilon_{r-2} - \varepsilon_{r-1}) + n_r\varepsilon_r\varepsilon_{r-2}} : \overline{(-\varepsilon_r) + \varepsilon_{r-1}y_r} \end{aligned}$$

$$\alpha = n_0 + \frac{\varepsilon_0}{n_1} - \frac{\varepsilon_1}{n_1 n_2} + \frac{\varepsilon_2}{n_1 n_2 n_3} - \frac{\varepsilon_3}{n_1 n_2 n_3 n_4} + \ldots \pm \frac{\varepsilon_{r-1}}{n_1 n_2 n_3 \ldots n_r y_r} \tag{4}$$

27. Se nelle espressioni (1), (2), (3), (4) dello stesso § 25 si pone $\delta_0 = \theta_0$, $\delta_1 = \frac{\theta_1}{\theta_0}$ e $\delta_r = \frac{n_{r-1}\theta_r}{\theta_{r-1}}$ pei valori di $r = 2, 3, 4, \ldots$ si ottiene

$$y_{r-1}' = n_r \left(1 + \frac{n_{r-1}\theta_r}{y_r\theta_{r-1} - \theta_r n_{r-1}}\right) \tag{1}$$

$$p_r\theta_{r-1} = n_{r-1}\theta_r + n_r n_{r-1}\theta_r\theta_{r-2} : \overline{(n_{r-2}\theta_{r-1} - n_r\theta_{r-2}) + n_{r-1}n_{r-2}\theta_{r-1}\theta_{r-3}} :$$
$$\overline{n_{r-3}\theta_{r-2} - n_{r-1}\theta_{r-3}) + n_{r-2}n_{r-3}\theta_{r-2}\theta_{r-4}} : \overline{(n_{r-4}\theta_{r-3} - n_{r-2}\theta_{r-4}) + n_{r-3}n_{r-4}\theta_{r-3}\theta_{r-5}} : \tag{2}$$
$$\overline{(n_{r-5}\theta_{r-4} - n_{r-3}\theta_{r-5}) +} \cdots \overline{+ n_2 n_1\theta_2\theta_0} : \overline{(\theta_1 - n_2\theta_0) + n_1\theta_1} : \overline{(-n_1) + \theta_0 : (-n_0) + \alpha}$$

$$\alpha = n_0 + \theta_0 : \overline{n_1 + n_1\theta_1} : \overline{(n_2\theta_0 - \theta_1) + n_2 n_1\theta_0\theta_2} : \overline{(n_3\theta_1 - n_1\theta_2) + n_3 n_2\theta_1\theta_3} :$$
$$\overline{(n_4\theta_2 - n_2\theta_3) + n_4 n_3\theta_2\theta_4} : \overline{(n_5\theta_3 - n_3\theta_4) + n_5 n_4\theta_3\theta_5} : \overline{(n_6\theta_4 - n_4\theta_5)} + \cdots \tag{3}$$
$$\cdots \overline{+ n_{r-1}n_{r-2}\theta_{r-3}\theta_{r-1}} : \overline{(n_r\theta_{r-2} - n_{r-2}\theta_{r-1}) + n_r n_{r-1}\theta_{r-2}\theta_r} : \overline{(-n_{r-1}\theta_r) + \theta_{r-1}y_r}$$

$$\alpha = n_0 + \frac{\theta_0}{n_1} - \frac{\theta_1}{n_1 n_2} + \frac{\theta_2}{n_2 n_3} - \frac{\theta_3}{n_3 n_4} + \frac{\theta_4}{n_4 n_5} - \ldots \pm \frac{\theta_r}{n_r y_r} \tag{4}$$

28. Se finalmente nelle espressioni (1), (2), (3), (4) dello stesso § 25 si pone $\delta_0 = \omega_0$, $\delta_r = n_r \frac{\omega_r}{\omega_{r-1}}$ per tutti i valori di $r = 1, 2, 3 \ldots$ si ottiene

$$y_{r-1} = n_r \left(1 + \frac{n_r\omega_r}{y_r\omega_{r-1} - n_r\omega_r}\right) \tag{1}$$

$$p_r\omega_{r-1} = n_r\omega_r + n_r^2\omega_r\omega_{r-2} : \overline{(n_{r-1}\omega_{r-1} - n_r\omega_{r-2}) + n_{r-1}^2\omega_{r-1}\omega_{r-3}} :$$
$$\overline{(n_{r-2}\omega_{r-2} - n_{r-1}\omega_{r-3}) + n_{r-2}^2\omega_{r-2}\omega_{r-4}} : \overline{(n_{r-3}\omega_{r-3} - n_{r-2}\omega_{r-4}) + \cdots} \tag{2}$$
$$\cdots \overline{+ n_2^2\omega_2\omega_0} : \overline{(n_1\omega_1 - n_2\omega_0) + n_1^2\omega_1} : \overline{(-n_1) + \omega_0} : \overline{(-n_0) + \alpha}$$

$$\alpha = n_0 + \omega_0 : \overline{(n_1) + n_1^2\omega_1} : \overline{(n_2\omega_0 - n_1\omega_1) + n_2^2\omega_2\omega_0} : \overline{(n_3\omega_1 - n_2\omega_2) + n_3^2\omega_3\omega_1} :$$
$$\overline{(n_4\omega_2 - n_3\omega_3) + n_4^2\omega_4\omega_2} : \overline{(n_5\omega_3 - n_4\omega_4) + \cdots} \overline{\cdots + n_{r-1}^2\omega_{r-1}\omega_{r-3}} : \tag{3}$$
$$\overline{(n_r\omega_{r-2} - n_{r-1}\omega_{r-1}) + n_r^2\omega_r\omega_{r-2}} : \overline{(-n_r\omega_r) + \omega_{r-1}y_r}$$

$$\alpha = n_0 + \frac{\omega_0}{n_1} - \frac{\omega_1}{n_2} + \frac{\omega_2}{n_3} - \frac{\omega_3}{n_4} + \cdots \pm \frac{\omega_{r-1}}{n_r} \mp \frac{\omega_r}{y_r} \tag{4}$$

29. Se nelle (1), (2), (3), (4) del § 26 si suppone $\varepsilon = 1$ per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ si ottiene

$$y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{1}{y_r - 1}\right) \tag{1}$$

$$p_r = 1 + n_r : \overline{(1-n_r) + n_{r-1}} : \overline{(1-n_{r-1}) + n_{r-2}} : \overline{(1-n_{r-2}) + \cdots} \overline{\cdots + n_2} : \overline{(1-n_2) + n_1} : \overline{(-n_1) + 1} : \overline{(-n_0) + \alpha} \tag{2}$$

$$\alpha = n_0 + 1 : \overline{(n_1) + n_1} : \overline{(n_2 - 1) + n_2} : \overline{(n_3 - 1) + n_3} : \overline{(n_4 - 1) + \cdots} \overline{\cdots + n_{r-1}} : \overline{(n_r - 1) + n_r} : \overline{(-1) + y_r} \tag{3}$$

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} - \frac{1}{n_1 n_2 n_3 n_4} + \cdots \pm \frac{1}{n_1 n_2 n_3 \ldots n_r y_r} \tag{4}$$

30. Se nelle (1), (2), (3), (4) del § 27 si pone $\theta_r = 1$ per tutti i valori di $r = 0, 1, 2 \ldots,$ si ottiene

$$y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{n_{r-1}}{y_r - n_{r-1}}\right) \tag{1}$$

$$p_r = n_{r-1} + n_r n_{r-1} : \overline{(n_{r-2} - n_r) + n_{r-1} n_{r-2}} : \overline{(n_{r-3} - n_{r-1}) + \cdots\cdots}$$
$$\cdots\cdots + \overline{n_2 n_1} : \overline{(1 - n_2) + n_1} : \overline{(-n_1) + 1 : (-n_0) + \alpha} \qquad (2)$$

$$\alpha = n_0 + 1 : \overline{(n_1) + n_1} : \overline{(n_2 - 1) + n_2 n_1} : \overline{(n_3 - n_1) + n_3 n_2} : \overline{(n_4 - n_2) + n_4 n_3} :$$
$$\overline{(n_5 - n_3) + \cdots\cdots\cdots} + \overline{n_r n_{r-1}} : \overline{(-n_{r-1}) + y_r} \qquad (3)$$

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_2 n_3} - \frac{1}{n_3 n_4} + \cdots \mp \frac{1}{n_{r-1} n_r} \pm \frac{1}{n_r y_r} \qquad (4)$$

31. Se nelle (1), (2), (3), (4) del § 28 si pone $\omega_r = 1$ per tutti i valori di $r = 0, 1, 2 \ldots.$ si ottiene

$$y_{r-1} = n_r \left(1 + \frac{n_r}{y_r - n_r}\right) \qquad (1)$$

$$p_r = n_r + n_r^2 : \overline{(n_{r-1} - n_r) + n_{r-1}^2} : \overline{(n_{r-2} - n_{r-1}) + n_{r-2}^2} :$$
$$\overline{(n_{r-3} - n_{r-2}) + \cdots} \cdots + \overline{n_1^2} : \overline{(-n_1) + 1} : \overline{(-n_0) + \alpha} \qquad (2)$$

$$\alpha = n_0 + 1 : \overline{(n_1) + n_1^2} : \overline{(n_2 - n_1) + n_2^2} : \overline{(n_3 - n_2) + n_3^2} : \overline{(n_4 - n_3) + \cdots} \cdots + \overline{n_r^2} : \overline{(-n_r) + y_r} \qquad (3)$$

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - \frac{1}{n_4} + \cdots \mp \frac{1}{n_r} \pm \frac{1}{y_r} \qquad (4)$$

32. Se si rappresenta con $F(n_r)$ la frazione continua (3) o la serie (4) del § 24 arrestata al denominatore contenente n_r, il valore di α sarà compreso fra i limiti $F(n_r)$, $F(n_r + 1)$. Di fatto dietro il modo di formazione della (3), la $F(n_r)$ sarà $<$ ovvero $>$ di α secondo che r sarà pari o dispari. Se nella serie (4) del citato paragrafo si rappresenta, come si è fatto al § 9, con P la somma dei

termini che precedono quello indicato con $\pm \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_r}{D_{r+1} D_{r+2}}$ e si ponga x in luogo di n_{r+1} si avrà dall'espressione (5) del § 24 $D_{r+2} = D_{r+1}(x - \beta_r) + D_r \alpha_r$. La $F(x)$ sarà dunque della forma $P \pm \frac{A}{D_{r+1}(D_{r+1} x + Q)}$, onde $\frac{dF(x)}{dx} = \mp A \left(\frac{1}{x D_{r+1} + Q}\right)^2$. Si conchiuderà quindi come nel § 9 che la $F(x)$ sarà una funzione di x continuamente crescente o continuamente decrescente al variare di x secondo che r sarà dispari o pari. Per $x = \beta_r$ si ha $F(\beta_r) = F(n_{r-1})$. Pertanto, supposto r dispari, sarà $F(n_r) > \alpha$ e le $F(n_{r-1})$, $F(n_{r+1})$ saranno entrambe $< \alpha$, dunque la $F(x)$ nell'escursione di x da $x = \beta_r$ ad $x = n_{r+1}$ si mantiene $< \alpha$. Ma per ciò che si è detto nel § 24 si ha $n_{r+1} > \beta_r + \alpha_r$, dunque per $x = \beta_r + \alpha_r$ la $F(\beta_r + \alpha_r)$ sarà ancora $< \alpha$. Ma dall'espressione (3) risulta $F(\beta_r + \alpha_r) = F(n_r + 1)$, dunque essendo la $F(n_r + 1) < \alpha$ sarà la α compresa fra $F(n_r)$ ed $F(n_r + 1)$. Lo stesso si direbbe supponendo r pari.
Una tale proprietà sarà comune a tutte le (3), (4) degli antecedenti paragrafi in quanto discendono come casi particolari dalle espressioni generali (3), (4) del § 24.

33. Dalle cose precedenti risulta che le serie date sotto i numeri (4) e le frazioni continue (3) non solo sono convergenti verso il valore di α, ma la α è sempre compresa fra i due valori che risultano dalla somma di un numero r e di un numero $r+1$ di termini. Ottenuto inoltre un valore approssimato dato da $F(n_r)$, si avrà senza un'ulteriore trasformazione un altro limite $F(n_r + 1)$ aumentando di una unità la n_r. Se la α avrà un valore irrazionale le diverse espressioni (3), (4) si prolungheranno indefinitamente, esse si arresteranno nel caso contrario. Le accennate formole serviranno a convertire una qualsivoglia irrazionale o radicale di

qualunque grado od un trascendente noto in cifre decimali, qual sarebbe la base e de' logaritmi iperbolici o il rapporto π del diametro alla circonferenza, in serie convergenti od in frazioni continue dotate del carattere delle approssimazioni complete. I valori dei numeri interi n_0, n_1, $n_2 \ldots . n_r$ che entrano nelle accennate formole non si dedurranno dalla frazione continua espressa in generale dalla p_r, ma sibbene per comodo di calcolo dalla relazione ricorrente (1) secondo i diversi casi di sviluppo, ove si porranno successivamente i valori già ottenuti, come dall'esempio del § 35 apparirà manifesto.

34. Se si suppone che colle diverse N_r risultanti dai valori $r = 0, 1, 2, 3 \ldots .$ si rappresentino i numeri interi immediatamente superiori ai valori delle rispettive p_{r-1}, la relazione ricorrente (1) del § 25 si dovrà cambiare nella

$$y_{r-1} = N_r \left(1 - \frac{\delta_r}{y_r + \delta_r}\right) \tag{1}$$

Siccome poi la (1) del § 25 si cambia in questa col porvi $-\delta_r$ in luogo di δ_r ed N_r in luogo di n_r, così le (3), (4) di quel paragrafo diverranno

$$\begin{aligned}\alpha = N_0 - \delta_0 : \overline{(N_1) - N_1\delta_1} : \overline{(N_2 + \delta_1) - N_2\delta_2} : \overline{(N_3 + \delta_2) - \ldots .} \\ \ldots . \overline{- N_{r-1}\delta_{r-1}} : \overline{(N_r + \delta_{r-1}) - N_r\delta_r} : \overline{\delta_r + y_r}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\alpha = N_0 - \frac{\delta_0}{N_1} - \frac{\delta_0\delta_1}{N_1N_2} - \frac{\delta_0\delta_1\delta_2}{N_1N_2N_3} - \ldots . - \frac{\delta_0\delta_1\delta_2 \ldots . \delta_{r-1}}{N_1N_2N_3 \ldots . N_{r-1}y_r} \tag{4}$$

I diversi valori approssimati che si ottengono col prendere un numero crescente di termini saranno sempre maggiori di α, ma convergenti verso il di lui valore.

Se le N_r rappresentano i numeri interi superiori ai valori di p_{r-1} per tutti i valori di r, tranne per $r = 0$, onde sia $N_0 = n_0$ il numero intero immediatamente inferiore ad

α, la relazione ricorrente (1) di questo paragrafo sussisterà per tutti i suddetti valori di r, tranne per $r = 0$, e le (3), (4) del § 25, avuto riguardo che tutte le δ_r cambian di segno ad eccezione di δ_0, si ridurranno alle

$$\begin{aligned}\alpha = n_0 + \delta_0 : \overline{(N_1) - N_1\delta_1} : \overline{(N_2 + \delta_1) - N_2\delta_2} : \overline{(N_3 + \delta_2) - \cdots} \\ \cdots \overline{- N_{r-1}\delta_{r-1}} : \overline{(N_r + \delta_{r-1}) - N_r\delta_r} : \overline{\delta_r + y_r}\end{aligned} \qquad (3')$$

$$\alpha = n_0 + \frac{\delta_0}{N_1} + \frac{\delta_0\delta_1}{N_1N_2} + \frac{\delta_0\delta_1\delta_2}{N_1N_2N_3} + \cdots + \frac{\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_{r-1}}{N_1N_2N_3\ldots N_{r-1}y_r} \qquad (4')$$

Queste formole, nelle quali risultano le N diverse dalle precedenti, danno valori minori di α, ma convergenti verso α a misura che si prende un maggior numero di termini.

Se nelle precedenti formole si pone $\delta_r = 1$ per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ si ottengono le

$$\alpha = N_0 - 1 : \overline{(N_1) - N_1} : \overline{(N_2 + 1) - N_2} : \overline{(N_3 + 1) -} \cdots \overline{- N_{r-1}} : \overline{(N_r + 1) - N_r} : \overline{1 + y_r} \qquad [3]$$

$$\alpha = N_0 - \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_1N_2} - \frac{1}{N_1N_2N_3} - \cdots - \frac{1}{N_1N_2N_3\ldots N_{r-1}y_r} \qquad [4]$$

$$\alpha = n_0 + 1 : \overline{(N_1) - N_1} : \overline{(N_2 + 1) - N_2} : \overline{(N_3 + 1) -} \cdots \overline{- N_{r-1}} : \overline{(N_r + 1) - N_r} : \overline{1 + y_r} \qquad [3']$$

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1N_2} + \frac{1}{N_1N_2N_3} + \cdots + \frac{1}{N_1N_2N_3\ldots N_{r-1}y_r} \qquad [4']$$

Dopo aver ottenuto un certo numero di termini derivati nelle formole di questo paragrafo dalla relazione ricorrente (1) o dalla sua analoga $\dfrac{1}{y_{r-1}} = \dfrac{1}{N_r} + \dfrac{\delta_r}{N_ry_r}$, si potrà procedere alla deduzione di termini ulteriori ripigliando la relazione ricorrente (1) del § 25. In tal caso i termini seguenti nelle

(4), (4′) diverranno alternativamente negativi e positivi senza che la serie cessi di essere convergente. La somma dei termini della serie (4), ove sia sostituito n_r ad y_r, diverrà minore di α, e quella della serie (4′) diverrà maggiore di α, indi diverrà la 1.ª alternativamente maggiore e minore di α e la 2.ª alternativamente minore e maggiore di α. Siccome per entrambe la serie è $N_r - 1 = n_r$ ne risulta che diminuendo di un' unità l' ultimo numero intero N_r a cui si è arrestata ciascuna delle due serie, si otterranno due limiti entro cui sarà compreso il valore di α, e le diverse approssimazioni fornite dalle (3), (4), (3′), (4′) o da quelle che risultano per $\delta_r = 1$ saranno complete. Si potranno in generale impiegare promiscuamente le due specie di relazioni ricorrenti di cui si è parlato sopra ed ottenersi altre espressioni a segni promiscuamente positivi e negativi, purchè si abbia sempre riguardo al cambiamento di segno che assume una qualsivoglia δ_r, quando al limite inferiore n_r si sostituisce un limite superiore N_r.

35. Si supponga $\alpha = \sqrt{2}$, ossia $= 1,41421356\ldots$ e cerchisi α espressa per una serie della forma

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} - \frac{1}{n_1 n_2 n_3 n_4} + \ldots \quad \text{data al § 29.}$$

Le n_0, n_1, n_2, n_3, $n_4 \ldots$ sono i numeri interi immediatamente inferiori ai valori di

$$\alpha, \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \ldots y_r \ldots$$

i cui valori sono dati, come risulta dalla $y_r = 1 + \dfrac{n_r}{-n_r + y_{r-1}}$ cavata dalla (1), dalle espressioni

$$\alpha, \quad \frac{1}{\alpha - n_0}, \quad 1 + \frac{n_1}{-n_1 + y_0}, \quad 1 + \frac{n_2}{-n_2 + y_1}, \quad 1 + \frac{n_3}{-n_3 + y_2} \ldots 1 + \frac{n_r}{-n_r + y_{r-1}} \ldots$$

Se si suppone $\alpha - n_0 = \beta_0$, saranno essi dati da

$$\alpha\,,\quad \frac{1}{\beta_0}\,,\quad \frac{1}{1-\beta_0 n_1}=\frac{1}{\beta_1}\,,\quad \frac{1}{1-\beta_1 n_2}=\frac{1}{\beta_2}\,,\quad \frac{1}{1-\beta_2 n_3}=\frac{1}{\beta_3}\cdots\frac{1}{1-\beta_{r-1} n_r}=\frac{1}{\beta_r}\cdots$$

ed i valori di n_0, n_1, n_2, n_3, $n_4 \ldots n_r \ldots$ saranno dati rispettivamente dai numeri interi che indicheremo con [ ] compresi in

$$\alpha\,,\quad \frac{1}{\beta_0}\,,\quad \frac{1}{\beta_1}\,,\quad \frac{1}{\beta_2}\,,\quad \frac{1}{\beta_3}\,,\ldots\ \frac{1}{\beta_{r-1}}\ldots$$

Nel nostro caso è $n_0 = 1$,

$\beta_0 = 0{,}41421356\cdots$, onde risulta $\left[\frac{1}{\beta_0}\right] = n_1 = 2$

$\beta_1 = 1 - 2\beta_0 = 0{,}17157288\cdots \qquad \left[\frac{1}{\beta_1}\right] = n_2 = 5$

$\beta_2 = 1 - 5\beta_1 = 0{,}14213560\cdots \qquad \left[\frac{1}{\beta_2}\right] = n_3 = 7$

$\beta_3 = 1 - 7\beta_2 = 0{,}00505080\cdots \qquad \left[\frac{1}{\beta_3}\right] = n_4 = 197$

$\beta_4 = 1 - 197\beta_3 = 0{,}0049924\cdots \qquad \left[\frac{1}{\beta_4}\right] = n_5 = 200$

Risulta dunque

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5.7} - \frac{1}{2.5.7.197} + \frac{1}{2.5.7.197.200} =$$

$$1{,}4 + 0{,}01428571 - 0{,}00007251 + 0{,}00000036 = 1{,}41421356.$$

La serie sarebbe indefinita se si fosse tenuto conto nel valore di α de' successivi decimali. Essa si arresta quando, come in questo caso, si ritiene un numero determinato di cifre decimali. La serie dà valori alternativamente maggiori e minori di α, secondo che il termine a cui si arresta è affetto dal segno + ovvero dal —.

