EFFEMERIDI ASTRONOMICHE
DI MILANO
PER L'ANNO 1845

CALCOLATE

DALL' ABATE GIOVANNI CAPELLI

E DA

CURZIO BUZZETTI

CON

APPENDICE

MEMORIE ED OSSERVAZIONI ASTRONOMICHE.

MILANO
DALL' IMP. REGIA STAMPERIA
1844.

INDICE.

APPENDICE.

Effemeridi del 1844.

Ai tempi degli eclissi del III e IV satellite di Giove nel 1844 si aggiungano $0^h\ 54'\ 48''$.

Pag. 88 13 ottobre 1844 ☽ apogea, si corregga in ☽ perigea.

Appendice alle Effemeridi del 1844.

				Errata.	*Corrige.*
Pag.	10	lin.	5	apporterranno	apporteranno
	15	»	20	ordine	ordine
	16	»	29	si dovà	si dovrà
	17	»	20	$y^{(1)}$	$y^{(i)}$
	18	»	6	$y^{(1)}$	$y^{(i)}$
	20	»	20	interali	integrali
	21	»	5	eonoscere	conoscere
	21	»	6	$f((x)$	$f(x)$
	26	»	10	fartore	fattore
	27	»	25	$y^{(1)}$	$y^{(i)}$
	36	»	16	$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{x}{m}}$	$\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}$
	40	»	3	idefinitamente	indefinitamente
	43	»	10	s' intenda	s' intendano
	46	»	15	siddisfano	soddisfano
	60	»	5	l' esiɜtenza	l' esistenza
	62	»	10	controdistinguere	contraddistinguere

SPIEGAZIONE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIATURE.

Segni del Zodiaco.		Pianeti.	
♈	Ariete.	☿	Mercurio.
♉	Toro.	♀	Venere.
♊	Gemelli.	♁	Terra.
♋	Canero.	♂	Marte.
♌	Leone.	⚳	Cerere.
♍	Vergine.	⚴	Pallade.
♎	Libra.	⚵	Giunone.
♏	Scorpione.	⚶	Vesta.
♐	Sagittario.	♃	Giove.
♑	Capricorno.	♄	Saturno.
♒	Aquario.	♅	Urano.
♓	Pesci.		

☉ Sole. ☽ Luna.

g indica	Giorni.	M indica	Mattina.
h	Ore.	S	Sera.
s	Segni.	A	Australe.
°	Gradi.	B	Boreale.
′	Minuti.	diff.	Differenza.
″	Secondi.	dist. min.	Distanza minima.
☌	Congiunzione.	imm.	Immersione.
☍	Opposizione.	em.	Emersione.
☊	Nodo ascendente.	AR.	Ascensione retta.
☋	Nodo discendente.	Lat.	Latitudine.

FESTE MOBILI.

Settuagesima			19	Gennajo.
Giorno delle Ceneri			5	Febbrajo.
Pasqua di Risurrezione			23	Marzo.
Litanie alla Romana	28	29	30	Aprile.
Ascensione del Signore			1	Maggio.
Litanie all'Ambrosiana	5	6	7	Maggio.
Pentecoste			11	Maggio.
Santissima Trinità			18	Maggio.
Corpus Domini			22	Maggio.
Avvento all'Ambrosiana			16	Novembre.
Avvento alla Romana			30	Dicembre.

NUMERI DELL' ANNO.

Numero d'Oro	3.
Ciclo Solare	6.
Epatta	XXII.
Indizione Romana	3.
Lettera Domenicale	E.

QUATTRO TEMPORA.

Di Primavera	12	14	15	Febbrajo.
D'Estate	14	16	17	Maggio.
D'Autunno	17	19	20	Settembre.
D'Inverno	17	19	20	Dicembre.

ECLISSI DELL' ANNO 1845 IN TEMPO MEDIO.

5 Maggio. Eclisse parziale di Sole visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse . . . . $21^h\ 21'\ 46'',0$.
Fine dell' Eclisse . . . . $23\quad 9\quad 49\ ,8$.
Quantità dell' Eclisse digiti 2 min. 27.
Distanza minima dai centri 25'.
Massima oscurazione a $22^h\ 14'\ 25''$.
Il primo appulso avrà luogo a 18° dal diametro verticale del Sole.

21 Maggio. Eclisse di Luna invisibile a Milano.

8 Maggio. Passaggio di Mercurio sul disco solare visibile in parte a Milano.
Primo contatto esterno . . . . $4^h\ 54'\ 53''$.
Secondo contatto interno . . . . $4\quad 58\quad 30$.
L' immersione di Mercurio sul disco solare avrà luogo al lembo orientale a 88° dall' estremità superiore del diametro verticale del Sole.
L' emersione non è visibile avendo luogo quando il Sole è sotto l' orizzonte.

30 Ottobre. Eclisse annulare di Sole invisibile a Milano.
Congiunzione vera della Luna col Sole $12^h\ 18'$.

13 Novem. Eclisse parziale di Luna visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse . . . . $11^h\ 47'$.
Fine dell' Eclisse . . . . $15\quad 5$.
Quantità dell' Eclisse digiti 11.

Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.	Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.
	° ' "	"		° ' "	"
0	23 27 29,6	+ 15,6	190	23 27 28,1	+ 14,3
10	29,6	+ 15,9	200	28,2	+ 14,6
20	29,7	+ 16,1	210	28,3	+ 14,7
30	29,8	+ 16,1	220	28,4	+ 14,6
40	30,0	+ 16,1	230	28,6	+ 14,4
50	30,0	+ 15,8	240	28,6	+ 14,1
60	30,1	+ 15,4	250	28,9	+ 13,7
70	30,1	+ 14,9	260	28,6	+ 13,2
80	30,0	+ 14,5	270	28,5	+ 12,6
90	29,8	+ 13,9	280	28,5	+ 12,1
100	29,7	+ 13,5	290	28,2	+ 11,6
110	29,5	+ 13,1	300	27,9	+ 11,3
120	29,1	+ 12,9	310	27,7	+ 11,1
130	28,9	+ 12,8	320	27,4	+ 11,0
140	28,6	+ 12,8	330	27,2	+ 11,1
150	28,4	+ 13,0	340	27,0	+ 11,4
160	28,3	+ 13,4	350	26,9	+ 11,7
170	28,1	+ 13,7	360	26,8	+ 12,1
180	28,1	+ 14,0	365	26,7	+ 12,3

Occultazioni dei pianeti e delle principali stelle dietro la Luna per l'anno 1845 a Milano.

Giorni del mese.	Astri occultati.	Tempo medio dell' immer.	Tempo medio dell' emers.	Distanza dal punto più alto della ☽ nell' em.	Cong. appar. sull' orbita.	Distanza minima dal lembo della ☽.
		h '	h '	°	h '	'
Genn. 16	42 π ♈ 5.a	......	......	.....	10 4	5 A
Febb. 16	44 χ^3 Orione 5	......	......	.....	14 45	(*)
25	68 i ♍ 6	9 27	10 26	6	.....	......
Marzo 22	87 E ♌ 4. 5.	......	......	.....	14 0	2 A
29	13 μ^1 ♐ 3. 4	......	......	.....	13 39	3 B
30	43 d ♐ 5	15 31	16 1	13	.....	......
Maggio 6	☿	......	......	.....	7 7	10 B
9	54 χ^1 Orione 5	9 19	9 36	48	.....	......
16	87 E ♌ 4. 5	......	......	.....	8 32	(*)
Giugno 20	43 d ♐ 5	16 26	17 32	170	.....	......
Luglio 15	9 ω Ofiuco 5	13 8	14 10	120	.....	......
Agosto 11	9 ω^1 ♏ 4. 5	11 4	12 0	107	.....	......
11	10 ω^2 ♏ 4. 5	11 15	22 18	141	.....	......
13	13 μ^1 ♐ 3. 4	12 47	13 43	170	.....	......
14	43 d ♐ 5	13 21	14 17	188	.....	......
20	63 d ♓ 5	8 50	9 47	90	.....	......
Sett. 9	58 d Ofiuco 5	......	......	.....	7 9	4 A
15	18 λ ♓ 5	14 14	15 5	190	.....	......
Ottob. 3	♀	......	......	.....	20 7	14 A
18	74 ε ♉ 4	8 17	9 7	90	.....	......
Nov. 6	19 ν ♒ 5	7 22	8 17	88	.....	......
10	63 δ ♓ 5	......	......	.....	13 32	11 A
14	74 ε ♉ 5.	19 11	20 56	179	.....	......
Dicem. 6	18 λ ♓ 5	......	......	.....	11 36	1 A

(*) Tangente il lembo australe della ☽.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Ultimo quarto	$3^h 58'$
7	Luna nuova	19 49
14	Primo quarto	21 27
23	Luna piena.	2 56
30	Ultimo quarto	14 32

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	68 i ♍ 5.ª	0 5
4	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª.	17 31
4	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	17 47
5	9 ω Ofiuco 5.ª	3 10
5	♀	13 36
6	58 d Ofiuco 5.ª	5 41
6	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	16 56
7	37 ξ^2 ♐ 5.ª	9 11
7	43 d ♐ 5.ª	16 59
8	9 β ♑ 3. 4.ª.	18 11
9	13 ν ♒ 5.ª	14 19
12	18 λ ♓ 5.ª	11 33
16	42 π ♈ 5.ª	8 47
19	102 ι ♉ 4. 5.ª	1 5
19	114 o ♉ 5.ª.	12 43
19	123 ζ ♉ 3. 4.ª	17 22
20	54 χ^1 Orione 5.ª	1 17
20	44 χ^3 Orione 5.ª	5 50
20	18 ν □ 5.ª	17 40
23	65 α^2 ♋ 5.ª	6 20
26	87 E ♌ 4. 5.ª.	23 7
29	68 i ♍ 5.ª	6 2

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ′ ″
* 2	10 10 56 imm.
4	4 39 57
5	23 8 53
7	17 37 55
9	12 6 50
* 11	6 35 50
13	1 3 45
14	19 13 47
16	14 2 40
* 18	8 31 39
20	3 0 33
21	21 29 33
23	15 58 25
25	10 27 13
27	4 56 16
28	23 25 15
30	17 54 6
	II. Satellite.
1	17 16 34 em.
* 5	6 44 45
8	20 2 52
* 12	9 21 2
15	22 39 14
19	11 57 26
23	1 15 43
26	14 33 56
30	3 52 17
	III. Satellite.
2	0 11 41 imm.
2	2 56 3 em.
9	4 14 25 imm.
* 9	6 57 42 em.
* 16	8 17 2 imm.
16	10 59 15 em.
23	12 19 43 imm.
23	15 0 53 em.
30	16 22 55 imm.
30	19 3 2 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
1	1	Merc.	0 3 56,20	18 47 49,65	18 43 52,81	7 39	4 21
2	2	Giov.	0 4 24,39	18 52 14,46	18 47 49,37	7 38	4 22
3	3	Ven.	0 4 52,24	18 56 38,96	18 51 45,93	7 38	4 22
4	4	Sab.	0 5 19,71	19 1 3,07	18 55 42,49	7 37	4 23
5	5	Dom.	0 5 46,79	19 5 26,76	18 59 39,04	7 37	4 23
6	6	Lun.	0 6 13,41	19 9 50,03	19 3 35,60	7 36	4 24
7	7	Mart.	0 6 39,56	19 14 12,81	19 7 32,16	7 35	4 25
8	8	Merc.	0 7 5,21	19 18 35,10	19 11 28,72	7 34	4 26
9	9	Giov.	0 7 30,34	19 22 56,86	19 15 25,28	7 34	4 26
10	10	Ven.	0 7 54,92	19 27 18,05	19 19 21,83	7 33	4 27
11	11	Sab.	0 8 18,90	19 31 38,65	19 23 18,39	7 32	4 28
12	12	Dom.	0 8 42,26	19 35 58,64	19 27 14,95	7 32	4 28
13	13	Lun.	0 9 4,99	19 40 17,99	19 31 11,50	7 31	4 29
14	14	Mart.	0 9 27,06	19 44 36,67	19 35 8,06	7 30	4 30
15	15	Merc.	0 9 48,45	19 48 54,67	19 39 4,61	7 29	4 31
16	16	Giov.	0 10 9,12	19 53 11,96	19 43 1,17	7 28	4 32
17	17	Ven.	0 10 29,06	19 57 28,51	19 46 57,73	7 26	4 34
18	18	Sab.	0 10 48,27	20 1 44,34	19 50 54,29	7 25	4 35
19	19	Dom.	0 11 6,75	20 5 59,43	19 54 50,85	7 24	4 36
20	20	Lun.	0 11 24,47	20 10 13,74	19 58 47,40	7 23	4 37
21	21	Mart.	0 11 41,42	20 14 27,30	20 2 43,96	7 22	4 38
22	22	Merc.	0 11 57,58	20 18 40,06	20 6 40,51	7 21	4 39
23	23	Giov.	0 12 12,95	20 22 52,03	20 10 37,07	7 20	4 40
24	24	Ven.	0 12 27,53	20 27 3,21	20 14 33,62	7 18	4 42
25	25	Sab.	0 12 41,33	20 31 13,61	20 18 30,18	7 17	4 43
26	26	Dom.	0 12 54,36	20 35 23,22	20 22 26,73	7 16	4 44
27	27	Lun.	0 13 6,59	20 39 32,03	20 26 23,29	7 15	4 45
28	28	Mart.	0 13 18,01	20 43 40,03	20 30 19,84	7 14	4 46
29	29	Merc.	0 13 28,62	20 47 47,23	20 34 16,40	7 13	4 47
30	30	Giov.	0 13 38,42	20 51 53,63	20 38 12,95	7 12	4 48
31	31	Ven.	0 13 47,42	20 55 59,20	20 42 9,51	7 11	4 49

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	9 10 59 27,5	23 0 9,6	+ 0,21	0,56A	9,9926526
2	9 12 0 37,8	22 54 53,2	0,22	0,45	9,9926580
3	9 13 1 48,3	22 49 9,2	0,24	0,34	9,9926655
4	9 14 2 58,9	22 42 58,0	0,26	0,21	9,9926750
5	9 15 4 9,5	22 36 19,7	0,28	0,08	9,9926863
6	9 16 5 20,2	22 29 14,6	0,30	0,04B	9,9926994
7	9 17 6 30,8	22 21 42,8	0,31	0,17	9,9927142
8	9 18 7 41,2	22 13 44,6	0,33	0,27	9,9927307
9	9 19 8 51,3	22 5 20,1	0,35	0,36	9,9927489
10	9 20 10 1,0	21 56 29,8	0,37	0,40	9,9927686
11	9 21 11 10,2	21 47 13,8	0,38	0,43	9,9927900
12	9 22 12 18,8	21 37 32,4	0,40	0,44	9,9928132
13	9 23 13 26,8	21 27 25,9	0,42	0,40	9,9928382
14	9 24 14 34,0	21 16 54,7	0,44	0,34	9,9928650
15	9 25 15 40,4	21 5 58,9	0,46	0,26	9,9928940
16	9 26 16 46,0	20 54 39,1	0,47	0,15	9,9929251
17	9 27 17 50,7	20 42 55,4	0,49	0,02	9,9929584
18	9 28 18 54,5	20 30 48,1	0,50	0,11A	9,9929940
19	9 29 19 57,4	20 18 17,7	0,52	0,25	9,9930321
20	10 0 20 59,3	20 5 24,5	0,54	0,37	9,9930728
21	10 1 22 0,4	19 52 8,8	0,55	0,50	9,9931160
22	10 2 23 0,6	19 38 30,9	0,57	0,60	9,9931620
23	10 3 23 59,9	19 24 31,3	0,59	0,67	9,9932107
24	10 4 24 58,3	19 10 10,2	0,60	0,72	9,9932621
25	10 5 25 56,0	18 55 28,0	0,62	0,74	9,9933162
26	10 6 26 53,0	18 40 25,1	0,63	0,75	9,9933728
27	10 7 27 49,2	18 25 1,8	0,64	0,70	9,9934320
28	10 8 28 44,6	18 9 18,7	0,66	0,64	9,9934935
29	10 9 29 39,2	17 53 15,8	0,68	0,55	9,9935572
30	10 10 30 33,2	17 36 53,8	0,69	0,43	9,9936229
31	10 11 31 26,3	17 20 12,9	0,70	0,30A	9,9936906

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	6 8 56 18	6 15 41 42	4 16 46A	3 54 7A	18 19
2	Giov.	6 22 32 23	6 29 28 32	3 27 50	2 58 10	19 11
3	Ven.	7 6 30 12	7 13 37 23	2 25 27	1 50 3	20 8
4	Sab.	7 20 49 56	7 28 7 33	1 12 30	0 33 20	21 8
5	Dom.	8 5 29 46	8 12 55 58	0 6 45B	0 47 3B	22 11
6	Lun.	8 20 25 21	8 27 56 58	1 26 47	2 5 8	23 14
7	Mart.	9 5 29 44	9 13 2 30	2 41 22	3 14 43	* *
8	Merc.	9 20 34 2	9 28 3 9	3 44 32	4 10 18	0 12
9	Giov.	10 5 28 41	10 12 49 35	4 31 35	4 48 7	1 14
10	Ven.	10 20 4 58	10 27 14 6	4 59 46	5 6 31	2 9
11	Sab.	11 4 16 26	11 11 11 38	5 8 29	5 5 53	3 0
12	Dom.	11 17 59 35	11 24 40 20	4 58 58	4 48 4	3 48
13	Lun.	0 1 14 5	0 7 41 10	4 33 32	4 15 44	4 35
14	Mart.	0 14 2 3	0 20 17 16	3 55 2	3 31 48	5 20
15	Merc.	0 26 27 24	1 2 33 8	3 6 24	2 39 10	6 6
16	Giov.	1 8 35 6	1 14 33 59	2 10 26	1 40 30	6 52
17	Ven.	1 20 30 27	1 26 25 9	1 9 41	0 38 17	7 39
18	Sab.	2 2 18 43	2 8 11 45	0 6 37	0 25 3A	8 26
19	Dom.	2 14 4 49	2 19 58 25	0 56 25A	1 27 11	9 15
20	Lun.	2 25 53 1	3 1 49 3	1 57 3	2 25 43	10 4
21	Mart.	3 7 46 51	3 13 46 43	2 52 54	3 18 16	10 52
22	Merc.	3 19 48 55	3 25 53 37	3 41 32	4 2 24	11 39
23	Giov.	4 2 0 57	4 8 11 3	4 20 36	4 35 53	12 26
24	Ven.	4 14 23 57	4 20 39 42	4 47 59	4 56 42	13 12
25	Sab.	4 26 58 18	5 3 19 47	5 1 51	5 3 18	13 57
26	Dom.	5 9 44 9	5 16 11 24	5 0 58	4 54 46	14 42
27	Lun.	5 22 41 34	5 29 14 40	4 44 43	4 30 51	15 28
28	Mart.	6 5 50 45	6 12 29 56	4 13 16	3 52 7	16 16
29	Merc.	6 19 12 19	6 25 57 59	3 27 35	2 59 56	17 6
30	Giov.	7 2 47 6	7 9 39 47	2 29 29	1 56 36	17 59
31	Ven.	7 16 36 7	7 23 36 12	1 21 42	0 45 16	18 56

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	13 6	10 57A	57 41	58 5	31 30	31 43	12 52	23 37
2	14 2	15 14	58 29	58 53	31 56	32 9	14 3	* *
3	15 3	18 42	59 17	59 40	32 22	32 34	15 18	0 11
4	16 7	20 58	60 1	60 20	32 46	32 57	16 32	0 51
5	17 14	21 41	60 36	60 49	33 5	33 12	17 39	1 39
6	18 21	20 43	60 57	61 3	33 16	33 20	18 39	2 43
7	* *	* *	61 3	60 58	33 20	33 17	19 26	3 53
8	19 27	18 9	60 48	60 35	33 12	33 4	20 11	5 5
9	20 30	14 19	60 17	59 56	32 54	32 43	20 45	6 26
10	21 28	9 38	59 32	59 6	32 30	32 16	21 15	7 42
11	22 24	4 32	58 38	58 9	32 1	31 44	21 43	8 54
12	23 16	0 37B	57 40	57 12	31 29	31 14	22 10	10 3
13	0 7	5 33	56 44	56 18	30 58	30 44	22 35	11 10
14	0 56	10 4	55 54	55 32	30 31	30 18	23 2	12 15
15	1 46	14 1	55 13	54 56	30 8	29 59	23 30	13 20
16	2 36	17 15	54 41	54 28	29 50	29 43	* *	14 23
17	3 27	19 39	54 18	54 11	29 39	29 35	0 5	15 19
18	4 19	21 9	54 6	54 3	29 32	29 30	0 44	16 11
19	5 11	21 38	54 2	54 3	29 30	29 30	1 29	17 1
20	6 4	21 6	54 5	54 10	29 31	29 34	2 19	17 46
21	6 56	19 33	54 16	54 24	29 38	29 42	3 13	18 25
22	7 48	17 3	54 32	54 42	29 46	29 52	4 10	18 59
23	8 38	13 44	54 53	55 4	29 58	30 4	5 13	19 29
24	9 28	9 43	55 16	55 29	30 10	30 17	6 17	19 57
25	10 18	5 12	55 42	55 56	30 24	30 32	7 22	20 22
26	11 7	0 23	56 10	56 25	30 40	30 48	8 27	20 47
27	11 57	4 31A	56 40	56 55	30 56	31 4	9 33	21 13
28	12 49	9 18	57 11	57 27	31 13	31 22	10 41	21 41
29	13 43	13 41	57 44	58 1	31 31	31 41	11 51	22 12
30	14 41	17 22	58 18	58 36	31 50	32 0	13 3	22 49
31	15 41	20 2	58 53	59 9	32 9	32 17	14 15	23 34

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$7^h\ 30'$	*Occidente*
1	4. .1	○	2. 3.
2	4. 2. 3. 1.	○	
3	4. 3. .2	○	.1 .
4	.4 .3 1.	○	.2
5	o3 .4 .2	○	.1
6	.4 2. .1	○	.3
7	.4	○	1. .2 .3
8	4δ1	○	2. 3.
9	2. 3.	○	1. .4
10	3. .2	○	.1 .4
11	.3 1.	○	.2 .4
12	3δ2	○	.1 .4
13	2. 1.	○	.3 4.
14		○	.2,1. .3 4.
15	.1	○	2. 3. 4.
16	2. 3.	○	1. 4.
17	o1 3. .2,4.	○	
18	4δ3 1.	○	.2
19	•2 4. .3	○	.1
20	4. 2. 1.	○	.3
21	.4	○	.2,1. .3
22	.4 .1	○	2. 3.
23	•3 .4 2.	○	1.
24	3δ4 .2 .1	○	
25	•1 3.	○	.2 4o
26	.3	○	2δ1 .4
27	2. 1.	○	.3 .4
28	o2	○	.1 .3 .4
29	.1	○	.2,3. .4
30	.2	○	1δ3 4.
31	2δ3 .1	○	4.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.		
6	Luna nuova	7^h	$11'$
13	Ultimo quarto	17	36
21	Luna piena	19	13
28	Primo quarto	22	50
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.		
1	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	1	24
1	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	1	41
1	9 ω Ofiuco 5.ª	11	26
1	♂	12	23
2	58 d Ofiuco 5.ª	14	55
3	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	2	32
3	37 ξ^2 ♐ 5.ª	19	16
4	43 d ♐ 5.ª	3	16
5	9 β ♑ 3. 4.ª	4	52
6	13 ν ♒ 5.ª	1	8
8	18 λ ♓ 5.ª	21	31
12	42 π ♈ 5.ª	16	44
15	102 ι ♉ 4. 5.ª	8	32
16	123 ζ ♉ 3. 4.ª	0	51
16	54 χ^1 Orione 5.ª	8	47
16	44 χ^3 Orione 5.ª	13	19
17	18 ν □ 5.ª	1	15
20	65 α^2 ♋ 5.ª	1	47
23	87 E ♌ 4. 5.ª	5	28
25	68 i ♍ 5.ª	11	34
28	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	7	2
28	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	7	19
28	9 ω Ofiuco 5.ª	17	15