Se si arresta la serie al quarto termine, il valore di α sarà compreso fra

$$1 + 0{,}5 - 0{,}1 + 0{,}01428571 = 1{,}41428571$$

ed $$1+0{,}5-0{,}1+\frac{1}{2.5.(7+1)} = 1+0{,}5-0{,}1+\frac{1}{80} = 1{,}41225$$

come è in fatti. La somma di cinque termini fornisce il valore $1{,}41421320 < \alpha$, mentre il valore $1{,}41421357$ che nasce aumentando di un'unità la n_4 è $> \alpha$.
I numeri interi n_0, n_1, n_2, $n_3 \ldots$ da cui dipende il valore espresso in frazione continua od in serie sono dati dal noto valore della stessa α. Quando non si conosca il valore di α, ma si sappia soltanto che esso è una radice di un'equazione $F(x) = 0$ di un grado qualunque, la determinazione di questi numeri si eseguisce, come mostreremo ne' seguenti paragrafi, nello stesso modo come se la $F(x)$ fosse una funzione lineare. La determinazione dei numeri suddetti pel caso di $\alpha = \sqrt{2}$ diviene anzi più semplice quando si fa dipendere la ricerca di questo irrazionale da un'equazione di 2.° grado.

36. Se nel fattore di 2.° grado $(x-\alpha)^2 + \sigma^2$ si suppone $x = y_{-1}$, $\alpha = p_{-1}$, $\sigma = q_0$ e s'intende nella $(y_{-1} - p_{-1})^2 + q_0^2$ di avervi sostituiti per le diverse y i valori che nascono successivamente dalla relazione ricorrente

$$y_{r-1} = n_r + \frac{\alpha_r}{y_r - \beta_r} \qquad (1)$$

si otterrà

$$(x-\alpha)^2+\sigma^2 = \frac{\omega_0^2+q_0^2}{(y_0-\beta_0)^2}\cdot\frac{\omega_1^2+q_1^2}{(y_1-\beta_1)^2}\cdots\frac{\omega_r^2+q_r^2}{(y_r-\beta_r)^2}\left\{(y_r-p_r)^2+q_{r+1}^2\right\} \qquad (2)$$

ove le diverse ω_r, q_r sono date dai valori delle relazioni ricorrenti

$$p_{r-1} - n_r = \omega_r\,, \quad \beta_r + \alpha_r \frac{\omega_r}{\omega_r^2 + q_r^2} = p_r\,, \quad \frac{q_r}{q_r^2 + \omega_r^2}\alpha_r = q_{r+1} \qquad (3)$$

che nascono dando ad r i diversi valori $1, 2, 3 \ldots\ldots$ Le arbitrarie α_r, β_r si riterranno numeri interi e positivi, ma nel caso particolare di $r = 0$ si dovrà ritenere $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$.

Di fatto se nella proposta $(y_{-1} - p_{-1})^2 + q_0^2$ si pone $y_{-1} = n_0 + \dfrac{\alpha_0}{y_0 - \beta_0}$, si ottiene dopo semplici riduzioni

$$(x-\alpha)^2 + \sigma^2 = \frac{\omega_0^2 + q_0^2}{(y_0 - \beta_0)^2} \left\{ \left(y_0 - \left(\beta_0 + \alpha_0 \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + q_0^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\alpha_0 q_0}{q_0^2 + \omega_0^2} \right)^2 \right\}$$

ossia per la 1.ª e 2.ª delle (3)

$$(x - \alpha)^2 + \sigma^2 = \frac{\omega_0^2 + q_0^2}{(y_0 - \beta_0)^2} \left\{ (y_0 - p_0)^2 + q_1^2 \right\} \tag{4}$$

Ma si avrà parimente dalla (1) pel caso di $r = 1$

$$(y_0 - p_0)^2 + q_1^2 = \frac{\omega_1^2 + q_1^2}{(y_1 - \beta_1)^2} \left\{ (y_1 - p_1)^2 + q_2^2 \right\}$$

ed in generale sarà

$$(y_{r-1} - p_{r-1})^2 + q_r^2 = \frac{\omega_r^2 + q_r^2}{(y_r - \beta_r)^2} \left\{ (y_r - p_r)^2 + q_{r+1}^2 \right\} \tag{5}$$

per cui sostituendo continuamente nel 2.° membro della (4) i successivi valori che assumono i fattori di 2.° grado dati dall'espressione generale (5) si ottiene la (2).

Siccome dal § 3 risulta che per valori di n_r presi nella serie $1, 2, 3 \ldots\ldots$ e per r opportunamente grande la quantità $\dfrac{\omega_r}{\omega_r^2 + q_r^2}$ si riduce ad essere compresa fra 0 e -1, così il parametro p_r della trasformata r^{esima} dato dalla 2.ª delle relazioni (3) diverrà compreso fra $\beta_r - \alpha_r$ e β_r. Risulta parimente, dietro i riflessi del § 3 relativi alla variabilità dell'argomento, che anche pel caso della sostituzione data dalla relazione (1), dopo un opportuno numero di trasformazioni, l'argomento del fattor di 2.° grado diverrà minore di qualsivoglia quantità.

Se nelle precedenti formole si suppone $\alpha_r = n_r \delta_r$, $\beta_r = \delta_r$ la (2) diventa

$$(x-\alpha)^2+\sigma^2 = \frac{\omega_0^2+q_0^2}{(y_0-\delta_0)^2} \cdot \frac{\omega_1^2+q_1^2}{(y_1-\delta_1)^2} \cdots \frac{\omega_r^2+q_r^2}{(y_r-\delta_r)^2} \left\{ (y_r-p_r)^2+q_{r+1}^2 \right\}$$

ove sarà

$$p_r = \delta_r \left(1 + n_r \frac{\omega_r}{\omega_r^2+q_r^2} \right), \qquad q_{r+1} = \delta_r n_r \frac{q_r}{q_r^2+\omega_r^2}.$$

Nel caso particolare in cui per ciascun valore di r sia $\delta_r = 1$, le due precedenti relazioni diventano

$$p_r = 1 + n_r \frac{\omega_r}{\omega_r^2+q_r^2}, \qquad q_{r+1} = n_r \frac{q_r}{q_r^2+\omega_r^2}.$$

37. Se nel fattore di 1.° grado $x-\alpha = y_{-1} - p_{-1}$ si sostituiscano successivamente i valori di y che nascono dalla relazione ricorrente

$$y_{r-1} = n_r + \frac{\alpha_r}{y_r - \beta_r} \qquad (1)$$

per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ si otterrà

$$x-\alpha = \pm \frac{\omega_0 \, \omega_1 \, \omega_2 \ldots \omega_r}{(y_0-\beta_0)(y_1-\beta_1)(y_2-\beta_2)\ldots(y_r-\beta_r)} (y_r-p_r) \qquad (2)$$

ove avrà luogo il $+$ od il $-$ secondo che r sarà pari o dispari, ed ove le diverse ω, p dipendono dalle relazioni ricorrenti

$$p_{r-1} - n_r = \omega_r, \qquad \beta_r + \frac{\alpha_r}{\omega_r} = p_r \qquad (3)$$

Si riterrà quì come nel precedente paragrafo che nel caso di $r=0$ sia $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$. La formola (2) non è che un caso particolare della trasformata (2) del paragrafo antecedente in cui per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3\ldots.$

si supponga $q_r = 0$ e si estragga la radice dal risultato, avvertendo che $q_0 = \sigma = 0$.

Se la n_r, per tutti i valori di r, rappresenta il numero intero immediatamente inferiore alla rispettiva p_{r-1}, la ω_r per tutti i valori di r sarà < 1 ed il più piccolo valore di p_r dato dalla (3) sarà $= \beta_r + \alpha_r$. Il valore pertanto di y_r che annulla una trasformata r^{esima} sarà compreso per tutti i valori di r fra $\beta_r + \alpha_r$ ed $\frac{1}{0}$. Se all'incontro n_r non eguaglia il numero intero immediatamente inferiore alla rispettiva p_{r-1}, la ω_r risulterà o > 1 o negativa. Il massimo valore di $y_r = \beta_r + \frac{\alpha_r}{\omega_r} = p_r$ che annulla la trasformata r^{esima} sarà $= \beta_r + \alpha_r$, e perciò un tal valore sarà compreso fra $\beta_r + \alpha_r$ e $-\frac{1}{0}$.

Dall'antecedente paragrafo risulta pertanto che nelle successive sostituzioni opportunamente protratte, dovendo i parametri ridursi fra i limiti $\beta_r - \alpha_r$ e β_r non potranno essere compresi fra i limiti $\beta_r + \alpha_r$ ed $\frac{1}{0}$, entro i quali sono compresi i valori di y_r che, nell'ipotesi di $n_r =$ al numero intero immediatamente inferiore a p_{r-1}, annullano il fattore di 1.° grado.

Nel caso particolare in cui si supponga, come nel § 25 $\alpha_r = n_r \delta_r$, $\beta_r = \delta_r$, la (1) diventa $y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{\delta_r}{y_r - \delta_r}\right)$ e la (2) si trasforma nella

$$x - \alpha = \pm \frac{\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_r}{(y_0 - \delta_0)(y_1 - \delta_1) \ldots (y_r - \delta_r)} (y_r - p_r).$$

Il valore di p_r sarà dato tanto da $\delta_r\left(1 + \frac{n_r}{\omega_r}\right)$, quanto da $\frac{\delta_0\, \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_r}{\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_r} p_{-1}$, giacchè questa seconda si trasforma nella prima osservando che si ha $\frac{\delta_0\, \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{r-1}}{\omega_0\, \alpha_1\, \omega_2 \ldots \omega_{r-1}} p_{-1} - n_r = \omega_r$.

Il valore di y_r che annulla la trasformata r^{esima}, pel caso di $\omega_r < 1$ sarà compreso fra $\delta_r(1 + n_r)$ ed $\frac{1}{0}$ e pel caso di ω_r negativo o maggiore di 1 fra $\delta_r(1 + n_r)$ e $-\frac{1}{0}$. Nel caso di $\delta_r = 1$, qualunque siasi r, il valor suddetto di y_r espresso in tal caso da $\frac{p_{-1}}{\omega_0\, \omega_1\, \omega_2 \ldots . \omega_r}$ sarà nella 1.ª ipotesi compreso fra $1 + n_r$ ed $\frac{1}{0}$ e nella 2.ª fra $1 + n_r$ e $-\frac{1}{0}$.

38. Data un'equazione $F(x) = 0$, si supponga rappresentata pe' suoi fattori di 1.° e di 2.° grado come nel § 11. Ritenute le proposizioni dei §§ 4, 5, 6 che spettano ad una equazione qualunque e sussistono pure quando ai limiti 1, $\frac{1}{0}$ si sostituiscano i limiti $\beta_r + \alpha_r$ ed $\frac{1}{0}$, dietro le forme date ai §§ 36, 37 si rappresenterà la trasformata r^{esima} $\phi(y_r) = 0$ della $F(x) = 0$ con fattori che si desumeranno dalla forma sopra stabilita pei fattori di 1.° e 2.° grado. Ritenute le proposizioni del § 12 che quì pure sussisteranno, in quanto la prima trasformata risulta, come nel caso del citato paragrafo, dalla posizione $y_{-1} = n_0 + \frac{1}{y_0}$, essendosi ai §§ 36, 37 supposto $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, se fra i limiti n_1, $n_1 + 1$ risulta $\Delta_r = 1$ e supponiamo eseguite le trasformazioni che risultano dalla relazione (1) del § 36, sussisteranno le proposizioni del § 13 quando ai limiti 1 ed $\frac{1}{0}$ si sostituiscano i limiti $\beta_r + \alpha_r$ ed $\frac{1}{0}$ ed ai limiti 0 e -1 si sostituiscano i limiti β_r e $\beta_r - \alpha_r$. Si conchiuderà quindi che in qualunque de' casi particolari derivati dai valori attribuiti ad α_r e β_r nei §§ 25, 26.... 31, si otterranno i valori delle diverse n_r rappresentanti i numeri interi immediatamente inferiori alle rispettive p_{r-1}, come se si fosse calcolato il valore α della radice dell'equazione lineare trattata ai §§ 24, 25 .... 34. Si potrà continuare l'operazione sino ad ottenersi un valore che differisca dalla radice che si cerca meno di qualsivoglia data quantità, e tale valore potrà

ottenersi espresso in una qualunque delle forme (3), (4) dei citati paragrafi.

39. Se fra i limiti n_1 ed n_1+1 risulta $\Delta_r = 2$, un tal numero, o corrisponderà a due radici reali comprese in quell'intervallo, e saranno esse separabili colle successive trasformazioni in due intervalli unitarj distinti, o corrisponderà ad un valor critico ed in tal caso nella trasformata r^{esima}, essendo r un numero sufficientemente grande, pei limiti $\beta_r + \alpha_r$ ed $\frac{1}{0}$ dovrà risultare $\Delta = 0$, giacchè colle successive sostituzioni i parametri tutti e le radici dell'anzidetta trasformata saranno ridotti fra i limiti β_r e $\beta_r - \alpha_r$ e divenuti pel § 37 gli argomenti minori di qualunque quantità assegnabile, i valori critici saranno pur essi compresi fra gli stessi limiti in cui sono compresi i parametri. Perciò avrà luogo quì parimente la proprietà che le successive trasformazioni faranno scomparire le radici deficienti che nella proposta $F(x) = 0$ erano indicate fra i limiti n_1 ed $n_1 + 1$. Estesa tale conclusione ai casi di $\Delta_r = 3, 4, 5 \ldots$ come si è fatto nei §§ 16, 17, 18, i valori critici nelle successive trasformate usciranno dai limiti entro cui si trovano le radici reali e ne risulterà la proposizione generale che qualunque metodo d'approssimazione derivato dai §§ 24, 25 .... 34 che s'impieghi per la ricerca delle radici reali conterrà in sè stesso il criterio per la distinzione delle radici immaginarie.

40. Sia $F(x) = x^2 - 2 = 0$ e si voglia la radice di essa compresa fra $n_1 = 1$, $n_1 + 1 = 2$ espressa colla serie (4) del § 29 che risulta dalla relazione ricorrente $y_{r-1} = n_r\left(1 + \frac{1}{y_r - 1}\right)$. Sarà $n_0 = 1$: posto quindi $x = y_{-1} = n_0 + \frac{\alpha_0}{y_0 - \beta_0}$ in cui dev'essere $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, si ha la trasformata $y_0^2 - 2y_0 - 1 = 0$. La radice sarà compresa fra $\alpha_0 + \beta_0 = 1$ ed $\frac{1}{0}$, ossia fra

l'intervallo unitario $n_1 = 2$, $n_1 + 1 = 3$. Posto quindi $y_0 = 2\left(1 + \frac{1}{y_1 - 1}\right) = \frac{2y_1}{y_1 - 1}$, si ha la trasformata $\phi(y_1) = y_1^2 - 6y_1 + 1 = 0$. La radice sarà compresa fra $n_1 + 1$ ed $\frac{1}{0}$, ossia fra 3 ed $\frac{1}{0}$. Siccome si trova esser dessa compresa fra 5 e 6, così risulta $n_2 = 5$. Posto $y_1 = 5\left(1 + \frac{1}{y_2 - 1}\right) = \frac{5y_2}{y_2 - 1}$, si ha la trasformata

$$\phi(y_2) = 4y_2^2 - 28y_2 - 1 = 0.$$

La radice sarà compresa fra $n_2 + 1 = 6$ ed $\frac{1}{0}$, ossia fra 7 ed 8, dunque $n_3 = 7$. Posto $y_2 = \frac{7y_3}{y_3 - 1}$, si ha

$$\phi(y_3) = y_3^2 - 198y_3 + 1 = 0.$$

La radice sarà compresa fra 197 e 198, dunque $n_4 = 197$. Posto $y_3 = \frac{197y_4}{y_4 - 1}$, si ha

$$\phi(y_4) = 196y_4^2 - (197 \cdot 198 - 2)y_4 - 1 = 0.$$

La radice sarà $>$ di $n_4 + 1$, ossia di 198. Essa si trova nell'intervallo unitario 199 e 200 dunque $n_5 = 199$. Arrestandoci a quest'approssimazione si ha dalla serie (4) del § 29

$$x = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2.5.7} - \frac{1}{2.5.7.197} + \frac{1}{2.5.7.197.199} - \dots$$

come si è trovato al § 35, ove però si ottenne $n_5 = 200$, in quanto non si è tenuto che un determinato numero di cifre decimali. Si vede di quì come un tale processo può fornire la radice qualunque di un numero dato espressa in serie di termini di una determinata forma frazionaria dell'unità.

Sia $F(x) = x^4 - 13x^3 + 59,26x^2 - 108,56x + 61,3 = 0$.

Fra i limiti $x = 3$, $x = 4$ risulta $\Delta = 2$, vuolsi conoscere se le due radici indicate in quell'intervallo sono reali o deficienti impiegando la relazione ricorrente del § 29. Si procederà come se esse fossero reali. Posto $n_1 = 3$ ed $x = y_{-1} = 3 + \frac{1}{y_0}$ si avrà come nel § 14 la trasformata

$$\phi(y_0) = 1,04y_0^4 - 4y_0^3 + 3,74y_0^2 + y_0 - 1 = 0.$$

Le radici, se sono reali, saranno comprese fra $\alpha_0 + \beta_0$ ed $\frac{1}{0}$, ossia, per essere $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$, fra 1 e $\frac{1}{0}$. Pei limiti $y_0 = 1$, $y_0 = 2$ si trova $\Delta = 2$, dunque $n_1 = 1$. Posto $y_0 = \frac{y_1}{y_1 - 1}$, le radici, se sono reali, dovranno nella trasformata

$$\phi(y_1) = 0,78y_1^4 - 2,48y_1^3 + 0,74y_1^2 + 3y_1 - 1 = 0$$

essere comprese fra $n_1 + 1 = 2$ ed $\frac{1}{0}$. Ma pei limiti $y_1 = 2$, $y_1 = \frac{1}{0}$ si trova col teorema degl' indici $\Delta = 0$. Dunque le radici della proposta indicate fra i limiti $x = 3$, $x = 4$ sono deficienti. In questo caso adunque si è ottenuta la distinzione delle radici immaginarie con due trasformate come nel 1.° esempio del § 14.

Sia $$F(x) = x^3 - 3,3x^2 + 3,64x - 1,342 = 0.$$

Pei limiti $x = 1$, $x = 2$ risulta $\Delta = 3$. Posto $x = 1 + \frac{1}{y_0}$ si ha la trasformata

$$\phi(y_0) = 0,002y_0^3 - 0,04y_0^2 + 0,3y_0 - 1 = 0.$$

Le 3 radici, se sono reali, daranno alla trasformata 3 radici comprese fra i limiti $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{0}$. Esplorata col teorema degl' indici per $y_0 = 6$, $y_0 = 7$ risulta $\Delta = 2$. Una radice reale è data da $y_0 = 10$, per cui una radice della proposta è $x = 1 + \frac{1}{10} = 1,1$. Per conoscere se le due radici indicate da $\Delta = 2$ sono reali o deficienti essendo $n_1 = 6$ si porrà $y_0 = \frac{6y_1}{y_1 - 1}$ e si avrà la trasformata

$$\phi(y_1) = 0,208 y_1^3 - 0,84 y_1^2 + 1,2 y_1 - 1 = 0.$$

Se le radici sono reali dovranno essere comprese fra i limiti $n_1 + 1 = 7$ ed $\frac{1}{0}$. Ma col teorema degl' indici pei limiti $y_1 = 7$, $y_1 = \frac{1}{0}$ si trova $\Delta = 0$. Dunque due delle tre radici indicate fra i limiti $x = 1$, $x = 2$ sono deficienti.

41. Se pei limiti $x = n_0$, $x = n_0 + 1$ nella $F(x) = 0$, risulta $\Delta = 1$, la radice α compresa fra questi limiti sarà fornita dalle diverse forme (3), (4) dei paragrafi antecedenti risultanti dalle relazioni ricorrenti indicate dalle (1) aventi forma frazionaria rispetto ad y. Le diverse n_r corrispondono, come si è veduto, ai limiti inferiori entro cui sono comprese le radici delle successive trasformate e le N_r ai limiti superiori.

Ma il valore della radice α della $F(x) = 0$ compresa fra n_0 ed $n_0 + 1$ può anche ottenersi dalle relazioni ricorrenti intere

$$y_{r-1} = n_r + \frac{y_r}{\delta_r} \quad (1) \qquad\qquad y_{r-1} = N_r - \frac{y_r}{\delta_r} \quad (1')$$

essendo le arbitrarie δ_r numeri interi e positivi qualunque, ed n_r, N_r i limiti inferiori e superiori degl' intervalli unitarj entro cui è compresa la radice delle diverse trasformate. Le radici stesse essendo sempre comprese fra 0 e δ_r, le due relazioni antecedenti daranno pel valore di α rispettivamente le serie

$$\alpha = n_0 + \frac{n_1}{\delta_0} + \frac{n_2}{\delta_0\delta_1} + \frac{n_3}{\delta_0\delta_1\delta_2} + \frac{n_4}{\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3} + \dots + \frac{n_r}{\delta_0\delta_1\delta_2\dots\delta_{r-1}} + \frac{y_r}{\delta_0\delta_1\delta_2\dots\delta_r} \quad (2)$$

$$\alpha = N_0 - \frac{N_1}{\delta_0} + \frac{N_2}{\delta_0\delta_1} - \frac{N_3}{\delta_0\delta_1\delta_2} + \frac{N_4}{\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3} - \dots \pm \frac{N_r}{\delta_0\delta_1\delta_2\dots\delta_{r-1}} \mp \frac{y_r}{\delta_0\delta_1\delta_2\dots\delta_r} \quad (2')$$

La 1.ª serie fornisce valori sempre minori e convergenti verso α, la 2.ª valori alternativamente maggiori o minori. In entrambe le serie per avere due limiti entro cui è compresa la α basterà di aumentare nella 1.ª di un'unità l'ultimo numero intero n_r e di diminuire di un'unità nella 2.ª l'ultimo numero intero N_r. L'approssimazione sarà pertanto completa.

Si potrà anche ottenere una serie a segni promiscuamente positivi e negativi come nel § 34 quando s'impieghino promiscuamente le due relazioni ricorrenti (1), (1'). Ciò risulta manifesto dietro i processi più volte usati nei paragrafi ove si sono impiegate le diverse relazioni ricorrenti fratte. Per avere il valore di α espresso in cifre decimali, nelle (1), (2) si dovrà supporre $\delta_r = 10$ per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ e si avrà in tal caso $\alpha = n_0, \ n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$ ove i valori delle $n_1, n_2, n_3 \ldots$ saranno compresi fra 0 e 10 ed indicheranno cifre decimali. Una tale espressione è quella data da Budan e deve coincidere col valore della radice fornita dall'approssimazione lineare di cui si è parlato nella Memoria di cui questa è la continuazione.

Se la radice α della $F(x) = 0$ compresa fra n ed $n + 1$ vuolsi esprimere con una serie i cui termini abbiano l'unità per numeratore senza impiegare le relazioni ricorrenti fratte da cui risultarono le serie (4), [4], [4'] dei §§ 28 e 34, si distinguerà il caso di $n = 0$ e di $n \gtreqless 1$. Dalla sostituzione successiva dei valori dell'incognita nati dalla relazione ricorrente intera

$$y_{r-1} = \frac{1}{n_r} + \frac{y_r}{n_r} \qquad (3)$$

per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ incominciando dalla $F(x) = F(y_{-1}) = 0$ pel caso di $n = 0$ e dalla $F(n + x) = F(n + y_{-1}) = 0$ pel caso di $n \gtreqless 1$ si avrà una trasformata $\phi(y_r) = 0$ la cui radice sarà compresa fra 0 ed 1 o più esattamente fra $\frac{1}{\infty}$ ed $\frac{1}{n_r}$. Per avere il valore del limite $\frac{1}{n_{r+1}}$ inferiore alla radice da impiegarsi nelle successive sostituzioni si dividerà l' intervallo $\frac{1}{n_r}$, $\frac{1}{\infty}$ negl' intervalli parziali

$$\frac{1}{n_r},\quad \frac{1}{n_r+1},\quad \frac{1}{n_r+2},\quad \frac{1}{n_r+3}\cdots\cdots\frac{1}{n_r+\infty} \tag{4}$$

Si cercheranno due valori consecutivi $\frac{1}{n_{r+1}-1}$, $\frac{1}{n_{r+1}}$ che ridurranno $\phi(y_r)$ di segno contrario, ed il limite inferiore $\frac{1}{n_{r+1}}$ s' impiegherà per la trasformazione successiva. Tale processo dovrà eseguirsi incominciando dai valori di $r=0$, $r=1$, $r=2\ldots.$ Dalla relazione (3) risulterà in generale

$$\alpha = n+\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0 n_1}+\frac{1}{n_0 n_1 n_2}+\cdots\cdots+\frac{y_r}{n_0 n_1 n_2\ldots\ldots n_r}$$

ove sarà $n=0$ se la radice in discorso è compresa fra 0 ed 1.

Se si assume nella $\phi(y_r)=0$ per tutti i valori di r il limite superiore alla radice, nel qual caso la relazione (3) è rimpiazzata dalla $y_{r-1}=\frac{1}{N_r}-\frac{y_r}{N_r}$, ed avvertendo che sarà $n_r=N_r+1$, si avrà la serie

$$\alpha = n+\frac{1}{N_0}-\frac{1}{N_0 N_1}+\frac{1}{N_0 N_1 N_2}-\cdots\cdots\pm\frac{y_r}{N_0 N_1 N_2\ldots\ldots N_r}.$$

Varranno quì gli stessi riflessi del § 34, tanto rispetto al modo di ottenere un secondo limite collo scambiare fra loro gli ultimi numeri n_r, N_r a cui si arrestano le serie, quanto rispetto al modo di ottenere una serie a segni promiscuamente positivi e negativi.

42. Se un' equazione qualunque $F(x)=0$ si concepisce scomposta ne' suoi fattori di 1.° e di 2.° grado rappresentati colle adottate forme

$$(x-\alpha)^2+\sigma^2=(y_{-1}-p_{-1})^2+q_0^2,\quad (x-\alpha)=y_{-1}-p_{-1}$$

e si sostituiscono successivamente i valori della relazione ricorrente $y_{r-1} = n_r + \frac{y_r}{\delta_r}$ ove l'arbitraria δ_r sarà un numero intero positivo o negativo ed n_r il limite inferiore o superiore alla radice od al parametro contenuto nei rispettivi fattori di cui sono affette le trasformate successive, risulterà

$$(x-\alpha)^2 + \sigma^2 = \left(\frac{1}{\delta_0\delta_1\delta_2 \ldots . \delta_r}\right)^2 \left\{(y_r - p_r)^2 + q_{r+1}^2\right\}$$

ove le diverse p_r, q_r sono date dai valori delle relazioni ricorrenti $p_{r-1} - n_r = \omega_r$, $\delta_r\omega_r = p_r$, $\delta_r q_r = q_{r+1}$. Se per tutti i valori di $r = 0, 1, 2, 3 \ldots .$ si suppone $q_r = 0$ e si estragga la radice, si avrà

$$x - \alpha = \frac{1}{\delta_0\delta_1\delta_2 \ldots . \delta_r}(y_r - p_r)$$

ove la p_r sarà data dalle relazioni ricorrenti

$$p_{r-1} - n_r = \omega_r\,, \qquad \delta_r\omega_r = p_r\,.$$

Da questa trasformazione si vede che i parametri dei fattori di 2.° grado nelle diverse trasformate si comportano colla stessa legge delle costanti dei fattori di 1.° grado, dipendendo la p_r in ambi i casi dalle stesse relazioni ricorrenti, e che gli argomenti andranno continuamente aumentando di valore risultando dalla continua sostituzione

$$q_{r+1} = \delta_r q_r = \delta_r\delta_{r-1}q_{r-1} = \delta_r\delta_{r-1}\delta_{r-2}q_{r-2} = \ldots .$$
$$\ldots . = \delta_r\delta_{r-1}\delta_{r-2}\delta_{r-3} \ldots . \delta_0 q_0\,.$$

Ne risulta che i parametri nelle diverse trasformate saranno in generale compresi fra gli stessi limiti entro cui sono comprese le radici. Se le n_0, n_1, $n_2 \ldots . n_r$ sono i limiti inferiori alla radice delle successive trasformate, essendo la radice α della proposta compresa fra n_0, $n_0 + 1$, la radice stessa nelle diverse trasformate sarà compresa fra o e δ_r. Le radici che nella proposta erano comprese fra $n_0 + 1$ ed $\frac{1}{0}$ diverranno nelle trasformate comprese fra δ_r ed $\frac{1}{0}$ e quelle che erano comprese fra n_0 e $-\frac{1}{0}$ diverranno nelle trasformate comprese fra δ_r e $-\frac{1}{0}$. Un tale discorso avrà luogo relativamente ai parametri in quanto essi si trasformano, come si è veduto, nella stessa guisa che si trasformano le radici. Non potranno dunque in queste sostituzioni nate da relazioni ricorrenti intere dedursi le stesse conseguenze rispetto al modo di distinguere la natura delle radici, se reali o deficienti, di quelle desunte da trasformazioni nate da relazioni ricorrenti frazionarie.

43. Se nell'equazione $F(x) = o$, pei limiti $x = n_0$, $x = n_0 + 1$ risulta $\Delta = 2$, dietro il processo del § 41, si dovrà giungere, se le radici indicate sono reali, ad una trasformata r^{esima} nella quale pei limiti $y_r = o$, $y_r = \delta_r$ essendo ancora $\Delta = 2$ le due radici reali si troveranno separate in due intervalli unitarj distinti sempre compresi fra l'intervallo o, δ_r. Se le radici indicate sono deficienti il valor critico che nella $F(x) = o$ è contenuto fra i limiti n_0, $n_0 + 1$ si troverà racchiuso fra i limiti sempre più ristretti, a misura che cresce il valore di r, forniti dai valori dei 2.ⁱ membri delle (2), (2') arrestate ai numeri n_r, N_r del § 41 e da quelli che nascono sostituendo nella stessa serie i numeri N_r, n_r agli ultimi numeri interi n_r, N_r. Di fatti nel 1.° caso, quand'anche piccolissima sia la differenza fra le due radici, se nelle trasformate successive esse rimanessero costantemente comprese nello stesso intervallo unitario, la continua approssimazione ottenuta colle serie (2), (2') del § 41 fornirebbe un valore unico per le due radici. Si dovrebbe dunque conchiudere che le due radici sono eguali contro l'ipotesi che esclude le radici multiple dalla proposta $F(x) = o$. Nel 2.° caso il valor critico della $F(x) = o$ compreso fra

n_0 ed $n_0 + 1$ sia $= c$. Esisterà in tal caso una derivata h^{esima} espressa da $F^{(h)}(x)$ che si annullerà per $x = c$, mentre le due derivate laterali $F^{(h-1)}(x)$, $F^{(h+1)}(x)$ manterranno lo stesso segno pel valore $x = c$. Chiamata $\phi(y_r)$ una trasformata r^{esima}, se per y_r si risostituisce il suo valore dato per $y_{-1} = x$ dedotto dalle (2), (2') del § 41, ove siasi sostituito x ad α, e P alla somma de' termini indipendenti da y_r supposta r dispari per risparmio del doppio segno, la $\phi\left\{(x - P)\,\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_r\right\}$ sarà identica colla $F(x)$. Differenziando h volte per x l'equazione

$$F(x) = \phi\left\{(x - P)\,\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_r\right\}$$

si otterrà

$$F^{(h)}(x) = (\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_r)^h\,\phi^{(h)}\left\{(x - P)\,\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_r\right\}.$$

Si avrà per le due derivate laterali la stessa espressione cambiando h in $h - 1$ ed $h + 1$. Ma per $x = c$ si ha $F^{(h)}(c) = 0$, dunque

$$\phi^{(h)}\left\{(c - P)\,\delta_0\delta_1\delta_2\ldots\delta_r\right\} = 0$$

e le due derivate laterali

$$\phi^{(h-1)}\left\{(c - P)\,\delta_0\delta_1\ldots\delta_r\right\}, \qquad \phi^{(h+1)}\left\{(c - P)\,\delta_0\delta_1\ldots\delta_r\right\}$$

saranno dello stesso segno. Il valore pertanto di

$$y_r = (c - P)\,\delta_0\delta_1\ldots\delta_r \qquad (1)$$

annullando la derivata $\phi^{(h)}(y_r)$ e riducendo dello stesso segno le due derivate laterali sarà un valor critico della $\phi(y_r) = 0$; e siccome y_r è compreso fra 0 e δ_r, così il valor critico stesso sarà compreso fra questi limiti. Siccome dalla (1) si deduce $P + \frac{y_r}{\delta_0\delta_1\ldots\delta_r} = c$, ne risulta che i secondi membri delle (2), (2') rappresentati in generale dal 1.° membro di questa convergeranno a misura che si aumenta il valore di r verso il valore c, ossia verso il valore critico della $F(x) = 0$ compreso fra n_0 ed $n_0 + 1$. Le serie stesse (2), (2') arrestate ai numeri n_r, N_r siano rappresentate da $F(n_r)$, $F(N_r)$. Siccome il valore finito $P + \frac{y_r}{\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_r}$ sarà compreso fra $F(n_r)$ ed $F(n_r + 1)$ per la serie (2) e fra $F(N_r)$, $F(N_r - 1)$ per la (2'), ossia fra $F(n_r)$ ed $F(N_r)$ per la (2) e fra $F(N_r)$ ed $F(n_r)$ per la (2'), così il valor critico c sarà compreso fra questi stessi limiti. Tale conclusione risulta dall'aver impiegata una relazione ricorrente intera, mentre nelle relazioni fratte impiegate nei paragrafi antecedenti ottenendosi trasformate nelle quali entra un fattore frazionario, le diverse derivate che s'impiegano nel teorema degl'indici risultanti dalla soppressione del fattore anzidetto non eguagliano le derivate che risulterebbero senza una tale soppressione.

Se per fissare le idee supponiamo che in una $F(x) = 0$ pei limiti $n_0 = 25$, $n_0 + 1 = 26$ siasi trovato $\Delta = 2$ corrispondente a due radici deficienti, e che una derivata $F^{(5)}(x)$ sia annullata da $x = 25,3456789876\ldots$, e che s'indichi con $\phi(y_7) = 0$ la trasformata 7^{ma} nata dalla relazione ricorrente intera (1) del § 41 in cui per qualunque valore di r si supponga $\delta_r = 10$, i valori dei limiti inferiori delle radici deficienti delle diverse trasformate, comprese in tal caso fra 0 e $\delta_r = 10$, risulteranno dati da

$$n_0=25,\ n_1=3,\ n_2=4,\ n_3=5,\ n_4=6,\ n_5=7,\ n_6=8,\ n_7=9,$$

e perciò $$P = n_0, n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7 = 25,3456789$$

e la $y_r = (c - P)\,\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_r$ si ridurrà a

$$y_7 = (25,3456789876\ldots - 25,3456789)\,10^8 = 8,76\ldots$$

Un tal valore compreso fra o e 10 sarà il valor critico della $\phi(y_7) = 0$, annullerà la $\phi^{(5)}(y_7)$ e renderà dello stesso segno le due derivate laterali $\phi^{(4)}(y_7)$, $\phi^{(6)}(y_7)$.

44. Se si suppone che il parametro d'un fattore di 2.° grado di una proposta equazione coincida col valore di una radice reale compresa fra i limiti n_0, $n_0 + 1$, che inoltre per gli anzidetti limiti risulti $\Delta = 3$ e che siano in generale n_r, $n_r + 1$ i limiti entro cui nelle successive trasformate è compresa la radice, per gli stessi limiti risulterà sempre $\Delta = 3$, ed il valor critico non potrà uscire dall'intervallo in cui si trova la radice. Un tal caso si verifica nell'equazione $x^3 - 3,3\,x^2 + 3,64\,x - 1,342 = 0$ trattata nel § 40 la quale pei limiti $x = n_0 = 1$, $x = n_0 + 1 = 2$, fornisce $\Delta = 3$ ed in cui la radice reale $x = 1,1$ coincide col parametro del suo fattore di 2.° grado.

Se pei limiti n_0, $n_0 + 1$ risultasse $\Delta = 2$, ammettendo che le radici indicate siano deficienti, nelle successive trasformate ottenute colla relazione intera (1) del § 41 pei limiti $y_r = 0$, $y_r = \delta_r$, per qualsivoglia valore di r risulterà costantemente $\Delta = 2$. Così, per esempio, essendo data l'equazione $x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$, pei limiti $x = n_0 = 0$, $x = 1$ risulta $\Delta = 2$ il quale è indicatore di due radici deficienti. Supposto nella relazione (1) del § 41 $\delta_r = 10$ per tutti i valori di r, si porrà $x = 0 + \frac{1}{10} y_0$ e si avrà la trasformata $y_0^3 + 20y_0^2 - 300y_0 + 2000 = 0$. Pei limiti $y_0 = 0$, $y_0 = \delta_0 = 10$ risulta $\Delta = 2$, il quale corrisponde all'intervallo unitario $y_0 = n_1 = 5$, $y_0 = 6$. Posto $y_0 = 5 + \frac{1}{10} y_1$ si ha la trasformata

$$y_1^3 + 350y_1^2 - 2500y_1 + 10^3(125 + 10^3) = 0.$$

Pei limiti $y_1 = 0$, $y_1 = \delta_1 = 10$ risulta $\Delta = 2$ che corrisponde all'intervallo unitario $y_1 = n_2 = 3$, $y_1 = 4$. Posto $y_1 = 3 + \frac{1}{10} y_2$ si ha la trasformata

$$y_2^3 + 3590\, y_2^2 - 37300\, y_2 + 10^3 Q = 0$$

essendo $Q = 10^3(125 + 10^3) - 4323$. Pei limiti $y_2 = 0$, $y_2 = \delta_2 = 10$ risulta $\Delta = 2$ che corrisponde all'intervallo unitario $y_2 = n_3 = 5$, $y_2 = 6$. Posto $y = 5 + \frac{1}{10} y_3$ si otterrebbe una trasformata che pei limiti $y_3 = 0$, $y_3 = \delta_3 = 10$ fornirebbe $\Delta = 2$, e così progredendo si avrebbe indefinitamente nelle successive trasformate, pei limiti 0 e 10, $\Delta = 2$. Il valor critico che nella proposta è compreso fra $x = 0$, $x = 1$ sarà dato dalla serie (2) del § 41 ove si ponga $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \cdots\cdot = 10$ ed $n_0 = 0$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5 \cdots\cdot$, ossia sarà dato dalla frazione decimale $0{,}535 \cdots\cdot$ che annulla la derivata 1.ª riducendo dello stesso segno la derivata 2.ª e la proposta stessa.

45. Il criterio della distinzione delle radici immaginarie, nel caso di un'approssimazione completa fondata sopra relazioni ricorrenti intere, starà ancora nel ridursi $\Delta = 0$, essendo Δ l'ultimo della serie degl'indici desunta non più dalla trasformata $\phi(y_r) = 0$, come nel caso di relazioni fratte, ma da una nuova serie dipendente dalle derivate della stessa equazione proposta $F(x) = 0$. Di fatto essendo $F(x) = 0 = X$ un'equazione di grado m, la serie

$$X^{(m)},\quad X^{(m-1)} \ldots\ldots X^{(i+1)},\quad X^{(i)} \ldots\ldots X^{h} \ldots\ldots X'',\quad X',\quad X \qquad (1)$$

dia pei limiti $n = n_0$, $n = n_0 + 1$ il valore $\Delta = 2$. Siano a, b i limiti dell'approssimazione completa forniti dalla serie (2) o dalla serie (2') del § 41 arrestata ad un termine r^{esimo} ed entro i quali sono comprese, pel § 43, o le due radici se sono reali, od il valor critico se sono deficienti. Pei limiti $x = a$, $x = b$, la serie (1) fornirà una nuova serie d'indici, l'ultimo de' quali sarà $\Delta = 2$. Percorrendo questa serie da destra a sinistra arrestiamoci a quella funzione

$X^{(i)}$ che sia la 1.ª cui corrisponde un indice $= 1$ seguito a sinistra da un indice $= 0$; se ciò non ha luogo si sostituiranno i due limiti a', b' dovuti alla stessa serie arrestata al termine seguente $(r + 1)^{\text{esimo}}$. Così procedendo una tale condizione non mancherà di avverarsi, ed in tal caso sappiamo che gl' indici corrispondenti alle tre funzioni $X^{(i+1)}$, $X^{(i)}$, $X^{(i-1)}$ saranno 0, 1, 2. Posto $X^{(i-1)} + X^{(i)} = Y$, si formi la nuova serie

$$Y^{(m-i)}, \quad Y^{(m-(i+1))} \ldots Y'', \quad Y', \quad Y, \quad X^{(i-2)} \ldots X^{h} \ldots X'', \quad X', \quad X \qquad (2)$$

nella quale un termine qualunque $Y^{(n)}$ risulta dalla somma del termine corrispondente $X^{(i-(n-1))}$ e del termine seguente a sinistra nella serie (1). Pei limiti $x = a'$, $x = b'$ si cerchi la serie degl' indici forniti dalla (2). Se non risulta $\Delta = 0$, i limiti a', b' non saranno abbastanza approssimati e si dovranno cercare colla serie (2) o colla (2') i due limiti dati dall' approssimazione seguente. Non potrà mancare di ottenersi col restringere opportunamente i limiti o che le due indicate radici della $F(x) = 0$ vengano separate in intervalli distinti nel caso che siano reali, o che si verifichi la condizione di ottenersi $\Delta = 0$. In tal caso se il segno di Y' risultante dai due limiti $x = a'$, $x = b'$ sarà lo stesso del segno di $X^{(i+1)}$ corrispondente agli stessi limiti, le due radici indicate saranno deficienti, se sarà contrario le due radici saranno reali e le successive approssimazioni date dalla serie (2) o dalla (2') del § 41 finiranno per separarle in intervalli distinti.