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
	I. SATELLITE.			
	h	′	″	
1	12	23	2	em.
* 3	6	51	54	
5	1	20	51	
6	19	49	41	
8	14	18	36	
10	8	47	26	
12	3	16	22	
13	21	45	10	
15	16	14	4	
17	10	42	53	
19	5	11	47	
20	23	40	34	
27	18	9	25	
24	12	38	12	
* 26	7	7	5	
28	1	35	51	
	II. SATELLITE.			
2	17	10	32	em.
6	6	28	56	
9	19	47	13	
13	9	5	42	
16	22	24	0	
20	11	42	34	
24	1	0	52	
27	14	19	31	
	III. SATELLITE.			
6	20	25	42	imm.
6	23	4	46	em.
14	0	28	47	imm.
14	3	6	49	em.
21	4	31	9	imm.
* 21	7	8	9	em.
28	8	33	16	imm.
28	11	9	15	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
32	1	Sab.	0 13 55,62	21 0 3,98	20 46 6,07	7 9	4 51
33	2	Dom.	0 14 3,04	21 4 7,96	20 50 2,62	7 8	4 52
34	3	Lun.	0 14 9,64	21 8 11,14	20 53 59,18	7 6	4 54
35	4	Mart.	0 14 15,42	21 12 13,49	20 57 55,73	7 5	4 55
36	5	Merc.	0 14 20,38	21 16 15,03	21 1 52,29	7 3	4 57
37	6	Giov.	0 14 24,55	21 20 15,76	21 5 48,84	7 2	4 58
38	7	Ven.	0 14 27,92	21 24 15,69	21 9 45,40	7 1	4 59
39	8	Sab.	0 14 30,48	21 28 14,83	21 13 41,95	7 0	5 0
40	9	Dom.	0 14 32,24	21 32 13,14	21 17 38,51	6 58	5 2
41	10	Lun.	0 14 33,20	21 36 10,65	21 21 35,06	6 57	5 3
42	11	Mart.	0 14 33,36	21 40 7,36	21 25 31,61	6 55	5 5
43	12	Merc.	0 14 32,74	21 44 3,29	21 29 28,17	6 54	5 6
44	13	Giov.	0 14 31,34	21 47 58,45	21 33 24,72	6 53	5 7
45	14	Ven.	0 14 29,18	21 51 52,83	21 37 21,27	6 51	5 9
46	15	Sab.	0 14 26,26	21 55 46,46	21 41 17,83	6 49	5 11
47	16	Dom.	0 14 22,60	21 59 39,34	21 45 14,38	6 48	5 12
48	17	Lun.	0 14 18,21	22 3 31,49	21 49 10,93	6 46	5 14
49	18	Mart.	0 14 13,11	22 7 22,93	21 53 7,49	6 45	5 15
50	19	Merc.	0 14 7,31	22 11 13,67	21 57 4,05	6 43	5 17
51	20	Giov.	0 14 0,83	22 15 3,71	22 1 0,60	6 42	5 18
52	21	Ven.	0 13 53,68	22 18 53,11	22 4 57,15	6 40	5 20
53	22	Sab.	0 13 45,89	22 22 41,85	22 8 53,70	6 38	5 22
54	23	Dom.	0 13 37,47	22 26 29,96	22 12 50,26	6 37	5 23
55	24	Lun.	0 13 28,44	22 30 17,46	22 16 46,81	6 35	5 25
56	25	Mart.	0 13 18,84	22 34 4,39	22 20 43,36	6 34	5 26
57	26	Merc.	0 13 8,69	22 37 50,76	22 24 39,91	6 32	5 28
58	27	Giov.	0 12 57,98	22 41 36,57	22 28 36,46	6 31	5 29
59	28	Ven.	0 12 46,73	22 45 21,85	22 32 33,02	6 29	5 31

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	10 12 32 18,7	17 3 13,7	0,71	0,17A	9,9937601
2	10 13 33 10,1	16 45 56,4	0,73	0,04	9,9938314
3	10 14 34 0,7	16 28 21,5	0,74	0,08B	9,9939043
4	10 15 34 50,2	16 10 29,4	0,75	0,19	9,9939785
5	10 16 35 38,6	15 52 20,7	0,76	0,29	9,9940539
6	10 17 36 25,8	15 33 55,6	0,77	0,36	9,9941306
7	10 18 37 11,8	15 15 14,6	0,78	0,39	9,9942085
8	10 19 37 56,5	14 56 18,1	0,79	0,39	9,9942875
9	10 20 38 39,6	14 37 6,6	0,80	0,37	9,9943676
10	10 21 39 21,3	14 17 40,5	0,81	0,32	9,9944489
11	10 22 40 1,3	13 58 0,4	0,82	0,24	9,9945314
12	10 23 40 39,7	13 38 6,4	0,83	0,13	9,9946152
13	10 24 41 16,4	13 17 59,2	0,84	0,02	9,9947003
14	10 25 41 51,2	12 57 39,1	0,85	0,11A	9,9947869
15	10 26 42 24,3	12 37 6,6	0,86	0,24	9,9948750
16	10 27 42 55,6	12 16 22,1	0,87	0,37	9,9949648
17	10 28 43 25,0	11 55 25,9	0,87	0,50	9,9950564
18	10 29 43 52,6	11 34 18,6	0,88	0,60	9,9951498
19	11 0 44 18,4	11 13 0,4	0,89	0,68	9,9952450
20	11 1 44 42,5	10 51 31,9	0,89	0,74	9,9953422
21	11 2 45 4,7	10 29 53,3	0,90	0,77	9,9954414
22	11 3 45 25,3	10 8 5,1	0,90	0,76	9,9955426
23	11 4 45 44,3	9 46 7,6	0,91	0,71	9,9956456
24	11 5 46 1,7	9 24 1,2	0,92	0,65	9,9957505
25	11 6 46 17,4	9 1 46,4	0,92	0,56	9,9958571
26	11 7 46 31,6	8 39 23,5	0,93	0,45	9,9959653
27	11 8 46 44,3	8 16 52,8	0,93	0,35	9,9960751
28	11 9 46 55,5	7 54 14,8	0,94	0,22A	9,9961862

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Sab.	8 0 40 3	8 7 47 37	0 7 49A	0 30 3B	19 56
2	Dom.	8 14 58 43	8 22 13 4	1 7 44B	1 44 34	20 57
3	Lun.	8 29 30 14	9 6 49 42	2 19 54	2 53 4	21 57
4	Mart.	9 14 10 44	9 21 32 31	3 23 26	3 50 25	22 56
5	Merc.	9 28 54 10	10 6 14 40	4 13 32	4 32 21	23 53
6	Giov.	10 13 33 2	10 20 48 18	4 46 34	4 56 3	* *
7	Ven.	10 27 59 32	11 5 5 56	5 0 43	5 0 38	0 46
8	Sab.	11 12 6 50	11 19 1 42	4 55 59	4 47 1	1 36
9	Dom.	11 25 50 12	0 2 32 8	4 34 3	4 17 29	2 25
10	Lun.	0 9 7 31	0 15 36 30	3 57 42	3 35 7	3 12
11	Mart.	0 21 59 21	0 28 16 28	3 10 9	2 43 12	3 58
12	Merc.	1 4 28 22	1 10 35 37	2 14 39	1 44 52	4 45
13	Giov.	1 16 38 50	1 22 38 41	1 14 13	0 43 0	5 32
14	Ven.	1 28 35 53	2 4 31 9	0 11 33	0 19 51A	6 20
15	Sab.	2 10 25 11	2 16 18 41	0 50 56A	1 21 24	7 8
16	Dom.	2 22 12 19	2 28 6 45	1 50 59	2 19 24	7 57
17	Lun.	3 4 2 34	3 10 0 18	2 46 24	3 11 43	8 45
18	Mart.	3 16 0 28	3 22 3 28	3 35 2	3 56 5	9 33
19	Merc.	3 28 9 39	4 4 19 18	4 14 35	4 30 16	10 20
20	Giov.	4 10 32 36	4 16 49 42	4 42 54	4 52 12	11 7
21	Ven.	4 23 10 37	4 29 35 21	4 57 59	5 0 4	11 53
22	Sab.	5 6 3 48	5 12 35 49	4 58 19	4 52 39	12 39
23	Dom.	5 19 11 15	5 25 49 50	4 43 1	4 29 28	13 26
24	Lun.	6 2 31 22	6 9 15 35	4 12 6	3 51 5	14 14
25	Mart.	6 16 2 15	6 22 51 9	3 26 39	2 59 6	15 4
26	Merc.	6 29 42 7	7 6 34 59	2 28 48	1 56 10	15 56
27	Giov.	7 13 29 40	7 20 26 4	1 21 39	0 45 44	16 51
28	Ven.	7 27 24 8	8 4 23 50	0 8 58	0 28 5B	17 49

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	16 45	21 24A	59 24	59 38	32 26	32 33	15 23	* *
2	17 50	21 15	59 50	60 1	32 40	32 46	16 24	0 28
3	18 55	19 32	60 8	60 13	32 50	32 52	17 17	1 31
4	19 58	16 25	60 15	60 13	32 54	32 52	18 2	2 42
5	20 58	12 13	60 8	59 59	32 50	32 45	18 39	3 57
6	* *	* *	59 46	59 31	32 38	32 30	19 12	5 15
7	21 55	7 19	59 12	58 51	32 19	32 8	19 41	6 29
8	22 50	2 7	58 28	58 4	31 55	31 42	20 10	7 40
9	23 43	3 2B	57 39	57 13	31 28	31 14	20 37	8 51
10	0 34	7 51	56 48	56 24	31 1	30 48	21 3	9 58
11	1 25	12 9	56 1	55 39	30 35	30 23	21 32	11 3
12	2 15	15 46	55 20	55 2	30 13	30 3	22 3	12 7
13	3 7	18 33	54 47	54 34	29 55	29 47	22 42	13 8
14	3 58	20 26	54 24	54 17	29 42	29 38	23 24	14 8
15	4 51	21 21	54 12	54 10	29 35	29 34	* *	14 54
16	5 43	21 14	54 10	54 12	29 34	29 35	0 12	15 40
17	6 36	20 7	54 17	54 23	29 38	29 41	1 4	16 22
18	7 28	18 2	54 32	54 42	29 46	29 52	2 1	16 59
19	8 19	15 3	54 54	55 8	29 58	30 5	3 0	17 30
20	9 9	11 18	55 22	55 38	30 14	30 23	4 4	18 0
21	10 0	6 58	55 54	56 10	30 31	30 40	5 10	18 26
22	10 50	2 12	56 26	56 41	30 48	30 57	6 16	18 52
23	11 41	2 45A	56 57	57 12	31 5	31 14	7 23	19 16
24	12 33	7 39	57 26	57 40	31 21	31 29	8 32	19 47
25	13 27	12 12	57 52	58 4	31 36	31 42	9 43	20 17
26	14 24	16 7	58 16	58 27	31 48	31 54	10 54	20 52
27	15 23	19 6	58 37	58 46	32 0	32 5	11 4	21 32
28	16 25	20 52	58 54	59 2	32 9	32 14	13 13	22 23

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$7^h\ 6'$	*Occidente*
1	3.	○	1. 2 4.
2	3	○	1, 4δ2
3	o3 2 1δ4	○	
4	4. 2	○	1 3
5	4. 1.	○	2 3
6	4 2.	○	1.3.
7	4. 2. 3δ1	○	
8	4 3.	○	1. 2
9	4 3 1	○	2.
10	4δ2 3δ1	○	
11	o4 2	○	1 3
12	1.	○	4δ2 3
13	2.	○	1. 3. 4
14	2. 1,3.	○	4
15	3.	○	2, 1. 4
16	3 1	○	2. 4.
17	2 3	○	1. 4.
18	2	○	1 3, 4.
19	1.	○	4. 2. 3
20	4.	○	2. 1 3.
21	●3 4. 2. 1.	○	
22	4. 3.	○	2 1.
23	4. 3. 1	○	2
24	4 2δ3	○	1.
25	o1 4 2	○	3
26	4 1.	○	2 3
27	4	○	2. 1 3.
28	2. 1.	○	3δ4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
7	Luna nuova	$19^h 13'$
15	Primo quarto	14 29
23	Luna piena	8 55
30	Ultimo quarto	5 37

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	58 d Ofiuco 5.ª	21 22
2	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	9 18
3	43 d ♐ 5.ª	10 49
4	9 β ♑ 3. 4.ª	13 14
5	13 ν ♒ 5.ª	10 2
8	18 λ ♓ 5.ª	7 17
12	42 π ♈ 5.ª	1 26
14	102 ι ♉ 4. 5.ª	16 38
15	123 ζ ♉ 3. 4.ª	8 53
15	54 χ^1 Orione 5.ª	16 51
15	44 χ^3 Orione 5.ª	21 23
16	18 ν □ 5.ª	9 18
19	65 α^2 ♋ 5.ª	10 22
22	87 E ♌ 4. 5.ª	13 43
24	68 i ♍ 5.ª	18 43
27	43 $\varkappa$ ♎ 5.ª	2 46
27	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	12 46
27	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	13 2
27	9 ω Ofiuco 5.ª	22 47
29	58 d Ofiuco 5.ª	2 43
29	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	14 39
30	43 d ♐ 5.ª	16 22
31	9 β ♑ 3. 4.ª	19 12

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
1	20 4 40 em.
3	14 33 26
5	9 2 18
	II. Satellite.
3	3 37 50 em.
6	16 56 54

Dopo il giorno 6 non sono visibili gli eclissi dei satelliti di Giove per la vicinanza del Sole.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
60	1	Sab.	0 12 35,00	22 49 6,65	22 36 29,58	6 26	5 34
61	2	Dom.	0 12 22,77	22 52 50,94	22 40 26,13	6 25	5 35
62	3	Lun.	0 12 10,06	22 56 34,74	22 44 22,68	6 24	5 36
63	4	Mart.	0 11 56,90	23 0 18,09	22 48 19,23	6 22	5 38
64	5	Merc.	0 11 43,31	23 4 1,01	22 52 15,78	6 21	5 39
65	6	Giov.	0 11 29,29	23 7 43,50	22 56 12,33	6 19	5 41
66	7	Ven.	0 11 14,87	23 11 25,60	23 0 8,89	6 18	5 42
67	8	Sab.	0 11 0,05	23 15 7,29	23 4 5,44	6 16	5 44
68	9	Dom.	0 10 44,85	23 18 48,61	23 8 1,99	6 15	5 45
69	10	Lun.	0 10 29,31	23 22 29,58	23 11 58,55	6 13	5 47
70	11	Mart.	0 10 13,43	23 26 10,21	23 15 55,10	6 12	5 48
71	12	Merc.	0 9 57,23	23 29 50,51	23 19 51,65	6 10	5 50
72	13	Giov.	0 9 40,72	23 33 30,50	23 23 48,20	6 9	5 51
73	14	Ven.	0 9 23,92	23 37 10,21	23 27 44,75	6 7	5 53
74	15	Sab.	0 9 6,85	23 40 49,64	23 31 41,30	6 5	5 55
75	16	Dom.	0 8 49,52	23 44 28,83	23 35 37,86	6 4	5 56
76	17	Lun.	0 8 31,97	23 48 7,78	23 39 34,41	6 2	5 58
77	18	Mart.	0 8 14,22	23 51 46,54	23 43 30,96	6 1	5 59
78	19	Merc.	0 7 56,29	23 55 25,11	23 47 27,51	5 59	6 1
79	20	Giov.	0 7 38,20	23 59 3,52	23 51 24,06	5 58	6 2
80	21	Ven.	0 7 19,95	0 2 41,78	23 55 20,62	5 56	6 4
81	22	Sab.	0 7 1,57	0 6 19,89	23 59 17,17	5 54	6 6
82	23	Dom.	0 6 43,10	0 9 57,92	0 3 13,72	5 53	6 7
83	24	Lun.	0 6 24,56	0 13 35,88	0 7 10,27	5 51	6 9
84	25	Mart.	0 6 5,98	0 17 13,81	0 11 6,82	5 50	6 10
85	26	Merc.	0 5 47,38	0 20 51,71	0 15 3,38	5 48	6 12
86	27	Giov.	0 5 28,79	0 24 29,63	0 18 59,93	5 46	6 14
87	28	Ven.	0 5 10,23	0 28 7,56	0 22 56,48	5 45	6 15
88	29	Sab.	0 4 51,71	0 31 45,54	0 26 53,04	5 43	6 17
89	30	Dom.	0 4 33,26	0 35 23,61	0 30 49,59	5 41	6 19
90	31	Lun.	0 4 14,91	0 39 1,74	0 34 46,14	5 40	6 20

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	11 10 47 5,2	7 31 29,9	+ 0,94	0,07A	9,9962985
2	11 11 47 13,3	7 8 38,4	0,94	0,05B	9,9964118
3	11 12 47 19,9	6 45 40,8	0,95	0,17	9,9965260
4	11 13 47 24,8	6 22 37,4	0,95	0,27	9,9966409
5	11 14 47 28,2	5 59 28,7	0,95	0,35	9,9967564
6	11 15 47 29,8	5 36 15,0	0,96	0,39	9,9968723
7	11 16 47 29,6	5 12 56,7	0,96	0,40	9,9969885
8	11 17 47 27,5	4 49 34,4	0,96	0,39	9,9971049
9	11 18 47 23,5	4 26 8,4	0,97	0,34	9,9972216
10	11 19 47 17,5	4 2 38,9	0,97	0,27	9,9973385
11	11 20 47 9,5	3 39 6,6	0,97	0,16	9,9974555
12	11 21 46 59,4	3 15 31,7	0,97	0,05B	9,9975728
13	11 22 46 47,0	2 51 54,7	0,97	0,07A	9,9976904
14	11 23 46 32,3	2 28 16,0	0,98	0,20	9,9978083
15	11 24 46 15,4	2 4 35,9	0,98	0,33	9,9979266
16	11 25 45 56,2	1 40 54,9	0,98	0,45	9,9980454
17	11 26 45 34,7	1 17 13,1	0,98	0,57	9,9981648
18	11 27 45 10,9	0 53 31,1	0,98	0,65	9,9982848
19	11 28 44 44,9	0 29 49,1	0,98	0,71	9,9984057
20	11 29 44 16,7	0 6 7,6	0,98	0,73	9,9985273
21	0 0 43 46,1	0 17 33,0	0,98	0,73	9,9986498
22	0 1 43 13,5	0 41 12,4	0,98	0,71	9,9987732
23	0 2 42 38,7	1 4 50,4 Boreale	0,98	0,65	9,9988975
24	0 3 42 1,9	1 28 26,7	0,98	0,56	9,9990227
25	0 4 41 23,1	1 52 0,7	0,98	0,46	9,9991487
26	0 5 40 42,4	2 15 32,2	0,98	0,34	9,9992754
27	0 6 39 59,8	2 39 1,1	0,98	0,21	9,9994026
28	0 7 39 15,4	3 2 26,9	0,97	0,08	9,9995304
29	0 8 38 29,1	3 25 49,2	0,97	0,05B	9,9996588
30	0 9 37 41,2	3 49 7,7	0,97	0,18	9,9997867
31	0 10 36 51,6	4 12 22,2	0,97	0,29	9,9999150

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzanotte media.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Sab.	8 11 25 9	8 18 28 1	1 4 51 B	1 40 46 B	18 48
2	Dom.	8 25 32 21	9 2 38 1	2 15 14	2 47 43	19 47
3	Lun.	9 9 44 50	9 16 52 31	3 17 39	3 44 33	20 45
4	Mart.	9 24 0 41	10 1 8 55	4 7 58	4 27 29	21 41
5	Merc.	10 8 16 40	10 15 23 23	4 42 47	4 53 40	22 34
6	Giov.	10 22 28 25	10 29 31 7	4 59 58	5 1 39	23 24
7	Ven.	11 6 30 50	11 13 26 58	4 58 47	4 51 30	* *
8	Sab.	11 20 18 58	11 27 6 23	4 40 3	4 24 43	0 14
9	Dom.	0 3 48 50	0 10 26 4	4 5 51	3 43 52	1 1
10	Lun.	0 16 57 59	0 23 24 34	3 19 10	2 52 12	1 49
11	Mart.	0 29 45 56	1 6 2 19	2 23 24	1 53 10	2 37
12	Merc.	1 12 14 2	1 18 21 31	1 21 55	0 50 2	3 24
13	Giov.	1 24 25 15	2 0 25 48	0 17 52	0 14 14 A	4 12
14	Ven.	2 6 23 46	2 12 19 49	0 45 59 A	1 17 5	5 51
15	Sab.	2 18 14 36	2 24 8 48	1 47 15	2 16 13	5 49
16	Dom.	3 0 3 8	3 5 58 17	2 43 44	3 9 33	6 37
17	Lun.	3 11 54 53	3 17 53 35	3 33 25	3 55 5	7 25
18	Mart.	3 23 54 59	3 29 59 37	4 14 17	4 30 47	8 12
19	Merc.	4 6 7 58	4 12 20 27	4 44 20	4 54 42	8 59
20	Giov.	4 18 37 24	4 24 59 5	5 1 38	5 4 57	9 45
21	Ven.	5 1 25 39	5 7 57 8	5 4 27	5 0 0	10 31
22	Sab.	5 14 33 31	5 21 14 38	4 51 30	4 38 54	11 18
23	Dom.	5 28 9 15	6 4 50 3	4 22 16	4 1 42	12 6
24	Lun.	6 11 43 38	6 18 40 31	3 37 24	3 9 40	12 57
25	Mart.	6 25 40 13	7 2 42 14	2 38 51	2 5 24	13 50
26	Merc.	7 9 46 3	7 16 51 12	1 29 50	0 52 44	14 46
27	Giov.	7 23 57 14	8 1 3 45	0 14 42	0 23 39 B	15 44
28	Ven.	8 8 19 25	8 15 16 56	1 1 41 B	1 38 45	16 43
29	Sab.	8 22 23 2	8 29 28 30	2 14 16	2 47 40	17 42
30	Dom.	9 6 33 9	9 13 36 48	3 18 26	3 46 5	18 40
31	Lun.	9 20 39 18	9 27 40 29	4 10 14	4 30 32	19 35

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	17 28	21 14A	59 8	59 14	32 17	32 20	14 15	23 22
2	18 31	20 8	59 18	59 21	32 22	32 24	15 9	* *
3	19 33	17 40	59 22	59 22	32 25	32 25	15 57	0 28
4	20 33	14 2	59 20	59 16	32 24	32 22	16 36	1 39
5	21 30	9 35	59 10	59 2	32 18	32 14	17 11	2 54
6	22 24	4 37	58 52	58 40	32 8	32 2	17 40	4 7
7	* *	* *	58 25	58 9	31 54	31 45	18 8	5 18
8	23 18	0 30B	57 52	57 33	31 36	31 25	18 35	6 30
9	0 10	5 28	57 13	56 52	31 14	31 3	19 3	7 37
10	1 1	10 3	56 32	56 11	30 52	30 40	19 31	8 45
11	1 53	14 1	55 51	55 33	30 29	30 20	20 2	9 51
12	2 45	17 12	55 15	55 0	30 10	30 2	20 38	10 55
13	3 37	19 30	54 46	54 35	29 54	29 48	21 20	11 51
14	4 29	20 50	54 26	54 19	29 43	29 39	22 6	12 44
15	5 22	21 8	54 15	54 13	29 37	29 36	22 55	13 32
16	6 14	20 27	54 14	54 17	29 37	29 38	23 50	14 17
17	7 6	18 47	54 23	54 31	29 41	29 46	* *	14 54
18	7 57	16 13	54 42	54 55	29 52	29 59	0 49	15 27
19	8 47	12 51	55 10	55 27	30 7	30 16	1 50	15 58
20	9 38	8 49	55 45	56 4	30 26	30 37	2 55	16 26
21	10 28	4 14	56 25	56 45	30 48	30 59	4 0	16 52
22	11 19	0 39A	57 6	57 26	31 10	31 21	5 6	17 19
23	12 12	5 38	57 46	58 4	31 32	31 42	6 14	17 47
24	13 6	10 25	58 20	58 35	31 51	31 59	7 26	18 18
25	14 3	14 40	58 48	58 59	32 6	32 12	8 39	18 52
26	15 3	18 3	59 8	59 15	32 17	33 21	9 53	19 33
27	16 5	20 15	59 20	59 22	32 23	32 25	11 3	20 22
28	17 9	21 3	59 23	59 23	32 25	32 25	12 8	21 18
29	18 12	20 23	59 20	59 17	32 23	32 22	13 5	22 22
30	19 14	18 21	59 11	59 5	32 18	32 15	13 55	23 30
31	20 13	15 8	58 58	58 50	32 12	32 7	14 35	* *

I SATELLITI DI GIOVE

NON SONO VISIBILI

IN QUESTO MESE.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
6	Luna nuova . . . . $8^h 17'$	
14	Ultimo quarto 10 0	
21	Luna piena 19 49	
28	Primo quarto 11 56	
	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	13 ν ♒ 5.ª 16 30	
4	18 λ ♓ 5.ª 15 17	
7	☿ 17 34	
8	42 π ♈ 5.ª 9 56	In questo mese non si possono osservare gli eclissi del I.°, II.° e III.° satellite di Giove per essergli troppo vicino il Sole.
11	123 ζ ♉ 3. 4.ª 16 54	
12	54 χ^1 Orione 5.ª 0 51	
12	44 χ^2 Orione 5.ª 5 23	
12	18 ν ♊ 5.ª 17 19	
15	65 α^2 ♋ 5.ª 19 2	
18	87 E ♌ 4. 5.ª 23 17	
21	68 i ♍ 5.ª 4 1	
23	43 κ ♎ 5.ª 10 47	
23	45 λ ♎ 5.ª 15 15	
23	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª 20 28	
23	10 ω^2 ♏ 5.ª 20 47	
24	9 ω Ofiuco 5.ª 6 13	
25	40 ρ Ofiuco 5.ª 0 39	
25	58 d Ofiuco 5.ª 9 20	
25	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª 21 0	
26	45 d ♐ 5.ª 22 10	
28	9 β ♑ 3. 4.ª 0 40	
28	13 ν ♒ 5.ª 21 50	