Se pei limiti $x = n_0$, $x = n_0 + 1$ la serie (1) fornisce $\Delta = 3$ si procederà nello stesso modo e colle stesse avvertenze come nel caso di $\Delta = 2$ sino ad ottenersi una serie della forma (2) che pei limiti approssimati (a'), (b') fornisca $\Delta = 1$, dovendo una delle radici essere reale. Non potrà mancare di accadere col ristringere opportunamente i limiti, o che le tre radici indicate fra i limiti n_0, $n_0 + 1$ vengano separate in intervalli distinti nel caso che siano reali, o che si verifichi nella serie (2) la condizione $\Delta = 1$ quand'anche il valor critico coincidesse colla radice reale. Avuto riguardo quindi ai segni della Y' e della $X^{(i+1)}$ pei limiti approssimati $x = a'$, $x = b'$ s'impiegherà lo stesso criterio per decidere se le due radici sono reali o deficienti. Se pei limiti $x = n_0$, $x = n_0 + 1$ risultasse $\Delta = 4$ si procederà alla formazione della serie (2) come nel caso di $\Delta = 2$ sino ad ottenersi che la stessa serie fornisca per gli ultimi limiti approssimati una serie d'indici, l'ultimo dei quali sia $= 2$. Ciò ottenuto, si tratterà questa stessa serie (2) collo stesso processo come si è trattata la serie (1), cioè se $X^{(h)}$ è la 1.ª funzione incominciando da destra a sinistra, cui corrisponde l'indice $= 1$, e sia esso seguito a sinistra dall'indice zero, si porrà $X^{(h-1)} + X^{(h)} = Z$, e sommando un termine della (2) col suo seguente a sinistra si formerà la serie

$$Z^{(m-i-h)} \dots Z'', \quad Z', \quad Z, \quad X^{(h-2)} \dots X'', \quad X', \quad X \qquad (3)$$

avvertendo di sostituire la Y alla X, giunti al termine $X^{(i-2)}$. Se questa (3) pei limiti già impiegati darà $\Delta = 0$ si esploreranno i segni che le due funzioni Z' ed $X^{(h+1)}$ assumono, sia pel primo, sia pel secondo dei limiti impiegati. Dal presentare esse o lo stesso segno o segni contrarj, si deciderà se le altre due radici indicate sono reali o deficienti. Nel primo caso le approssimazioni successive separeranno le radici in intervalli distinti. Se non risulta $\Delta = 0$ si dovranno restringere i limiti passando ad un' ulteriore approssimazione.

Un simile processo avrà luogo quando pei limiti $x = n_0$, $x = n_0 + 1$ risultasse nella serie (1) $\Delta = 5, 6, 7 \dots$ Di quì si vede che la stessa operazione che serve alla ricerca

delle radici reali è atta alla distinzione delle radici immaginarie, purchè ad ogni operazione che si fa per determinare i loro valori approssimati nel caso che siano reali vi si congiunga il teorema degl' indici applicato a serie di termini che dipendono dalle derivate della proposta funzione $F(x)$, e non più, come nel caso delle relazioni fratte, dalle derivate delle funzioni trasformate $\phi(y_r)$.
Ne risulta dal complesso di queste proposizioni e di quelle dei precedenti paragrafi che qualunque metodo s' impieghi per la ricerca dei valori approssimati delle radici, purchè l'approssimazione ottenuta sia completa, formando sempre due limiti entro cui le radici sono comprese, è sempre atto alla distinzione delle radici immaginarie, purchè il metodo stesso si congiunga col teorema degl' indici opportunamente applicato.

46. Le formole degli antecedenti paragrafi dotate di proprietà atte a fornire sia i valori delle radici irrazionali delle equazioni algebriche, sia il criterio per la distinzione delle radici immaginarie furono dedotte da relazioni ricorrenti che colla continua sostituzione diedero il valore dell' incognita espressa sia in frazioni continue, sia in serie indefinite.
Esaminando più accuratamente la natura degli esposti metodi si riconosce il principio generale e comune da cui essi dipendono. Questi in fatti non sono che casi particolari di relazioni ricorrenti più generali atte a fornire i valori approssimati delle radici di equazioni qualunque algebriche o trascendenti. La continua sostituzione nata da tali relazioni generali dà origine sia a forme di funzioni che chiamo *involute*, di cui le frazioni continue non sono che casi speciali, sia a sviluppi in serie che comprendono le più generali che si conoscono nell'analisi e la cui origine comune si trova nelle relazioni di tal specie. Quelle contemplate negli antecedenti paragrafi sono le più semplici che possano presentarsi, mentre la relazione più generale che esista fra due variabili è data dalla forma

$f(y_r\,,\ y_{r-1}) = 0$ ovvero dalle $y_{r-1} = f(y_r)$, essendo la 1.ª una relazione implicita e la 2.ª esplicita. In queste il valore di un' incognita dipende da quello dell' incognita affetta da indice diverso. La relazione implicita a più variabili è data dalla $F(y_r\,,\ y_{r-1}\,,\ y_{r-2} \ldots y_h) = 0$ in cui il valore di un' incognita y_r od y_h dipende dai valori delle altre incognite che in essa entrano. Possono anche tali relazioni essere date sotto forma esplicita

$$y_r = \phi(y_{r-1}\,,\ y_{r-2} \ldots y_h) \quad \text{od} \quad y_h = \phi(\ldots y_{r-2}\,,\ y_{r-1}\,,\ y_r).$$

La relazione esplicita $y_{r-1} = f(y_r)$ può anche contenere un' incognita indipendente come nella $y_{r-1} = f(n_r\,,\ y_r)$, ove la n_r è variabile con r, o legata ad altra relazione ricorrente $\phi(n_r\,,\ n_{r+1}) = 0$, come ha luogo nei metodi trattati indietro. Lo stesso può dirsi delle relazioni ricorrenti a più variabili espresse o sotto forma implicita, o sotto forma esplicita. Il carattere distintivo di tali relazioni sta nel rimanere invariate soltanto le forme delle funzioni, mentre le variabili stesse assumono diversi valori dipendenti dalle forme stesse e dalle costanti che entrano in esse. Chiamo convergente una forma di relazione ricorrente quando la continua sostituzione dei valori delle incognite desunte progressivamente dal valore noto della prima indicata dall' indice $r = 0$ converge, al crescere di r, verso un limite fisso e finito, divergente nel caso contrario. Mi limito per ora a considerare le relazioni ricorrenti più semplici incominciando dall' esplicita a due incognite $y_{r-1} = f(y_r)$ ove la f sia una funzione qualunque.

47. Sia proposta l' equazione $x - \phi(x) = 0$, ove la ϕ indichi una funzione qualunque. Coi metodi esposti nella Memoria già citata sulle equazioni trascendenti si cerchino due valori x_0, X_0 entro i quali è compresa una radice della proposta, e siano tali limiti così avvicinati al valore in discorso che la serie degl' indici fornisca per essi limiti i valori

.... 0001. Sia $X_0 > x_0$, considerando per maggiori quei valori che giacciono più lontani dal limite $-\frac{1}{0}$ riguardato come punto d' origine delle quantità crescenti. Si distinguano i tre seguenti casi.

1.° Quando per ciascuno dei due valori $x = x_0$, $x = X_0$ sia avverata la condizione che il valor numerico che assume la derivata $\phi'(x)$ sia < 1, ovvero < 3 secondo che la stessa $\phi'(x)$ pel valore sostituito ad x risulta negativa ovvero positiva.

2.° Quando l'accennata condizione non è avverata nè per $x = x_0$, nè per $x = X_0$.

3.° Quando l' accennata condizione è avverata soltanto per uno dei valori $x = x_0$, $x = X_0$ senza esserlo per entrambi.

48. Se ha luogo il 1.° caso il valore della radice o sarà dato dalle relazioni ricorrenti

$$x_r = \phi(x_{r-1}) \qquad (1) \qquad\qquad X_r = \phi(X_{r-1}) \qquad (I)$$

qualora la $x - \phi(x)$ per $x = x_0$ risulti negativa, o sarà dato dalle relazioni ricorrenti

$$x_r = 2x_{r-1} - \phi(x_{r-1}) \qquad (2) \qquad\qquad X_r = 2X_{r-1} - \phi(X_{r-1}) \qquad (II)$$

qualora la $x - \phi(x)$ per $x = x_0$ risulti positiva.
Nelle relazioni (1), (2) non potrà mai accadere che un valore di una qualsivoglia x_r riesca minore dei due precedenti valori x_{r-1}, x_{r-2}, e nelle relazioni ricorrenti (I), (II) non potrà mai accadere che il valore di una qualsivoglia X_r risulti maggiore dei due precedenti valori X_{r-1}, X_{r-2}. Nel caso che la serie di valori x_0, x_1, $x_2 \ldots\ldots x_r \ldots\ldots$ nati dalle relazioni ricorrenti (1), (2) presentino, ad incominciare di una x_r, valori o costantemente crescenti o costantemente decrescenti, questi valori, di cui i primi saranno minori ed i secondi maggiori della radice, avranno per limite la radice stessa convergendo verso il suo valore. Nel caso

poi che le stesse relazioni ricorrenti presentino valori alternativamente crescenti e decrescenti, la serie di valori x_r, x_{r+2}, x_{r+4}, ... essendo x_r il termine in cui comincia a manifestarsi la legge d'alternazione, darà valori convergenti sempre minori della radice, se la x_r sarà essa stessa minore, mentre la serie x_{r+1}, x_{r+3}, ... darà valori convergenti sempre maggiori della radice. Accaderà il contrario se la x_r sarà maggiore della radice. Assumendo pertanto, quando sia d'uopo, i valori calcolati coi due limiti si otterrà una approssimazione completa. La stessa legge avrà luogo rispetto ai valori X_0, X_1, $X_2 \ldots . X_r \ldots .$ forniti dalle relazioni ricorrenti (I), (II).

Le relazioni ricorrenti (2), (II) si possono rispettivamente ridurre alle forme (1), (I) col porre per la 1.ª

$$2x_{r-1} - \phi(x_{r-1}) = \psi(x_{r-1}),$$

per la 2.ª

$$2X_{r-1} - \phi(X_{r-1}) = \psi(X_{r-1}),$$

con che le anzidette divengono

$$x_r = \psi(x_{r-1}) \qquad (3) \qquad\qquad X_r = \psi(X_{r-1}) \qquad (\text{III}).$$

49. Se ha luogo il 2.° caso i valori forniti dalle relazioni ricorrenti (1), (2), (I), (II) non convergeranno verso la radice che si cerca. Essi daranno o valori crescenti indefinitamente, o valori non convergenti verso un limite fisso, ovvero valori convergenti verso un limite che soddisfa bensì alla proposta, ma non è compreso fra i limiti dati $x = x_0$, $x = X_0$. Sebbene non si ottenga in tal caso la radice che nella proposta è compresa fra gli assegnati limiti, pure si potrà spesso raggiungere l'intento mediante opportune trasformazioni, come si vedrà in qualche esempio, od anche col solo cambiare la forma della funzione proposta riducendola ad un'altra $x - \psi(x) = 0$. In tal caso quantunque lo stesso valore della radice compresa fra $x = x_0$, $x = X_0$

soddisfi entrambe queste equazioni, pure la condizione della convergenza che non è soddisfatta per la proposta lo può essere per la sua trasformata.

50. Se ha luogo il 3.° caso non si potrà decidere della convergenza o divergenza dei valori forniti dalle relazioni ricorrenti date nel 1.° caso, in quanto i limiti x_0, X_0 non saranno abbastanza vicini. Sia ξ_0 un numero intermedio fra x_0 ed X_0. Si determinerà entro quali limiti si trova la radice, se fra $x = x_0$, $x = \xi_0$ ovvero fra $x = \xi_0$, $x = X_0$. Sia X_0 quello dei due limiti pel quale non è adempita la condizione enunciata al n.° 1.° e sia per ipotesi la radice compresa fra x_0 e ξ_0. Si esaminerà se il valor numerico di $\phi'(\xi_0)$ adempia o non adempia la condizione di essere < 3 qualora il suo valore sia positivo, o di essere < 1 se risulti negativo. Nel 1.° caso essendo pei nuovi limiti x_0, ξ_0 adempita la condizione del n.° 1.° i valori dati dalle relazioni ricorrenti saranno convergenti verso la radice. Nel 2.° caso converrà procedere ad un'ulteriore suddivisione dell'intervallo x_0, ξ_0 ed esplorare entro quale dei nuovi limiti è compresa la radice.
Se poi la radice trovasi nell'intervallo ξ_0, X_0, allora o la $\phi'(\xi_0)$ non adempie la condizione voluta, ed allora trovandosi la radice fra due limiti per nessun de' quali è adempita la condizione, saremo nel caso del n.° 2.°, in cui i valori delle relazioni ricorrenti sono divergenti: o la $\phi'(\xi_0)$ adempie la condizione voluta, ed allora si procederà alla suddivisione dell'intervallo ξ_0, X_0. Così progredendo non potrà mancare di ottenersi in ogni caso due limiti ξ, ζ, entro i quali essendo compresa la radice, la condizione voluta rispetto alle $\phi'(\xi)$, $\phi'(\zeta)$ sia o per entrambi i limiti soddisfatta, e saremo nel caso del n.° 1.°, o per nessuno di essi avverata, e saremo nel caso del n.° 2.°

51. Il caso di eccezione che s' incontra è quello in cui, il valore di $x - \phi(x)$ essendo positivo per x eguale al

limite inferiore alla radice, le due equazioni $x - \phi(x) = 0$, $\phi'(x) - 3 = 0$ avessero una radice comune compresa fra x_0 ed X_0, ovvero che la $x - \phi(x)$ essendo negativa, per x eguale al limite inferiore alla radice, le equazioni $x - \phi(x) = 0$, $\phi'(x) + 1 = 0$ avessero una radice comune compresa parimente fra $x = x_0$, $x = X_0$. Ma un tal caso speciale o potrà essere separatamente esaminato, come accade nelle equazioni algebriche dotate di radici multiple, ovvero potrà farsi scomparire, come accade al n.° 2.°, con opportune trasformazioni o soltanto con cambiamenti di forma della proposta.

52. La relazione ricorrente (1) del § 48 pei diversi valori di $r = 1, 2, 3 \ldots .$ dà la serie ricorrente

$$x_1 = \phi(x_0), \quad x_2 = \phi(x_1), \quad x_3 = \phi(x_2) \ldots . x_r = \phi(x_{r-1}) \qquad (1)$$

in cui i valori x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_r$, essendo x_0 il limite impiegato, sono convergenti verso la radice che chiameremo α. La continua sostituzione de' valori precedenti nei 2.[i] membri dei seguenti fornisce il valore approssimato

$$x_r = \ldots . \phi\left\{\phi\left\{\phi\left\{\phi\left\{\phi(x_0)\right\}\right.\right.\right.\right. \qquad (2)$$

ossia $x_r = \phi^{(r)}(x_0)$ (3) ove l'esponente r indica il numero delle volte che la ϕ è ripetuta una dentro l'altra. Una tale forma di funzione prenderà il nome di funzione *involuta*. Ciò vale anche per la formola (I) dello stesso paragrafo cambiando x in X. Sarà perciò $\alpha = \phi^{(r)}(\xi)$ (4) ove α è la radice, e ξ rappresenta uno o l'altro dei due limiti x_0, X_0. Le formole (3), (III) saranno parimente rappresentate dalla sola $\alpha = \psi^{(r)}(\xi)$ (5) ove la ξ può assumere uno o l'altro dei valori x_0, X_0. L'approssimazione ottenuta con tali forme di funzioni si dirà approssimazione per funzione involuta, la quale sarà convergente o divergente secondo che convergente o divergente sarà la relazione ricorrente da cui proviene.

53. Quando l'equazione proposta non fosse della forma $x - \phi(x) = 0$, ma in generale della forma $f(x) = 0$, se si potrà con opportune operazioni algebriche isolare una x, lasciando che essa entri in qualsivoglia modo in altre funzioni, allora essa sarà ridotta alla forma richiesta. Quando ciò non possa ottenersi, si potrà porre $x - f(x) = \phi(x)$, ed allora la proposta sarà ridotta alla forma $x - \phi(x) = 0$. Si tratterà questa come si è fatto indietro, e se si verifica che il criterio della convergenza indicato al § 48 è adempito, la serie ricorrente (1) del paragrafo antecedente si cambierà nella

$$x_1 = x_0 \mp f(x_0)\,, \quad x_2 = x_1 \mp f(x_1)\,, \ldots\ldots \quad x_r = x_{r-1} \mp f(x_{r-1}) \ldots\ldots \qquad (1)$$

ove dovranno assumersi tutti i segni superiori quando $f(x_0)$ risulti negativa, gl'inferiori quand' essa risulti positiva. Lo stesso vale quando si rimpiazzi il 1.° limite x_0 pel 2.° X_0. Supposto quì come nel citato paragrafo $x \mp f(x) = \psi(x)$ il valore approssimato r^{esimo} della radice α compresa fra x_0 ed X_0 sarà dato per la funzione involuta ad esponente r dalla

$$\alpha = \psi^{(r)}(\xi) \qquad (2)$$

ove la ξ potrà assumere l'uno o l'altro dei valori dei due limiti x_0, X_0.

Se una curva rappresentata da una proposta equazione s'immagini percorsa nella direzione dal punto d'ascissa $x = -\frac{1}{0}$ al punto d'ascissa $x = \frac{1}{0}$ e si dicano nodi ascendenti o discendenti le intersezioni della curva coll'asse secondo che il corrispondente ramo di curva è ascendente o discendente, le formole (1), (I) daranno le ascisse dei nodi ascendenti e le (2), (II) quelle dei nodi discendenti.

54. A schiarimento delle esposte dottrine gioveranno i seguenti semplicissimi esempi che possono servire di norma alla soluzione di casi più complicati.

1.° Sia proposta l'equazione $x^2 - 2 = 0$. Per ridurla alla forma $x - \phi(x) = 0$ si potrà supporre $\phi(x) = \frac{2}{x}$ ovvero $\phi(x) = x - (x^2 - 2)$. Pei limiti $x_0 = 1$, $X_0 = 2$ la serie degl' indici è $0\,0\,1$ una radice vi è compresa. Nel caso di $\phi(x) = \frac{2}{x}$ è $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Per $x = x_0 = 1$ essendo $\phi'(x)$ negativa, il suo valor numerico deve per la convergenza essere < 1; la condizione non è verificata per questo limite. Per $x = X_0 = 2$ la $\phi'(x)$ è parimente negativa ed il suo valor numerico, che risulta $= \frac{1}{4}$, è < 1. Quindi per uno dei limiti è verificata la condizione, e per l'altro non è verificata. Siamo dunque nel caso del § 50. Se si suppone $\phi(x) = x - x^2 + 2$ la $\phi'(x)$, che dovrebbe risultare < 1 per entrambi i limiti, è tale che la condizione non è verificata nè per l'uno, nè per l'altro limite. Siamo quì nel caso del § 49. Ma se la proposta si trasforma nella $(x - 1)(x + 1) = 1$, ossia $x - \frac{x + 2}{x + 1} = 0$ sarà $\phi'(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2}$, il cui valore numerico risulta $\frac{1}{4}$ per $x = x_0$ ed $\frac{1}{9}$ per $x = X_0$. La condizione essendo adempita per entrambi i limiti i diversi valori x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_r$ del § 52 saranno convergenti verso il valore di $\sqrt{2}$ e la radice potrà esprimersi per la funzione involuta data dalla (4). Di fatto essendo $\phi(x) = 1 + \frac{1}{1 + x}$, impiegando il primo limite $x_0 = 1$ si avrà

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{17}{12}} \ldots .$$

ossia

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{7}{5}, \quad x_3 = \frac{17}{12}, \quad x_4 = \frac{41}{29} \ldots .$$

Il secondo limite $x = X_0 = 2$ darebbe la serie di valori approssimati

$$X_1 = \frac{3}{2}, \quad X_2 = \frac{10}{7}, \quad X_3 = \frac{17}{12}, \quad X_4 = \frac{58}{41}, \quad X_5 = \frac{99}{70} \ldots .$$

Siccome poi per $x = x_0 = 1$ la relazione ricorrente $x_r = 1 + \dfrac{1}{1 + x_{r-1}}$ che pei valori di $r = 1, 2, 3, 4 \ldots$ dà

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1 + x_0}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1 + x_1}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1 + x_2} \ldots .$$

fornirà pel valore x_r della radice cercata la forma della funzione involuta risultante dalla continua sostituzione data dalla

$$x_r = 1 + \frac{1}{1+x_{r-1}} = 1+1 : \overline{2+1} : \overline{1+x_{r-2}} = 1+1 : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{1+x_{r-3}} : \ldots .$$

ossia

$$x_r = 1+1 : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \ldots .$$

che è la nota espressione di $\sqrt{2}$ data per frazione continua. La funzione involuta nata dal limite $X_0 = 2$ fornirebbe un'altra frazione continua data da

$$X_r = 2 - 1 : \overline{2-1} : \overline{4-1} : \overline{2-1} : \overline{4-1} : \overline{2-1} : \overline{4-1} : \ldots .$$

Data l'equazione $x^2 + 2x - 1 = 0$, si ponga sotto la forma $x - \dfrac{1}{2+x} = 0$. Pei limiti $x = x_0 = 0$, $x = X_0 = 1$ la serie degl' indici è $0\,0\,1$. Il criterio della convergenza è soddisfatto per entrambi i limiti, e risultando negativa la $x - \phi(x)$ per $x = x_0 = 0$, le formole (1) e (4) del § 50 daranno

$$x_1 = \frac{1}{2}\,,\quad x_2 = \frac{2}{5}\,,\quad x_3 = \frac{5}{15}\,,\quad x_4 = \frac{12}{29}\,\ldots\,.$$

$$x_r = 1 : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \overline{2+1} : \ldots .$$

che coincidono coi valori dati superiormente diminuiti di una unità, in quanto la proposta è quella che risulta dalla $x^2 - 2 = 0$ cambiandovi x in $1 + x$.

In generale essendo $a > 1$ ed n la radice intera contenuta in a e sia $\alpha = a - n^2$, la radice positiva dell'equazione $x^2 - a = 0$ sarà data da $x = n + y$ essendo y data dalla funzione involuta (4) del § 50, che in questo caso diventa una frazione continua data da

$$y = \alpha : \overline{2n + \alpha} : \overline{2n + \alpha} : \overline{2n + \alpha} : \overline{2n + \alpha} : \ldots .$$

Infatti la proposta può mettersi sotto la forma $(x - n) - \dfrac{\alpha}{2n + (x - n)} = 0$, ossia, fatto $x = n = y$, sotto la forma $y - \left(\dfrac{\alpha}{2n + y}\right) = 0$ la cui radice è compresa fra $x_0 = 0$, $X_0 = 1$. Essendo essa della forma $x - \phi(x) = 0$ e trovandosi verificato il criterio della convergenza risulterà dalla (4), pel valore del primo limite $x_0 = 0$, l'espressione data sopra.

Parimente l'equazione $x^3 - a = 0$ posto $a = n_0^3 + \alpha$ si trasforma in $x - n_0 = \dfrac{\alpha}{n_0^2 + n_0 x + x^2}$, ossia sostituendo x ad $x - n_0$ diventa $x = \dfrac{\alpha}{n_0^2 + n_0(n_0 + x) + (n_0 + x)^2}$. Pei limiti $x = x_0 = 0$, $x = X_0 = 1$ risultando la serie degl'indici 0001, la radice è compresa fra zero ed uno. Quindi essendo avverati i criterj della convergenza si avrà la relazione ricorrente $x_r = \dfrac{\alpha}{n_0^2 + n_0(n_0 + x_{r-1}) + (n_0 + x_{r-1})^2}$, che pel limite $x_0 = 0$ fornirà i valori approssimati

$$x_1 = \frac{\alpha}{3n_0^2}, \quad x_2 = \frac{3\alpha n_0^2}{3n_0^4 + (3n_0^3 + \alpha)(6n_0^3 + \alpha)}, \quad x_3 = \ldots.$$

ai quali aggiunta là n_0 si avranno quelli della radice della proposta. La funzione involuta che si dedurrebbe dalla (4) non riuscendo di forma semplice converrà in tal caso ricorrere alla serie

$$x = n_0 + \frac{\alpha}{3n_0^2} + \frac{\alpha_1}{3n_1^2} + \frac{\alpha_2}{3n_2^2} + \frac{\alpha_3}{3n_3^2} \ldots = n_0 + \frac{a-n_0^3}{3n_0^2} + \frac{a-n_1^3}{3n_1^2} + \frac{a-n_2^3}{3n_2^2} + \ldots \quad (1)$$

ove, ritenuto per n_0 il precedente valore, una qualunque n_r sarà data dalla relazione ricorrente $n_r = n_{r-1} + \dfrac{a - n_{r-1}^3}{3n_{r-1}^2}$.
Ciò risulta dall'operazione successiva eseguita, non più sulla trasformata, ma sulla proposta col sostituire alle diverse n i valori approssimati già ottenuti e col porre per α le differenze successive $a - n_r^3$.
Si scorge facilmente che simili processi sono parimente applicabili alla ricerca della radice r^{esima} di un qualsivoglia numero, purchè l'equazione $x^r - a = 0$ scomposta nella $x^r - n_0^r = \alpha$, ossia nella

$$(x - n_0)\left(x^{r-1} + n_0 x^{r-2} + n_0^2 x^{r-3} + n_0^3 x^{r-4} \ldots + n_0^{r-2} x + n_0^{r-1}\right) = \alpha$$

e messo x in luogo di $x - n_0$ si trasformi nella

$$x = \frac{\alpha}{n_0^{r-1} + n_0^{r-2}(n_0 + x) + n_0^{r-3}(n_0 + x)^2 \ldots + (n_0 + x)^{r-1}}.$$

Dal valore approssimato x_1 risultante da $x = x_0 = 0$ risulteranno tutti i successivi valori x_2, x_3, $x_4 \ldots$ Dall'operazione poi eseguita sempre sulla proposta risulterà una serie analoga alla (1), la quale contiene in sostanza il noto processo aritmetico per l'estrazione della radice di un qualsivoglia numero.

2.° Sia proposta l'equazione $x - \cos x = 0$. Pei limiti $x_0 = 0$, $X_0 = 1$ la serie degl'indici competente all'equazione $x - \cos n x = 0$ ove è $n = 206264'',8$ risulta .... 001. Il valor numerico di $\phi'(x)$ risultando per entrambi i limiti minore di uno, trovasi verificato il criterio della convergenza. La relazione ricorrente $x_r = \cos(n x_{r-1})$ sarà convergente. I diversi valori approssimati ad indice pari risulteranno minori della radice, quelli ad indice dispari risulteranno maggiori, ed il valore della radice x_r espresso per funzione involuta sarà dato da

$$x_r = \cdots \cos\left\{ n \cos\left\{ n \cos\left\{ n \cos(n x_0) \right\}\right.\right. = \cos^r(n x_0).$$

Sia in vece proposta la $x - \mathrm{tang}\, x = 0$, ossia $x - \mathrm{tang}\, n x = 0$. La radice più piccola di quest'equazione, escluso il valore $x = 0$, si troverà compresa fra i limiti $x_0 = 4$, $X_0 = 5$ o fra i limiti più ristretti $x_0 = 4,4$, $X_0 = 4,5$, pei quali limiti il 1.° membro cambia di segno. La condizione della convergenza non è avverata, giacchè la $\phi'(x)$ che è positiva fornisce per entrambi i limiti $x_0 = 4,4$, $X_0 = 4,5$ un valore > 3. La relazione ricorrente $x_r = \mathrm{tang}(n x_{r-1})$ sarà divergente e perciò divergente la funzione involuta che verrebbe data dalla (2) del § 52.

Ma se la proposta si pone sotto la forma $x - \mathrm{arc.\,tang}\, x = 0$ da cui risulta $\phi'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ il criterio della convergenza è avverato, giacchè per entrambi i limiti è $\phi'(x) < 1$. Siccome poi la $n x_0 - \phi(x_0)$ risulta negativa, così dalla (1) del § 48 si avrà la relazione ricorrente $n x_r = \mathrm{arc.\,tang}(x_{r-1})$ che fornirà valori convergenti verso la radice, e la funzione involuta (2) del § 52 darà

$$x_r = \cdots \frac{1}{n} \mathrm{arc.\,tang}\left\{ \frac{1}{n} \mathrm{arc.\,tang}\left\{ \frac{1}{n} \mathrm{arc.\,tang}\, x_0 \right\}\right. = \left\{ \frac{1}{n} \mathrm{arc.\,tang}\, x_0 \right\}^{(r)}.$$

In generale nell'equazione $p x + q + \mathrm{tang}\, x = 0$ discussa nella citata Memoria, ossia nella $x - \frac{tang\, x - q}{p} = 0$ non trovasi soddisfatto il criterio della convergenza pei limiti entro cui è compresa una radice, laddove trovasi soddisfatto nell' analoga $n x - arc.\, tang(p x + q) = 0$ ove il valore della radice x_r espresso per funzione involuta sarà dato da

$$x_r = \cdots \frac{1}{n}\, arc.\, tang \left\{ q + \frac{p}{n}\, arc.\, tang \left\{ q + \frac{p}{n}\, arc.\, tang \left\{ q + p\,\xi \right\} \right.\right.$$

essendo ξ l'uno o l'altro dei due limiti. Per $q = 0$ essa si riduce a

$$x_r = \cdots \frac{1}{n}\, arc.\, tang \left\{ \frac{p}{n}\, arc.\, tang \left\{ \frac{p}{n}\, arc.\, tang \left\{ \frac{p}{n}\, arc.\, tang\; p\,\xi \right\} \right.\right. .$$

Sia parimente proposta l'equazione $x - \frac{1}{2}\, l\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ che fra i limiti $x = x_0 = 1,1$, $x = X_0 = 1,2$ pei quali la serie degl' indici è .... 001 ha una radice reale, indicando l il logaritmo iperbolico. Sarà $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$ Il valor numerico di $\phi'(x)$ pei limiti $x = x_0$, $x = X_0$ risultando > 1 non è soddisfatta la condizione della convergenza e le relazioni ricorrenti (1), (I) o le relative funzioni involute sarebbero divergenti. Ma la stessa equazione posta sotto la forma $x - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 0$ fornirebbe l'espressione $\phi'(x) = -\frac{4 e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$. Pei limiti $x_0 = 1,1$, $X_0 = 1,2$ risulterebbe

$$\phi'(x_0) = -\frac{36,1}{64,4}, \qquad \phi'(X_0) = -\frac{44,1}{100,46}.$$

Per entrambi i limiti il valor numerico di $\phi'(x)$ essendo minore di 1 è soddisfatta la richiesta condizione, e le relazioni ricorrenti (1), (I) del § 48 sarebbero convergenti.

Impiegando infatti il limite X_0, in quanto la funzione proposta fornisce in tal caso un valore che differisce da zero meno di quello fornito dell'altro limite x_0, si ottiene

$$X_0 = 1{,}2\,,\quad X_1 = 1{,}1995\,,\quad X_2 = 1{,}19970\,,\quad X_3 = 1{,}19966\,,\quad X_4 = 1{,}199686$$

i cui valori sono alternativamente maggiori e minori della radice in quistione.

3.° L'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ha una radice fra i limiti $x = x_0 = 2$, $x = X_0 = 3$. Posta sotto la forma $x - \frac{5}{x^2 - 2} = 0$, la serie degl'indici risultando .... 001, si avrà $\phi'(x) = -\frac{10x}{(x^2-2)^2}$, onde $\phi'(x_0) = -5$, $\phi'(X_0) = -\frac{30}{49}$. Non essendo soddisfatto per entrambi i limiti il criterio della convergenza converrà impiegare il processo del § 49. Si trova quindi che i nuovi limiti più ristretti entro cui è compresa la radice sono $x_0 = 2{,}09$, $X_0 = 2{,}1$. Si ha quindi $\phi'(x_0) = -3{,}7\ldots$ $\phi'(X_0) = -3{,}6$. La condizione della convergenza non essendo adempita non si potrà impiegare questa forma ad esprimere la radice per funzione involuta. Ma se s'impiega la forma $x - \sqrt[3]{5 + 2x} = 0$, trovasi $\phi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(5+2x)^2}}$. Quindi pei due limiti $x_0 = 2$, $X_0 = 3$ sarà $\phi'(x_0) = 0{,}15\ldots$, $\phi'(X_0) = 0{,}134\ldots$ La condizione di essere per entrambi i limiti minori di 3 è soddisfatta. Riuscendo poi pel limite $x = x_0$ negativa la $x - \phi(x)$ s'impiegherà la funzione involuta (4) del § 52. che diverrà

$$\alpha = \cdots \sqrt[3]{\Big\{ 5 + 2\sqrt[3]{\Big\{ 5 + 2\sqrt[3]{\Big\{ 5 + 2\sqrt[3]{5 + 2\xi} \Big\}}}}}$$

ove la ξ tien luogo di uno o dell'altro dei limiti x_0, X_0. Se si calcolano i successivi valori forniti dalla stessa funzione involuta pel limite $x_0 = 2$ si trovano i successivi valori approssimati

$$x_0 = 2\,, \quad x_1 = 2{,}08\,, \quad x_2 = 2{,}092\,, \quad x_3 = 2{,}0942\,,$$

i quali sono tutti minori della radice, ma convergenti verso di essa.

Parimente l'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$ ha una radice compresa fra i limiti $x_0 = 1{,}3$, $X_0 = 1{,}4$ pei quali la serie degl' indici è 001. Ma se si pone sotto una delle due forme $x - \frac{7}{7 - x^2} = 0$, $x - \sqrt[3]{7x - 7} = 0$ per le quali è adempito il criterio della convergenza risultando $\phi'(x)$ positiva e per ciascuna di esse $\phi'(x_0) < 3$, $\phi'(X_0) < 3$. Si dovrà adottare per la prima la funzione involuta (4) del § 52 risultando negativa la $x - \phi(x)$ pel limite $x_0 = 1{,}3$, e per la seconda la funzione involuta (5) dello stesso paragrafo risultando positiva la $x - \phi(x)$ pel limite $x_0 = 1{,}3$. Quantunque l'approssimazione sia lenta non è però meno sicura.

Sia proposta l'equazione $x^3 + 3x - N = 0$ in cui la N sia un numero assai grande ed α la sua radice. Posta sotto la forma $x - \sqrt[3]{N - 3x} = 0$ e trovati i limiti $x = x_0$, $x = X_0$ entro cui è compresa la α, l'espressione

$$\alpha = \cdots \sqrt[3]{\left\{N - 3\sqrt[3]{\left\{N - 3\sqrt[3]{\left\{N - 3\sqrt[3]{N - 3\xi}\right\}}\right\}}\right\}} \qquad (1)$$

ove per ξ si ponga il limite x_0 od il limite X_0 sarà convergente verso la radice cercata, giacchè la

$\phi'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(N - 3x)^2}}$ darà per entrambi i limiti x_0, X_0, quando N sia opportunamente grande, un valore numerico < 1.

Nel moto parabolico delle comete l'equazione da cui dipende l'anomalia vera $= v$ è data da

$$tang^3 \tfrac{1}{2}v + 3\,tang \tfrac{1}{2}v - N = 0 \quad (2) \quad \text{essendo} \quad N = 3k\,q^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,t$$

ove $q =$ distanza perielia, $t =$ tempo contato del passaggio al perielio e $k = 0{,}017202099$. Per $q = 1$, $t = 10000$ risulta $N = 364{,}9116262$. Posto $tang \frac{1}{2} v = x$, si trova che l'equazione $x^3 + 3x - N = 0$ (3), che porremo sotto la forma $x - \sqrt[3]{N - 3x} = 0$, ha una radice compresa fra $x = x_0 = 7$, $x = X_0 = 8$. La condizione della convergenza è adempita, ed i valori approssimati successivamente forniti dall'espressione (1) pel limite $x_0 = 7$, saranno

$$x_1 = \sqrt[3]{N - 3x_0} = \sqrt[3]{N - 21} \quad \text{da cui} \quad l x_1 = l\,tang \tfrac{1}{2} v = 0{,}8454823\,,$$

$$x_1 = 7{,}006196\,,\quad \tfrac{1}{2} v = 81^\circ\, 52'\, 37'',17$$

$$x_2 = \sqrt[3]{N - 3x_1}\,;\quad l x_2 = 0{,}8454745\,,\quad x_2 = 7{,}006072\,,\quad \tfrac{1}{2} v = 81^\circ\, 52'\, 36'',65$$

$$x_3 = \sqrt[3]{N - 3x_2}\,;\quad l x_3 = 0{,}8454746\,,\quad x_3 = 7{,}006073\,,\quad \tfrac{1}{2} v = 81^\circ\, 52'\, 36'',66$$

Il valore della radice è compreso fra x_2 ed x_3, ed il valore di $\frac{1}{2} v$ fra $81^\circ\, 52'\, 36'',65$ ed $81^\circ\, 52'\, 36'',66$.

Essendo N assai grande e tale pure il valore di $tang \frac{1}{2} v$ riuscirà assai piccola la $cotang \frac{1}{2} v$. Posto dunque nella (2) $\frac{1}{cot \frac{1}{2} v}$ in luogo di $tang \frac{1}{2} v$ e fatto $cot \frac{1}{2} v = x$, $\frac{1}{N} = \theta$ si avrà l'equazione $x^3 - 3\theta x^2 - \theta = 0$, la quale posta sotto la forma $x - \phi(x) = 0$ e messo ω in luogo di $\sqrt[3]{\theta}$ si avrà $x - \omega \sqrt[3]{1 + 3x^2} = 0$ la cui radice sarà compresa fra $x = x_0 = 0$, $x = X_0 = 1$. La $\phi'(x) = \frac{2\omega x}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}}$ sarà positiva, e riuscendo per entrambi i limiti < 3 sarà quì pure soddisfatto il criterio della convergenza. Risultando poi negativa la $x - \phi(x)$ pel limite inferiore $x = x_0 = 0$

si dovrà impiegare la formola (2) del § 52, dalla quale si deducono i diversi valori approssimati di $\cot \frac{1}{2} v = x$ come segue

$$x_1 = \omega\,, \quad x_2 = \omega(1 + 3\omega^2)^{\frac{1}{3}}\,, \quad x_3 = \omega \sqrt[3]{\left\{ 1 + 3\omega^2 \sqrt[3]{(1 + 3\omega^2)^2} \right\}}$$

$$x_4 = \omega \sqrt[3]{\left\{ 1 + 3\omega^2 \sqrt[3]{\left(1 + 3\omega^2 \sqrt[3]{(1 + 3\omega^2)^2}\right)^2} \right\}}\,, \quad x_5 = \ldots \tag{4}$$

La maggiore o minore rapidità della convergenza delle stabilite formole dipende naturalmente dalla forma della funzione proposta e dai valori delle costanti che essa contiene. Il valore però dell' esponente r della funzione involuta, ossia il numero delle operazioni da eseguirsi onde ottenere un dato grado di precisione diminuendo secondo che il limite x_0 od X_0 che s' impiega è più approssimato al valore della radice, così sarà sempre più vantaggioso cercare con qualche metodo ausiliario un tal limite in anticipazione, come si è fatto nell'esempio trattato al § 28 della citata Memoria. Nel caso attuale essendo ω assai piccola, la semplicità dell'equazione $x^3 - 3\omega^3 x^2 - \omega^3 = 0$ (5) rende facilissima la ricerca di un limite x_0, funzione della quantità piccola ed indeterminata ω, assai prossimo alla radice. Di fatti la funzione $x_0 = f(\omega)$ dev' essere tale che sostituita per x nel 1.° membro della proposta dia un valore che differisca da zero di una quantità dell' ordine di ω^n essendo n numero abbastanza grande. Se si pone infatti $x = x_0 = \dfrac{\omega(1 + a\,\omega^2)}{1 + \alpha\,\omega^2}$ ove a, α sono quantità da determinarsi, posti a zero i due primi coefficienti del risultato della sostituzione si ottiene $a = 0$, $\alpha = -1$. La sostituzione di $x_0 = \dfrac{\omega}{1 - \omega^2}$ (6) riduce il 1.° membro della proposta ad un valore che differisce da zero di quantità dell' ordine di ω^9. Adottato un tal valore pel limite x_0, la 1.^{a} approssimazione fornita dalla $x = \omega \sqrt[3]{1 + 3x^2}$ darà $x_1 = \omega \sqrt[3]{1 + 3x_0^2}$.

Nell'assunta ipotesi di $t = 10000$, $q = 1$ risulta $\omega = 0{,}13993805$ e si ottiene quindi

$$\log x_1 = l\cot\tfrac{1}{2}\nu = 9{,}1545254 \quad \text{da cui} \quad \tfrac{1}{2}\nu = 81^\circ\, 52'\, 36'',66.$$

Se in vece si stabilisce $x = x_0 = \omega\,\dfrac{1 + a\omega^2 + b\omega^4}{1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^4}$ e si fa la sostituzione come sopra, indi si pongono a zero i quattro primi coefficienti delle potenze di ω, si ottengono per determinare le 4 arbitrarie a, b, α, β le equazioni

$$a - \alpha - 1 = 0$$

$$a^2 - \alpha^2 - 2a - \alpha + b - \beta = 0$$

$$a^3 - \alpha^3 + 6ab - 6\alpha\beta - 3a^2 - 6b - 6a\alpha - 3\beta = 0$$

$$b^2 + a^2 b - \beta^2 - \alpha^2\beta - 2ab - \alpha a^2 - 2\alpha b - 2a\beta = 0.$$

Dalle quali risulta $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$, $\alpha = -2$ $\beta = \frac{4}{3}$, onde pel valore del limite x_0 già assai prossimo alla radice si avrà

$$x_0 = \omega\,\frac{1 - \omega^2 + \frac{1}{3}\omega^4}{1 - 2\omega^2 + \frac{4}{3}\omega^4} \qquad (7)$$

La sostituzione di questo limite nella proposta riduce il 1.° membro a differire da zero di una quantità dell'ordine di ω^{13}. Questo processo è generale e mostra essere in nostro arbitrio di scegliere una frazione razionale $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ della quale determinare i coefficienti delle diverse potenze di ω in modo che il risultato della sostituzione dia un valore che differisca da zero di una quantità dell'ordine di ω^n ove la n sia grande quanto si vuole.

Chiamato X il primo membro della equazione proposta (5), se dietro una data sostituzione riuscirà X dell'ordine di ω^n, siccome la $\dfrac{X}{X'}$ sarà dell'ordine di ω^{n-2}, così l'errore sul valore del limite x_0 dato dalla (6) sarà dell'ordine di ω^7, mentre sul limite x_0 dato dalla (7) sarà dell'ordine ω^{11}.

È da osservarsi del resto che quantunque il metodo dell'approssimazione lineare sia dotato di una convergenza più rapida che quello delle funzioni involute, quest' ultimo però offre per compenso il vantaggio di un minor numero di operazioni a ciascun' approssimazione, ciò che si farà più manifesto nell'esempio del seguente n.° 4.°

Occupato nel 1843 a redigere la più volte citata Memoria sulle equazioni che comprende la 1.ª parte di questo trattato, mi si offerse ovvia l'applicazione del metodo delle funzioni involute al caso semplicissimo della determinazione approssimata dell'anomalia vera della cometa apparsa in quell'anno, al quale scopo non poteva servire la tavola del moto parabolico di Burkard. I calcoli relativi furono in quell'epoca da me eseguiti di concerto col signor Roberto Stambucchi, il quale li comunicò al Direttore del nostro Osservatorio che ne aveva dato l'incarico e che ne approvò l'esattezza.