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
91	1	Mart.	0 3 56,68	0 42 40,01	0 38 42,69	5 39	6 21
92	2	Merc.	0 3 38,57	0 46 18,39	0 42 39,24	5 37	6 23
93	3	Giov.	0 3 20,59	0 49 56,91	0 46 35,79	5 36	6 24
94	4	Ven.	0 3 2,77	0 53 35,61	0 50 32,34	5 34	6 26
95	5	Sab.	0 2 45,11	0 57 14,46	0 54 28,90	5 33	6 27
96	6	Dom.	0 2 27,66	1 0 53,52	0 58 25,45	5 31	6 29
97	7	Lun.	0 2 10,43	1 4 32,80	1 2 22,00	5 30	6 30
98	8	Mart.	0 1 53,42	1 8 12,27	1 6 18,55	5 28	6 32
99	9	Merc.	0 1 36,64	1 11 52,01	1 10 15,10	5 26	6 34
100	10	Giov.	0 1 20,10	1 15 31,97	1 14 11,66	5 24	6 36
101	11	Ven.	0 1 3,83	1 19 12,21	1 18 8,21	5 23	6 37
102	12	Sab.	0 0 47,84	1 22 52,73	1 22 4,76	5 21	6 39
103	13	Dom.	0 0 32,13	1 26 33,54	1 26 1,32	5 19	6 41
104	14	Lun.	0 0 16,73	1 30 14,65	1 29 57,87	5 18	6 42
105	15	Mart.	0 0 1,65	1 33 56,08	1 33 54,42	5 16	6 44
106	16	Merc.	23 59 46,91	1 37 37,83	1 37 50,97	5 14	6 46
107	17	Giov.	23 59 32,50	1 41 19,94	1 41 47,52	5 13	6 47
108	18	Ven.	23 59 18,44	1 45 2,39	1 45 44,08	5 11	6 49
109	19	Sab.	23 59 4,76	1 48 45,25	1 49 40,64	5 10	6 50
110	20	Dom.	23 58 51,49	1 52 28,51	1 53 37,20	5 8	6 52
111	21	Lun.	23 58 38,66	1 56 12,21	1 57 33,75	5 7	6 53
112	22	Mart.	23 58 26,29	1 59 56,34	2 1 30,30	5 5	6 54
113	23	Merc.	23 58 14,36	2 3 40,93	2 5 26,85	5 3	6 55
114	24	Giov.	23 58 2,89	2 7 25,98	2 9 23,41	5 2	6 58
115	25	Ven.	23 57 51,90	2 11 11,51	2 13 19,96	5 1	6 59
116	26	Sab.	23 57 41,42	2 14 57,56	2 17 16,52	5 0	7 0
117	27	Dom.	23 57 31,45	2 18 44,11	2 21 13,07	4 58	7 2
118	28	Lun.	23 57 22,00	2 22 31,19	2 25 9,62	4 57	7 3
119	29	Mart.	23 57 13,08	2 26 18,81	2 29 6,17	4 56	7 4
120	30	Merc.	23 57 4,71	2 30 6,96	2 33 2,73	4 54	7 6

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	0 11 36 0,1	4 35 32,1	+ 0,96	0,36B	0,0000431
2	0 12 35 6,8	4 58 37,1	0,96	0,41	0,0001709
3	0 13 34 11,8	5 21 37,0	0,96	0,44	0,0002983
4	0 14 33 14,9	5 44 31,3	0,95	0,43	0,0004252
5	0 15 32 16,1	6 7 19,7	0,95	0,38	0,0005514
6	0 16 31 15,5	6 30 1,8	0,95	0,32	0,0006767
7	0 17 30 12,9	6 52 37,3	0,94	0,23	0,0008012
8	0 18 29 8,2	7 15 5,7	0,94	0,12	0,0009247
9	0 19 28 1,4	7 37 26,8	0,93	0,01	0,0010472
10	0 20 26 52,5	7 59 40,1	0,92	0,11A	0,0011689
11	0 21 25 41,3	8 21 45,4	0,92	0,26	0,0012897
12	0 22 24 27,9	8 43 42,2	0,91	0,58	0,0014097
13	0 23 23 12,2	9 5 30,2	0,91	0,50	0,0015289
14	0 24 21 54,3	9 27 9,0	0,89	0,58	0,0016476
15	0 25 20 34,1	9 48 38,4	0,89	0,63	0,0017658
16	0 26 19 11,8	10 9 57,9	0,88	0,68	0,0018835
17	0 27 17 47,1	10 31 7,2	0,88	0,69	0,0020008
18	0 28 16 20,2	10 52 6,1	0,87	0,66	0,0021179
19	0 29 14 51,3	11 12 54,2	0,87	0,60	0,0022346
20	1 0 13 20,3	11 33 31,2	0,86	0,52	0,0023511
21	1 1 11 47,4	11 53 56,9	0,86	0,40	0,0024674
22	1 2 10 12,6	12 14 10,9	0,85	0,29	0,0025836
23	1 3 8 35,9	12 34 13,0	0,84	0,16	0,0026997
24	1 4 6 57,4	12 54 2,7	0,83	0,01	0,0028155
25	1 5 5 17,3	13 13 39,8	0,82	0,02B	0,0029309
26	1 6 3 35,6	13 33 3,9	0,81	0,23	0,0030459
27	1 7 1 52,3	13 52 14,8	0,80	0,34	0,0031603
28	1 8 0 7,5	14 11 12,2	0,79	0,43	0,0032740
29	1 8 58 21,2	14 29 55,8	0,78	0,47	0,0033867
30	1 9 56 33,4	14 48 25,1	0,77	0,51	0,0034982

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	10 4 40 8	10 11 38 5	4 46 42B	4 58 54B	20 28
2	Merc.	10 18 34 6	10 25 27 58	5 6 0	5 8 56	21 18
3	Giov.	11 2 19 25	11 9 8 13	5 7 25	5 1 33	22 6
4	Ven.	11 15 54 4	11 22 36 45	4 51 29	4 37 28	22 54
5	Sab.	11 29 16 0	0 5 51 36	4 19 46	3 58 44	23 41
6	Dom.	0 12 23 23	0 18 51 13	3 34 44	3 8 10	* *
7	Lun.	0 25 15 2	1 1 34 51	2 39 28	2 9 5	0 28
8	Mart.	1 7 50 42	1 14 2 45	1 37 20	1 4 44	1 16
9	Merc.	1 20 11 12	1 26 16 21	0 31 39	0 1 32A	2 4
10	Giov.	2 2 18 31	2 8 18 8	0 34 28A	1 6 49	2 53
11	Ven.	2 14 15 39	2 20 11 35	1 38 16	2 8 52	3 42
12	Sab.	2 26 6 28	3 2 0 54	2 37 20	3 4 26	4 30
13	Dom.	3 7 55 29	3 13 50 50	3 29 35	3 52 32	5 18
14	Lun.	3 19 47 34	3 25 46 20	4 13 5	4 31 0	6 5
15	Mart.	4 1 47 45	4 7 52 24	4 46 3	4 58 3	6 51
16	Merc.	4 14 0 50	4 20 13 37	5 6 46	5 12 1	7 36
17	Giov.	4 26 30 11	5 2 55 58	5 13 37	5 11 22	8 22
18	Ven.	5 9 22 16	5 15 56 20	5 5 9	4 54 52	9 8
19	Sab.	5 22 36 16	5 29 22 5	4 40 28	4 21 57	9 55
20	Dom.	6 6 13 40	6 13 10 44	3 59 25	3 35 3	10 45
21	Lun.	6 20 12 56	6 27 19 45	3 3 8	2 30 2	11 38
22	Mart.	7 4 30 34	7 11 44 42	1 54 13	1 16 16	12 34
23	Merc.	7 19 1 24	7 26 19 53	0 36 49	0 3 25B	13 33
24	Giov.	8 3 39 22	8 10 59 4	0 45 43B	1 23 19	14 34
25	Ven.	8 18 18 15	8 25 36 15	2 1 32	2 37 39	15 35
26	Sab.	9 2 52 28	9 10 6 21	3 11 5	3 41 16	16 34
27	Dom.	9 17 17 30	9 24 25 32	4 7 46	4 30 13	17 31
28	Lun.	10 1 30 11	10 8 31 13	4 48 21	5 2 1	18 25
29	Mart.	10 15 28 31	10 22 21 59	5 11 7	5 15 37	19 16
30	Merc.	10 29 11 36	11 5 57 21	5 15 36	5 11 12	20 4

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	21 10	11 5A	58 41	58 31	32 2	31 57	15 10	0 43
2	22 4	6 24	58 20	58 9	31 51	31 45	15 39	1 54
3	22 57	1 28	57 57	57 44	31 38	31 31	16 6	3 7
4	23 48	3 28B	57 30	57 16	31 23	31 16	16 34	4 16
5	0 39	8 8	57 1	56 46	31 8	30 59	17 2	5 24
6	* *	* *	56 30	56 14	30 51	30 42	17 31	6 30
7	1 31	12 19	55 58	55 42	30 33	30 24	18 2	7 35
8	2 22	15 50	55 26	55 12	30 16	30 8	18 37	8 39
9	3 15	18 30	54 58	54 45	30 1	29 54	19 15	9 38
10	4 8	20 14	54 34	54 25	29 47	29 42	20 0	10 35
11	5 0	20 57	54 18	54 13	29 38	29 36	20 57	11 25
12	5 53	20 39	54 10	54 10	29 34	29 34	21 40	12 10
13	6 45	19 23	54 11	54 16	29 35	29 37	22 37	12 51
14	7 36	17 13	54 22	54 32	29 41	29 46	23 36	13 28
15	8 26	14 14	54 44	54 58	29 53	30 1	* *	13 58
16	9 15	10 32	55 15	55 33	30 10	30 20	0 37	14 25
17	10 5	6 16	55 54	56 17	30 31	30 44	1 43	14 51
18	10 55	1 35	56 41	57 6	30 57	31 11	2 48	15 18
19	11 46	3 20A	57 31	57 56	31 24	31 37	3 54	15 46
20	12 40	8 14	58 20	58 43	31 51	32 3	5 4	16 16
21	13 37	12 48	59 4	59 23	32 15	32 25	6 18	16 50
22	14 37	16 39	59 40	59 53	32 34	32 42	7 34	17 28
23	15 40	19 26	60 3	60 10	32 47	32 51	8 48	18 13
24	16 45	20 48	60 13	60 13	32 52	32 52	9 57	19 10
25	17 51	20 39	60 10	60 4	32 51	32 48	10 59	20 13
26	18 54	19 0	59 55	59 44	32 43	32 37	11 52	21 21
27	19 55	16 5	59 31	59 17	32 30	32 22	12 35	22 33
28	20 53	12 13	59 2	58 45	32 14	32 5	13 11	23 46
29	21 48	7 44	58 28	58 11	31 55	31 46	13 43	* *
30	22 40	2 56	57 53	57 36	31 36	31 27	14 12	0 58

I SATELLITI DI GIOVE

NON SONO VISIBILI

IN QUESTO MESE.

Giorni	Fasi della Luna in tempo medio	h	′
5	Luna nuova	22	34
14	Primo quarto	2	45
21	Luna piena	4	35
27	Ultimo quarto	19	2

Giorni	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio		
1	18 λ ♓ 5.ª	21	23
5	42 π ♈ 5.ª	17	15
6	♀	5	37
9	123 ζ ♉ 3. 4.ª	0	18
9	54 χ^1 Orione 5.ª	8	13
9	44 χ^3 Orione 5.ª	12	45
10	18 ν ♊ 5.ª	0	41
13	65 α^2 ♋ 5.ª	2	58
16	87 E ♌ 4. 5.ª	8	44
18	68 i ♍ 5.ª	14	17
20	43 κ ♎ 5.ª	20	50
21	45 λ ♎ 5.ª	1	14
21	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	6	22
21	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	6	38
21	9 ω Ofiuco 5.ª	15	55
22	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	9	55
22	58 d Ofiuco 5.ª	18	18
23	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	5	36
24	43 d ♐ 5.ª	5	56
25	9 β ♑ 3. 4.ª	7	37
26	13 μ ♒ 5.ª	4	14
29	18 λ ♓ 5.ª	2	50

Giorni	ECLISSI de'Satell. di Giove *Tempo medio.*			
	I. Satellite.			
	h	′	″	
9	18	34	3	imm.
11	13	2	36	
13	7	31	8	
15	1	59	43	
16	20	28	15	
18	14	56	46	
20	9	25	17	
22	3	53	50	
23	22	22	21	
25	16	50	51	
27	11	19	20	
29	5	47	53	
31	0	16	21	
	II. Satellite.			
9	14	4	50	imm.
13	3	23	12	
16	16	42	34	
20	6	0	55	
23	19	20	18	
27	8	38	38	
30	21	58	5	
	III. Satellite.			
11	0	51	43	imm.
11	3	17	32	em.
18	4	53	1	imm.
18	7	17	51	em.
25	8	54	36	imm.
25	11	18	27	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' ''	h ' ''	h ' ''	h '	h '
121	1	Giov.	23 56 56,89	2 33 55,67	2 36 59,28	4 53	7 7
122	2	Ven.	23 56 49,62	2 37 44,94	2 40 55,84	4 52	7 8
123	3	Sab.	23 56 42,91	2 41 34,76	2 44 52,39	4 50	7 10
124	4	Dom.	23 56 36,76	2 45 25,16	2 48 48,95	4 49	7 11
125	5	Lun.	23 56 31,18	2 49 16,11	2 52 45,50	4 48	7 12
126	6	Mart.	23 56 26,16	2 53 7,64	2 56 42,06	4 46	7 14
127	7	Merc.	23 56 21,71	2 56 59,74	3 0 38,61	4 45	7 15
128	8	Giov.	23 56 17,84	3 0 52,41	3 4 35,17	4 44	7 16
129	9	Ven.	23 56 14,53	3 4 45,64	3 8 31,73	4 43	7 17
130	10	Sab.	23 56 11,76	3 8 39,43	3 12 28,29	4 41	7 19
131	11	Dom.	23 56 9,56	3 12 33,78	3 16 24,85	4 40	7 20
132	12	Lun.	23 56 7,92	3 16 28,69	3 20 21,40	4 39	7 21
133	13	Mart.	23 56 6,85	3 20 24,17	3 24 17,96	4 38	7 22
134	14	Merc.	23 56 6,33	3 24 20,20	3 28 14,51	4 37	7 23
135	15	Giov.	23 56 6,36	3 28 16,78	3 32 11,07	4 36	7 24
136	16	Ven.	23 56 6,94	3 32 13,93	3 36 7,62	4 34	7 26
137	17	Sab.	23 56 8,08	3 36 11,63	3 40 4,18	4 33	7 27
138	18	Dom.	23 56 9,76	3 40 9,87	3 44 0,73	4 32	7 28
139	19	Lun.	23 56 11,98	3 44 8,65	3 47 57,29	4 31	7 29
140	20	Mart.	23 56 14,74	3 48 7,96	3 51 53,84	4 30	7 30
141	21	Merc.	23 56 18,05	3 52 7,84	3 55 50,40	4 29	7 31
142	22	Giov.	23 56 21,90	3 56 8,26	3 59 46,95	4 28	7 32
143	23	Ven.	23 56 26,28	4 0 9,21	4 3 43,51	4 27	7 33
144	24	Sab.	23 56 31,19	4 4 10,69	4 7 40,07	4 26	7 34
145	25	Dom.	23 56 36,63	4 8 12,70	4 11 36,62	4 25	7 35
146	26	Lun.	23 56 42,57	4 12 15,21	4 15 33,18	4 24	7 36
147	27	Mart.	23 56 49,01	4 16 18,23	4 19 29,73	4 23	7 37
148	28	Merc.	23 56 55,95	4 20 21,74	4 23 26,29	4 22	7 38
149	29	Giov.	23 57 3,38	4 24 25,74	4 27 22,85	4 21	7 39
150	30	Ven.	23 57 11,27	4 28 30,23	4 31 19,41	4 20	7 40
151	31	Sab.	23 57 19,61	4 32 35,14	4 35 15,97	4 19	7 41

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	1 10 54 44,1	15 6 40,0	+ 0,76	0,53B	0,0036085
2	1 11 52 53,5	15 24 40,0	0,75	0,47	0,0037175
3	1 12 51 1,4	15 42 24,8	0,73	0,40	0,0038250
4	1 13 49 7,7	15 59 54,1	0,72	0,30	0,0039309
5	1 14 47 12,5	16 17 7,5	0,71	0,21	0,0040351
6	1 15 45 15,7	16 34 4,8	0,70	0,09	0,0041374
7	1 16 43 17,3	16 50 45,7	0,69	0,04A	0,0042380
8	1 17 41 17,3	17 7 9,7	0,67	0,18	0,0043367
9	1 18 39 15,6	17 23 16,6	0,66	0,31	0,0044334
10	1 19 37 12,1	17 39 6,1	0,65	0,42	0,0045283
11	1 20 35 6,9	17 54 37,8	0,64	0,51	0,0046214
12	1 21 32 59,9	18 9 51,5	0,62	0,58	0,0047129
13	1 22 30 51,1	18 24 46,8	0,61	0,62	0,0048029
14	1 23 28 40,6	18 39 23,6	0,59	0,63	0,0048913
15	1 24 26 28,4	18 53 41,4	0,59	0,59	0,0049783
16	1 25 24 14,5	19 7 40,0	0.58	0,54	0,0050641
17	1 26 21 59,0	19 21 19,3	0,56	0,47	0,0051488
18	1 27 19 41,8	19 34 39,0	0,55	0,36	0,0052323
19	1 28 17 23,1	19 47 38,7	0,54	0,24	0,0053147
20	1 29 15 2,9	20 0 18,2	0,53	0,12	0,0053960
21	2 0 12 41,3	20 12 37,1	0,52	0,02B	0,0054764
22	2 1 10 18,5	20 24 35,5	0,50	0,15	0,0055559
23	2 2 7 54,6	20 36 13,1	0,49	0,28	0,0056343
24	2 3 5 29,6	20 47 29,5	0,48	0,40	0,0057115
25	2 4 3 3,6	20 58 24,6	0,46	0,48	0,0057877
26	2 5 0 36,6	21 8 58,1	0,44	0,53	0,0058627
27	2 5 58 8,7	21 19 9,8	0,42	0,55	0,0059362
28	2 6 55 40,1	21 28 59,5	0,41	0,56	0,0060081
29	2 7 53 10,7	21 38 27,0	0,40	0,54	0,0060782
30	2 8 50 40,6	21 47 32,0	0,38	0,51	0,0061465
31	2 9 48 9,6	21 56 14,4	0,36	0,43	0,0062128

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' ''	s ° ' ''	° ' ''	° ' ''	h '
1	Giov.	11 12 39 16	11 19 17 25	5 2 35B	4 49 59B	20 51
2	Ven.	11 25 51 53	0 2 22 44	4 33 40	4 13 56	21 37
3	Sab.	0 8 50 4	0 15 13 58	3 51 8	3 25 36	22 23
4	Dom.	0 21 34 32	0 27 51 53	2 57 44	2 27 55	23 10
5	Lun.	1 4 6 7	1 10 17 22	1 56 34	1 24 4	23 58
6	Mart.	1 16 25 48	1 22 31 33	0 50 49	0 17 12	* *
7	Merc.	1 28 34 50	2 4 35 53	0 16 24A	0 49 37A	0 46
8	Giov.	2 10 34 57	2 16 32 21	1 22 7	1 53 34	1 35
9	Ven.	2 22 28 25	2 28 23 29	2 23 40	2 52 8	2 24
10	Sab.	3 4 17 58	3 10 12 18	3 18 43	3 43 10	3 12
11	Dom.	3 16 6 58	3 22 2 26	4 5 16	4 24 47	3 59
12	Lun.	3 27 59 13	4 3 57 52	4 41 32	4 55 19	4 45
13	Mart.	4 9 58 56	4 16 2 58	5 5 57	5 13 17	5 30
14	Merc.	4 22 10 31	4 28 22 9	5 17 8	5 17 23	6 14
15	Giov.	5 4 38 23	5 10 59 42	5 13 52	5 6 30	6 59
16	Ven.	5 17 26 35	5 23 59 23	4 55 11	4 39 53	7 44
17	Sab.	6 0 38 26	6 7 23 56	4 20 36	3 57 25	8 32
18	Dom.	6 14 15 59	6 21 14 32	3 30 29	3 0 0	9 23
19	Lun.	6 28 19 23	7 5 30 12	2 26 18	1 49 50	10 17
20	Mart.	7 12 48 29	7 20 7 34	1 11 9	0 30 51	11 15
21	Merc.	7 27 32 38	8 5 0 47	0 10 20B	0 51 37B	12 16
22	Giov.	8 12 30 59	8 20 2 9	1 32 11	2 11 13	13 19
23	Ven.	8 27 33 14	9 5 3 9	2 47 57	3 21 41	14 22
24	Sab.	9 12 30 53	9 19 55 31	3 51 48	4 17 47	15 22
25	Dom.	9 27 16 16	10 4 32 29	4 39 17	4 56 3	16 19
26	Lun.	10 11 43 38	10 18 49 22	5 7 57	5 14 58	17 12
27	Mart.	10 25 49 27	11 2 43 47	5 17 12	5 14 47	18 2
28	Merc.	11 9 32 24	11 16 15 25	5 7 56	4 56 57	18 49
29	Giov.	11 22 53 4	11 29 25 36	4 42 8	4 23 48	19 36
30	Ven.	0 5 53 20	0 12 16 36	4 2 20	3 38 5	20 22
31	Sab.	0 18 35 45	0 24 51 10	3 11 24	2 42 42	21 8

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	23 31	1 56B	57 19	57 3	31 18	31 9	14 39	2 6
2	0 22	6 37	56 46	56 31	31 0	30 51	15 5	3 13
3	1 12	10 54	56 15	56 1	30 42	30 35	15 32	4 19
4	2 3	14 37	55 47	55 33	30 27	30 19	16 2	5 24
5	2 55	17 34	55 20	55 7	30 12	30 5	16 34	6 28
6	* *	* *	54 55	54 44	29 59	29 53	17 11	7 29
7	3 47	19 38	54 34	54 25	29 47	29 42	17 53	8 26
8	4 40	20 44	54 17	54 11	29 38	29 35	18 41	9 17
9	5 33	20 49	54 6	54 3	29 32	29 30	19 32	10 5
10	6 25	19 55	54 1	54 2	29 29	29 30	20 27	10 48
11	7 16	18 4	54 5	54 10	29 31	29 34	21 25	11 25
12	8 6	15 25	54 18	54 27	29 38	29 43	22 26	11 57
13	8 55	12 2	54 40	54 54	29 50	29 58	23 26	12 26
14	9 43	8 5	55 11	55 30	30 7	30 18	* *	12 52
15	10 32	3 40	55 52	56 16	30 30	30 43	0 30	13 18
16	11 22	1 4A	56 41	57 7	30 57	31 11	1 34	13 44
17	12 14	5 54	57 35	58 4	31 26	31 42	2 42	14 12
18	13 8	10 36	58 32	58 59	31 57	32 12	3 55	14 43
19	14 6	14 50	59 25	59 49	32 26	32 39	5 8	15 18
20	15 8	18 12	60 10	60 28	32 51	33 1	6 24	16 0
21	16 14	20 19	60 42	60 52	33 8	33 14	7 35	16 52
22	17 21	20 54	60 57	60 58	33 16	33 17	8 44	17 54
23	18 28	19 50	60 55	60 48	33 15	33 12	9 43	19 4
24	19 32	17 19	60 37	60 22	33 6	32 58	10 32	20 17
25	20 33	13 39	60 4	59 45	32 48	32 37	11 12	21 34
26	21 30	9 14	59 23	59 0	32 25	32 13	11 47	22 47
27	22 24	4 26	58 36	58 13	31 59	31 47	12 17	23 57
28	23 16	0 29B	57 49	57 26	31 34	31 21	12 44	* *
29	0 6	5 14	57 4	56 43	31 9	30 58	13 11	1 4
30	0 56	9 38	56 23	56 4	30 47	30 37	13 37	2 11
31	1 47	13 30	55 46	55 30	30 27	30 18	14 4	3 17

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$16^h\ 2'$	*Occidente*
1	4. .1	○	.2 .3
2	.4 2.	○	1. 3.
3	.4 .2 .1	○	3.
4	.4 3. 1.	○	.2
5	3. .4	○	.1 2.
6	.3,2. 1.	○	.4
7	.2	○	.3,1. .4
8	.1	○	.2 .3 .4
9	•2	○	1. 3. .4
10	2. .1	○	3. .4
11	•1 3.	○	.2 4.
12	.3	○	.1 2. 4.
13	.3 2. 1.	○	4.
14	o3 .2	○	4. .1
15	4. 1.	○	.2 .3
16	4.	○	.2 .1 .3
17	4. 2. .1	○	3.
18	4. 3.	○	1. .2
19	.4 3.	○	.1 2.
20	.4 .3 2. 1.	○	
21	.4 .2 .3	○	.1
22	.4,1.	○	3☌2
23	o4	○	2. 1. .3
24	2. .1	○	4☌3.
25	o2 3.	○	1. .4
26	3. .1	○	.2 .4
27	.3 .2,1.	○	4.
28	2. .3	○	.1 4.
29	1.	○	3☌2 4.
30		○	1☌2 ☌4. .3
31	2. .1	○	4 3.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
4	Luna nuova	$13^h 44'$
12	Primo quarto	16 20
19	Luna piena	11 54
26	Ultimo quarto	4 3

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	42 π ♈ 5.ª	23 20
5	123 ζ ♉ 3. 4.ª	6 50
5	54 χ^1 Orione 5.ª	14 44
5	44 χ^3 Orione 5.ª	19 16
9	65 α^2 ♋ 5.ª	9 40
12	87 E ♌ 4. 5.ª	16 50
14	68 i ♍ 5.ª	23 55
17	43 $\varkappa$ ♎ 5.ª	7 29
17	45 λ ♎ 5.ª	11 55
17	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	16 33
17	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	17 21
18	9 ω Ofiuco 5.ª	2 40
18	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	20 34
19	58 d Ofiuco 5.ª	4 55
19	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	16 1
20	43 d ♐ 5.ª	15 50
21	9 β ♑ 3. 4.ª	16 47
22	13 ν ♒ 5.ª	12 43
25	18 λ ♓ 5.ª	9 18
29	42 π ♈ 5.ª	5 2