4.° Sia proposta l'equazione $x - e\,sin(a + x) = 0$ (1)

essendo $a = 29^\circ\ 31'\ 47''$, $e = 0{,}2541748$.

Questa è la stessa equazione data al § 8 (Mem. cit.) di cui si è determinata la radice compresa fra $x_0 = 0{,}1$, $X_0 = 0{,}2$ col metodo dell' approssimazione lineare. Introdotta la solita $n = 206264{,}8$ che esprime il numero de' secondi contenuti nel raggio, la (1) diverrà $x - e\,sin(a + nx) = 0$. Pei limiti $x_0 = 0{,}1$, $X_0 = 0{,}2$ la serie degl' indici risulta ....001. La $\phi'(x) = e\,cos(a + nx)$ dà per entrambi i limiti un valore < 1. La condizione della convergenza, che per essere $\phi'(x)$ positiva esigerebbe per entrambi i limiti $\phi'(x) < 3$, è soddisfatta. Inoltre pel limite x_0 il 1.° membro della proposta risultando $= 0{,}1 - 0{,}146 \cdots = -0{,}046 \cdots$, la funzione involuta (2) del § 52, adottando il limite esteriore X_0 onde abbiasi un esatto confronto dei due metodi, fornirà nel caso attuale l'espressione

$$X_r = \cdots e\,sin\left\{a + n\,e\,sin\left\{a + n\,e\,sin\left\{a + n\,e\,sin(a + n X_0)\right\}\right.\right. \tag{2}$$

ossia $\qquad X_r = \left\{e\,sin(a + n X_0)\right\}^{(r)}$.

Si avrà quindi, come nel citato § 8, per valore dell'anomalia cercata $= A$ l'espressione

$$A = 360^\circ - (a + n X_r).$$

Se l'equazione proposta (1) si fosse posta sotto la forma

$x - \left\{arc.\,sin\,\frac{x}{e} - a\right\} = 0$ si avrebbe $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - x^2}}$.

Quindi

$$\phi'(x_0) = 4{,}279\ldots\,,\qquad \phi'(X_0) = 6{,}375\ldots$$

La condizione pertanto di essere $\phi'(x) < 3$ non essendo soddisfatta pei limiti stabiliti, la relazione ricorrente

$$x_r = arc.\,sin\,\frac{x_{r-1}}{e} - a$$

e la corrispondente funzione involuta sarebbero divergenti. Acciò si abbia un confronto dei due metodi s'impieghi il limite $X_0 = 0{,}2$. Ritenuti per a, e, n i valori dati sopra e stabilita la relazione

$$a_r = a + n X_{r-1}$$

pei valori di $r = 1$, 2, 3, ... ho creduto opportuno di aggiungere per disteso il prospetto del calcolo della funzione involuta (2) sino al valore dell'esponente $r = 8$.

$$l.\,e = 9{,}40513247$$
$$l.\,n = 5{,}31442509$$
$$l.\,X_0 = 9{,}3010300$$
$$l.\,n\,X_0 = 4{,}6154551$$
$$n\,X_0 = 11^\circ\,27'\,33''$$
$$n\,X_0 + a = a_1 = 40^\circ\,59'\,20''$$
$$l.\,\sin a_1 = 9{,}8168460$$
$$l.\,e\,\sin a_1 = l.\,X_1 = 9{,}2219784$$
$$l.\,n\,X_1 = 4{,}5364035$$
$$n\,X_1 = 9^\circ\,33'\,7''$$
$$n\,X_1 + a = a_2 = 39^\circ\,4'\,54''$$
$$l.\,\sin a_2 = 9{,}7996351$$
$$l.\,e\,\sin a_2 = l.\,X_2 = 9{,}2047675$$
$$l.\,n\,X_2 = 4{,}5191926$$
$$n\,X_2 = 9^\circ\,10'\,51''$$
$$n\,X_2 + a = a_3 = 38^\circ\,42'\,38''$$
$$l.\,\sin a_3 = 9{,}7961484$$
$$l.\,e\,\sin a_3 = l.\,X_3 = 9{,}2012808$$
$$l.\,n\,X_3 = 4{,}5157059$$
$$n\,X_3 = 9^\circ\,6'\,27''$$
$$n\,X_3 + a = a_4 = 38^\circ\,38'\,14''$$
$$l.\,\sin a_4 = 9{,}7954540$$
$$l.\,e\,\sin a_4 = l.\,X_4 = 9{,}2005864$$

$$l.\,X_4 = 9{,}2005864$$
$$l.\,n\,X_4 = 4{,}5150115$$
$$n\,X_4 = 9^\circ\,5'\,34''$$
$$a_5 = 38^\circ\,37'\,21''$$
$$l.\,\sin a_5 = 9{,}7953143$$
$$l.\,X_5 = 9{,}2004467$$
$$l.\,n\,X_5 = 4{,}5148718$$
$$n\,X_5 = 9^\circ\,5'\,24''$$
$$a_6 = 38^\circ\,37'\,11''$$
$$l.\,\sin a_6 = 9{,}7952880$$
$$l.\,X_6 = 9{,}2004204$$
$$l.\,n\,X_6 = 4{,}5148455$$
$$n\,X_6 = 9^\circ\,5'\,22'',4$$
$$a_7 = 38^\circ\,37'\,9'',4$$
$$l.\,\sin a_7 = 9{,}7952836$$
$$l.\,X_7 = 9{,}2004160$$
$$l.\,n\,X_7 = 4{,}5148411$$
$$n\,X_7 = 9^\circ\,5'\,22'',1$$
$$a_8 = 38^\circ\,37'\,9'',1$$
$$l.\,\sin a_8 = 9{,}79528296$$
$$l.\,X_8 = 9{,}20041543$$
$$l.\,n\,X_8 = 4{,}51484052$$
$$n\,X_8 = 9^\circ\,5'\,22'',05$$

I valori approssimati delle diverse X_r risultano $X_1 = 0,166$, $X_2 = 0,160$, $X_3 = 0,1589$, $X_4 = 0,1587$, $X_5 = 0,15865$, $X_6 = 0,158642$, $X_7 = 0,1586412$, $X_8 = 0,1586410$. Sarebbe inoltre $a_9 = 38^\circ\ 37'\ 9'',05$ da cui risulterebbe $X_9 = 0,1586409$. Questi valori convergono verso la radice rimanendo sempre maggiori di essa. Le cifre comuni a due valori approssimati incominciando da X_2 appartengono alla radice. L'errore commesso sul valore X_8 calcolato colla formola $-\dfrac{X_8 - e \sin a_9}{1 - e \cos a_9} = -\dfrac{X_8 - X_9}{1 - X_9}$ risulta dell'ordine di $(\frac{1}{10})^7$, ciò che porta un errore nei centesimi di secondo sul valore calcolato di $n X_8 = 9^\circ\ 5'\ 22'',05 = y$ e quindi sull'anomalia $= 360^\circ - a_9 = 321^\circ\ 22'\ 50'',95$. Impiegando il limite inferiore $x_0 = 0,1$ si ottiene una serie di valori $x_1 = 0,14$, $x_2 = 0,156$, $x_3 = \cdots$ tutti minori della radice. Ad ogni operazione ottenendosi per adequato una cifra decimale esatta, questa approssimazione è dell'ordine di quella data al § 41 che contiene il metodo di Budan. L'analogo valore di y calcolato al § 8 (Mem. cit.) col metodo dell'approssimazione lineare e che si trovò minore della radice risultò $y = 9^\circ\ 5'\ 21'',9$ che fornì l'anomalia $= 321^\circ\ 22'\ 51'',1$.

55. In più modi si può mostrare mediante le costruzioni il processo analitico con cui si giunge colle funzioni involute convergenti ad ottenere i successivi valori approssimati della radice. Il più semplice è quello di costruire la curva $y = x - \phi(x)$ in cui x è l'ascissa ed y l'ordinata. I valori dati dalla funzione involuta risultano dalla somma dell'ascissa e dell'ordinata corrispondente. Quando i limiti x_0, X_0 e la forma della proposta funzione adempiano tutte le condizioni della convergenza, la legge delle approssimazioni successive dovrà coincidere con una delle due costruzioni date dalle figure 1.ª o 2.ª, le quali abbracciano tutti i casi secondo che si assumono per semi-assi positivi uno dei quattro sistemi

$(OO', \; OY), \; (OO', \; OY'), \; (O'O, \; O'Y), \; (O'O, \; O'Y')$.

Supposto che la funzione involuta dia valori approssimati sempre minori delle radici, la costruzione che ne indica l'approssimazione sarà data dalla fig. 1.ª in cui SS' indica la curva $y = x - \phi(x)$ riferita al 1.° sistema di semi-assi. Fatto $x_0 = Ol$ si abbassi l'ordinata lp. Si conduca parallelamente al semi-asse OO' la retta $pp' = lp$. Si tiri $p's$ parallela al semi-asse OY. Si conduca $sp'' = ms$ parallela al semi-asse OO' e così si proceda indefinitamente. Si otterranno così dai prolungamenti delle parallele al semi-asse OY sino all'incontro colla OO' i diversi punti l, m, n, r.... i quali anderanno sempre avvicinandosi al punto d'intersezione x della curva col semi-asse OO'. Lo stesso si direbbe quando s'impiegasse il limite superiore $X_0 = OL$ in cui si avrebbe pure una serie di punti L, M, N, R.... sul semi-asse avvicinantisi continuamente al punto x d'intersezione.

Supposto poi che la funzione involuta dia valori alternativamente minori e maggiori della radice, la costruzione che ne indica l'approssimazione successiva sarà data dalla fig. 2.ª Fatto ancora $x_0 = Ol$ si abbasserà lp, si condurrà come prima $pp' = lp$ indi $p'q$. Si tirerà da q parallelamente ad OO' la retta $qq' = qL$. Da q' si condurrà $q'p''$ indi $p''q'' = mp''$ e così di seguito. Il meandro che va così formandosi taglierà successivamente l'asse OO' in punti sempre approssimantisi, or dall'una or dall'altra parte, al punto d'intersezione della curva colla OO'. Quindi risulta manifesto che la divergenza avrà luogo quando la spirale ortogonale o meandro in vece di restringersi continuamente, tendendo verso il punto d'intersezione, come ad un centro, incomincia dal punto l come da un centro e va ampliandosi successivamente. Avrebbe avuto luogo una simile costruzione quando si fosse impiegato il limite superiore

X_0 e si fosse posto $X_0 = OL$ da cui sarebbe risultato il meandro $Lqq'p''q''p'''\dots$

Un altro modo di costruzione risulta dal scegliere una funzione $\psi(x)$ tale che la proposta equazione $x-\phi(x)=0$ si riduca ad $x-f\big(\psi(x)\big)=0$. Posto $y=\psi(x)$ si avrà $x=f(y)$. Ritenuto ancora che x, y rappresentino l'ascissa e l'ordinata di una curva, la radice compresa fra x_0 ed X_0 della equazione proposta sarà ora l'ascissa del punto x d'intersezione delle due curve corrispondenti alle equazioni $y=\psi(x)$, $x=f(y)$. Verificati i criterj della convergenza, il processo dell'approssimazione sarà in questo caso rappresentato o dalla fig. 3.ª, o dalla fig. 4.ª Supponiamo in fatti che la curva $\psi\psi'$ risulti dall'equazione $y=\psi(x)$ e la curva ff' risulti dalla $x=f(y)$. Posto $OL=X_0$, si elevi l'ordinata Lp; dal punto p si conduca pp' parallela al semi-asse OO' e da p' la $p'p''$ parallela al semi-asse OY, indi $p''p'''$ parallela ad OO', quindi $p'''p^{IV}$ parallela ad OY e così di seguito. I punti p, p', p'', p''', $p^{IV}\dots$ anderanno continuamente avvicinandosi al punto x d'intersezione delle due curve, ed i valori successivi delle corrispondenti ascisse anderanno continuamente avvicinandosi al valore dell'ascissa del punto x d'intersezione che eguaglia la radice cercata. Lo stesso avrebbe luogo se si fosse impiegato il limite $Ol=x_0$. Se si suppone che dalle equazioni $y=\psi(x)$, $x=f(y)$ risultino in vece le curve $\psi\psi'$, ff' rappresentate dalla fig. 4.ª, posto $Ol=x_0$ e condotta l'ordinata lp si tirino le rette, pp' parallela ad OO', $p'p''$ parallela ad OY, $p''p'''$ parallela ad OO', $p'''p^{IV}$ parallela ad OY e così di seguito. I diversi punti p', p'', p''', p^{IV}, $p^{V}\dots$ anderanno avvicinandosi continuamente al punto x d'intersezione delle due curve, e le rispettive ascisse convergeranno verso il valore dell'ascissa dell'intersezione, divenendo alternativamente maggiori e minori di essa. Sarà quindi

$$pl = \psi(x_0) = y_0 \,, \qquad Ol' = f\big(\psi(x_0)\big) = f(y_0) = x_1$$

$$p''l' = \psi(x_1) = y_1 \,, \qquad Ol''' = f\big(\psi(x_1)\big) = f(y_1) = x_2 \,,$$

e così dicasi di seguito. Per tal modo dal supposto valore del

primo limite x_0 si otterrà $x_1 = f\big(\psi(x_0)\big) = \phi(x_0)$,

col valore ottenuto x_1 si avrà $x_2 = f\big(\psi(x_1)\big) = \phi(x_1)$,

col valore ottenuto x_2 si avrà $x_3 = f\big(\psi(x_2)\big) = \phi(x_2)$,

e così di seguito. Si vede che i successivi valori delle ascisse

$$x_0 = Ol \,, \quad x_1 = Ol' \,, \quad x_2 = Ol'' \,, \quad x_3 = Ol''' \,, \ldots.$$

sono eguali ai rispettivi valori approssimati della radice forniti dalla funzione involuta risultante dalla proposta $x - \phi(x) = 0$, pel caso che i criterj della convergenza siano verificati. Lo stesso vale assumendo per primo valore approssimato il limite superiore $X_0 = OL$ che avrebbe fornito il meandro $PP'P''pp'p''p''' \ldots.$

Qualora per la funzione $\psi(x)$ si assumesse la stessa x ovvero una λx, essendo λ una costante, la curva $\psi\psi'$ delle figure 1.ª, 2.ª sarebbe cambiata in una retta passante per l'origine O ed inclinata al semi-asse OO' di un angolo, la cui tangente sarebbe λ. Si ridurrebbe parimente ad una retta, non passante però per l'origine, qualora la $\psi(x)$ fosse rappresentata da $\alpha + \beta x$ essendo α, β due costanti.

Il caso della divergenza ha luogo quando il meandro rettangolare della fig. 4.ª in vece di convergere verso il punto x col restringersi verso un centro, si rivolge in vece in senso opposto partendo dal punto p come centro ed ampliandosi continuamente.

56. Quantunque la relazione ricorrente o la funzione involuta risultante dall'equazione $x - \phi(x) = 0$ o dalla più generale $f(x) = 0$ conduca, nel caso della convergenza, alla determinazione di valori sempre più approssimati al valore della radice della proposta equazione, pure quando si voglia una più rapida convergenza, o non si giunga ad evitare il caso di divergenza, converrà ricorrere alla relazione ricorrente che fornisce il metodo dell'approssimazione lineare trattata al § 27 (Mem. cit.). Risulta infatti che se la $f(x) = 0$ ha una radice compresa fra due limiti x_0, X_0 che diano per serie degl' indici ....001, chiamato ξ il limite esteriore e $f'(x)$ la derivata di $f(x)$, i valori x_1, x_2, x_3, ... x_r.... sempre più approssimati alla radice saranno dati dalla relazione ricorrente

$$x_r = x_{r-1} - \frac{f(x_{r-1})}{f'(x_{r-1})} \qquad (1)$$

ove la r potrà ricevere i valori $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ed x_1 sarà data da $x_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$. La x_r espressa per la funzione involuta risultante dalla (1) sarà data dalla serie di funzioni involute

$$\begin{aligned} x_r = \xi - f(\xi)\zeta_0 - f\left\{\xi - f(\xi)\zeta_0\right\}\zeta_1 - f\left\{\xi - f(\xi)\zeta_0 - f\left\{\xi - f(\xi)\zeta_0\right\}\zeta_1\right\}\zeta_2 \\ - \cdots\cdots - f\left\{\xi - f(\xi)\zeta_0 - f\left\{\xi - f(\xi)\zeta_0\right\}\zeta_1 - \cdots\cdots\right\}\zeta_{r-2}\right\}\zeta_{r-1} \end{aligned} \qquad (2)$$

ove una qualunque ζ_r è data da

$$\zeta_r = \frac{1}{f'(x_r)}, \quad \text{essendo per} \quad r = 0, \quad \zeta_0 = \frac{1}{f'(\xi)}.$$

La costruzione dell'equazione $y = f(x)$ mostra che l'approssimazione lineare nasce dal condur l'ordinata corrispondente al limite esteriore; dall'estremo dell'ordinata condur la tangente alla curva sino all'incontro col semi-asse delle ascisse; da questo incontro condur l'ordinata alla curva; dall'estremo di questa ordinata tirar la tangente alla curva sino all'incontro col semi-asse, e così di seguito.

Se indichiamo con α quella delle due espressioni $\frac{1}{f'(x_0)}$, $\frac{1}{f'(X_0)}$ che presenta il valor numerico più grande, si potrà sostituire all'espressione (2) la seguente più semplice, comunque dotata di una men rapida convergenza

$$x_r = \xi - \alpha f(\xi) - \alpha f\left\{\xi - \alpha f(\xi)\right\} - \alpha f\left\{\xi - \alpha f(\xi) - \alpha f\left\{\xi - \alpha f(\xi)\right\}\right\} - \cdots \quad (3)$$

Questa risulta dal sostituire alle successive tangenti altrettante rette parallele alla tangente corrispondente a quello dei due limiti che fornisce per $\frac{1}{f'(x)}$ il valore numerico più grande.

57. Il metodo d'approssimazione per le corde del § 27 (Mem. cit.) è pure dipendente da una relazione ricorrente quale è data dall'espressione (e) dello stesso paragrafo, e dalla quale risulterebbe un'espressione per funzione involuta analoga all'espressione (2). Giova però osservare che a questa può essere sostituita un'approssimazione analoga alla (3) col mantenere costante l'angolo che le corde, che si succedono nel citato metodo, fanno col semi-asse delle ascisse. Infatti chiamato ω l'angolo, contato dal semi-asse positivo delle ascisse verso quello delle ordinate, che la corda congiungente le estremità delle due ordinate aventi per ascisse x_0, X_0 fa col semi-asse positivo delle ascisse, sarà $\cot\omega = \frac{X_0 - x_0}{f(X_0) - f(x_0)}$. Chiamata α questa espressione e ξ il limite interiore, i valori approssimati della radice della $f(x) = 0$ saranno dati dalla relazione ricorrente

$$x_r = x_{r-1} - \alpha f(x_{r-1}) ,$$

la quale fornirà il valore x_r per funzione involuta analoga alla espressione (3).

La costruzione in questo caso non differisce da quella competente all' approssimazione lineare, se non in quanto alle tangenti inclinate si sostituiscono altrettante rette inclinate di un angolo costante dipendente dalle quantità note x_0, X_0, $f(x_0)$, $f(X_0)$ ed al limite esteriore è sostituito il limite interiore. Siccome una tale approssimazione darebbe valori tutti maggiori o minori della radice secondo che il limite interiore risultasse maggiore o minore della radice stessa, e siccome l'approssimazione lineare risultante dal limite esteriore darebbe in questo caso valori tutti minori o maggiori della radice, così i due metodi impiegati congiuntamente serviranno a fornire un' approssimazione completa senza ricorrere al *metodo* indicato al § 27 della citata Memoria.

58. Le espressioni per frazioni continue o per serie che si sono vedute nei precedenti paragrafi nascere da sostituzioni di forma frazionaria od intera non sono che casi particolari della funzione involuta che nasce dalla relazione ricorrente

$$x_{r-1} = n_r + \frac{\alpha_r}{x_r - \beta_r}, \quad \text{o dalla} \quad x_{r-1} = n_r + \alpha_r x_r ,$$

ove il numero intero n_r variabile da una all' altra approssimazione è vincolato a rappresentare uno dei due limiti della radice delle successive trasformate compresa entro un intervallo unitario che si ottiene o coi noti metodi già indicati o colla stessa funzione involuta applicata all'equazione proposta ed alle sue trasformate.

Il metodo derivato dalle accennate sostituzioni, onde ottenere una radice compresa fra limiti opportunamente scelti, non si limita al caso delle equazioni algebriche, ma può essere applicato a qualsivoglia equazione, quando si stabilisca una delle precedenti relazioni ricorrenti e s' impieghi la proposta $f(x) = 0$ e le sue trasformate nate dalle successive sostituzioni per determinare i valori interi delle n_r, cercando sempre col metodo solito l' intervallo unitario entro cui è compresa la radice delle successive trasformate. Per tal modo, non solo le irrazionali algebriche già ottenute indietro, ma sibbene le irrazionali trascendenti che soddisfano equazioni di tal nome potranno coll' indicato processo determinarsi, sia per frazioni continue, sia per diverse serie, a seconda della forma della funzione frazionaria od intera che si sarà adoperata nelle trasformazioni successive. Impiegando però il metodo delle funzioni involute si giunge più speditamente ad esprimere la radice in frazione continua usando del seguente processo.