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
1	$18^h\ 44'\ 50''$ imm.
3	13 13 18
5	7 41 48
7	2 10 17
8	20 38 45
* 10	15 6 12
12	9 35 41
14	4 4 9
15	22 32 35
17	17 1 2
19	11 29 29
21	5 57 56
23	0 26 22
24	18 54 48
26	13 23 15
28	7 51 42
30	2 20 7
	II. Satellite.
3	11 16 22 imm.
7	0 35 46
10	13 54 3
14	3 13 27
17	16 31 43
21	5 51 6
24	19 9 21
28	8 28 42
	III. Satellite.
1	12 55 29 imm.
* 1	15 18 23 em.
8	16 56 10 imm.
8	19 18 7 em.
15	20 56 51 imm.
15	23 17 52 em.
23	0 57 35 imm.
23	3 17 41 em.
30	4 58 53 imm.
30	7 18 6 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
152	1	Dom.	23 57 28,39	4 36 40,50	4 39 12,53	4 19	7 41
153	2	Lun.	23 57 37,60	4 40 46,29	4 43 9,08	4 18	7 42
154	3	Mart.	23 57 47,20	4 44 52,46	4 47 5,64	4 18	7 42
155	4	Merc.	23 57 57,17	4 48 59,03	4 51 2,19	4 17	7 43
156	5	Giov.	23 58 7,49	4 53 5,94	4 54 58,75	4 16	7 44
157	6	Ven.	23 58 18,14	4 57 13,18	4 58 55,31	4 16	7 44
158	7	Sab.	23 58 29,12	5 1 20,74	5 2 51,86	4 15	7 45
159	8	Dom.	23 58 40,36	5 5 28,57	5 6 48,42	4 15	7 45
160	9	Lun.	23 58 51,86	5 9 36,66	5 10 44,98	4 14	7 46
161	10	Mart.	23 59 3,59	5 13 44,97	5 14 41,54	4 14	7 46
162	11	Merc.	23 59 15,54	5 17 53,51	5 18 38,09	4 14	7 46
163	12	Giov.	23 59 27,67	5 22 2,25	5 22 34,65	4 13	7 47
164	13	Ven.	23 59 39,96	5 26 11,13	5 26 31,22	4 13	7 47
165	14	Sab.	23 59 52,41	5 30 20,16	5 30 27,77	4 13	7 47
166	15	Dom.	0 0 4,98	5 34 29,31	5 34 24,32	4 13	7 47
167	16	Lun.	0 0 17,65	5 38 38'56	5 38 20,88	4 13	7 47
168	17	Mart.	0 0 30,41	5 42 47'92	5 42 17,43	4 12	7 48
169	18	Merc.	0 0 43,24	5 46 57,33	5 46 13,99	4 12	7 48
170	19	Giov.	0 0 56,10	5 51 6,80	5 50 10,55	4 12	7 48
171	20	Ven.	0 1 8,98	5 55 16,27	5 54 7,11	4 12	7 48
172	21	Sab.	0 1 21,85	5 59 25,74	5 58 3,67	4 12	7 48
173	22	Dom.	0 1 34,71	6 3 35,19	6 2 0,22	4 12	7 48
174	23	Lun.	0 1 47,54	6 7 44,61	6 5 56,78	4 12	7 48
175	24	Mart.	0 2 0,31	6 11 53,96	6 9 53,34	4 12	7 48
176	25	Merc.	0 2 13,01	6 16 3,27	6 13 49,89	4 12	7 48
177	26	Giov.	0 2 25,61	6 20 12,46	6 17 46,45	4 13	7 47
178	27	Ven.	0 2 38,09	6 24 21,53	6 21 43,01	4 13	7 47
179	28	Sab.	0 2 50,43	6 28 30,47	6 25 39,57	4 13	7 47
180	29	Dom.	0 3 2,60	6 32 39,23	6 29 36,13	4 13	7 47
181	30	Lun.	0 3 14,59	6 36 47,81	6 33 32,68	4 13	7 47

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	2 10 45 37,8	22 4 34,0	+ 0,34	0,30B	0,0062770
2	2 11 43 5,4	22 12 30,6	0,32	0,18	0,0063390
3	2 12 40 32,2	22 20 4,0	0,31	0,05	0,0063987
4	2 13 37 58,2	22 27 14,0	0,30	0,07A	0,0064559
5	2 14 35 23,3	22 34 0,5	0,28	0,20	0,0065108
6	2 15 32 47,5	22 40 23,4	0,27	0,31	0,0065631
7	2 16 30 10,8	22 46 22,4	0,25	0,40	0,0066129
8	2 17 27 33,2	22 51 57,3	0,24	0,48	0,0066604
9	2 18 24 54,7	22 57 8,1	0,22	0,52	0,0067055
10	2 19 22 15,2	23 1 54,8	0,20	0,54	0,0067481
11	2 20 19 34,7	23 6 17,1	0,18	0,53	0,0067886
12	2 21 16 53,3	23 10 15,0	0,17	0,49	0,0068271
13	2 22 14 11,0	23 13 48,4	0,15	0,40	0,0068637
14	2 23 11 27,7	23 16 57,2	0,13	0,30	0,0068984
15	2 24 8 43,5	23 19 41,5	0,11	0,19	0,0069314
16	2 25 5 58,6	23 22 1,1	0,09	0,06	0,0069628
17	2 26 3 13,0	23 23 55,9	0,08	0,08B	0,0069927
18	2 27 0 26,8	23 25 26,0	0,06	0,22	0,0070211
19	2 27 57 40,0	23 26 31,5	0,04	0,35	0,0070480
20	2 28 54 52,8	23 27 12,1	0,02	0,47	0,0070735
21	2 29 52 5,2	23 27 27,9	0,00	0,57	0,0070976
22	3 0 49 17,4	23 27 18,9	− 0,01	0,64	0,0071203
23	3 1 46 29,4	23 26 45,1	− 0,03	0,67	0,0071415
24	3 2 43 41,3	23 25 46,5	− 0,05	0,67	0,0071611
25	3 3 40 53,1	23 24 23,3	− 0,07	0,64	0,0071789
26	3 4 38 5,0	23 22 35,3	− 0,09	0,59	0,0071949
27	3 5 35 17,0	23 20 22,6	− 0,10	0,51	0,0072089
28	3 6 32 29,1	23 17 45,4	− 0,12	0,41	0,0072209
29	3 7 29 41,4	23 14 43,7	− 0,14	0,31	0,0072309
30	3 8 26 53,9	23 11 17,4	− 0,16	0,18	0,0072384

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna: a mezzodì medio.	Longitudine della Luna: a mezzanotte media.	Latitudine della Luna: a mezzodì medio.	Latitudine della Luna: a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' ''	s ° ' ''	° ' ''	° ' ''	h '
1	Dom.	1 1 3 12	1 7 12 10	2 12 19B	1 40 40B	21 55
2	Lun.	1 13 18 24	1 19 22 15	1 8 6	0 34 59	22 43
3	Mart.	1 25 23 58	2 1 23 52	0 1 40	0 31 28A	23 31
4	Merc.	2 7 22 13	2 13 19 17	1 4 5A	1 35 52	* *
5	Giov.	2 19 15 18	2 25 10 34	2 6 30	2 35 40	0 20
6	Ven.	3 1 5 19	3 6 59 49	3 3 6	3 28 32	1 8
7	Sab.	3 12 54 21	3 18 49 11	3 51 43	4 12 25	1 55
8	Dom.	3 24 44 41	4 0 41 9	4 30 26	4 45 34	2 42
9	Lun.	4 6 38 59	4 12 38 33	4 57 40	5 6 35	3 27
10	Mart.	4 18 40 17	4 24 44 38	5 12 10	5 14 18	4 11
11	Merc.	5 0 52 4	5 7 3 3	5 12 54	5 7 52	4 54
12	Giov.	5 13 18 6	5 19 37 40	4 59 8	4 46 41	5 38
13	Ven.	5 26 2 16	6 2 32 18	4 30 32	4 10 42	6 24
14	Sab.	6 9 8 12	6 15 50 20	3 47 15	3 20 21	7 11
15	Dom.	6 22 38 59	6 29 34 19	2 50 13	2 17 6	8 2
16	Lun.	7 6 36 24	7 13 45 7	1 41 24	1 3 35	8 57
17	Mart.	7 21 0 14	7 28 21 17	0 24 12	0 16 4B	9 55
18	Merc.	8 5 47 37	8 13 18 26	0 56 32B	1 36 23	10 58
19	Giov.	8 20 52 43	8 28 29 19	2 14 49	2 51 0	12 2
20	Ven.	9 6 7 0	9 13 44 26	3 24 11	3 53 40	13 5
21	Sab.	9 21 20 21	9 28 53 29	4 18 54	4 39 26	14 5
22	Dom.	10 6 22 41	10 13 46 56	4 54 59	5 5 24	15 2
23	Lun.	10 21 5 27	10 28 17 35	5 10 41	5 10 57	15 55
24	Mart.	11 5 22 56	11 12 21 16	5 6 26	4 57 25	16 45
25	Merc.	11 19 12 33	11 25 56 55	4 44 15	4 27 21	17 33
26	Giov.	0 2 34 38	0 9 6 3	4 7 7	3 43 58	18 20
27	Ven.	0 15 31 36	0 21 51 49	3 18 19	2 50 34	19 6
28	Sab.	0 28 7 11	1 4 18 16	2 21 6	1 50 20	19 53
29	Dom.	1 10 25 35	1 16 29 42	1 18 37	0 46 18	20 40
30	Lun.	1 22 31 7	1 28 30 18	0 13 43	0 18 47A	21 28

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	2 38	16 42B	55 16	55 2	30 11	30 3	14 36	4 21
2	3 30	19 3	54 50	54 59	29 56	29 50	15 12	5 22
3	4 22	20 29	54 29	54 21	29 44	29 40	15 55	6 20
4	* *	* *	54 13	54 7	29 36	29 33	16 37	7 14
5	5 15	20 55	54 2	53 58	29 30	29 28	17 26	8 3
6	6 7	20 21	53 56	53 55	29 26	29 26	18 19	8 47
7	6 59	18 50	53 55	53 58	29 26	29 28	19 17	9 25
8	7 49	16 28	54 2	54 7	29 30	29 33	20 16	9 58
9	8 38	13 21	54 15	54 25	29 37	29 42	21 16	10 28
10	9 26	9 38	54 37	54 51	29 49	29 57	22 18	10 56
11	10 14	5 26	55 8	55 26	30 6	30 16	23 21	11 21
12	11 2	0 55	55 47	56 9	30 27	30 39	* *	11 46
13	11 51	3 47A	56 33	56 59	30 52	31 6	0 26	12 12
14	12 43	8 26	57 27	57 55	31 22	31 37	1 31	12 39
15	13 38	12 49	58 24	58 52	31 53	32 8	2 43	13 13
16	14 36	16 35	59 20	59 47	32 23	32 38	3 57	13 50
17	15 39	19 22	60 11	60 33	32 51	33 3	5 10	14 35
18	16 46	20 48	60 51	61 5	33 13	33 21	6 21	15 34
19	17 54	20 36	61 15	61 20	33 26	33 29	7 26	16 40
20	19 1	18 46	61 20	61 15	33 29	33 26	8 21	17 54
21	20 5	15 31	61 6	60 51	33 21	33 13	9 6	19 10
22	21 6	11 16	60 33	60 12	33 3	32 52	9 45	20 28
23	22 3	6 26	59 48	59 22	32 39	32 24	10 18	21 43
24	22 58	1 23	58 55	58 28	32 10	31 55	10 47	22 54
25	23 50	3 34B	58 0	57 32	31 40	31 24	11 15	* *
26	0 40	8 10	57 6	56 41	31 10	30 57	11 43	0 1
27	1 31	12 16	56 18	55 56	30 44	30 32	12 10	1 7
28	2 22	15 42	55 35	55 17	30 21	30 11	12 40	2 12
29	3 13	18 21	55 1	54 47	30 2	29 55	13 13	3 15
30	4 5	20 5	54 34	54 24	29 47	29 41	13 52	4 14

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$14^h\ 55'$	*Occidente*
1	4. .2	○	3. 1.
2	4. 3. .1	○	.2
3	4. 3. 2.	○	1.
4	4. .3. 2	○	.1
5	.4 1.	○	.3. 2
6	.4	○	.1,2. .3
7	.4 2. 1.	○	3.
8	.4 .2	○	3. 1.
9	3. .1	○	.4 .2
10	3. .2	○	1. .4
11	○1 2☌3	○	.4
12	1.	○	3☌2 .4
13		○	.1,2. .3 4.
14	1☌2	○	3. 4.
15	.2	○	1☌3 4.
16	3. .1	○	.2,4.
17	•4 3.	○	2. 1.
18	.3,2.4. .1	○	
19	○3 4. 1.	○	.2
20	4.	○	.1 2. .3
21	4. 2. 1.	○	.3
22	.4 .2	○	3☌1
23	.4 1.3.	○	.2
24	3☌4	○	1☌2
25	.3,2. .4 .1	○	
26	3☌2	○	1. .4
27		○	.1 2☌3 .4
28	1☌2	○	.3 .4
29	.2	○	.1, 3. .4
30	1. 3.	○	.2 .4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	h	′
4	Luna nuova	5	6
12	Primo quarto	2	59
18	Luna piena	18	39
25	Ultimo quarto	15	57

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.		
2	123 ζ ♉ 3. 4.ª	12	47
2	54 χ^1 Orione 5.ª	20	45
3	44 χ^3 Orione 5.ª	1	17
6	65 α^2 ♋ 5.ª	15	34
9	87 E ♌ 4. 5.ª	23	16
12	68 i ♍ 5.ª	7	38
14	43 κ ♎ 5.ª	17	1
14	45 λ ♎ 5.ª	21	34
15	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	2	35
15	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	3	10
15	9 ω Ofiuco 5.ª	12	43
16	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	7	1
16	58 d Ofiuco 5.ª	15	28
17	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	2	43
18	43 d ♐ 5.ª	2	38
19	9 β ♑ 3. 4.ª	3	23
19	13 ν ♒ 5.ª	22	59
22	18 λ ♓ 5.ª	17	37
24	63 δ ♓ 5.ª	0	48
26	42 π ♈ 5.ª	11	23
29	123 ζ ♉ 3. 4.ª	18	53
30	54 χ^1 Orione 5.ª	2	51
30	44 χ^2 Orione 5.ª	7	23

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*			
	I. Satellite.			
	h	′	″	
1	20	28	32	imm.
* 3	15	16	58	
5	9	45	24	
7	4	13	49	
8	22	42	14	
10	17	10	39	
12	11	39	5	
14	6	7	28	
16	0	35	52	
17	19	4	17	
* 19	13	32	43	
21	8	1	7	
23	2	29	32	
24	20	57	56	
* 26	15	26	23	
28	9	54	46	
30	4	23	12	
31	22	51	35	
	II. Satellite.			
1	21	46	55	imm.
5	11	6	13	
9	0	24	25	
* 12	13	43	42	
16	3	1	51	
19	16	21	3	
23	5	39	11	
26	18	58	20	
30	8	16	25	
	III. Satellite.			
7	8	59	45	imm.
7	11	18	4	em.
14	13	0	49	imm.
* 14	15	18	16	em.
21	17	1	18	imm.
21	19	17	53	em.
28	21	1	38	imm.
28	23	17	24	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
182	1	Mart.	0 3 26,36	6 40 56,16	6 37 29,24	4 14	7 46
183	2	Merc.	0 3 37,90	6 45 4,30	6 41 25,80	4 14	7 46
184	3	Giov.	0 3 49,19	6 49 12,17	6 45 22,35	4 14	7 46
185	4	Ven.	0 4 0,18	6 53 19,74	6 49 18,91	4 14	7 46
186	5	Sab.	0 4 10,85	6 57 27,00	6 53 15,47	4 15	7 45
187	6	Dom.	0 4 21,18	7 1 33,91	6 57 12,02	4 15	7 45
188	7	Lun.	0 4 31,15	7 5 40,46	7 1 8,58	4 16	7 44
189	8	Mart.	0 4 40,74	7 9 46,64	7 5 5,14	4 16	7 44
190	9	Merc.	0 4 49,92	7 13 52,41	7 9 1,70	4 17	7 43
191	10	Giov.	0 4 58,68	7 17 57,75	7 12 58,26	4 18	7 42
192	11	Ven.	0 5 7,00	7 22 2,64	7 16 54,82	4 18	7 42
193	12	Sab.	0 5 14,85	7 26 7,08	7 20 51,37	4 19	7 41
194	13	Dom.	0 5 22,22	7 30 11,03	7 24 47,93	4 21	7 39
195	14	Lun.	0 5 29,10	7 34 14,47	7 28 44,49	4 21	7 39
196	15	Mart.	0 5 35,47	7 38 17,43	7 32 41,04	4 22	7 38
197	16	Merc.	0 5 41,33	7 42 19,86	7 36 37,60	4 23	7 37
198	17	Giov.	0 5 46,68	7 46 21,77	7 40 34,16	4 24	7 36
199	18	Ven.	0 5 51,50	7 50 23,17	7 44 30,71	4 25	7 35
200	19	Sab.	0 5 55,78	7 54 24,01	7 48 27,27	4 26	7 34
201	20	Dom.	0 5 59,51	7 58 24,31	7 52 23,82	4 27	7 33
202	21	Lun.	0 6 2,68	8 2 24,05	7 56 20,38	4 28	7 32
203	22	Mart.	0 6 5,31	8 6 23,25	8 0 16,93	4 29	7 31
204	23	Merc.	0 6 7,38	8 10 21,87	8 4 13,49	4 30	7 30
205	24	Giov.	0 6 8,89	8 14 19,93	8 8 10,04	4 31	7 29
206	25	Ven.	0 6 9,84	8 18 17,45	8 12 6,60	4 32	7 28
207	26	Sab.	0 6 10,21	8 22 14,38	8 16 3,16	4 33	7 27
208	27	Dom.	0 6 10,01	8 26 10,74	8 19 59,72	4 34	7 26
209	28	Lun.	0 6 9,24	8 30 6,53	8 23 56,27	4 35	7 25
210	29	Mart.	0 6 7,90	8 34 1,73	8 27 52,83	4 36	7 24
211	30	Merc.	0 6 5,98	8 37 56,36	8 31 49,38	4 37	7 23
212	31	Giov.	0 6 3,46	8 41 50,38	8 35 45,94	4 38	7 22

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	3 9 24 6,5	23 7 26,7	− 0,18	0,06B	0,0072434
2	3 10 21 19,3	23 3 11,8	− 0,19	0,08A	0,0072460
3	3 11 18 32,3	22 58 32,6	− 0,21	0,20	0,0072460
4	3 12 15 45,3	22 53 29,4	− 0,22	0,30	0,0072434
5	3 13 12 58,4	22 48 2,3	− 0,24	0,38	0,0072381
6	3 14 10 11,5	22 42 11,4	− 0,26	0,42	0,0072301
7	3 15 7 24,6	22 35 56,8	− 0,27	0,45	0,0072195
8	3 16 4 37,8	22 29 18,8	− 0,28	0,44	0,0072063
9	3 17 1 50,9	22 22 17,4	− 0,30	0,40	0,0071906
10	3 17 59 4,1	22 14 52,9	− 0,32	0,34	0,0071726
11	3 18 56 17,2	22 7 5,4	− 0,33	0,25	0,0071524
12	3 19 53 30,3	21 58 55,2	− 0,35	0,14	0,0071301
13	3 20 50 43,5	21 50 22,4	− 0,36	0,01	0,0071058
14	3 21 47 56,6	21 41 27,2	− 0,38	0,13B	0,0070797
15	3 22 45 9,9	21 32 9,8	− 0,39	0,26	0,0070518
16	3 23 42 23,5	21 22 30,5	− 0,41	0,38	0,0070222
17	3 24 39 37,4	21 12 29,4	− 0,42	0,50	0,0069910
18	3 25 36 51,6	21 2 6,7	− 0,44	0,60	0,0069586
19	3 26 34 6,2	20 51 22,8	− 0,45	0,67	0,0069248
20	3 27 31 21,4	20 40 17,7	− 0,46	0,72	0,0068895
21	3 28 28 37,2	20 28 51,7	− 0,48	0,73	0,0068528
22	3 29 25 53,8	20 17 5,1	− 0,49	0,71	0,0068149
23	4 0 23 11,2	20 4 58,1	− 0,50	0,66	0,0067755
24	4 1 20 29,4	19 52 30,9	− 0,52	0,60	0,0067344
25	4 2 17 48,6	19 39 43,8	− 0,53	0,49	0,0066917
26	4 3 15 8,9	19 26 37,2	− 0,54	0,38	0,0066473
27	4 4 12 30,2	19 13 11,0	− 0,55	0,26	0,0066010
28	4 5 9 52,6	18 59 25,5	− 0,56	0,12	0,0065527
29	4 6 7 16,1	18 45 21,3	− 0,58	0,01	0,0065024
30	4 7 4 40,7	18 30 58,4	− 0,59	0,12A	0,0064499
31	4 8 2 6,4	18 16 17,3	− 0,60	0,23	0,0063952

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	2 4 27 44	2 10 23 50	0 50 53A	1 22 17A	22 17
2	Merc.	2 16 19 0	2 22 13 35	1 52 39	2 21 43	23 5
3	Giov.	2 28 7 55	3 4 2 16	2 49 12	3 14 49	23 53
4	Ven.	3 9 56 54	3 15 52 4	3 38 19	3 59 29	* *
5	Sab.	3 21 47 57	3 27 44 46	4 18 4	4 33 52	0 40
6	Dom.	4 3 42 41	4 9 41 57	4 46 43	4 56 27	1 25
7	Lun.	4 15 42 46	4 21 45 24	5 2 56	5 6 4	2 9
8	Mart.	4 27 50 5	5 3 57 7	5 5 46	5 1 59	2 53
9	Merc.	5 10 6 49	5 16 19 33	4 54 40	4 43 49	3 36
10	Giov.	5 22 35 41	5 28 55 35	4 29 29	4 11 43	4 21
11	Ven.	6 5 19 40	6 11 48 19	3 50 37	3 26 18	5 6
12	Sab.	6 18 21 56	6 25 0 54	2 58 58	2 28 51	5 54
13	Dom.	7 1 45 34	7 8 36 15	1 56 15	1 21 30	6 45
14	Lun.	7 15 33 8	7 22 36 20	0 45 3	0 7 23	7 40
15	Mart.	7 29 45 49	8 7 1 24	0 30 56B	1 9 15B	8 39
16	Merc.	8 14 22 43	8 21 49 9	1 46 53	2 23 7	9 41
17	Giov.	8 29 19 56	9 6 54 6	2 57 9	3 28 18	10 44
18	Ven.	9 14 30 29	9 22 7 49	3 55 51	4 19 15	11 46
19	Sab.	9 29 44 45	10 7 19 57	4 37 59	4 51 44	12 45
20	Dom.	10 14 52 5	10 22 19 56	5 0 17	5 3 37	13 42
21	Lun.	10 29 42 27	11 6 58 45	5 1 49	4 55 9	14 35
22	Mart.	11 14 8 13	11 21 10 24	4 43 55	4 28 32	15 25
23	Merc.	11 28 5 6	0 4 52 20	4 9 26	3 47 7	16 14
24	Giov.	0 11 32 15	0 18 5 13	3 22 4	2 54 45	17 2
25	Ven.	0 24 31 38	1 0 52 4	2 25 38	1 55 9	17 49
26	Sab.	1 7 7 5	1 13 17 20	1 23 41	0 51 38	18 37
27	Dom.	1 19 23 25	1 25 26 0	0 19 22	0 12 48A	19 25
28	Lun.	2 1 25 42	2 7 23 10	0 44 33A	1 15 35	20 13
29	Mart.	2 13 18 58	2 19 13 41	1 45 38	2 14 24	21 2
30	Merc.	2 25 7 47	3 1 1 47	2 41 38	3 7 5	21 50
31	Giov.	3 6 56 5	3 12 51 3	3 30 31	3 51 41	22 37

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	4 57	20 52B	54 15	54 7	29 37	29 33	14 35	5 9
2	5 50	20 39	54 1	53 57	29 30	29 27	15 22	6 0
3	6 42	19 28	53 54	53 53	29 26	29 25	16 14	6 45
4	* *	* *	53 53	53 55	29 25	29 26	17 10	7 27
5	7 33	17 23	53 58	54 2	29 28	29 30	18 9	8 3
6	8 22	14 30	54 7	54 14	29 33	29 36	19 8	8 33
7	9 11	10 59	54 23	54 33	29 42	29 47	20 10	9 0
8	9 59	6 57	54 45	54 58	29 53	30 0	21 13	9 26
9	10 46	2 35	55 13	55 30	30 9	30 18	22 17	9 50
10	11 34	2 0A	55 48	56 8	30 28	30 39	23 20	10 17
11	12 24	6 35	56 40	56 53	30 56	31 3	* *	10 43
12	13 16	10 58	57 17	57 42	31 16	31 30	0 27	11 12
13	14 11	14 55	58 9	58 35	31 45	31 59	1 37	11 45
14	15 10	18 6	59 1	59 27	32 13	32 28	2 47	12 25
15	16 13	20 11	59 51	60 13	32 41	32 53	3 58	13 16
16	17 19	20 51	60 33	60 50	33 3	33 13	5 9	14 13
17	18 26	19 54	61 3	61 11	33 20	33 24	6 7	15 25
18	19 32	17 24	61 15	61 14	33 26	33 25	6 58	16 42
19	20 36	13 37	61 8	60 58	33 23	33 17	7 38	18 0
20	21 36	8 57	60 43	60 24	33 9	32 58	8 15	19 17
21	22 33	3 51	60 2	59 37	32 47	32 33	8 47	20 31
22	23 28	1 19B	59 10	58 42	32 18	32 3	9 16	21 43
23	0 21	6 13	58 13	57 44	31 47	31 31	9 45	22 53
24	1 13	10 38	57 16	56 49	31 16	31 1	10 13	* *
25	2 4	14 24	56 23	55 59	30 47	30 34	10 42	0 1
26	2 56	17 22	55 37	55 17	30 22	30 11	11 14	1 5
27	3 48	19 27	55 0	54 44	30 1	29 53	11 52	2 8
28	4 41	20 35	54 31	54 20	29 46	29 40	12 34	3 4
29	5 33	20 44	54 11	54 5	29 35	29 32	13 20	3 54
30	6 25	19 54	54 0	53 58	29 29	29 27	14 10	4 43
31	7 16	18 8	53 57	53 58	29 27	29 28	15 5	5 27

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$14^h\ 13'$	*Occidente*
1	3.	○	1.2. 4.
2	.3 2. .1	○	4.
3	.3 .2	○	1. 4.
4	o1	○	.3 .2 4●
5	4. 1.	○	2. .3
6	4. 2.	○	.1 3.
7	●3 4. 1.	○	.2
8	.4 3.	○	.1,2.
9	.4 3. 2.1.	○	
10	.4 3☌2	○	.1
11	.4 .1	○	.3 .2
12	●1 .4	○	2. .3
13	2.	○	1. .4 3.
14	1.	○	3☌2 .4
15	3.	○	.1 2. .4
16	3. 1.2.	○	.4
17	.3.2	○	1. 4.
18	.1	○	.3 .2 4.
19		○	1. 2. .3,4.
20	2.	○	.1 4. 3.
21	4☌1. .2	○	3.
22	4. 3.	○	.1 .2
23	4. 3. 1. 2.	○	
24	4. .3 .2	○	1.
25	4. .1	○	.3 .2
26	.4	○	1. 2. .3
27	o1 .4 2.	○	.3
28	.4 1☌2	○	3.
29	3. .4	○	.1 .2
30	●2 3. 1.	○	.4
31	.3 .2	○	.1 .4

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	h	'
2	Luna nuova	20	1
10	Primo quarto	11	17
17	Luna piena	1	53
24	Ultimo quarto	7	4

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	h	'
2	65 α^2 ♋ 5.ª	21	27
6	87 E ♌ 4. 5.ª	4	46
8	68 i ♍ 5.ª	13	35
11	43 κ ♎ 5.ª	0	22
11	45 λ ♎ 5.ª	5	5
11	8 β Prec. 2.ª	9	46
11	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	10	34
11	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	10	53
11	9 ω Ofiuco 5.ª	20	44
12	40 ρ Ofiuco 5.ª	15	40
13	58 d Ofiuco 5.ª	0	23
13	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	12	0
14	43 d ♐ 5.ª	12	32
14	44 ρ^1 ♐ 3.ª	14	18
15	9 β ♑ 3. 4.ª	13	43
16	13 ν ♒ 5.ª	9	29
19	18 λ ♓ 5.ª	3	30
20	63 δ ♓ 5.ª	9	56
22	42 π ♈ 5.ª	19	9
24	74 ε ♉ 4.ª	16	52
26	54 χ^1 Orione 5.ª	9	40
26	44 χ^3 Orione 5.ª	14	12
30	65 α^2 ♋ 5.ª	4	11

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*			
	I. Satellite.			
	h	'	"	
2	17	20	2	imm.
* 4	11	48	25	
6	6	16	51	
8	0	45	16	
9	19	13	43	
* 11	13	42	8	
13	8	10	33	
15	2	38	58	
16	21	7	26	
* 18	15	35	50	
20	10	4	17	
22	4	32	42	
23	23	1	11	
25	17	29	36	
* 27	11	58	4	
29	6	26	30	
31	0	55	0	
	II. Satellite.			
2	21	35	30	imm.
6	10	53	34	
10	0	12	34	
* 13	13	30	36	
17	2	49	31	
20	16	7	36	
24	5	26	23	
27	18	44	23	
31	8	3	8	
	III. Satellite.			
5	1	2	5	imm.
5	3	17	1	em.
12	5	2	39	imm.
12	7	16	46	em.
19	9	4	52	imm.
* 19	11	17	13	em.
* 26	13	4	41	imm.
* 26	15	17	15	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
213	1	Ven.	0 6 0,34	8 45 43,81	8 39 42,49	4 40	7 20
214	2	Sab.	0 5 56,62	8 49 36,65	8 43 39,05	4 42	7 18
215	3	Dom.	0 5 52,30	8 53 28,87	8 47 35,60	4 43	7 17
216	4	Lun.	0 5 47,38	8 57 20,49	8 51 32,16	4 44	7 16
217	5	Mart.	0 5 41,86	9 1 11,51	8 55 28,71	4 45	7 15
218	6	Merc.	0 5 35,73	9 5 1,92	8 59 25,27	4 46	7 14
219	7	Giov.	0 5 29,00	9 8 51,73	9 3 21,83	4 48	7 12
220	8	Ven.	0 5 21,67	9 12 40,93	9 7 18,38	4 49	7 11
221	9	Sab.	0 5 13,75	9 16 29,54	9 11 14,93	4 50	7 10
222	10	Dom.	0 5 5,22	9 20 17,54	9 15 11,48	4 52	7 8
223	11	Lun.	0 4 56,10	9 24 4,96	9 19 8,04	4 53	7 7
224	12	Mart.	0 4 46,41	9 27 51,79	9 23 4,60	4 55	7 5
225	13	Merc.	0 4 36,15	9 31 38,05	9 27 1,15	4 56	7 4
226	14	Giov.	0 4 25,32	9 35 23,73	9 30 57,70	4 58	7 2
227	15	Ven.	0 4 13,94	9 39 8,87	9 34 54,26	4 59	7 1
228	16	Sab.	0 4 2,01	9 42 53,47	9 38 50,81	5 0	7 0
229	17	Dom.	0 3 49,56	9 46 37,53	9 42 47,36	5 1	6 59
230	18	Lun.	0 3 36,61	9 50 21,12	9 46 43,92	5 3	6 57
231	19	Mart.	0 3 23,16	9 54 4,18	9 50 40,47	5 4	6 56
232	20	Merc.	0 3 9,24	9 57 46,77	9 54 37,02	5 5	6 55
233	21	Giov.	0 2 54,85	10 1 28,90	9 58 33,57	5 7	6 53
234	22	Ven.	0 2 40,02	10 5 10,58	10 2 30,12	5 8	6 52
235	23	Sab.	0 2 24,75	10 8 51,83	10 6 26,68	5 10	6 50
236	24	Dom.	0 2 9,07	10 12 32,65	10 10 23,23	5 11	6 49
237	25	Lun.	0 1 52,98	10 16 13,07	10 14 19,78	5 13	6 47
238	26	Mart.	0 1 36,51	10 19 53,09	10 18 16,34	5 14	6 46
239	27	Merc.	0 1 19,65	10 23 32,75	10 22 12,89	5 16	6 44
240	28	Giov.	0 1 2,45	10 27 12,05	10 26 9,45	5 17	6 43
241	29	Ven.	0 0 44,90	10 30 51,02	10 30 6,00	5 19	6 41
242	30	Sab.	0 0 27,01	10 34 29,63	10 34 2,55	5 21	6 39
243	31	Dom.	0 0 8,81	10 38 7,93	10 37 59,10	5 22	6 38

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	4 8 59 33,2	18 1 18,2	− 0,62	0,32A	0,0063381
2	4 9 57 0,9	17 46 1,3	− 0,64	0,39	0,0062786
3	4 10 54 29,7	17 30 27,1	− 0,65	0,41	0,0062166
4	4 11 51 59,6	17 14 35,7	− 0,66	0,41	0,0061522
5	4 12 49 30,3	16 58 27,6	− 0,67	0,39	0,0060855
6	4 13 47 1,9	16 42 3,0	− 0,69	0,33	0,0060165
7	4 14 44 34,4	16 25 22,2	− 0,70	0,22	0,0059454
8	4 15 42 7,8	16 8 25,7	− 0,71	0,12	0,0058721
9	4 16 39 42,2	15 51 13,5	− 0,72	0,00	0,0057967
10	4 17 37 17,4	15 33 46,2	− 0,73	0,13B	0,0057196
11	4 18 34 53,5	15 16 4,1	− 0,74	0,27	0,0056408
12	4 19 32 30,5	14 58 7,4	− 0,75	0,41	0,0055605
13	4 20 30 8,5	14 39 56,3	− 0,76	0,53	0,0054788
14	4 21 27 47,6	14 21 31,3	− 0,77	0,62	0,0053957
15	4 22 25 27,7	14 2 52,7	− 0,78	0,70	0,0053115
16	4 23 23 9,0	13 44 0,7	− 0,78	0,76	0,0052264
17	4 24 20 51,5	13 24 55,6	− 0,79	0,78	0,0051403
18	4 25 18 35,4	13 5 37,7	− 0,80	0,77	0,0050532
19	4 26 16 20,8	12 46 7,3	− 0,81	0,72	0,0049652
20	4 27 14 7,6	12 26 24,8	− 0,81	0,66	0,0048763
21	4 28 11 56,0	12 6 30,5	− 0,82	0,56	0,0047865
22	4 29 9 46,2	11 46 24,4	− 0,83	0,46	0,0046959
23	5 0 7 38,0	11 26 7,1	− 0,84	0,34	0,0046042
24	5 1 5 31,7	11 5 38,9	− 0,84	0,22	0,0045114
25	5 2 3 27,1	10 45 0,0	− 0,85	0,08	0,0044173
26	5 3 1 24,4	10 24 10,8	− 0,86	0,05A	0,0043218
27	5 3 59 23,6	10 3 11,5	− 0,87	0,18	0.0042249
28	5 4 57 24,6	9 42 2,5	− 0,88	0,25	0,0041264
29	5 5 55 27,5	9 20 44,2	− 0,88	0,30	0,0040263
30	5 6 53 32,2	8 59 16,7	− 0,89	0,36	0,0039246
31	5 7 51 38,8	8 37 40,6	− 0,90	0,38	0,0038212

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	3 18 47 0	3 24 44 13	4 10 22A	4 26 21A	23 23
2	Sab.	4 0 42 54	4 6 43 13	4 39 28	4 49 31	* *
3	Dom.	4 12 45 19	4 18 49 21	4 56 22	4 59 53	0 8
4	Lun.	4 24 55 25	5 1 3 37	5 0 0	4 56 38	0 52
5	Mart.	5 7 14 5	5 13 26 55	4 49 46	4 39 26	1 36
6	Merc.	5 19 42 17	5 26 0 19	4 25 40	4 8 32	2 20
7	Giov.	6 2 21 15	6 8 45 16	3 48 12	3 24 48	3 5
8	Ven.	6 15 12 37	6 21 43 33	2 58 34	2 29 45	3 51
9	Sab.	6 28 18 22	7 4 57 20	1 58 38	1 25 34	4 41
10	Dom.	7 11 40 45	7 18 28 52	0 50 56	0 15 10	5 33
11	Lun.	7 25 21 55	8 2 20 4	0 21 15B	0 57 48B	6 28
12	Mart.	8 9 23 24	8 16 31 51	1 33 53	2 8 55	7 27
13	Merc.	8 23 45 15	9 1 3 16	2 42 17	3 13 18	8 27
14	Giov.	9 8 25 23	9 15 50 54	3 41 23	4 5 55	9 28
15	Ven.	9 23 18 59	10 0 48 35	4 26 22	4 42 18	10 28
16	Sab.	10 8 18 55	10 15 47 50	4 53 22	4 59 22	11 25
17	Dom.	10 23 15 6	11 0 39 15	5 0 14	4 56 2	12 20
18	Lun.	11 7 59 10	11 15 13 56	4 46 58	4 33 21	13 13
19	Mart.	11 22 22 47	11 29 25 7	4 15 35	3 54 9	14 3
20	Merc.	0 6 20 34	0 13 8 57	3 29 33	3 2 19	14 53
21	Giov.	0 19 50 17	0 26 24 45	2 32 59	2 2 4	15 42
22	Ven.	1 2 52 40	1 9 14 28	1 30 2	0 57 21	16 31
23	Sab.	1 15 30 41	1 21 41 54	0 24 26	0 8 22A	17 19
24	Dom.	1 27 48 45	2 3 51 54	0 40 42A	1 12 14	18 8
25	Lun.	2 9 52 1	2 15 49 46	1 42 42	2 11 50	18 57
26	Mart.	2 21 45 49	2 27 40 49	2 39 23	3 5 7	19 45
27	Merc.	3 3 35 22	3 9 30 3	3 28 48	3 59 14	20 32
28	Giov.	3 15 25 23	3 21 21 51	4 9 13	4 25 32	21 19
29	Ven.	3 27 19 50	4 3 19 44	4 39 0	4 49 27	22 4
30	Sab.	4 9 21 49	4 15 26 20	4 56 44	5 0 42	22 49
31	Dom.	4 21 33 28	4 27 43 19	5 1 15	4 58 17	23 34

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	8 6	15 32B	54 0	54 4	29 29	29 31	16 2	6 2
2	* *	* *	54 10	54 17	29 34	29 38	17 3	6 35
3	8 56	12 14	54 25	54 34	29 42	29 47	18 4	7 5
4	9 44	8 22	54 44	54 55	29 53	29 59	19 6	7 32
5	10 32	4 5	55 7	55 20	30 5	30 12	20 8	7 58
6	11 20	0 25A	55 34	55 49	30 20	30 28	21 11	8 24
7	12 9	4 59	56 5	56 22	30 37	30 46	22 17	8 51
8	12 59	9 25	56 40	56 59	30 56	31 6	23 27	9 17
9	13 53	13 27	57 19	57 39	31 17	31 28	* *	9 49
10	14 49	16 51	58 0	58 21	31 40	31 51	0 37	10 25
11	15 48	19 19	58 42	59 3	32 3	32 14	1 45	11 8
12	16 51	20 34	59 24	59 42	32 26	32 36	2 49	12 4
13	17 55	20 23	59 59	60 14	32 44	32 52	3 49	13 6
14	19 0	18 42	60 26	60 35	33 0	33 4	4 43	14 16
15	20 4	15 38	60 41	60 42	33 7	33 8	5 30	15 32
16	21 6	11 27	60 40	60 33	33 7	33 3	6 8	16 50
17	22 5	6 34	60 23	60 9	32 58	32 50	6 42	18 8
18	23 1	1 22	59 51	59 30	32 40	32 29	7 13	19 23
19	23 56	3 46B	59 7	58 41	32 16	32 2	7 43	20 33
20	0 50	8 31	58 15	57 48	31 48	31 33	8 13	21 43
21	1 43	12 40	57 21	56 54	31 18	31 4	8 44	22 50
22	2 36	16 2	56 28	56 4	30 49	30 36	9 17	23 55
23	3 28	18 31	55 42	55 22	30 24	30 13	9 51	* *
24	4 22	20 2	55 3	54 48	30 3	29 55	10 31	0 55
25	5 14	20 34	54 35	54 24	29 48	29 42	11 17	1 48
26	6 6	20 6	54 15	54 9	29 37	29 34	12 5	2 37
27	6 58	18 43	54 6	54 4	29 32	29 31	12 58	3 23
28	7 48	16 27	54 5	54 8	29 32	29 34	13 54	4 1
29	8 38	13 25	54 13	54 20	29 36	29 40	14 54	4 36
30	9 27	9 46	54 29	54 38	29 44	29 49	15 55	5 6
31	10 15	5 37	54 50	55 2	29 56	30 3	16 58	5 35

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	13^h 28′	Occidente
1	.1 .3	O	.2 .4
2		O	1. 2. .3 .4
3	2. .1	O	.3 4.
4	•1 .2	O	3. 4.
5	3.	O	.1 .2, 4.
6	3. 1.	O	2. 4.
7	.3,2. 4.	O	.1
8	4. 1. .3	O	.2
9	4.	O	1. 2☌3
10	4. 2. .1	O	.3
11	.4 .2	O	1. 3.
12	.4 3.	O	.1 .2
13	.4 3. 1.	O	2.
14	3. 2☌4	O	.1
15	o4 1☌3	O	.2
16		O	3☌1,2☌4
17	2☌1	O	.3 .4
18	.2	O	1. 3. .4
19	.1	O	3. .2 .4
20	3. 1.	O	2. 4.
21	3. 2.	O	.1 4.
22	.3,1. .2	O	4.
23		O	4. .3 .1,2.
24	4. .1,2.	O	.3
25	4. .2	O	1. 3.
26	4. .1	O	3. .2
27	•1,4. 3.	O	2.
28	.4 3. 2.	O	.1
29	.4 .3 1. .2	O	
30	.4	O	.3 .1 .2
31	1☌4 .2	O	.3

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
1	Luna nuova	$10^h\ 11'$
8	Primo quarto	18 1
15	Luna piena.	10 50
23	Ultimo quarto	1 2
30	Luna nuova	23 35

Giorni.	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	87 E ♌ 4. 5.ª	10 48
2	☿	18 33
4	68 i ♍ 5.ª	19 1
7	43 κ ♎ 5.ª	6 0
7	45 λ ♎ 5.ª	10 46
7	1 β ♏ prec. 2.ª	15 31
7	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	16 19
7	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	16 38
7	4 ψ Ofiuco 5.ª	23 4
8	9 ω Ofiuco 5.ª	2 41
8	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	22 4
9	58 d Ofiuco 5.ª	7 1
9	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	18 56
10	43 d ♐ 5.ª	20 17
10	44 ρ^1 ♐ 5.ª	22 7
11	9 β ♑ 3. 4.ª	22 16
12	13 μ ♒ 5.ª	18 35
15	18 λ ♓ 5.ª	13 29
16	63 δ ♓ 5.ª	19 46
21	74 ε ♉ 4.ª	1 1
22	54 χ^1 Orione 5.ª	17 25
22	44 χ^3 Orione 5.ª	21 55
24	68 k □ 5.ª	17 46

Giorni.	Ecclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.
	I. Satellite.
	h ′ ″
1	19 23 27 imm.
* 3	13 51 55
5	8 20 22
7	2 48 53
8	21 17 21
* 10	15 45 51
* 12	10 14 19
14	4 42 53
15	23 11 21
17	17 39 54
* 19	12 8 23
21	6 36 58
23	1 5 29
24	19 34 2
* 26	14 2 33
28	8 31 10
30	2 59 42
	II. Satellite.
3	21 21 7 imm.
* 7	10 39 47
10	23 57 44
* 14	13 16 19
18	2 34 17
* 21	15 52 47
25	5 10 44
28	18 29 19
	III. Satellite.
2	17 5 48 imm.
2	19 17 36 em.
9	21 6 25 imm.
9	23 17 30 em.
17	1 6 59 imm.
17	3 17 21 em.
24	5 7 47 imm.
24	7 17 28 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
244	1	Lun.	23 59 50,31	10 41 45,93	10 41 55,65	5 23	6 37
245	2	Mart.	23 59 31,50	10 45 23,63	10 45 52,21	5 25	6 35
246	3	Merc.	23 59 12,40	10 49 1,03	10 49 48,76	5 27	6 33
247	4	Giov.	23 58 53,05	10 52 38,18	10 53 45,31	5 29	6 31
248	5	Ven.	23 58 33,45	10 56 15,08	10 57 41,86	5 30	6 30
249	6	Sab.	23 58 13,60	10 59 51,73	11 1 38,42	5 31	6 29
250	7	Dom.	23 57 53,54	11 3 28,16	11 5 34,97	5 33	6 27
251	8	Lun.	23 57 33,28	11 7 4,40	11 9 31,52	5 35	6 25
252	9	Mart.	23 57 12,83	11 10 40,44	11 13 28,07	5 36	6 24
253	10	Merc.	23 56 52,21	11 14 16,32	11 17 24,62	5 38	6 22
254	11	Giov.	23 56 31,43	11 17 52,03	11 21 21,18	5 40	6 20
255	12	Ven.	23 56 10,53	11 21 27,63	11 25 17,73	5 42	6 18
256	13	Sab.	23 55 49,52	11 25 3,12	11 29 14,29	5 44	6 16
257	14	Dom.	23 55 28,41	11 28 38,51	11 33 10,84	5 45	6 15
258	15	Lun.	23 55 7,25	11 32 13,85	11 37 7,39	5 47	6 13
259	16	Mart.	23 54 46,08	11 35 49,16	11 41 3,94	5 48	6 12
260	17	Merc.	23 54 24,89	11 39 24,46	11 45 0,49	5 50	6 10
261	18	Giov.	23 54 3,69	11 42 59,75	11 48 57,04	5 51	6 9
262	19	Ven.	23 53 42,51	11 46 35,07	11 52 53,59	5 53	6 7
263	20	Sab.	23 53 21,40	11 50 10,47	11 56 50,14	5 55	6 5
264	21	Dom.	23 53 0,38	11 53 45,93	12 0 46,70	5 57	6 3
265	22	Lun.	23 52 39,46	11 57 21,50	12 4 43,25	5 58	6 2
266	23	Mart.	23 52 18,66	12 0 57,19	12 8 39,80	5 59	6 1
267	24	Merc.	23 51 58,00	12 4 33,03	12 12 36,35	6 1	5 59
268	25	Giov.	23 51 37,52	12 8 9,05	12 16 32,91	6 2	5 58
269	26	Ven.	23 51 17,22	12 11 45,25	12 20 29,46	6 3	5 57
270	27	Sab.	23 50 57,11	12 15 21,65	12 24 26,02	6 5	5 55
271	28	Dom.	23 50 37,23	12 18 58,26	12 28 22,57	6 6	5 54
272	29	Lun.	23 50 17,60	12 22 35,13	12 32 19,12	6 8	5 52
273	30	Mart.	23 49 58,24	12 26 12,26	12 36 15,67	6 9	5 51

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	5 8 49 47,3	8 15 56,1	− 0,90	0,36 A	0,0037159
2	5 9 47 57,2	7 54 3,6	− 0,91	0,29 B	0,0036091
3	5 10 46 8,8	7 32 3,6	− 0,91	0,20	0,0035006
4	5 11 44 21,1	7 9 56,2	− 0,92	0,10	0,0033904
5	5 12 42 37,1	6 47 41,7	− 0,92	0,02	0,0032786
6	5 13 40 53,6	6 25 20,7	− 0,93	0,15	0,0031654
7	5 14 39 11,6	6 2 53,5	− 0,93	0,29	0,0030508
8	5 15 37 31,2	5 40 20,1	− 0,94	0,41	0,0029352
9	5 16 35 52,3	5 17 41,3	− 0,94	0,53	0,0028186
10	5 17 34 15,0	4 54 57,2	− 0,95	0,64	0,0027011
11	5 18 32 39,3	4 32 8,1	− 0,95	0,72	0,0025829
12	5 19 31 5,2	4 9 14,4	− 0,95	0,76	0,0024643
13	5 20 29 32,7	3 46 16,4	− 0,95	0,79	0,0023453
14	5 21 28 2,0	3 23 14,4	− 0,96	0,78	0,0022259
15	5 22 26 33,0	3 0 8,7	− 0,96	0,75	0,0021064
16	5 23 25 5,9	2 36 59,6	− 0,97	0,68	0,0019868
17	5 24 23 40,7	2 13 47,5	− 0,97	0,58	0,0018672
18	5 25 22 17,6	1 50 32,5	− 0,97	0,48	0,0017476
19	5 26 20 56,4	1 27 15,2	− 0,97	0,36	0,0016280
20	5 27 19 37,5	1 3 55,7	− 0,98	0,23	0,0015083
21	5 28 18 20,8	0 40 34,4	− 0,98	0,09	0,0013885
22	5 29 17 6,3	0 17 11,6	− 0,98	0,05 A	0,0012685
23	6 0 15 54,0	0 6 12,2 Aust.	− 0,98	0,17	0,0011482
24	6 1 14 44,1	0 29 36,9	− 0,98	0,26	0,0010277
25	6 2 13 36,4	0 53 2,2	− 0,98	0,32	0,0009067
26	6 3 12 31,1	1 16 27,7	− 0,98	0,36	0,0007851
27	6 4 11 28,0	1 39 52,8	− 0,98	0,38	0,0006629
28	6 5 10 27,3	2 3 17,4	− 0,98	0,36	0,0005400
29	6 6 9 28,7	2 26 40,9	− 0,98	0,31	0,0004164
30	6 7 8 32,2	2 50 3,2	− 0,98	0,25	0,0002920