Ritenuto che x_0, x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_r$ rappresentino i valori approssimati della radice compresa fra x_0, X_0 della equazione qualunque $x - \phi(x) = 0$ o della $f(x) = 0$ ottenuti per funzioni involute, nell' ipotesi che le condizioni della convergenza siano adempite, i valori approssimati 1°, 2°, 3°, $4^\circ \ldots . r^{mo}$ espressi per frazione continua saranno successivamente dati da

$1.^\circ = x_0 + \frac{1}{n_1}$, essendo n_1 il numero intero compreso nel valore di z_1 determinato dalla $\frac{x_0 z_1 + 1}{z_1} = x_1$ che risulta dalla $x_1 = x_0 + \frac{1}{z_1}$, o determinato dall' invertita $z_1 = \frac{1}{-x_0 + x_1}$.

$2.^\circ = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1 : \overline{n_2}}$, essendo n_2 il numero intero compreso nella z_2 determinata dalla

$$\frac{x_0 n_1 z_2 + (x_0 + n_1)}{n_1 z_2 + 1} = x_2$$

che risulta dalla

$$x_2 = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1 : \overline{z_2}}$$

o determinato dalla sua invertita

$$z_2 = 1 : \overline{-n_1 + 1 : \overline{-x_0 + x_2}}.$$

$3.^{\circ} = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{n_3}$, essendo n_3 il numero intero compreso nella z_3 determinata dalla

$$\frac{(x_0 n_1 n_2 + x_0 + n_2) z_3 + (x_0 n_1 + 1)}{(n_1 n_2 + 1) z_3 + n_1} = x_3$$

che risulta dalla

$$x_3 = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{z_3}$$

o dalla sua invertita

$$z_3 = 1 : \overline{-n_2 + 1} : \overline{-n_1 + 1} : \overline{-x_0 + x_3}.$$

$4.^{\circ} = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{n_3 + 1} : \overline{n_4}$, essendo n_4 il numero intero compreso nella z_4 determinata dall'equazione lineare $\dfrac{M z_4 + N}{m z_4 + n} = x_4$ che risulta dalla

$$x_4 = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{n_3 + 1} : \overline{z_4}$$

o dalla sua invertita

$$z_4 = 1 : \overline{-n_3 + 1} : \overline{-n_2 + 1} : \overline{-n_1 + 1} : \overline{-x_0 + x_4}$$

Così progredendo risulta che il valore approssimato r^{mo} sarà dato da

$$r^{mo} = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{n_3 + 1} : \overline{n_4 + 1} : \overline{n_5 + \cdots\cdot + n_{r-1} + 1} : \overline{n_r}$$

essendo n_r il numero intero compreso in z_r determinata dall'equazione lineare $\dfrac{P z_r + Q}{p z_r + q} = x_r$ che risulta dalla frazione continua

$$x_r = x_0 + 1 : \overline{n_1 + 1} : \overline{n_2 + 1} : \overline{n_3 + 1} : \overline{n_4 + 1} : \overline{n_5 + \cdots\cdot + n_{r-1} + 1} : \overline{z_r}$$

o dalla sua invertita

$$z_r = 1 : \overline{-n_{r-1} + 1} : \overline{-n_{r-2} + 1} : \overline{-n_{r-3} + 1} : \overline{-n_{r-4} + \cdots\cdot - n_1 + 1} : \overline{-x_0 + x_r}$$

59. Le relazioni ricorrenti differenziali forniscono parimente funzioni involute date talvolta per espressioni assai semplici come quella del teorema di Taylor. Infatti nella curva data dall'equazione $y = f(x)$ il rapporto $\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$ esprime la tangente dell'angolo $= v$ che la corda congiungente l'estremità delle ordinate $f(x)$, $f(x+\omega)$ fa col semi-asse positivo delle ascisse. Se per tutti i valori di x compresi fra x ed $x+\omega$, la $f(x)$ è una funzione finita e continua, esisterà un punto nell'arco compreso fra le due ordinate $f(x)$, $f(x+\omega)$ pel quale la tangente alla curva sarà parallela alla corda. L'ascissa di questo punto sarà data da $x+\theta_1\omega$, essendo θ_1 una quantità compresa fra 0 ed 1, e che, ritenuta x costante, varierà al variare di ω. Sarà quindi $\textit{tang}\, v = f'(x+\theta_1\omega)$, onde $f(x+\omega) = f(x) + \omega f'(x+\theta_1\omega)$. Se la legge di continuità si avvera inoltre nella $f'(x)$ pei valori di x compresi fra x ed $x+\theta_1\omega$, sarà parimente

$$f'(x+\theta_1\omega) = f'(x) + \theta_1\omega\, f''(x+\theta_2\theta_1\omega)$$

ove θ_2 sarà compresa fra 0 ed 1 e ritenute θ_1 ed x costanti, sarà θ_2 variabile con ω. Così progredendo ed indicando con θ_3, $\theta_4, \ldots. \theta_r$ valori compresi fra 0 ed 1, si otterrà la relazione ricorrente differenziale

$$f^{(r)}(x+\theta_1\theta_2\theta_3\ldots.\theta_r\omega) = f^{(r)}(x) + \theta_1\theta_2\theta_3\ldots.\theta_r\,\omega\, f^{(r+1)}(x+\theta_1\theta_2\theta_3\ldots.\theta_r\theta_{r+1}\omega) \quad (1)$$

In questa, ritenute costanti le θ_1, θ_2, $\theta_3, \ldots.\theta_r$, l'ultima θ_{r+1} sarà variabile con ω. La funzione involuta che rappresenta la $f(x+\omega)$ sarà data dalla relazione ricorrente (1) quando, fatto successivamente $r = 1, 2, 3, 4 \ldots. r, \ldots.$ si eseguisca la continua sostituzione dei valori seguenti nei precedenti già ottenuti. Da questa operazione risulta

$$\left.\begin{array}{l} f(x+\omega) = f(x)+\omega f'(x)+\theta_1\omega^2 f''(x)+\theta_1^2\theta_2\omega^3 f'''(x)+\theta_1^3\theta_2^2\theta_3\omega^4 f^{IV}(x)+\cdots \\ +\theta_1^{r-1}\theta_2^{r-2}\cdots\theta_{r-2}^2\theta_{r-1}\omega^r f^{(r)}(x)+\theta_1^r\theta_2^{r-1}\theta_3^{r-2}\cdots\theta_{r-1}^2\theta_r\omega^{r+1}f^{(r+1)}(x+\theta_1\theta_2\cdots\theta_r\theta_{r+1}\omega) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Posto $$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\cdots\theta_{r-1}\theta_r = \alpha_r \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 = n_1\,,\quad \theta_1^2\theta_2 = n_2\,,\quad \theta_1^3\theta_2^2\theta_3 = n_3\,,\quad \theta_1^4\theta_2^3\theta_3^2\theta_4 = n_4\,,\cdots\cdots \\ \theta_1^{r-1}\theta_2^{r-2}\theta_3^{r-3}\theta_4^{r-4}\cdots\theta_{r-2}^2\theta_{r-1} = n_{r-1}\,,\quad \theta_1^r\theta_2^{r-1}\theta_3^{r-2}\cdots\theta_{r-1}^2\theta_r = n_r \end{array}\right\} \quad (4)$$

la (1) si riduce a

$$\left.\begin{array}{l} f(x+\omega) = f(x)+\omega f'(x)+n_1\omega^2 f''(x)+n_2\omega^3 f'''(x)+n_3\omega^4 f^{IV}(x)+\cdots\cdots \\ \cdots\cdots+n_{r-1}\omega^r f^{(r)}(x)+n_r\omega^{r+1}f^{(r+1)}(x+\alpha_r\theta_{r+1}\omega) \end{array}\right\} \quad (5)$$

nella quale, la x e tutte le n ritenute costanti, e quindi costante α_r, la sola θ_{r+1} sarà variabile con ω. Le formole (2), (5) sussistono per tutti i valori di ω da $\omega = 0$ ad $\omega =$ al valore pel quale la funzione $f(x+\omega)$ cessa di essere finita e continua.

Per determinare i coefficienti costanti della (5) pongasi $r = 2$. La (5) diventa

$$f(x+\omega) = f(x)+\omega f'(x)+n_1\omega^2 f''(x)+n_2\omega^3 f'''(x+\alpha_2\theta_3\omega) \qquad (6)$$

ove la sola ultima θ_3 sarà variabile con ω. Derivando due volte per ω la (6) si ridurrà della forma

$$f''(x+\omega) = 2n_1 f''(x)+\omega P\,,$$

intendendo racchiusi nella P tutti i termini nati dalla derivazione. Fatto $\omega = 0$ si avrà $n_1 = \frac{1}{2}$.

Posto nella (5) $r = 3$ si ha

$$f(x+\omega) = f(x)+\omega f'(x)+n_1\omega^2 f''(x)+n_2\omega^3 f'''(x)+n_3\omega^4 f^{IV}(x+\alpha_3\theta_4\omega)$$

la cui derivata 3.ª sarà della forma

$$f'''(x+\omega) = 2.3\, n_2 f'''(x) + \omega Q.$$

Fattovi $\omega = 0$ si avrà $n_2 = \frac{1}{2.3}$.
Posto nella (5) $r = 4$, la derivata 4.^{a} sarà della forma

$$f^{IV}(x+\omega) = 2.3.4\, n_3 f^{IV}(x) + \omega R$$

che per $\omega = 0$ darà $n_3 = \frac{1}{2.3.4}$.
Così progredendo si raccoglie che il valore di una n_r generica sarà dato da

$$n_r = \frac{1}{2.3.4\ldots.(r+1)} \qquad (7)$$

Il rapporto fra le due ultime delle equazioni (4) darà

$$\theta_1\theta_2\theta_3\ldots.\theta_{r-1}\theta_r = \frac{n_r}{n_{r-1}} = \alpha_r \qquad (8)$$

ove posto $r-1$ per r si ha

$$\theta_1\theta_2\theta_3\ldots.\theta_{r-1} = \frac{n_{r-1}}{n_{r-2}}.$$

Il rapporto fra queste ultime due darà

$$\theta_r = \frac{n_{r-2}\,n_r}{n_{r-1}^2} \qquad (9)$$

ed in forza del valore della generica n_r dato dalla (7) si avrà
$\theta_r = \frac{r}{r+1}$ (10) e quindi dalla (8), $\alpha_r = \frac{1}{r+1}$ (11).
Pei diversi valori di r la (10) darà

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{2}{3}, \quad \theta_3 = \frac{3}{4}, \ldots.$$

e la formola (5), avuto riguardo alle (7), (11), diverrà

$$f(x+\omega) = f(x) + \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(x) + \frac{\omega^3}{1.2.3} f'''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{\omega^r}{1.2.3\ldots r} f^{(r)}(x) + \frac{\omega^{r+1}}{1.2.3\ldots(r+1)} f^{(r+1)}\left(x + \theta_{r+1}\frac{\omega}{r+1}\right) \quad (12)$$

ove la θ_{r+1} avrà un valore compreso fra o ed 1. Si vede da questa (12) come al crescere di r la $f^{(r+1)}\left(x+\theta_{r+1}\frac{\omega}{r+1}\right)$ converge verso il valore $f^{(r+1)}(x)$, e come il valore di $f(x+\omega)$ è compreso fra i due limiti che nascono per $\theta_{r+1} = 0$, $\theta_{r+1} = 1$.
Se si suppone $x = 0$ e si pone x per ω si ha la formola di Maclaurin completata col resto della serie.

60. Dai metodi d'approssimazione discussi nei precedenti paragrafi risulta non essere punto necessario che i successivi valori ottenuti, sia per frazioni continue o per serie, sia per funzioni involute o per tangenti inclinate, debbano essere quelli risultanti dal calcolo preciso delle funzioni che s'impiegano, ma che basta nelle successive sostituzioni impiegare tali valori che siano compresi fra i limiti della precedente approssimazione. Questa riflessione stabilisce una reciproca dipendenza tra il valore fornito dalla serie di Lagrange e quello che si ottiene, tanto dal metodo della funzione involuta, quanto da quello dell'approssimazione lineare. La serie in discorso deriva come caso particolare da uno o dall'altro de' due accennati metodi, quando ai valori forniti da questi processi si sostituiscano valori ad essi approssimati risultanti dal trascurare termini aventi dimensioni di ordine superiore a quelli che si ritengono. Sia infatti proposta l'equazione $z = y + \phi(z)$ (1) di cui cercasi z espressa per y. Fatto $z - y = x$ si tratterà di trovare la x espressa per y coll'equazione $x - \phi(y+x) = 0$ (2). Supposto che fra i limiti $x = x_0 = 0$, $x = X_0$ siavi compresa una radice corrispondente all'ascissa

d' un nodo ascendente e siano avverate le condizioni della convergenza, in tal caso il valore della x sarà dato dalla funzione involuta che nasce dalla relazione ricorrente $x_r = \phi(y + x_{r-1})$ fornita dalla (1) del § 47. Pongasi $\phi(y) = \theta$ e sia θ una quantità piccola di 1.° ordine e tale che le sue derivate, che indicheremo con θ_1, θ_2, $\theta_3 \ldots . \theta_r$ siano quantità finite. Ritenuto che θ sia il 1.° valore approssimato di x, dopo quello di $x_0 = 0$, se nel 2.°, 3.°, 4.° .... r° valore approssimato di x fornito dalla funzione involuta si trascurano i termini rispettivamente al di là della 1.ª, 2.ª, 3.ª ....$(r - 1)$ª dimensione, o, ciò che torna lo stesso, se, considerate le θ, θ_1, θ_2, $\theta_3 \ldots . \theta_r$ come quantità di 1.° ordine, si trascurano nel 1.°, 2.°, 3.°.... r° valore approssimato rispettivamente i termini al di là della 1.ª, 2.ª, 3.ª .... rª dimensione, si avrà dalla citata relazione ricorrente

$$x_0 = 0\,, \quad x_1 = \theta\,, \quad x_2 = \phi(y + x_1) = \theta + \theta\theta_1$$

$$x_3 = \phi(y + x_2) = \theta + \theta_1 x_2 + \frac{1}{2}\theta_2 x_2^2 = \theta + \theta\theta_1 + \theta\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_2$$

$$x_4 = \phi(y + x_3) = \theta + \theta\theta_1 + \theta\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_2 + \theta\theta_1^3 + \frac{3}{2}\theta^2\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2.3}\theta^3\theta_3.$$

$$x_5 = \phi(y + x_4) = \theta + \theta\theta_1 + \theta\theta_1^2 + \theta\theta_1^3 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_1\theta_2 + \theta\theta_1^4 + \frac{3}{2}\theta^2\theta_1^2\theta_2$$

$$+ \frac{1}{2.3}\theta^3\theta_1\theta_3 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_2 + \theta^2\theta_1\theta_2 + \frac{3}{2}\theta^2\theta_1^2\theta_2 + \frac{1}{2}\theta^3\theta_2^2,$$

$$+ \frac{1}{2.3}\theta^3\theta_3 + \frac{1}{3}\theta^3\theta_1\theta_3 + \frac{1}{2.3}\theta^3\theta_1\theta_3 + \frac{1}{2.3.4}\theta^4\theta_4.$$

$$x_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ed avuto riguardo alle espressioni

$$\left(\frac{\theta^2}{2}\right)' = \theta\theta_1\ , \qquad \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)'' = \theta\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_2$$

$$\left(\frac{\theta^4}{2.3.4}\right)''' = \theta\theta_1^3 + \frac{3}{2}\theta^2\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2.3}\theta^3\theta_3 \qquad (a)$$

$$\left(\frac{\theta^5}{2.3.4.5}\right)^{IV} = \theta\theta_1^4 + 3\theta^2\theta_1^2\theta_2 + \frac{1}{2}\theta^3\theta_2^2 + \frac{2}{3}\theta^3\theta_1\theta_3 + \frac{1}{2.3.4}\theta^4\theta_4$$

$$\vdots$$

si otterrà

$$x_1 = \theta\ , \qquad x_2 = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)'$$

$$x_3 = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)' + \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)''$$

$$x_4 = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)' + \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)'' + \left(\frac{\theta^4}{2.3.4}\right)'''$$

$$x_5 = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)' + \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)'' + \left(\frac{\theta^4}{2.3.4}\right)''' + \left(\frac{\theta^5}{2.3.4.5}\right)^{IV}$$

$$x^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Continuando collo stesso processo e riponendo $\phi(y)$ per θ

e $z_0 - y\ ,\quad z_1 - y\ ,\quad z_2 - y\ ,\quad z_3 - y\ ,\quad z_4 - y\ ,\ \ldots.$

in luogo delle rispettive $x_0\ ,\quad x_1\ ,\quad x_2\ ,\quad x_3\ ,\quad x_4\ ,\ \ldots.$
si otterrà

$$z_0 = y\ , \quad z_1 = y + \phi(y)\ , \quad z_2 = y + \phi(y) + \left(\frac{\phi(y)^2}{2}\right)', \quad z_3 = \cdots$$

e così di seguito sino a che si avrà la serie di Lagrange

$$z = y + \phi(y) + \left(\frac{\phi(y)^2}{2}\right)' + \left(\frac{\phi(y)^3}{2.3}\right)'' + \left(\frac{\phi(y)^4}{2.3.4}\right)''' + \dots \quad (3)$$

la quale sussiste quando si faccia $y = 0$, e rappresenta in ambi i casi lo sviluppo della funzione involuta (2) o (3) data al § 52, ove pongasi per x_r la $z-y$ e per x_0 la $y+x_0$, spinto lo sviluppo sino ai termini di quella dimensione che si desidera.

Giova avvertire che si giungerebbe allo stesso risultato quando in vece di supporre $x_0 = 0$ per 1.° valore di x, da cui risulta $z_0 = y$ per 1.° valore di z, si supponesse in vece $x_0 = \rho - y$ e $z_0 = \rho$, essendo ρ una radice qualunque di $\phi(z) = 0$. In questa ipotesi il risultato essendo indipendente da ρ, per le successive quantità x_1, x_2, $x_3 \dots x_r$ e per z_1, z_2, $z_3 \dots z_r$ risulterebbero gli stessi valori che prima si ottennero per le x_0, x_1, $x_2 \dots x_r$ e per le z_0 z_1 $z_2 \dots z_r$, solo che il 1.° valore $z_0 = \rho$ ed $x_0 = \rho - y$ potrebbe essere il limite superiore alla radice in questione.

Se si vuole esprimere una funzione qualunque $f(z)$ della radice dell'equazione $z = y + \phi(z)$, dal 1.° valore approssimato $z_1 = y + \theta$ ottenuto sopra e ritenuta la 1.ª dimensione si avrà parimente

$$f(z_1) = f(y + \theta) = f(y) + \theta f'(y).$$

Dalla $z_2 = y + \theta + \theta\theta_1$ ritenuta la 2.ª dimensione si otterrà

$$f(z_2) = f(y) + f'(y)\theta + f'(y)\theta\theta_1 + \tfrac{1}{2} f''(y)\theta^2 ,$$

ossia

$$f(z_2) = f(y) + f'(y)\theta + \left(\frac{\theta^2 f'(y)}{2}\right)'.$$

Dalla $z_3 = y + \theta + \theta\theta_1 + \theta\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta^2\theta_2$, ritenuta la 3.ª dimensione si otterrà

$$f(z_3) = \mathrm{f}\left(y+\theta+\theta\theta_1+\theta\theta_1^2+\frac{1}{2}\theta^2\theta_2\right) = \mathrm{f}(y)+\mathrm{f}'(y)\theta+\mathrm{f}'(y)\,\theta\theta_1$$

$$+\ \mathrm{f}'(y)\,\theta\theta_1^2+\frac{1}{2}\mathrm{f}'(y)\,\theta^2\theta_2+\frac{1}{2}\mathrm{f}''(y)\left\{\theta^2+2\theta^2\theta_1\right\}+\frac{1}{2.3}\mathrm{f}'''(y)\,\theta^3$$

$$= \mathrm{f}(y)+\mathrm{f}'(y)\theta+\left(\frac{\theta^2\mathrm{f}'(y)}{2}\right)'+\left(\frac{\theta^3\mathrm{f}'(y)}{2.3}\right)''$$

e così progredendo e riponendo $\phi(y)$ per θ si otterrà l'espressione più generale

$$\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}(y)+\mathrm{f}'(y)\,\phi(y)+\left(\frac{\mathrm{f}'(y)\,\phi(y)^2}{2}\right)'+\left(\frac{\mathrm{f}'(y)\,\phi(y)^3}{2.3}\right)''+\left(\frac{\mathrm{f}'(y)\,\phi(y)^4}{2.3.4}\right)'''+\ldots \quad (4)$$

In quella guisa poi che, data la $z = y + \phi(z)$, si trova una funzione qualunque $\mathrm{f}(z)$ data per y col mezzo della $\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}\big(y + \phi(z)\big)$, ossia colla

$$\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}\big(y + \phi(y + \phi(z))\big) \quad (5)$$

che è la precedente, ove pongasi $y + \phi(z)$ in luogo di z, così se fosse data la

$$z = f\big(y + \phi(z)\big) \quad (6)$$

e si cercasse una funzione $\mathrm{f}(z)$ espressa per y, si avrebbe $\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}f\big(y + \phi(z)\big)$, ossia

$$\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}f\big\{y + \phi f\big(y + \phi(z)\big)\big\} \quad (7)$$

che risulta dalla precedente col porre nel 2.° membro in luogo di z l'espressione $f\big(y + \phi(z)\big)$ data dalla (6). Se si paragona la (7) colla (5) si vede che la f nel 2.° membro della (7) è cambiata in $\mathrm{f}f$ e la ϕ in ϕf. Se si cambia pertanto nel 2.° membro della (4) la f in $\mathrm{f}f$ e la ϕ in ϕf si avrà, per esprimere una funzione qualunque $\mathrm{f}(z)$ della radice dell'equazione (6), la formola

$$\mathrm{f}(z) = \mathrm{f}f(y)+\big(\mathrm{f}f(y)\big)'\phi f(y)+\frac{1}{2}\left\{\big(\mathrm{f}f(y)\big)'\,\overline{\phi f(y)}^{\,2}\right\}'+\frac{1}{2.3}\left\{\big(\mathrm{f}f(y)\big)'\,\overline{\phi f(y)}^{\,3}\right\}''+\text{ecc.} \quad (8)$$

Se nella proposta (6) vi fosse $\varepsilon\phi(z)$ in luogo di $\phi(z)$ essendo ε una piccola quantità, il 2.° membro della (8) in cui si cambiasse ϕ in $\varepsilon\phi$ darebbe una serie ordinata per le potenze crescenti di ε.