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Lun.	5 3 55 59	5 10 11 32	4 51 45A	4 41 40A	* *
2	Mart.	5 16 29 57	5 22 51 15	4 28 3	4 10 59	0 18
3	Merc.	5 29 15 24	6 5 42 21	3 50 37	3 27 8	1 4
4	Giov.	6 12 12 6	6 18 44 39	3 0 45	2 31 45	1 50
5	Ven.	6 25 20 0	7 1 58 12	2 0 29	1 27 19	2 38
6	Sab.	7 8 39 18	7 15 23 22	0 52 41	0 17 1	3 30
7	Dom.	7 22 10 32	7 29 6 51	0 19 12B	0 55 26B	4 24
8	Lun.	8 5 54 27	8 12 51 24	1 31 10	2 5 50	5 20
9	Mart.	8 19 51 44	8 26 55 23	2 38 54	3 9 47	6 18
10	Merc.	9 4 2 16	9 11 12 9	3 37 58	4 2 55	7 17
11	Giov.	9 18 24 42	9 25 39 29	4 24 10	4 41 17	8 15
12	Ven.	10 2 55 57	10 10 13 26	4 53 55	5 1 50	9 14
13	Sab.	10 17 31 10	10 24 48 20	5 4 50	5 2 53	10 6
14	Dom.	11 2 4 3	11 9 17 28	4 56 3	4 44 30	10 59
15	Lun.	11 16 27 45	11 23 34 7	4 28 32	4 8 31	11 51
16	Mart.	0 0 35 53	0 7 32 30	3 44 53	3 18 10	12 41
17	Merc.	0 14 23 33	0 21 8 44	2 48 53	2 17 34	13 31
18	Giov.	0 27 47 56	1 4 21 11	1 44 46	1 11 1	14 21
19	Ven.	1 10 48 36	1 17 10 29	0 36 49	0 2 35	15 10
20	Sab.	1 23 27 11	1 29 39 9	0 31 14A	1 4 18A	16 0
21	Dom.	2 5 46 54	2 11 51 1	1 36 15	2 6 49	16 49
22	Lun.	2 17 52 6	2 23 50 48	2 35 43	3 2 43	17 38
23	Mart.	2 29 47 45	3 5 43 35	3 27 36	3 50 10	18 26
24	Merc.	3 11 38 57	3 17 34 29	4 10 14	4 27 37	19 13
25	Giov.	3 23 30 48	3 29 28 28	4 42 10	4 53 42	19 59
26	Ven.	4 5 27 59	4 11 29 50	5 2 5	5 7 11	20 43
27	Sab.	4 17 34 27	4 23 42 11	5 8 53	5 7 3	21 28
28	Dom.	4 29 53 19	5 6 8 7	5 1 38	4 52 35	22 13
29	Lun.	5 12 26 44	5 18 49 15	4 39 56	4 23 34	22 58
30	Mart.	5 25 15 41	6 1 46 1	4 3 44	3 40 32	23 45

Giorni del mese.	AR della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	* *	* *	55 15	55 29	30 10	30 17	18 0	6 1
2	11 4	1 10B	55 43	55 57	30 25	30 33	19 5	6 26
3	11 53	3 26A	56 12	56 27	30 41	30 49	20 11	6 53
4	12 44	7 55	56 41	56 56	30 57	31 5	21 17	7 21
5	13 37	12 6	57 11	57 26	31 13	31 21	22 25	7 52
6	14 32	15 41	57 41	57 55	31 30	31 37	23 54	8 29
7	15 30	18 26	58 10	58 25	31 45	31 53	* *	9 9
8	16 30	20 3	58 39	58 52	32 1	32 8	0 49	9 59
9	17 33	20 23	59 5	59 17	32 15	32 22	1 40	10 57
10	18 35	19 19	59 27	59 37	32 27	32 33	2 37	12 0
11	19 38	16 53	59 44	59 49	32 37	32 39	3 23	13 13
12	20 38	13 19	59 52	59 53	32 41	32 41	4 7	14 21
13	21 37	8 52	59 50	59 45	32 40	32 37	4 40	15 42
14	22 34	3 54	59 37	59 26	32 33	32 27	5 12	16 57
15	23 30	1 13B	59 12	58 56	32 19	32 11	5 42	18 10
16	0 24	6 9	58 38	58 17	32 0	31 49	6 12	19 20
17	1 18	10 38	57 56	57 33	31 38	31 25	6 42	20 30
18	2 12	14 25	57 10	56 46	31 13	31 0	7 14	21 39
19	3 6	17 20	56 23	56 1	30 47	30 38	7 49	22 41
20	3 59	19 18	55 41	55 22	30 24	30 13	8 28	23 38
21	4 53	20 14	55 5	54 50	30 4	29 56	9 11	* *
22	5 46	20 10	54 37	54 27	29 49	29 43	9 58	0 29
23	6 38	19 9	54 19	54 14	29 39	29 35	10 50	1 17
24	7 29	17 14	54 11	54 11	29 35	29 35	11 44	1 59
25	8 18	14 32	54 13	54 18	29 36	29 39	12 44	2 37
26	9 7	11 10	54 25	54 35	29 42	29 48	13 44	3 8
27	9 56	7 14	54 46	54 59	29 54	30 1	14 45	3 35
28	10 45	2 55	55 14	55 30	30 9	30 18	15 48	4 3
29	11 34	1 39A	55 47	56 5	30 27	30 37	16 51	4 30
30	12 25	6 14	56 23	56 41	30 47	30 57	17 57	4 57

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$12^h\ 49'$	*Occidente*
1	.2	O	.4,1. 3.
2	.1	O	3.2 .4
3	3.	O	1. 2. .4
4	3. 2.	O	.4 1o
5	.3 .2,1.	O	4.
6	o3	O	.1 .2 4.
7	1.	O	2. .3 4.
8	2.	O	.1 4. .3
9	•4 .1	O	.2, 3.
10	4. 3.	O	1. 2.
11	4. 3. 2. .1	O	
12	•1 ,4. .3 .2	O	
13	4. .3	O	.1 2.
14	.4 1.	O	2. .3
15	.4 2.	O	.1 .3
16	.4 1.	O	3. 2o
17	3. .4	O	1. 2.
18	3. 2. .1	O	.4
19	3. .2	O	1. .4
20	.3	O	.1 .2 .4
21	1.	O	2. .3 .4
22	2.	O	.1 .3 4.
23	1. .2	O	3. 4.
24	•3	O	1. .2 4.
25	3. .1,2.	O	4.
26	3. 2. 4.	O	1.
27	o1 4. .3	O	.2
28	4. 1.	O	2. .3
29	4. 2.	O	.1 .3
30	4. 1. .2	O	3.

Giorni	Fasi della Luna in tempo medio.	h	′
8	Primo quarto	0	7
14	Luna piena	22	32
22	Ultimo quarto	20	51
30	Luna nuova	12	18

Giorni	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	h	′
2	68 i ♍ 5.ª	1	41
3	♀	21	37
4	43 κ ♎ 5.ª	11	37
4	45 λ ♎ 5.ª	16	19
4	8 β ♏ prec. 2.ª	21	1
4	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	21	50
4	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	22	35
5	4 ψ Ofiuco 5.ª	4	31
5	9 ω Ofiuco 5.ª	8	6
6	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	3	25
6	58 d Ofiuco 5.ª	12	24
7	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	0	22
8	43 d ♐ 5.ª	2	4
8	44 ρ^1 ♐ 5.ª	3	55
9	9 ρ ♑ 3. 4.ª	4	35
10	13 ν ♒ 5.ª	1	26
12	18 λ ♓ 5.ª	22	4
14	63 δ ♓ 5.ª	6	49
18	74 ϵ ♉ 4.ª	9	42
20	54 χ^1 Orione 5.ª	1	42
20	44 χ^3 Orione 5.ª	6	11
22	68 k ♊ 5.ª	1	53
23	65 α^2 ♋ 5.ª	20	18
27	87 E ♌ 4. 5.ª	3	22

Eclissi de' Satell. di Giove

Tempo medio.

I. Satellite.

	Giorni	h	′	″	
	1	21	28	19	imm.
*	3	15	56	51	
*	5	10	25	30	
	7	4	54	5	
	8	23	22	43	
*	10	17	51	18	
*	12	12	19	59	
	14	6	48	36	
	16	1	17	17	
	17	19	45	54	
*	19	14	14	37	
*	21	8	43	16	
	23	3	12	0	
	24	21	40	39	
*	26	16	9	24	
*	28	10	38	7	
	30	7	14	35	

II. Satellite.

	Giorni	h	′	″	
	2	7	47	6	imm.
	5	21	5	28	
*	9	10	23	25	
	12	23	41	43	
*	16	12	59	40	
	20	2	17	54	
*	23	15	35	52	
	27	4	54	3	
	30	20	38	12	

III. Satellite.

	Giorni	h	′	″	
*	1	9	8	49	imm.
*	1	11	17	49	em.
*	8	13	10	34	imm.
*	8	15	18	56	em.
	15	17	11	59	imm.
	15	19	19	43	em.
	22	21	13	44	imm.
	22	23	17	53	em.
	30	1	15	4	imm.
	30	3	21	42	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ' "	h ' "	h ' "	h '	h '
274	1	Merc.	23 49 39,14	12 29 49,66	12 40 12,22	6 11	5 49
275	2	Giov.	23 49 20,32	12 33 27,34	12 44 8,77	6 13	5 47
276	3	Ven.	23 49 1,82	12 37 5,34	12 48 5,32	6 15	5 45
277	4	Sab.	23 48 43,65	12 40 43,67	12 52 1,87	6 16	5 44
278	5	Dom.	23 48 25,82	12 44 22,34	12 55 58,42	6 17	5 43
279	6	Lun.	23 48 8,34	12 48 1,36	12 59 54,98	6 18	5 42
280	7	Mart.	23 47 51,23	12 51 40,76	13 3 51,53	6 20	5 40
281	8	Merc.	23 47 34,53	12 55 20,56	13 7 48,08	6 21	5 39
282	9	Giov.	23 47 18,24	12 59 0,78	13 11 44,63	6 23	5 37
283	10	Ven.	23 47 2,37	13 2 41,43	13 15 41,19	6 24	5 36
284	11	Sab.	23 46 46,94	13 6 22,52	13 19 37,75	6 25	5 34
285	12	Dom.	23 46 32,00	13 10 4,09	13 23 34,30	6 27	5 33
286	13	Lun.	23 46 17,56	13 13 46,16	13 27 30,85	6 28	5 32
287	14	Mart.	23 46 3,64	13 17 28,76	13 31 27,41	6 30	5 30
288	15	Merc.	23 45 50,25	13 21 11,89	13 35 23,96	6 31	5 29
289	16	Giov.	23 45 37,42	13 24 55,56	13 39 20,51	6 33	5 27
290	17	Ven.	23 45 25,16	13 28 39,83	13 43 17,06	6 35	5 25
291	18	Sab.	23 45 13,51	13 32 24,70	13 47 13,61	6 37	5 23
292	19	Dom.	23 45 2,50	13 36 10,21	13 51 10,16	6 38	5 22
293	20	Lun.	23 44 52,12	13 39 56,34	13 55 6,71	6 40	5 20
294	21	Mart.	23 44 42,39	13 43 43,14	13 59 3,26	6 42	5 18
295	22	Merc.	23 44 33,35	13 47 30,62	14 2 59,81	6 43	5 17
296	23	Giov.	23 44 25,02	13 51 18,81	14 6 56,37	6 45	5 15
297	24	Ven.	23 44 17,39	13 55 7,73	14 10 52,92	6 47	5 13
298	25	Sab.	23 44 10,48	13 58 57,36	14 14 49,48	6 48	5 12
299	26	Dom.	23 44 4,32	14 2 47,73	14 18 46,03	6 49	5 11
300	27	Lun.	23 43 58,90	14 6 38,87	14 22 42,59	6 51	5 9
301	28	Mart.	23 43 54,23	14 10 30,73	14 26 39,14	6 52	5 8
302	29	Merc.	23 43 50,32	14 14 23,36	14 30 35,69	6 54	5 6
303	30	Giov.	23 43 47,22	14 18 16,80	14 34 32,24	6 56	5 4
304	31	Ven.	23 43 44,90	14 22 11,02	14 38 28,79	6 57	5 3

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	6 8 7 37,9	3 13 23,9	− 0,97	0,14A	0,0001669
2	6 9 6 45,6	3 36 42,4	− 0,97	0,02	9,0000411
3	6 10 5 55,2	3 59 58,4	− 0,97	0,10B	9,9999146
4	6 11 5 6,7	4 23 11,5	− 0,96	0,23	9,9997875
5	6 12 4 20,1	4 46 21,4	− 0,96	0,35	9,9996600
6	6 13 3 35,4	5 9 27,8	− 0,96	0,48	9,9995322
7	6 14 2 52,5	5 32 30,1	− 0,96	0,58	9,9994041
8	6 15 2 11,3	5 55 28,0	− 0,95	0,66	9,9992760
9	6 16 1 31,9	6 18 21,3	− 0,95	0,71	9,9991481
10	6 17 0 54,2	6 41 9,4	− 0,95	0,74	9,9990205
11	6 18 0 18,3	7 3 52,0	− 0,94	0,74	9,9988933
12	6 18 59 44,2	7 26 28,8	− 0,94	0,72	9,9987665
13	6 19 59 12,0	7 48 59,6	− 0,94	0,66	9,9986406
14	6 20 58 41,7	8 11 23,6	− 0,93	0,56	9,9985155
15	6 21 58 13,3	8 33 40,7	− 0,93	0,46	9,9983914
16	6 22 57 46,9	8 55 50,6	− 0,92	0,34	9,9982684
17	6 23 57 22,6	9 17 52,9	− 0,92	0,20	9,9981463
18	6 24 57 0,3	9 39 47,2	− 0,92	0,07	9,9980252
19	6 25 56 40,2	10 1 33,1	− 0,91	0,06A	9,9979052
20	6 26 56 22,4	10 23 10,3	− 0,91	0,19	9,9977862
21	6 27 56 6,7	10 44 38,4	− 0,90	0,28	9,9976683
22	6 28 55 53,2	11 5 56,9	− 0,89	0,36	9,9975514
23	6 29 55 42,1	11 27 5,7	− 0,88	0,42	9,9974351
24	7 0 55 33,3	11 48 4,3	− 0,87	0,44	9,9973195
25	7 1 55 26,6	12 8 52,1	− 0,87	0,42	9,9972046
26	7 2 55 22,2	12 29 28,7	− 0,85	0,37	9,9970902
27	7 3 55 19,9	12 49 53,9	− 0,85	0,31	9,9969762
28	7 4 55 19,7	13 10 7,3	− 0,84	0,22	9,9968625
29	7 5 55 21,6	13 30 8,1	− 0,83	0,12	9,9967493
30	7 6 55 25,4	13 49 56,1	− 0,82	0,00	9,9966364
31	7 7 55 31,2	14 9 31,0	− 0,81	0,13B	9,9965239

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ' "	s ° ' "	° ' "	° ' "	h '
1	Merc.	6 8 20 8	6 14 57 52	3 14 10A	2 44 54A	* *
2	Giov.	6 21 39 3	6 28 23 27	2 13 5	1 39 7	0 34
3	Ven.	7 5 10 48	7 12 0 53	1 3 27	0 26 36	1 25
4	Sab.	7 18 53 26	7 25 48 12	0 10 53B	0 48 27B	2 19
5	Dom.	8 2 45 0	8 9 43 38	1 25 30	2 1 28	3 16
6	Lun.	8 16 43 55	8 23 45 40	2 35 46	3 7 49	4 13
7	Mart.	9 0 48 43	9 7 52 53	3 37 8	4 3 12	5 12
8	Merc.	9 14 57 58	9 22 3 45	4 25 37	4 44 0	6 9
9	Giov.	9 29 9 58	10 6 16 20	4 58 3	5 7 32	7 5
10	Ven.	10 13 22 31	10 20 28 9	5 12 18	5 12 18	7 59
11	Sab.	10 27 32 49	11 4 36 5	5 7 32	4 58 6	8 51
12	Dom.	11 11 37 30	11 18 36 38	4 44 14	4 26 12	9 41
13	Lun.	11 25 33 0	0 2 26 12	4 4 20	3 39 3	10 31
14	Mart.	0 9 15 49	0 16 1 31	3 10 50	2 40 9	11 20
15	Merc.	0 22 43 0	0 29 20 4	2 7 33	1 33 32	12 10
16	Giov.	1 5 52 35	1 12 20 31	0 58 38	0 23 21	13 0
17	Ven.	1 18 43 53	1 25 2 50	0 11 50A	0 46 30A	13 50
18	Sab.	2 1 17 33	2 7 28 21	1 20 14	1 52 42	14 40
19	Dom.	2 13 35 32	2 19 39 33	2 23 33	2 52 31	15 30
20	Lun.	2 25 40 51	3 1 39 55	3 19 21	3 43 50	16 18
21	Mart.	3 7 37 18	3 13 33 34	4 5 46	4 25 0	17 6
22	Merc.	3 19 29 17	3 25 25 5	4 41 23	4 54 45	17 52
23	Giov.	4 1 21 33	4 7 19 18	5 4 59	5 11 58	18 37
24	Ven.	4 13 18 54	4 19 20 55	5 15 37	5 15 49	19 21
25	Sab.	4 25 25 55	5 1 34 24	5 12 29	5 5 34	20 5
26	Dom.	5 7 46 50	5 14 3 36	4 55 1	4 40 50	20 48
27	Lun.	5 20 25 1	5 26 51 22	4 23 2	4 1 41	21 35
28	Mart.	6 3 22 48	6 9 59 24	3 36 55	3 8 56	22 24
29	Merc.	6 16 41 10	6 23 27 57	2 38 0	2 4 26	23 15
30	Giov.	7 0 19 32	7 7 15 36	1 28 41	0 51 13	* *
31	Ven.	7 14 15 43	7 21 19 24	0 12 36	0 26 33B	0 8

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' ''	' ''	' ''	' ''	h '	h '
1	* *	* *	56 59	57 16	31 6	31 16	19 6	5 25
2	13 18	10 56A	57 32	57 47	31 24	31 33	20 15	5 54
3	14 13	14 27	58 1	58 15	31 40	31 47	21 24	6 28
4	15 11	17 31	58 25	58 35	31 53	31 59	22 32	7 7
5	16 12	19 31	58 44	58 52	32 4	32 8	23 33	7 56
6	17 14	20 14	58 58	59 4	32 11	32 15	* *	8 53
7	18 16	19 35	59 8	59 11	32 17	32 18	0 31	9 55
8	19 18	17 37	59 13	59 14	32 19	32 20	1 21	11 3
9	20 18	14 29	59 13	59 11	32 19	32 18	2 1	12 16
10	21 16	10 27	59 8	59 3	32 17	32 14	2 38	13 28
11	22 12	5 49	58 57	58 50	32 11	32 6	3 11	14 41
12	23 6	0 54	58 41	58 30	32 1	31 56	3 41	15 51
13	0 0	4 2B	58 18	58 4	31 50	31 42	4 11	17 1
14	0 54	8 39	57 49	57 33	31 34	31 25	4 40	18 10
15	1 47	12 44	57 16	56 58	31 16	31 6	5 12	19 17
16	2 41	16 2	56 40	56 21	30 56	30 46	5 46	20 23
17	3 36	18 26	56 2	55 44	30 35	30 25	6 23	21 23
18	4 30	19 49	55 27	55 11	30 16	30 8	7 13	22 19
19	5 23	20 11	54 56	54 43	29 59	29 52	7 50	23 11
20	6 16	19 32	54 32	54 23	29 46	29 41	8 40	23 54
21	7 8	17 59	54 17	54 13	29 38	29 36	9 36	* *
22	7 58	15 37	54 11	54 12	29 35	29 36	10 32	0 34
23	8 46	12 33	54 16	54 22	29 38	29 41	11 31	1 5
24	9 35	8 53	54 30	54 42	29 45	29 52	12 31	1 35
25	10 23	4 47	54 55	55 11	29 59	30 7	13 33	2 3
26	11 11	0 21	55 29	55 49	30 17	30 28	14 34	2 29
27	12 2	4 13A	56 9	56 31	30 39	30 51	15 39	2 54
28	12 54	8 43	56 54	57 17	31 4	31 16	16 48	3 21
29	13 49	12 52	57 39	58 1	31 28	31 40	17 57	3 52
30	* *	* *	58 21	58 40	31 51	32 1	19 7	4 25
31	14 47	16 21	58 56	59 10	32 10	32 18	20 19	5 2

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$12^h\ 2'$	*Occidente*
1	.4	○	.1,2. 3●
2	.4 3. .1,2.	○	
3	.3 , 2☌4	○	1.
4	.3, 1.	○	.2 4○
5		○1.	2☌3 .4
6	2.	○	.1 .3 .4
7	1. .2	○	3. .4
8		○	3. .1 .2 .4
9	●2 3. .1	○	4.
10	3. 2.	○	1. 4.
11	.3 .1	○	.2 4.
12		○1☌4☌3,2.	
13	4☌3	○	.1 .2
14	4. .2,1.	○	3.
15	4.	○	3. .1 .2
16	4. 3. 1.	○2.	
17	.4 3. 2.	○	1.
18	.4 .3 .1	○	.2
19	.4	○	3☌1 , 2.
20	4☌2 .1	○	.3
21	.2 1.	○	.4 3.
22		○	1☌3 .2 .4
23	3. 1.	○	2. .4
24	3. 2.	○	.1 .4
25	o2 .3 .1	○	.4
26	o3	○	1. 2. 4.
27	2. .1	○	.3 4.
28	.2	○1.	4. 3.
29	●4	○	.1 3☌2
30	4. 3. 1.	○	2.
31	4· 3. 2.	○	.1

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
6	Primo quarto	6h 51'
13	Luna piena	13 31
21	Ultimo quarto	7 2
29	Luna nuova	0 18

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	8 β ♏ prec. 2.ª	4 20
1	9 ω^1 ♏ 4. 5.ª	5 9
1	10 ω^2 ♏ 4. 5.ª	5 26
1	14 ν ♏ 3.ª	6 48
1	4 ψ Ofiuco 5.ª	11 40
2	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	9 56
2	58 d Ofiuco 5.ª	18 41
3	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	6 28
4	43 d ♐ 5.ª	7 40
4	44 ρ^1 ♐ 5.ª	9 29
5	9 β ♑ 3. 4.ª	9 57
6	13 ν ♒ 5.ª	6 51
9	18 λ ♓ 5.ª	4 35
10	63 δ ♓ 5.ª	12 0
14	74 ε ♉ 4. 5.ª	17 56
16	54 χ^1 Orione 5.ª	9 47
16	44 χ^3 Orione 5.ª	14 14
18	64 k □ 5.ª	9 49
20	65 α^2 ♋ 5.ª	4 34
23	87 E ♌ 4. 5.ª	12 42
25	68 i ♍ 5.ª	20 37
28	43 κ ♎ 5.ª	5 12
28	45 λ ♎ 5.ª	9 43
28	8 β ♏ prec. 2.ª	14 11

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
	h ' ''
1	1 43 17 em.
2	20 12 6
* 4	14 40 49
* 6	9 9 38
8	3 38 22
9	22 7 13
11	16 35 59
* 13	11 4 50
15	5 33 36
17	0 2 29
18	18 31 17
* 20	13 0 11
* 22	7 28 59
24	1 57 54
25	20 56 45
* 27	14 55 40
* 29	9 24 30
	II. Satellite.
* 3	9 56 19 em.
6	23 14 16
* 10	12 32 21
14	1 50 19
* 17	15 8 22
21	4 26 21
* 24	17 44 22
28	7 2 21
	III. Satellite.
6	5 16 27 imm.
* 6	7 22 32 em.
* 13	9 18 9 imm.
* 13	11 23 43 em.
* 20	13 20 4 imm.
* 20	15 25 9 em.
27	17 22 44 imm.
27	19 27 21 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
305	1	Sab.	23 43 43,34	14 26 6,01	14 42 25,34	6 58	5 2
306	2	Dom.	23 43 42,59	14 30 1,81	14 46 21,89	7 0	5 0
307	3	Lun.	23 43 42,62	14 33 58,40	14 50 18,45	7 1	4 59
308	4	Mart.	23 43 43,47	14 37 55,81	14 54 15,01	7 2	4 58
309	5	Merc.	23 43 45,13	14 41 54,03	14 58 11,57	7 4	4 56
310	6	Giov.	23 43 47,59	14 45 53,06	15 2 8,13	7 5	4 55
311	7	Ven.	23 43 50,88	14 49 52,91	15 6 4,68	7 6	4 54
312	8	Sab.	23 43 54,99	14 53 53,59	15 10 1,24	7 8	4 52
313	9	Dom.	23 43 59,92	14 57 55,09	15 13 57,79	7 9	4 51
314	10	Lun.	23 44 5,69	15 1 57,41	15 17 54,34	7 10	4 50
315	11	Mart.	23 44 12,28	15 6 0,57	15 21 50,89	7 12	4 48
316	12	Merc.	23 44 19,71	15 10 4,58	15 25 47,44	7 13	4 47
317	13	Giov.	23 44 27,99	15 14 9,43	15 29 43,99	7 14	4 46
318	14	Ven.	23 44 37,11	15 18 15,13	15 33 40,55	7 15	4 45
319	15	Sab.	23 44 47,06	15 22 21,67	15 37 37,12	7 16	4 44
320	16	Dom.	23 44 57,85	15 26 29,06	15 41 33,68	7 17	4 43
321	17	Lun.	23 45 9,50	15 30 37,30	15 45 30,23	7 19	4 41
322	18	Mart.	23 45 22,00	15 34 46,39	15 49 26,79	7 20	4 40
323	19	Merc.	23 45 35,35	15 38 56,33	15 53 23,34	7 21	4 39
324	20	Giov.	23 45 49,52	15 43 7,09	15 57 19,90	7 22	4 38
325	21	Ven.	23 46 4,51	15 47 18,67	16 1 16,45	7 23	4 37
326	22	Sab.	23 46 20,33	15 51 31,09	16 5 13,00	7 24	4 36
327	23	Dom.	23 46 36,98	15 55 44,34	16 9 9,56	7 25	4 35
328	24	Lun.	23 46 54,41	15 59 58,38	16 13 6,12	7 26	4 34
329	25	Mart.	23 47 12,61	16 4 13,19	16 17 2,68	7 27	4 33
330	26	Merc.	23 47 31,59	16 8 28,78	16 20 59,24	7 28	4 32
331	27	Giov.	23 47 51,34	16 12 45,13	16 24 55,79	7 29	4 31
332	28	Ven.	23 48 11,79	16 17 2,20	16 28 52,35	7 30	4 30
333	29	Sab.	23 48 32,94	16 21 19,96	16 32 48,90	7 31	4 29
334	30	Dom.	23 48 54,78	16 25 38,42	16 36 45,46	7 32	4 28

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	7 8 55 38,7	14 28 52,2	− 0,80	0,26B	9,9964118
2	7 9 55 48,0	14 47 59,3	− 0,79	0,38	9,9963001
3	7 10 55 59,0	15 6 52,1	− 0,78	0,50	9,9961890
4	7 11 56 11,7	15 25 30,0	− 0,77	0,58	9,9960785
5	7 12 56 25,9	15 43 52,5	− 0,76	0,64	9,9959689
6	7 13 56 41,6	16 1 59,1	− 0.75	0,67	9,9958603
7	7 14 56 58,7	16 19 49,5	− 0,74	0,67	9,9957527
8	7 15 57 17,2	16 37 23,5	− 0,73	0,64	9,9956463
9	7 16 57 37,2	16 54 40,5	− 0,71	0,59	9,9955415
10	7 17 57 58,6	17 11 40,2	− 0,70	0,51	9,9954382
11	7 18 58 21,5	17 28 22,1	− 0,69	0,40	9,9953365
12	7 19 58 45,8	17 44 45,9	− 0,68	0,28	9,9952373
13	7 20 59 11,6	18 0 51,2	− 0,67	0,16	9,9951396
14	7 21 59 39,0	18 16 37,6	− 0,65	0,03	9,9950438
15	7 23 0 8,0	18 32 4,7	− 0,64	0,10A	9,9949502
16	7 24 0 38,6	18 47 12,2	− 0,62	0,24	9,9948587
17	7 25 1 10,9	19 1 59,7	− 0,61	0,35	9,9947693
18	7 26 1 44,8	19 16 26,9	− 0,59	0,43	9,9946819
19	7 27 2 20,4	19 30 33,3	− 0,58	0,48	9,9945965
20	7 28 2 57,6	19 44 18,6	− 0,57	0,51	9,9945131
21	7 29 3 36,6	19 57 42,3	− 0,55	0,52	9,9944316
22	8 0 4 17,2	20 10 44,2	− 0,53	0,48	9,9943518
23	8 1 4 59,6	20 23 23,9	− 0,51	0,42	9,9942736
24	8 2 5 43,6	20 35 41,1	− 0,50	0,32	9,9941970
25	8 3 6 29,2	20 47 35,3	− 0,48	0,22	9,9941219
26	8 4 7 16,3	20 59 6,1	− 0,47	0,11	9,9940480
27	8 5 8 4,8	21 10 13,4	− 0,45	0,02B	9,9939753
28	8 6 8 54,6	21 20 56,8	− 0,43	0,15	9,9939039
29	8 7 9 45,7	21 31 15,8	− 0,42	0,27	9,9938339
30	8 8 10 38,0	21 41 10,2	− 0,40	0,39	9,9937651

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Sab.	7 28 26 7	8 5 35 16	1 5 34B	1 43 47B	1 6
2	Dom.	8 12 46 15	8 19 58 27	2 20 32	2 55 8	2 5
3	Lun.	8 27 11 14	9 4 24 2	3 27 0	3 55 35	3 5
4	Mart.	9 11 36 20	9 18 47 38	4 20 23	4 41 2	4 4
5	Merc.	9 25 57 31	10 3 5 56	4 57 13	5 8 44	5 1
6	Giov.	10 10 11 52	10 17 15 5	5 15 28	5 17 24	5 55
7	Ven.	10 24 16 2	11 1 14 11	5 14 35	5 7 8	6 47
8	Sab.	11 8 9 25	11 15 1 37	4 55 16	4 39 14	7 37
9	Dom.	11 21 50 42	11 28 36 38	4 19 22	3 56 1	8 26
10	Lun.	0 5 19 20	0 11 58 46	3 29 36	3 0 31	9 14
11	Mart.	0 18 34 54	0 25 7 42	2 29 16	1 56 18	10 3
12	Merc.	1 1 37 10	1 8 3 16	1 22 6	0 47 8	10 52
13	Giov.	1 14 26 1	1 20 45 29	0 11 53	0 23 12A	11 41
14	Ven.	1 27 1 43	2 3 14 48	0 57 42A	1 31 13	12 32
15	Sab.	2 9 24 52	2 15 52 6	2 3 22	2 33 51	13 22
16	Dom.	2 21 36 43	2 27 38 58	3 2 21	3 28 36	14 11
17	Lun.	3 3 39 8	3 9 37 33	3 52 23	4 13 31	14 59
18	Mart.	3 15 34 37	3 21 30 42	4 31 48	4 47 7	15 45
19	Merc.	3 27 26 16	4 3 21 48	4 59 20	5 8 21	16 31
20	Giov.	4 9 17 48	4 15 14 50	5 14 6	5 16 29	17 15
21	Ven.	4 21 13 26	4 27 14 12	5 15 28	5 11 0	17 58
22	Sab.	5 3 17 44	5 9 24 35	5 3 3	4 51 37	18 41
23	Dom.	5 15 35 21	5 21 50 34	4 36 42	4 18 20	19 26
24	Lun.	5 28 10 44	6 4 36 21	3 56 35	3 31 34	20 12
25	Mart.	6 11 7 46	6 17 45 19	3 3 27	2 32 28	21 1
26	Merc.	6 24 29 11	7 1 19 28	1 58 54	1 23 6	21 53
27	Giov.	7 8 16 6	7 15 18 52	0 45 33	0 6 46	22 49
28	Ven.	7 22 27 25	7 29 41 13	0 32 37B	1 11 55B	23 49
29	Sab.	8 6 59 34	8 14 21 40	1 50 26	2 27 25	* *
30	Dom.	8 21 46 36	8 29 13 19	3 2 7	3 33 50	0 50

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	15 49	18 51A	59 22	59 32	32 25	32 30	21 15	5 48
2	16 52	20 4	59 38	59 42	32 33	32 35	22 26	6 44
3	17 56	19 53	59 43	59 41	32 36	32 35	23 28	7 45
4	18 59	18 17	59 38	59 33	32 34	32 31	* *	8 54
5	20 0	15 27	59 25	59 17	32 26	32 22	0 3	10 7
6	20 58	11 40	59 7	58 56	32 16	32 10	0 40	11 18
7	21 54	7 14	58 45	58 32	32 4	31 57	1 13	12 29
8	22 48	2 28	58 20	58 6	31 51	31 43	1 43	13 39
9	23 41	2 22B	57 53	57 39	31 36	31 28	2 12	14 48
10	0 34	7 1	57 25	57 11	31 21	31 13	2 40	15 56
11	1 26	11 14	56 57	56 42	31 5	30 58	3 10	17 4
12	2 19	14 48	56 28	56 13	30 49	30 41	3 42	18 9
13	3 13	17 33	55 59	55 44	30 34	30 27	4 7	19 10
14	4 7	19 22	55 30	55 16	30 18	30 11	4 58	20 9
15	5 1	20 8	55 3	54 50	30 3	29 56	5 43	21 2
16	5 55	19 54	54 39	54 29	29 50	29 44	6 32	21 48
17	6 47	18 42	54 20	54 13	29 40	29 36	7 25	22 30
18	7 37	16 39	54 8	54 5	29 33	29 31	8 20	23 6
19	8 27	13 52	54 5	54 7	29 31	29 32	9 19	23 38
20	9 15	10 28	54 11	54 17	29 35	29 38	10 18	* *
21	10 2	6 36	54 27	54 38	29 43	29 49	11 18	0 5
22	10 50	2 23	54 53	55 10	29 58	30 7	12 18	0 30
23	11 38	2 4A	55 29	55 50	30 17	30 29	13 20	0 55
24	12 28	6 32	56 13	56 38	30 41	30 55	14 24	1 22
25	13 21	10 51	57 4	57 32	31 9	31 24	15 32	1 50
26	14 18	14 42	57 59	58 25	31 39	31 53	16 42	2 20
27	15 18	17 45	58 51	59 16	32 7	32 21	17 54	2 55
28	16 21	19 40	59 38	59 57	32 33	32 43	19 6	3 37
29	* *	* *	60 12	60 24	32 52	32 58	20 10	4 29
30	17 27	20 10	60 33	60 37	33 3	33 5	21 10	5 30

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	10h 53′	*Occidente*
1	4. 3. 1. .2	○	
2	.4 .3	○	1. 2.
3	.4 .1,2.	○	.3
4	.4 .2	○	1. .3
5	.4 1.	○	.2, 3.
6	1♂3	○	2. 4○
7	3. 2.	○	.1 .4
8	3. 1. .2	○	.4
9	.3	○	1. .2 .4
10	●2 .1	○	.3 .4
11	.2	○	1. .3 .4
12	.1	○	.2 3. 4.
13	1♂3	○	2. 4.
14	3. 2.	○	.1,4.
15	3. .2,1♂4	○	
16	4. .3	○	.1 .2
17	4. .1	○	2. .3
18	4. 2.	○	1. .3
19	4. .1	○	.2 3.
20	●3 .4	○	1. 2.
21	.4 3. 2.	○	.1
22	3. 4♂2,1.	○	
23	.3	○	.4 .1 .2
24	1.	○	2. .3 .4
25	2.	○	.1 .3 .4
26	.1	○	3. .4,2○
27		○	1♂3 2. .4
28	○1 3. 2.	○	4.
29	3. .2 .1	○	4.
30	.3	○	.1 .2, 4.

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
5	Primo quarto	$15^h 29'$
13	Luna piena	7 19
21	Ultimo quarto	12 4
28	Luna nuova	11 29
	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
1	43 d ♐ 5.ª	15 19
1	44 ρ^1 ♐ 3.ª	17 5
2	9 β ♑ 3. 4.ª	16 46
3	13 ν ♒ 5.ª	13 5
6	18 λ ♓ 5.ª	10 0
7	63 δ ♓ 5.ª	17 39
12	74 ε ♉ 4.ª	0 55
13	54 χ^1 Orione 5.ª	16 55
13	44 χ^3 Orione 5.ª	21 25
15	68 k □ 5.ª	16 57
17	65 α^2 ♋ 5.ª	11 32
20	87 E ♌ 4. 5.ª	20 54
23	68 i ♍ 5.ª	6 22
25	43 κ ♎ 5.ª	16 12
25	48 λ ♎ 5.ª	20 46
26	8 β Prec. 2.ª	1 17
26	14 ν ♏ 4.ª	3 41
26	4 ψ Ofiuco 5.ª	8 29
26	40 ρ Ofiuco 5.ª	11 55
27	58 d Ofiuco 5.ª	14 38
28	13 μ^1 ♐ 3. 4.ª	1 50
28	☿	7 10
29	43 d ♐ 5.ª	1 42
29	44 ρ^1 ♐ 5.ª	3 26

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove *Tempo medio.*
	I. Satellite.
1	$3^h 53' 28''$ em.
2	22 22 20
* 4	16 51 18
* 6	11 20 9
* 8	5 49 8
10	0 18 2
11	18 47 1
* 13	13 15 54
* 15	7 44 55
17	2 13 50
18	20 43 51
* 20	15 11 45
* 22	9 40 47
24	4 9 43
25	22 38 45
* 27	17 7 40
* 29	11 36 43
* 31	6 5 40
	II. Satellite.
1	20 20 21 em.
* 5	9 38 21
8	22 56 19
* 12	12 14 19
16	1 32 17
19	14 50 16
23	4 8 14
26	17 26 13
* 30	6 44 10
	III. Satellite.
4	21 25 1 imm.
4	23 29 12 em.
12	1 27 33 imm.
12	3 31 21 em.
* 19	5 29 41 imm.
* 19	7 33 7 em.
* 26	9 31 45 imm.
* 26	11 34 53 em.
	Non vi saranno eclissi del IV satellite per tutto il 1845.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.			Tempo sidereo a mezzodì vero.			Tempo sidereo a mezzodì medio.			Nascere del Sole a tempo vero.		Tramontare del Sole a tempo vero.	
			h	'	''	h	'	''	h	'	''	h	'	h	'
335	1	Lun.	23	49	17,28	16	29	57,53	16	40	42,01	7	33	4	27
336	2	Mart.	23	49	40,40	16	34	17,27	16	44	38,57	7	33	4	27
337	3	Merc.	23	50	4,13	16	38	37,63	16	48	35,13	7	34	4	26
338	4	Giov.	23	50	28,43	16	42	58,56	16	52	31,69	7	35	4	25
339	5	Ven.	23	50	53,29	16	47	20,05	16	56	28,25	7	36	4	24
340	6	Sab.	23	51	18,68	16	51	42,07	17	0	24,81	7	36	4	24
341	7	Dom.	23	51	44,58	16	56	4,59	17	4	21,37	7	37	4	23
342	8	Lun.	23	52	10,93	17	0	27,56	17	8	17,92	7	37	4	23
343	9	Mart.	23	52	37,72	17	4	50,99	17	12	14,48	7	38	4	22
344	10	Merc.	23	53	4,93	17	9	14,83	17	16	11,03	7	38	4	22
345	11	Giov.	23	53	32,53	17	13	39,06	17	20	7,59	7	39	4	21
346	12	Ven.	23	54	0,50	17	18	3,66	17	24	4,14	7	39	4	21
347	13	Sab.	23	54	28,80	17	22	28,59	17	28	0,70	7	40	4	20
348	14	Dom.	23	54	57,42	17	26	53,85	17	31	57,26	7	40	4	20
349	15	Lun.	23	55	26,30	17	31	19,38	17	35	53,82	7	40	4	20
350	16	Mart.	23	55	55,44	17	35	45,16	17	39	50,38	7	41	4	19
351	17	Merc.	23	56	24,82	17	40	11,17	17	43	46,94	7	41	4	19
352	18	Giov.	23	56	54,38	17	44	37,37	17	47	43,50	7	41	4	19
353	19	Ven.	23	57	24,11	17	49	3,73	17	51	40,05	7	42	4	18
354	20	Sab.	23	57	53,98	17	53	30,24	17	55	36,61	7	42	4	18
355	21	Dom.	23	58	23,92	17	57	56,83	17	59	33,17	7	42	4	18
356	22	Lun.	23	58	53,93	18	2	23,47	18	3	29,72	7	42	4	18
357	23	Mart.	23	59	23,98	18	6	50,16	18	7	26,28	7	42	4	18
358	24	Merc.	23	59	55,01	18	11	16,85	18	11	22,84	7	42	4	18
359	25	Giov.	0	0	24,02	18	15	43,49	18	15	19,40	7	41	4	19
360	26	Ven.	0	0	53,96	18	20	10,07	18	19	15,96	7	41	4	19
361	27	Sab.	0	1	23,76	18	24	36,51	18	23	12,52	7	41	4	19
362	28	Dom.	0	1	53,42	18	29	2,80	18	27	9,07	7	40	4	20
363	29	Lun.	0	2	22,87	18	33	28,89	18	31	5,63	7	40	4	20
364	30	Mart.	0	2	52,10	18	37	54,76	18	35	2,19	7	39	4	21
365	31	Merc.	0	3	21,07	18	42	20,36	18	38	58,74	7	39	4	21

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ' "	° ' "	"	"	
1	8 9 11 31,3	21 50 39,7	− 0,39	0,48B	9,9936977
2	8 10 12 25,6	21 59 44,1	− 0,37	0,56	9,9936316
3	8 11 13 20,8	22 8 22,9	− 0,35	0,59	9,9935671
4	8 12 14 16,8	22 16 36,0	− 0,34	0,60	9,9935041
5	8 13 15 13,5	22 24 23,1	− 0,32	0,58	9,9934427
6	8 14 16 11,0	22 31 43,9	− 0,30	0,53	9,9933831
7	8 15 17 9,2	22 38 38,3	− 0,25	0,46	9,9933256
8	8 16 18 7,9	22 45 5,9	− 0,26	0,34	9,9932701
9	8 17 19 7,2	22 51 6,8	− 0,24	0,23	9,9932170
10	8 18 20 7,0	22 56 40,5	− 0,22	0,11	9,9931664
11	8 19 21 7,4	23 1 46,9	− 0,20	0,03A	9,9931183
12	8 20 22 8,4	23 6 26,0	− 0,18	0,16	9,9930728
13	8 21 23 10,1	23 10 37,5	− 0,16	0,29	9,9930299
14	8 22 24 12,5	23 14 21,3	− 0,14	0,41	9,9929897
15	8 23 25 15,6	23 17 37,3	− 0,12	0,49	9,9929523
16	8 24 26 19,4	23 20 25,4	− 0,10	0,55	9,9929176
17	8 25 27 23,9	23 22 45,4	− 0,08	0,58	9,9928856
18	8 26 28 29,1	23 24 37,3	− 0,06	0,58	9,9928562
19	8 27 29 35,0	23 26 1,1	− 0,04	0,56	9,9928293
20	8 28 30 41,7	23 26 56,6	− 0,02	0,50	9,9928050
21	8 29 31 49,1	23 27 23,8	− 0,00	0,42	9,9927832
22	9 0 32 57,2	23 27 22,7	+ 0,03	0,32	9,9927636
23	9 1 34 5,9	23 26 53,3	0,05	0,21	9,9927461
24	9 2 35 15,2	23 25 55,6	0,07	0,08	9,9927305
25	9 3 36 25,1	23 24 29,5	0,09	0,04B	9,9927168
26	9 4 37 35,5	23 22 35,1	0,11	0,17	9,9927048
27	9 5 38 46,1	23 20 12,6	0,13	0,30	9,9926946
28	9 6 39 57,1	23 17 21,9	0,14	0,39	9,9926861
29	9 7 41 8,3	23 14 3,0	0,16	0,47	9,9926792
30	9 8 42 19,5	23 10 16,2	0,18	0,51	9,9926740
31	9 9 43 30,5	23 6 1,6	+ 0,20	0,53	9,9926705

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LONGITUDINE DELLA LUNA a mezzanotte media.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezzodì medio.	LATITUDINE DELLA LUNA a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Lun.	9 6 40 47	9 14 7 57	4 1 57B	4 25 55B	1 52
2	Mart.	9 21 33 47	9 28 57 21	4 45 19	4 59 50	2 52
3	Merc.	10 6 17 49	10 13 34 29	5 9 20	5 13 45	3 50
4	Giov.	10 20 46 48	10 27 54 22	5 13 9	5 7 42	4 44
5	Ven.	11 4 56 54	11 11 54 17	4 57 40	4 43 22	5 35
6	Sab.	11 18 46 32	11 25 33 44	4 25 8	4 3 23	6 24
7	Dom.	0 2 16 3	0 8 53 45	3 38 33	3 11 2	7 12
8	Lun.	0 15 27 5	0 21 56 20	2 41 19	2 9 49	8 0
9	Mart.	0 28 21 49	1 4 43 48	1 36 59	1 3 15	8 48
10	Merc.	1 11 2 34	1 17 18 22	0 29 3	0 5 13A	9 37
11	Giov.	1 23 31 27	1 29 42 0	0 39 8A	1 12 19	10 26
12	Ven.	2 5 50 15	2 11 56 22	1 44 25	2 15 5	11 15
13	Sab.	2 18 0 33	2 24 2 59	2 44 1	3 10 56	12 5
14	Dom.	3 0 3 49	3 6 3 14	3 35 33	3 57 40	12 53
15	Lun.	3 12 1 26	3 17 58 37	4 17 4	4 33 36	13 41
16	Mart.	3 23 55 0	3 29 50 50	4 47 7	4 57 30	14 26
17	Merc.	4 5 46 24	4 11 42 0	5 4 40	5 8 34	15 11
18	Giov.	4 17 38 2	4 23 34 53	5 9 9	5 6 24	15 54
19	Ven.	4 29 33 0	5 5 32 51	5 0 19	4 50 55	16 37
20	Sab.	5 11 34 59	5 17 39 56	4 38 14	4 22 19	17 20
21	Dom.	5 23 48 15	6 0 0 33	4 3 15	3 41 8	18 4
22	Lun.	6 6 17 25	6 12 39 24	3 16 5	2 48 17	18 50
23	Mart.	6 19 7 5	6 25 40 57	2 17 56	1 45 19	19 39
24	Merc.	7 2 21 28	7 9 8 57	1 10 43	0 34 33	20 32
25	Giov.	7 16 3 39	7 23 5 36	0 2 44B	0 40 34B	21 29
26	Ven.	8 0 14 42	8 7 30 38	1 18 22	1 55 28	22 29
27	Sab.	8 14 52 50	8 22 20 33	2 31 7	3 4 35	23 31
28	Dom.	8 29 52 48	9 7 28 25	3 35 8	4 2 5	* *
29	Lun.	9 15 6 6	9 22 44 29	4 24 49	4 42 49	0 34
30	Mart.	10 0 22 8	10 7 57 43	4 55 44	5 3 22	1 35
31	Merc.	10 15 29 55	10 22 57 39	5 5 39	5 2 42	2 33

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h '	° '	' "	' "	' "	' "	h '	h '
1	18 33	19 8A	60 38	60 34	33 6	33 4	21 59	6 38
2	19 37	16 41	60 27	60 16	33 0	32 54	22 41	7 52
3	20 39	13 7	60 2	59 46	32 46	32 38	23 16	9 7
4	21 37	8 46	59 29	59 9	32 28	32 17	23 47	10 20
5	22 32	4 0	58 49	58 29	32 6	31 55	* *	11 31
6	23 25	0 52B	58 8	57 48	31 44	31 33	0 17	12 41
7	0 18	5 35	57 28	57 9	31 22	31 12	0 45	13 49
8	1 9	9 55	56 51	56 33	31 2	30 52	1 13	14 56
9	2 2	13 40	56 16	56 1	30 43	30 35	1 45	16 0
10	2 54	16 41	55 46	55 32	30 27	30 19	2 18	17 3
11	3 48	18 49	55 19	55 7	30 12	30 5	2 55	18 2
12	4 41	19 59	54 57	54 45	30 0	29 54	3 36	18 53
13	5 35	20 8	54 35	54 26	29 48	29 43	4 24	19 43
14	6 27	19 19	54 18	54 11	29 38	29 35	5 15	20 26
15	7 19	17 35	54 5	54 1	29 32	29 29	6 11	21 6
16	8 9	15 4	53 58	53 57	29 28	29 27	7 7	21 37
17	8 57	11 55	53 58	54 1	29 28	29 30	8 7	22 7
18	9 44	8 14	54 5	54 12	29 32	29 35	9 6	22 33
19	10 31	4 12	54 21	54 32	29 40	29 46	10 7	22 59
20	11 18	0 5A	54 46	55 2	29 54	30 2	11 7	23 25
21	12 6	4 27	55 20	55 41	30 12	30 24	12 9	23 51
22	12 56	8 45	56 4	56 29	30 36	30 50	13 14	* *
23	13 49	12 45	56 55	57 23	31 4	31 19	14 21	0 18
24	14 46	16 12	57 52	58 22	31 35	31 51	15 31	0 51
25	15 48	18 45	58 52	59 20	32 7	32 23	16 41	1 28
26	16 52	20 4	59 47	60 11	32 38	32 51	17 49	2 14
27	17 58	19 54	60 33	60 51	33 3	33 13	18 51	3 8
28	* *	* *	61 4	61 13	33 20	33 25	19 48	4 12
29	19 5	18 10	61 17	61 16	33 27	33 27	20 34	5 25
30	20 10	15 2	61 10	61 0	33 24	33 18	21 15	6 42
31	21 12	10 52	60 46	60 27	33 11	33 0	21 56	8 0

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

	Oriente	$9^h\ 41'$	*Occidente*
1	1.	O	4. 2δ3
2	2δ4	O	.1 .3
3	4. 1. .2	O	3.
4	4.	O	1δ3 .2
5	4. 3. 2δ1	O	
6	.4 3. .2	O	1●
7	.4 .3	O	2δ1
8	.4 1.	O	.3, 2.
9	2. .4	O	.1 .3
10		O	1.3. .2 .4
11	.4 .1	O	.3 .2
12	●2 3. .1	O	.4
13	2.	O	.1 .3 4.
14	.3	O	2δ1 .4
15	o3 1.	O	2. 4.
16	2.	O	.1 .3 4.
17	1δ2	O	4. .3
18	4.	O	1δ3 .2
19	4. 3. .1	O	2.
20	4. 3. 2.	O	1.
21	4. .3 .1	O	2o
22	.4 .3, 1.	O	.2
23	.4 2.	O	.1 .3
24	.4 2. 1.	O	.3
25	.4	O	.1,3δ2
26	.1,3δ4	O	2.
27	3. 2.	O	1. .4
28	.3 2δ1	O	.4
29	.3	O	.2 .4 1●
30	2.	O	.1 .3 .4
31	2. 1.	O	.3 4.

Semidiametro del Sole, tempo sidereo impiegato dal Sole a passare pel meridiano, e longitudine del nodo della Luna a mezzodì medio.