Se il 1.° membro della (2) pel limite inferiore $x = x_0 = 0$ risultasse positivo, e perciò negativo il valore di $\phi(y) = \theta$, la radice espressa per funzione involuta corrispondendo ad un nodo discendente dovrebbe in tal caso desumersi dalla relazione ricorrente (2) del § 47. Ritenuti nel 1.°, 2.°, 3.°.... valore approssimato i termini rispettivamente di 1.ª, 2.ª, 3.ª... dimensione, come si è fatto pel caso di $\phi(y)$ positiva, la citata relazione (2) darà

$$x_1 = -\theta \;, \quad x_2 = -3\theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)'$$

$$x_3 = -7\theta + 5\left(\frac{\theta^2}{2}\right)' - \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)'' - 4\theta^2\theta_2 \;,$$

$$\vdots$$

e così di seguito. Se nei valori ottenuti si ripongono per x_1, x_2, x_3,... le corrispondenti z_1-y, z_2-y, z_3-y, ... si ottiene

$$z_1 = y - \theta \;, \quad z_2 = y - 3\theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)'$$

$$z_3 = y - 7\theta + 5\left(\frac{\theta^2}{2}\right)' - \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)'' - 4\theta^2\theta_2$$

$$\vdots$$

Comunque si progredisca non si otterrà da questo processo la serie (3) come nel caso di $\phi(y)$ positiva. Ma se si considera il valore zero di x come il limite superiore di una radice che nella proposta esista fra $x = -x_0$ ed

$x = X_0 = 0$, allora impiegando la stessa relazione ricorrente $x_r = \phi(y + x_{r-1})$ si otterrà la serie (3) la quale, nel caso di convergenza, fornirà il valore della radice negativa compresa fra detti limiti, qualora per essi limiti la serie degl' indici adempia la condizione di essere $= \ldots 0001$.

Se la stessa equazione (2) si tratta col metodo dell'approssimazione lineare, adottando parimente di trascurare ad ogni approssimazione i termini contenenti dimensioni al di là della 1.ª, 2.ª, 3.ª, ..., come nel caso dello sviluppo della funzione involuta, si ottiene parimente per valore della radice la stessa serie (3).

L'omissione dei termini al di là di una certa dimensione che si fa ad ogni approssimazione rende un tal metodo affatto identico con quello fornito dalla già trattata relazione ricorrente $x_r = \phi(y + x_{r-1})$. Infatti i diversi valori risultanti dalla relazione ricorrente (1) del § 56 pei valori di $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ per essere $x_0 = 0$ e $\phi(y) = \theta$ saranno dati da

$$x_1 = \frac{\phi(y)}{1-\phi(y)} = \theta, \quad x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \phi(y+x_1)}{1-\phi'(y+x_1)} = \theta - \frac{\theta-\theta-\theta\theta_1}{1-\phi'(y+\theta)} = \theta + \theta\theta_1 = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)'$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \phi(y+x_2)}{1-\phi'(y+x_2)} = \theta + \theta\theta_1 + \frac{\theta\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\theta^2}{1-\phi'(y+x_2)} = \theta + \left(\frac{\theta^2}{2}\right)' + \left(\frac{\theta^3}{2.3}\right)''$$

$$\vdots$$

e così dicasi di seguito. Si vede manifestamente che devono successivamente risultare gli stessi valori forniti dalle formole (a), in quanto il divisore $1 - \phi'(y + x)$ non entra ad alterare i termini dati dal numeratore spinto ad ogni approssimazione sino ai termini contenenti quelle dimensioni che si è convenuto di ritenere. È perciò che il risultato dato dallo sviluppo della relazione ricorrente

$$x_r = x_{r-1} - \frac{x_{r-1} - \phi(y + x_{r-1})}{1 - \phi'(y + x_{r-1})}$$

a cui si riduce la (1) del § 56, e che appartiene all'approssimazione lineare, si riduce in sostanza a quello della relazione ricorrente $x_r = \phi(y + x_{r-1})$, in quanto può ommettersi il denominatore pel quale una relazione differisce dall'altra.

Se dalle equazioni (1), (2) si deduce la serie (3), il valore che essa fornisce, nell'ipotesi che sia convergente almeno dopo un certo numero $= r$ di termini, sarà un valore approssimato di quella fra le radici della (1) che è più prossima, od al valore di ρ od a quello di y o di $y + \phi(y)$, ovvero di $y + \phi\big(y + \phi(y)\big)$ od in generale più prossima al valore della funzione involuta $\{y + \phi(y)\}^{(r)}$. In fatti siano x_0, X_0 due limiti entro cui è compresa una radice della proposta, e pei quali siano avverate le condizioni della convergenza voluta dall'impiego della relazione (1) del § 47 da cui deriva la funzione involuta (3) del § 52. Si rappresenti con ξ l'uno o l'altro dei due limiti x_0, X_0 e siano x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_r$ i successivi valori forniti dalla relazione ricorrente (1) o dalla (I) del § 47. Sia ε un numero compreso fra 0 ed 1; si avrà

$$x_1 = \phi(y+\xi) = \theta + \xi\,\phi'(y+\varepsilon\xi) = \theta + \xi\, Y_1$$

$$x_2 = \phi(y+x_1) = \phi(y+\theta+\xi\, Y_1) = \phi(y+\theta) + \xi\, Y_1\,\phi'(y+\theta+\varepsilon\xi\, Y_1)$$

$$= \phi(y+\theta) + \xi\, Y_2$$

$$x_3 = \phi(y+x_2) = \phi\big(y+\phi(y+\theta)\big) + \xi\, Y_2\,\phi'\big(y+\phi(y+\theta)+\varepsilon\xi\, Y_2\big)$$

$$= \phi\big(y+\phi(y+\theta)\big) + \xi\, Y_3$$

$$x_4 = \phi(y+x_3) = \phi\Big\{y+\phi\big(y+\phi(y+\theta)\big)\Big\} + \xi\, Y_3\,\phi'\Big\{y+\phi\big(y+\phi(y+\theta)\big)+\varepsilon\xi\, Y_3\Big\}$$

$$= \phi\Big\{y+\phi\big(y+\phi(y+\theta)\big)\Big\} + \xi\, Y_4$$

$$\vdots$$

$$x_r = \cdots\cdots\cdots\cdots \phi\Big\{y+\phi\Big\{y+\phi\big(y+\phi(y+\theta)\big)\Big\}\Big\} + \xi\, Y_r$$

ove le Y_1, Y_2, $Y_3 \ldots Y_r$ rappresentano i termini in cui sono compenetrati i coefficienti della ξ. Se si sviluppa la funzione involuta che rappresenta la 1.ª parte del valore di x_r indipendente dal limite impiegato ξ e si ritengono i termini sino alla r^{esima} dimensione, come si è fatto indietro, un tale sviluppo indipendente da ξ è rappresentato dalla serie (3) supposta convergente almeno dopo un certo numero di termini. La stessa serie darà dunque la radice della (2) compresa fra i limiti $x = \xi = 0$, $x = l$; essendo l un altro limite superiore od inferiore a zero, se per questi limiti saranno adempite le condizioni della convergenza della funzione involuta, ossia fornirà la radice della (1) compresa fra $z = y$, $z = y + l$ che è quella più prossima al valore della quantità y. Ma il valore di x_r, si riduce alla sola 1.ª parte, ossia al valore della serie (3), non solo per $\xi = 0$, ma per ciascuno dei valori

$$\xi = \rho - y\,, \quad \xi = \phi(y) = \theta\,, \quad \xi = \phi(y + \theta)\,,$$

$$\xi = \phi\big(y + \phi(y + \theta)\big)\,, \quad \xi = \phi\big\{y + \phi\big(x + \phi(y + \theta)\big)\big\}\,, \ldots$$

In fatti pel valore $\xi = \rho - y$ si ha $x_1 = 0$, quindi $x_2 = \theta$ che è la 1.ª parte del valor precedente di x_2. Quindi $x_3 = \phi(y + \theta)$ che è la 1.ª parte del valor precedente di x_2, e così di seguito. Parimente pel valore $\xi = \theta$ si ha $x_1 = \phi(y + \theta)$ che è la 1.ª parte del valor precedente di x_2. Quindi $x_2 = \phi\big(y + \phi(y + \theta)\big)$ che è la 1.ª parte del precedente valore di x_3, e così dicasi di seguito. Così per $\xi = \phi(y + \theta)$ si ha

$$x_1 = \phi\big(y + \phi(y + \theta)\big)\,, \quad x_2 = \phi\big\{y + \phi\big(y + \phi(y + \theta)\big)\big\}\,, \ldots$$

che sono le 1.ᵉ parti dei valori precedenti di x_3, x_4, ... Lo stesso vale per gli altri valori di ξ. Ne risulta quindi che la serie (3), se non fornirà la radice compresa fra

$x = \xi = 0$, $x = l$ perchè non sono soddisfatti i criterj della convergenza della funzione involuta da cui essa dipende; potrà fornire la radice compresa fra $x = \xi = \theta$, $x = l_1$, essendo l_1 l'altro limite superiore od inferiore alla radice, se gli anzidetti criterj sono per questi limiti adempiti. Se non lo sono, la stessa (3) potrà fornire la radice compresa fra $x = \phi(y + \theta)$, $x = l_2$, se per questi limiti i criterj sono soddisfatti, e così dicasi successivameute. Giunti a due limiti

$$x = \xi = \phi\{y + \phi(y + \phi(y + \cdots\cdot))\}, \qquad x = l_r$$

pei quali sono soddisfatti i criterj, la serie (3) darà la radice più prossima al valore di ξ e da questo valore in avanti fornirà sempre la stessa radice. Passando dai valori delle diverse x rispetto alla (2) ai corrispondenti valori di z si deduce l'enunciata proposizione rispetto alla proposta equazione (1).

Quantunque tali deduzioni abbiano luogo in generale, giova però avvertire che, quand'anche per due dei surriferiti limiti non fossero avverate le condizioni della convergenza della funzione involuta, potrebbe la serie (3) fornire il valore della radice fra questi limiti compresa, quando accadesse che in forza dei termini che si trascurano nello sviluppo della funzione involuta per ridurla alla forma della serie (3) si ottenessero valori convergenti verso la radice dalla quale divergevano i valori forniti dall'esatta funzione involuta. Ma più sovente accadrà che essendo avverate le condizioni della convergenza della funzione involuta, dalla quale si otterrebbero valori convergenti verso la radice, i valori forniti dallo sviluppo di essa colla soppressione dei termini di dimensioni superiori divengano divergenti, e perciò divergente la serie (3) che ne risulta. Ciò si verifica in fatti nell' equazione $x - e \cos x = 0$, quando il valore di e sorpassa il numero $0{,}662743\ldots$. La funzione involuta fornirà valori convergenti verso la radice in quanto pei diversi valori di $e > 0,66\ldots$. si troveranno due limiti pei quali sono avverate le condizioni richieste per l'impiego della funzione involuta, mentre la serie (3) sarà divergente, dietro quanto si è avvertito nell'esempio dato in fine del § 29 della citata Memoria sulle equazioni trascendenti. Dalle cose dette si vede quanta cautela richiegga l'uso della serie (3) nella ricerca di una radice dell'equazione (1), e quanto opportuno sia il metodo di determinare anticipatamente i limiti entro cui giacciono le radici, onde conoscere, se il valore fornito dalla serie (3) corrisponda a quella radice che ci interessa di ottenere. Qualora si ritenga invariata la forma della proposta (1), la serie (3) fornisce il valore di una sola delle sue radici, e quantunque con opportuno cambiamento di forma si possano ottenere, almeno quando la ϕ sia una funzione algebrica, diverse radici della proposta, forse sarà più comodo servirsi del seguente processo applicabile ad un'equazione qualunque, col quale si ottengono prima le radici positive ordinate per le loro crescenti grandezze, indi le negative collo scambiare nella proposta la z in $-z$. In fatti siano $p, q, r, s \ldots$. le radici positive della proposta (1) ordinate come si è detto e siano

$$(n_1, N_1), \quad (n_2, N_2), \quad (n_3, N_3)\ldots.$$

i limiti entro cui sono rispettivamente comprese e pei quali sia avverata la condizione che la serie degl' indici finisca con $\ldots.001$. Se la n_1 sarà il limite di un nodo ascendente, le radici $p, q, r, s\ldots.$ saranno date, nel caso di convergenza, dalle serie derivate dalla (3) col sostituire per y i binomj

$$y + n_1, \quad y - N_2, \quad y + n_3, \quad y - N_4\ldots.$$

e coll'aggiungere alla ϕ rispettivamente gl'incrementi della

y. Se la n_1 sarà il limite di un nodo discendente, le radici stesse saranno date in vece dalle serie risultanti dalla (3) coll'aumentare la y e la ϕ delle quantità

$$-N_1, \quad +n_2, \quad -N_3, \quad +n_4, \ldots$$

Ciò risulta manifesto dal riflettere che nel 1.° caso, supposto l uno dei limiti n_1, n_3, n_5, ... di un nodo ascendente, se nella (1) si pone $z = l + \zeta$ essa si trasforma nella

$$\zeta = y + \{ \phi(\zeta + l) - l \} = y + \psi(\zeta)$$

la quale trattata colla serie (3) darà per ζ e quindi per z il valore del nodo ascendente corrispondente al limite l. Supposto in vece che l rappresenti uno dei limiti $-N_2$, $-N_4$, $-N_6$, ... la stessa serie (3) darà per ζ e quindi per z il valore del corrispondente nodo discendente. Lo stesso potrà ripetersi rispetto ai limiti n_2, n_4, n_6, ... ed ai limiti $-N_1$, $-N_3$, $-N_5$, ... quando abbia luogo il 2.° caso.

61. Ripigliando la questione più generale del § 46 si assoggetti l'equazione proposta ad una rappresentazione geometrica simile a quella che si è impiegata nel § 55 pel caso più semplice. La costruzione delle due curve, dalla cui intersezione si desume il valore della corrispondente ascissa, mostra che non è punto necessario ricorrere alla forma di funzione in cui una x si presenti lineare, ma che si può ottenere il valore della radice trattando l'immediata funzione. Così se la funzione $f(x)$ fosse della forma $\chi(x) - \psi(x)$, si dovranno considerare le due curve $\chi(x) = y$, $\psi(x) = y$. Col primo valore approssimato x_1 si cercherà l'ordinata $\chi(x_1)$ che chiameremo y_1. Coll'equazione $\psi(x) - y_1 = 0$ si cercherà un valore di x compreso fra i limiti x_1, X_1, pel quale sia prossimamente soddisfatta, e che indicheremo con x_2. Chiamata y_2 l'ordinata $\chi(x_2)$ si cercherà coll'equazione $\psi(x) - y_2 = 0$

un valore x_3 che prossimamente la soddisfi. Si calcolerà ancora l'ordinata $\chi(x_3)$, che chiameremo y_3, colla quale stabilita l'equazione $\psi(x) - y_3 = 0$ si troverà un valore approssimato x_4, e così dicasi di seguito. Ma in tal caso il criterio della convergenza o divergenza degli ottenuti valori x_1, x_2, x_3, ... non potrà, come nei casi contemplati indietro, conoscersi in anticipazione dai valori che assume la derivata $f'(x)$ pei due limiti x_1, X_1. La serie degli anzidetti valori convergerà verso il valore della radice, quando una qualunque x_r non sarà mai costantemente o minore o maggiore di due precedenti valori x_{r-1}, x_{r-2}. Quando tale accidente si verifichi i valori successivi vanno continuamente divergendo dal valore che si cerca, ciò che verrà dalla costruzione indicato, ed in tal caso converrà cambiar la forma alla proposta funzione, seguendo i riflessi dati pel caso della $x - \phi(x) = 0$.

Se accade che la $f(x) = 0$ non sia trasformabile in altra equazione finita compresa in alcuna delle accennate forme, e non vogliasi seguire il processo generale con cui la $f(x) = 0$ si riduce alla $x - \phi(x) = 0$, si potrà, come si è avvertito nel citato paragrafo, impiegare le serie ricorrenti implicite di cui il caso or ora trattato ne offre di già un esempio. Scelto arbitrariamente nella $f(x) = 0$ un certo numero di x in essa comprese e contrassegnate con x^1, si scriva la proposta con $\psi(x, x^1) = 0$; si sostituisca ad x^1 un valore approssimato x_1; si determini colla $\psi(x, x_1) = 0$ un valore esatto od approssimato di x che chiameremo x_2. Sostituito ad x^1 il valore ottenuto x_2 si cercherà per x nella $\psi(x, x_2) = 0$ un valore esatto od approssimato di x che chiameremo x_3, e così dicasi successivamente. Risulta da ciò che un qualunque valore x_r dipenderà dal valore x_{r-1} precedentemente determinato e verrà dato dalla relazione ricorrente $\psi(x_r, x_{r-1}) = 0$. Quantunque la costruzione delle due curve, che nel precedente caso rende manifesta la continua approssimazione al valore che si cerca, non sia in questa forma di funzione implicita effettuabile, pure siccome il precedente caso dell'equazione $\chi(x) - \psi(x^1) = 0$ può essere considerato come un caso particolare di quello in cui le due funzioni sono miste ed inseparabili, ne deriva parimente la legittimità della continua approssimazione anche in questo, purchè si verifichi la condizione per la convergenza dei valori x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_r$ desunta dallo stesso criterio dato pel caso in cui le due funzioni di x e di x^1 erano separate.

Qualora nella $\psi(x, x^1) = 0$ la funzione che affetta la x sia algebrica gioverà spesso il seguente processo che non è che una forma particolare del precedente. Sostituito per x^1 il valore approssimato x_1, si ponga per x il valore $x_1 + \frac{1}{x_2}$. Determinato colla $\psi\left(x_1 + \frac{1}{x_2}, x_1\right) = 0$ il valore approssimato x_2 e posto $x_1 + \frac{1}{x_2} = z_1$ si porrà nella $\psi(x, x^1) = 0$ in luogo di x_1, x rispettivamente z_1, $z_1 + \frac{1}{x_3}$. Determinato colla $\psi\left(z_1 + \frac{1}{x_3}, z_1\right) = 0$ il valore approssimato di x_3 e posto $z_1 + \frac{1}{x_3} = z_2$, si cercherà il valore approssimato di x_4 colla $\psi\left(z_2 + \frac{1}{x_4}, z_2\right) = 0$, e così progredendo si otterranno i valori d'una qualunque x_r dalla relazione ricorrente implicita $\psi\left(z_{r-1} + \frac{1}{x_r}, z_{r-1}\right) = 0$. I valori approssimati alla radice che si cerca saranno dati dalle

$$x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad z_1 + \frac{1}{x_3}, \quad z_2 + \frac{1}{x_4}, \ldots .$$

e siccome è

$$z_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad z_2 = z_1 + \frac{1}{x_3}, \quad z_3 = z_2 + \frac{1}{x_4}, \ldots .$$

così gli anzidetti valori saranno dati dalle

$$x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \quad x_1 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, \ldots.$$

Il precedente caso può anche trattarsi collo stesso metodo che si pratica per le equazioni algebriche e che conduce ad esprimere la radice per funzione involuta. Ordinata la $\psi(x, x^1) = 0$ a seconda degli esponenti decrescenti di x essa si ridurrà alla forma

$$\phi_n(x)\,x^n + \phi_{n-1}(x)\,x^{n-1} + \phi_{n-2}(x)\,x^{n-2} + \cdots + \phi_1(x)\,x + \phi_0(x) = 0$$

ove le $\phi_n, \quad \phi_{n-1}, \quad \phi_{n-2} \ldots \phi_0$

sono funzioni trascendenti di x che verrà ora controdistinta con x^1. Supposto che la radice sia compresa fra x_0 ed X_0 e che sia $X_0 - x_0 < 1$ si porrà x_0 in luogo di x^1 ed $x_0 + \frac{1}{y_0}$ in luogo di x. Ordinata l'equazione per le potenze di y_0 si cercherà il numero intero che prossimamente la soddisfi; sia esso $= x_1$. Si porrà in luogo di x_0 sotto le ϕ la $x_0 + \frac{1}{x_1}$ ed in luogo di y_0 la $x_1 + \frac{1}{y_1}$. Ordinata l'equazione per y_1 si cercherà il numero intero x_2 che prossimamente la soddisfi. Posto sotto alle ϕ in luogo di x_1 il valore $x_1 + \frac{1}{x_2}$ e per y_1 il valore $x_2 + \frac{1}{y_2}$, si ordinerà l'equazione per y_2, e così si procederà collo stesso andamento. Il valore della radice sarà dato da

$$x_0 + 1 : \overline{x_1 + 1} : \overline{x_2 + 1} : \overline{x_3 + 1} : \overline{x_4 + 1} : \overline{x_5 + 1} : \ldots$$