Giorni.		Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.	Giorni.		Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.
		′ ″	′ ″	s ° ′			′ ″	′ ″	s ° ′
Gennajo	1	16 17,8	2 22,0	8 2 52	Luglio	6	15 45,6	2 17,1	7 23 0
	7	16 17,7	2 21,4	8 2 33		12	15 45,7	2 16,4	7 22 41
	13	16 17,4	2 20,5	8 2 14		18	15 46,0	2 15,5	7 22 22
	19	16 16,9	2 19,3	8 1 55		24	15 46,5	2 14,6	7 22 3
	25	16 16,3	2 18,1	8 1 35		30	15 47,2	2 13,6	7 21 44
	31	16 15,5	2 16,7	8 1 16	Agosto	5	15 48,0	2 12,6	7 21 25
Febbrajo	6	16 14,5	2 15,2	8 0 57		11	15 48,9	2 11,6	7 21 6
	12	16 13,4	2 13,8	8 0 38		17	15 50,0	2 10,6	7 20 47
	18	16 12,2	2 12,5	8 0 19		23	15 51,2	2 9,8	7 20 28
	24	16 10,8	2 11,5	8 0 0		29	15 52,5	2 9,0	7 20 9
Marzo	2	16 9,4	2 10,6	7 29 41	Settembre	4	15 53,9	2 8,6	7 19 50
	8	16 7,9	2 9,8	7 29 21		0	15 55,4	2 8,3	7 19 31
	14	16 6,3	2 9,3	7 29 2		16	15 57,0	2 8,1	7 19 12
	20	16 4,6	2 8,9	7 28 43		22	15 58,6	2 8,2	7 18 53
	26	16 2,9	2 8,8	7 28 24		28	16 0,2	2 8,6	7 18 34
Aprile	1	16 1,2	2 8,9	7 28 5	Ottobre	4	16 1,8	2 9,0	7 18 15
	7	15 59,6	2 9,2	7 27 46		0	16 3,5	2 9,7	7 17 56
	13	15 58,0	2 9,7	7 27 27		16	16 5,2	2 10,7	7 17 37
	19	15 56,5	2 10,3	7 27 7		22	16 6,7	2 11,7	7 17 18
	25	15 54,9	2 11,1	7 26 48		28	16 8,3	2 13,0	7 16 59
Maggio	1	15 53,5	2 12,0	7 26 29	Novembre	3	16 9,8	2 14,3	7 16 40
	7	15 52,1	2 13,0	7 26 10		9	16 11,3	2 15,7	7 16 21
	13	15 50,8	2 14,0	7 25 51		15	16 12,6	2 17,2	7 16 2
	19	15 49,7	2 14,9	7 25 32		21	16 13,8	2 18,5	7 15 43
	25	15 48,7	2 15,8	7 25 13		27	16 14,8	2 19,9	7 15 24
	31	15 47,8	2 16,6	7 24 54	Dicembre	3	16 15,7	2 20,8	7 15 5
Giugno	6	15 47,0	2 17,2	7 24 35		9	16 16,4	2 21,7	7 14 46
	12	15 46,4	2 17,7	7 24 16		15	16 17,0	2 22,3	7 14 27
	18	15 46,0	2 17,8	7 23 57		21	16 17,5	2 22,5	7 14 8
	24	15 45,7	2 17,8	7 23 3[illegible]		27	16 17,6	2 22,4	7 13 48
	30	15 45,5	2 17,5	7 23 19					

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine	Latitudine	Ascensione retta	Declinazione	Nascere	Passaggio pel merid.	Tramontare
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	9 28 54	0 7A	20 4	20 29A	20 45	1 20	5 55
	7	9 28 1	1 42B	19 58	18 56	20 7	0 50	5 33
	13	9 21 2	3 10	19 28	18 39	19 14	23 57	4 40
	19	9 14 53	3 22	19 2	19 16	18 27	23 7	3 47
	25	9 13 36	2 35	18 57	20 12	18 3	22 39	3 15
	31	9 16 4	1 30	19 6	20 56	17 57	22 28	2 59
Febbrajo	6	9 22 4	0 21	19 34	21 12	17 58	22 29	3 0
	12	9 29 5	0 27A	20 4	20 47	18 2	22 35	3 8
	18	10 7 6	1 12	20 39	19 40	18 7	22 45	3 23
	24	10 15 50	1 45	21 15	17 41	18 10	22 58	3 46
Marzo	2	10 25 15	2 4	21 52	15 5	18 12	23 12	4 12
	8	11 5 17	2 11	22 32	11 37	18 12	23 27	4 42
	14	11 16 2	2 1	23 11	7 23	18 10	23 43	5 16
	20	11 27 38	1 33	23 52	2 26A	18 8	0 1	5 54
	26	0 9 31	0 46	0 35	3 2B	18 5	0 20	6 35
Aprile	1	0 21 43	0 18B	1 19	8 42	18 1	0 40	7 19
	7	1 3 6	1 25	2 1	13 52	17 58	0 59	8 0
	13	1 12 25	2 22	2 36	17 49	17 52	1 10	8 29
	19	1 18 49	2 50	3 2	20 10	17 52	1 12	8 42
	25	1 21 51	2 40	3 14	20 49	17 27	1 1	8 35
Maggio	1	1 21 35	1 45	3 15	19 53	17 8	0 38	8 8
	7	1 18 49	0 14	3 5	17 39	16 45	0 4	7 23
	13	1 15 23	1 29A	2 53	15 2	16 21	23 28	6 35
	19	1 13 16	2 50	2 46	13 6	16 0	22 58	5 36
	25	1 13 37	3 36	2 49	12 29	15 42	22 37	5 32
	31	1 16 36	3 45	3 0	13 11	15 27	22 25	5 23
Gingno	6	1 21 55	3 25	3 21	14 57	15 15	22 22	5 29
	12	1 29 16	2 38	3 50	17 23	15 11	22 28	5 45
	18	2 8 29	1 37	4 27	20 6	15 11	22 41	6 11
	24	2 19 25	0 27	5 13	22 33	15 20	23 3	6 46
	30	3 1 46	0 37B	6 7	24 3	15 42	23 33	7 24

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	3 14 43	1 26B	7 3	23 2B	16 21	0 7	7 53
	12	3 27 21	1 47	8 58	22 27	16 56	0 38	8 20
	18	4 9 6	1 44	8 48	19 40	17 34	1 3	8 32
	24	4 19 50	1 21	9 30	16 8	18 10	1 21	8 32
	30	4 29 30	0 40	10 7	12 17	18 40	1 35	8 30
Agosto	5	5 8 5	0 11A	10 38	8 22	19 6	1 43	8 20
	11	5 15 33	1 10	11 4	4 38	19 23	1 45	8 7
	17	5 21 36	2 12	11 25	1 17B	19 33	1 42	7 51
	23	5 25 49	3 13	11 39	1 17A	19 34	1 32	7 20
	29	5 27 27	4 2	11 44	2 41	19 22	1 14	7 6
Settem.	4	5 25 38	4 19	11 37	2 15A	18 49	0 43	6 37
	10	5 20 34	3 40	11 19	0 20B	17 58	0 2	6 6
	16	5 15 6	2 1	11 2	4 0	17 1	23 20	5 39
	22	5 13 31	0 7	10 58	6 24	16 25	22 54	5 23
	28	5 17 30	1 25B	11 15	6 8	16 19	22 47	5 15
Ottobre	4	5 25 33	1 52	11 34	3 30B	16 36	22 54	5 12
	10	6 5 28	1 53	12 22	0 25A	17 3	23 5	5 7
	16	6 15 49	1 31	13 0	4 48	17 37	23 21	5 5
	22	6 26 4	0 58	13 37	9 8	18 9	23 35	5 1
	28	7 6 0	0 19	14 14	13 12	18 40	23 48	4 56
Novem.	3	7 15 39	0 21A	14 51	16 51	19 9	0 1	4 55
	9	7 25 3	1 0	15 29	19 59	19 38	0 15	4 52
	15	8 4 16	1 35	16 7	22 32	20 7	0 30	4 53
	21	8 13 20	2 3	16 46	24 25	20 32	0 45	4 58
	27	8 22 9	2 20	17 25	25 31	20 51	0 59	5 7
Dicem.	3	9 0 32	2 22	18 2	25 48	21 6	1 13	5 20
	9	9 7 51	2 1	18 34	25 14	21 12	1 22	5 32
	15	9 12 40	1 6	18 55	23 56	21 4	1 20	5 36
	21	9 12 26	0 32	18 54	22 20	20 29	0 54	5 19
	27	9 6 11	2 22	18 26	20 55	19 21	0 3	4 35

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo 1	8 8 17	1 29B	16 27	20 13A	17 7	21 43	2 19
7	8 15 42	1 14	16 58	21 24	17 21	21 51	2 21
13	8 23 7	0 59	17 30	22 14	17 33	21 58	2 23
19	9 0 33	0 43	18 2	22 41	17 44	22 7	2 30
25	9 7 59	0 25	18 34	22 44	17 53	22 16	2 39
31	9 15 26	0 7	19 6	22 22	17 59	22 24	2 49
Febbrajo 6	9 22 55	0 9A	19 39	21 35	18 3	22 32	3 1
12	10 0 22	0 24	20 10	20 26	18 5	22 40	3 15
18	10 7 49	0 37	20 41	18 54	18 6	22 48	3 30
24	10 15 16	0 49	21 11	17 3	18 4	22 55	3 46
Marzo 2	10 22 44	1 1	21 41	14 55	18 1	23 1	4 1
8	11 0 11	1 11	22 10	12 32	17 55	23 6	4 17
14	11 7 38	1 19	22 39	9 56	17 49	23 11	4 33
20	11 15 5	1 24	23 7	7 11	17 42	23 16	4 49
26	11 22 31	1 27	23 34	4 19	17 34	23 19	5 5
Aprile 1	11 29 57	1 28	0 2	1 22	17 25	23 23	5 21
7	0 7 23	1 27	0 28	1 34B	17 17	23 26	5 35
13	0 14 48	1 23	0 56	4 32	17 9	23 30	5 51
19	0 22 13	1 17	1 23	7 26	17 1	23 34	6 7
25	0 29 37	1 9	1 50	10 14	16 52	23 38	6 23
Maggio 1	1 7 1	0 59	2 19	12 54	16 46	23 42	6 38
7	1 14 24	0 48	2 48	14 55	16 40	23 47	6 54
13	1 21 48	0 35	3 18	17 38	16 34	23 53	7 12
19	1 29 11	0 22	3 48	19 37	16 31	0 0	7 29
25	2 6 33	0 8	4 18	21 16	16 30	0 7	7 44
31	2 13 55	0 6B	4 50	22 35	16 31	0 15	7 59
Giugno 6	2 21 18	0 20	5 21	23 30	16 34	0 23	8 12
12	2 28 40	0 34	5 53	24 1	16 40	0 31	8 22
18	3 6 2	0 47	6 26	24 6	16 49	0 40	8 31
24	3 13 24	0 59	6 58	23 45	16 58	0 48	8 38
30	3 20 45	1 10	7 30	23 0	17 11	0 57	8 43

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	3 28 7	1 18B	8 1	21 49B	17 25	1 4	8 43
	12	4 5 28	1 25	8 32	20 17	17 40	1 12	8 44
	18	4 12 50	1 29	9 2	18 24	17 56	1 18	8 40
	24	4 20 10	1 31	9 32	16 12	18 12	1 24	8 36
	30	4 27 31	1 31	10 1	13 46	18 28	1 29	8 30
Agosto	5	5 4 51	1 28	10 28	11 6	18 44	1 33	8 22
	11	5 12 11	1 22	10 56	8 16	19 0	1 37	8 14
	17	5 19 31	1 14	11 22	5 18	19 15	1 40	8 5
	23	5 26 50	1 4	11 49	2 15	19 30	1 43	7 56
	29	6 4 8	0 53	12 16	0 50A	19 46	1 46	7 46
Settem.	4	6 11 25	0 38	12 42	3 56	20 2	1 45	7 36
	10	6 18 42	0 20	13 9	6 59	20 18	1 52	7 26
	16	6 25 58	0 3	13 36	9 58	20 33	1 55	7 17
	22	7 3 13	0 16A	14 3	12 49	20 49	1 59	7 9
	28	7 10 27	0 36	14 30	15 30	21 5	2 3	7 1
Ottobre	4	7 17 39	0 55	14 59	17 58	21 21	2 7	6 53
	10	7 24 50	1 15	15 28	20 10	21 35	2 12	6 49
	16	8 1 59	1 34	15 58	22 5	21 51	2 18	6 45
	22	8 9 7	1 50	16 28	23 38	22 7	2 25	6 43
	28	8 16 13	2 6	16 59	24 49	22 10	2 32	6 44
Novem.	3	8 23 16	2 20	17 30	25 36	22 32	2 39	6 46
	9	9 0 17	2 30	18 0	25 57	22 42	2 47	6 52
	15	9 7 14	2 37	18 31	25 52	22 49	2 54	6 59
	21	9 14 7	2 41	19 2	25 22	22 52	3 1	7 10
	27	9 20 56	2 40	19 32	24 27	22 53	3 7	7 21
Dicem.	3	9 27 37	2 34	20 1	23 10	22 51	3 12	7 33
	9	10 4 11	2 24	20 28	21 33	22 47	3 16	7 46
	15	10 10 35	2 8	20 54	19 38	22 41	3 19	7 57
	21	10 16 48	1 46	21 19	17 29	22 30	3 19	8 8
	27	10 22 46	1 17	21 41	15 8	22 19	3 19	8 19

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo 1	7 17 52	0 45B	15 3	16 33A	15 25	20 18	1 11
7	7 21 42	0 42	15 18	17 35	15 21	20 9	0 57
13	7 25 35	0 38	15 35	18 36	15 18	20 1	0 44
19	7 29 23	0 35	15 50	19 32	15 14	19 53	0 32
25	8 3 13	0 31	16 6	20 22	15 11	19 46	0 21
31	8 7 5	0 27	16 22	21 6	15 7	19 38	0 9
Febbrajo 6	8 10 52	0 23	16 38	21 46	15 3	19 31	23 59
12	8 14 41	0 18	16 54	22 18	14 58	19 23	23 48
18	8 18 29	0 13	17 11	22 54	14 55	19 16	23 37
24	8 22 17	0 7	17 27	23 8	14 47	19 8	23 29
Marzo 2	8 26 5	0 1	17 43	23 23	14 41	19 1	23 21
8	8 29 49	0 5A	18 0	23 33	14 35	18 54	23 13
14	9 3 33	0 12	18 17	23 37	14 28	18 47	23 6
20	9 7 16	0 19	18 33	23 34	14 20	18 39	22 58
26	9 10 58	0 27	18 49	23 26	14 13	18 32	22 51
Aprile 1	9 14 37	0 36	19 5	23 13	14 3	18 24	22 45
7	9 18 14	0 46	19 21	22 57	13 55	18 16	22 37
13	9 21 48	0 56	19 36	22 36	13 44	18 8	22 35
19	9 25 20	1 7	19 51	22 8	13 33	18 0	22 27
25	9 28 48	1 19	20 6	21 39	13 23	17 51	22 19
Maggio 1	10 2 11	1 31	20 20	21 7	13 11	17 42	22 13
7	10 5 29	1 45	20 33	20 34	12 59	17 32	22 5
13	10 8 43	2 0	20 47	19 58	12 44	17 21	21 58
19	10 11 48	2 15	21 0	19 22	12 30	17 10	21 50
25	10 14 46	2 32	21 13	18 46	12 16	16 59	21 42
31	10 17 35	2 50	21 25	18 13	12 1	16 47	21 33
Giugno 6	10 20 14	3 9	21 36	17 41	11 46	16 34	21 22
12	10 22 37	3 29	21 46	17 14	11 31	16 21	21 11
18	10 24 48	3 51	21 55	16 51	11 15	16 7	20 59
24	10 26 40	4 14	22 3	16 35	10 59	15 52	20 45
30	10 28 12	4 37A	22 9	16 24	10 40	15 34	20 28

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	6	10 29 21	5 1A	22 13	16 23A	10 22	15 16	20 10
	12	11 0 7	5 25	22 17	16 30	10 2	14 55	19 48
	18	11 0 25	5 47	22 18	16 45	9 39	14 32	19 25
	24	11 0 16	6 9	22 18	17 9	9 17	14 8	18 59
	30	10 29 40	6 28	22 16	17 38	8 55	13 43	18 31
Agosto	5	10 28 38	6 41	22 12	18 15	8 31	13 16	18 1
	11	10 27 17	6 48	22 7	18 51	8 3	12 46	17 29
	17	10 25 44	6 49	22 1	19 24	7 36	12 16	16 56
	23	10 24 12	6 44	21 55	19 48	7 7	11 45	16 23
	29	10 22 46	6 31	21 48	20 5	6 39	11 16	15 53
Settem.	4	10 21 37	6 12	21 44	20 10	6 11	10 48	15 25
	10	10 20 52	5 49	21 40	19 58	5 44	10 21	14 58
	16	10 20 33	5 24	21 38	19 43	5 57	9 55	14 24
	22	10 20 38	4 57	21 39	19 13	4 11	9 32	14 13
	28	10 21 22	4 30	21 40	18 34	4 27	9 11	13 55
Ottobre	4	10 22 26	4 3	21 45	17 47	4 3	8 51	13 39
	10	10 23 55	3 37	21 50	16 52	3 39	8 32	13 15
	16	10 23 46	3 12	21 56	15 48	3 18	8 15	13 12
	22	10 27 56	2 50	22 4	14 44	2 58	8 0	13 2
	28	11 0 22	2 28	22 13	13 33	2 39	7 46	12 53
Novem.	3	11 3 2	2 8	22 23	12 16	2 20	7 32	12 44
	9	11 5 54	1 49	22 34	10 56	2 0	7 18	12 36
	15	11 8 57	1 32	22 46	9 30	1 42	7 6	12 30
	21	11 12 9	1 18	22 57	8 4	1 24	6 54	12 24
	27	11 15 28	1 3	23 9	6 35	1 6	6 42	12 18
Dicem.	3	11 18 53	0 50	23 21	5 2	0 47	6 30	12 13
	9	11 22 24	0 38	23 33	3 28	0 31	6 20	12 9
	15	11 25 59	0 27	23 46	1 52	0 14	6 9	12 4
	21	11 29 38	0 17	23 59	0 16A	23 57	5 59	12 1
	27	0 3 20	0 8	0 13	1 20B	23 39	5 48	11 57

Posizioni di Cerere di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Giugno	1	11 3 10	9 26A	22 35	19 9A	13 12	17 54	22 36
	7	11 3 56	9 54	22 39	19 16	12 53	17 34	22 15
	13	11 4 35	10 22	22 42	19 27	12 33	17 13	21 53
	19	11 5 2	10 50	22 44	19 45	12 14	16 52	21 30
	25	11 5 15	11 18	22 46	20 4	11 53	16 30	21 7
Luglio	1	11 5 16	11 46	22 47	20 30	11 34	16 8	20 42
	7	11 5 5	12 14	22 47	21 1	11 13	15 44	20 15
	13	11 4 41	12 42	22 46	21 36	10 50	15 19	19 48
	19	11 4 5	13 10	22 45	22 14	10 28	14 54	19 20
	25	11 3 17	13 36	22 42	22 55	10 6	14 28	18 50
	31	11 2 19	13 58	22 39	23 38	9 43	14 1	18 19
Agosto	6	11 1 11	14 17	22 35	24 21	9 19	13 33	17 47
	12	10 29 55	14 32	22 31	25 2	8 55	13 6	17 15
	18	10 28 35	14 42	22 26	25 41	8 29	12 36	16 43
	24	10 27 17	14 49	22 21	26 16	8 4	12 8	16 12
	30	10 26 1	14 49	22 15	26 44	7 38	11 39	15 40
Settem.	5	10 24 48	14 46	22 10	27 7	7 12	11 11	15 10
	11	10 23 43	14 38	22 6	27 23	6 45	10 42	14 39
	17	10 22 47	14 27	22 2	27 32	6 18	10 15	14 12
	23	10 22 1	14 12	21 58	27 33	5 50	9 47	13 44
	29	10 21 28	13 54	21 55	27 28	5 24	9 21	13 18
Ottobre	5	10 21 9	13 35	21 54	27 17	4 58	8 55	12 52
	11	10 21 3	13 15	21 53	27 0	4 32	8 31	12 29
	17	10 21 10	12 55	21 53	26 38	4 5	8 7	12 9
	23	10 21 30	12 34	21 53	26 12	3 40	7 45	11 49
	29	10 22 2	12 13	21 55	25 41	3 15	7 22	11 29
Novem.	4	10 22 45	11 52	21 57	25 7	2 50	7 1	11 12
	10	10 23 38	11 31	22 1	24 30	2 27	6 40	10 53
	16	10 24 42	11 12	22 4	23 50	2 4	6 21	10 37
	22	10 25 55	10 54	22 9	23 7	1 40	6 1	10 22
	28	10 27 16	10 36	22 14	22 22	1 18	5 43	10 7

Posizioni di Pallade di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Maggio	1	10 15 26	31 2B	20 36	13 30B	10 57	17 57	0 57
	7	10 16 20	31 32	20 38	14 13	10 33	17 35	0 37
	13	10 17 6	32 5	20 40	14 56	10 7	17 13	0 19
	19	10 17 40	32 38	20 41	15 30	9 42	16 51	0 0
	25	10 18 2	33 10	20 42	15 13	9 17	16 28	23 39
	31	10 18 13	33 42	20 42	16 47	8 50	16 4	23 18
Giugno	6	10 18 11	34 14	20 41	17 16	8 27	15 40	22 57
	12	10 17 55	34 44	20 39	17 40	7 55	15 14	22 33
	18	10 17 26	35 12	20 37	17 59	7 28	14 49	22 10
	24	10 16 44	35 35	20 34	18 11	7 1	14 22	21 43
	30	10 15 50	35 53	20 31	18 15	6 32	13 54	21 16
Luglio	6	10 14 43	36 5	20 27	18 11	6 5	13 26	20 47
	12	10 13 26	36 12	20 23	17 58	5 37	12 58	20 19
	18	10 11 59	36 9	20 18	17 36	5 12	12 31	19 50
	24	10 10 27	35 58	20 13	17 5	4 47	12 3	19 19
	30	10 8 52	35 38	20 9	16 25	4 22	11 35	18 48
Agosto	5	10 7 18	35 8	20 4	15 37	3 56	11 6	18 16
	11	10 5 47	34 27	20 0	14 41	3 33	10 38	17 43
	17	10 4 24	33 40	19 56	13 39	3 10	10 11	17 10
	23	10 3 8	32 50	19 52	12 33	2 47	9 44	16 37
	29	10 1 59	31 51	19 49	11 23	2 27	9 17	16 6
Settem.	4	10 1 8	30 47	19 47	10 11	2 6	8 51	15 36
	10	10 0 27	29 40	19 46	8 58	1 46	8 26	15 6
	16	9 29 58	28 31	19 45	7 46	1 27	8 2	14 37
	22	9 29 43	27 22	19 45	6 36	1 8	7 38	14 8
	28	9 29 41	26 13	19 46	5 28	0 50	7 15	13 40
Ottobre	4	9 29 51	25 6	19 47	4 23	0 32	6 53	13 14
	10	10 0 12	23 59	19 50	3 22	0 15	6 32	12 49
	16	10 0 44	22 55	19 52	2 25	23 58	6 11	12 24
	22	10 1 26	21 54	19 56	1 32	23 41	5 51	12 1
	28	10 2 16	20 53	20 0	0 45	23 25	5 31	11 37

Posizioni di Giunone di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo 1	5 1 28	11 55A	9 57	0 12A	9 8	15 11	21 14
7	5 0 59	11 51	9 55	0 1B	8 43	14 46	20 49
13	5 0 14	11 44	9 53	0 24	8 16	14 20	20 24
19	4 29 11	11 35	9 49	0 55	7 46	13 52	19 58
25	4 27 58	11 13	9 45	1 35	7 16	13 25	19 34
31	4 26 33	10 55	9 40	2 23	6 42	12 56	19 9
Febbrajo 6	4 25 3	10 29	9 35	3 17	6 11	12 28	18 45
12	4 23 29	10 0	9 30	4 16	5 38	11 59	18 20
18	4 21 57	9 25	9 25	5 17	5 5	11 30	17 55
24	4 20 33	8 47	9 21	6 18	4 32	11 1	17 30
Marzo 2	4 19 20	8 8	9 17	7 17	4 0	10 33	17 6
8	4 18 18	7 29	9 14	8 14	3 29	10 6	16 43
14	4 17 30	6 49	9 11	9 7	3 0	9 40	16 20
20	4 16 58	6 10	9 10	9 53	2 32	9 16	16 0
26	4 16 40	5 33	9 10	10 33	2 7	8 53	15 39
Aprile 1	4 16 38	4 57	9 10	11 8	1 40	8 29	15 18
7	4 16 51	4 23	9 12	11 37	1 15	8 6	14 57
13	4 17 18	3 52	9 14	11 59	0 52	7 45	14 37
19	4 17 57	3 23	9 17	12 15	0 32	7 26	14 19
25	4 18 46	2 55	9 21	12 26	0 11	7 6	14 1
Maggio 1	4 19 46	2 29	9 26	12 32	23 52	6 46	13 41
7	4 20 55	2 4	9 31	12 33	23 33	6 28	13 23
13	4 22 12	1 40	9 36	12 29	23 14	6 9	13 4
19	4 23 37	1 21	9 42	12 21	22 56	5 51	12 46
25	4 25 8	1 3	9 48	12 9	22 41	5 34	12 27
31	4 26 44	0 45	9 55	11 54	22 25	5 17	12 9
Giugno 6	4 28 26	0 28	10 2	11 35	22 9	5 0	11 51
12	5 0 13	0 12	10 9	11 12	21 53	4 42	11 31
18	5 2 3	0 3B	10 16	10 47	21 38	4 26	11 12
24	5 3 57	0 17	10 23	10 19	21 25	4 11	10 56
30	5 5 54	0 29	10 32	9 48	21 13	3 56	10 39

Posizioni di Vesta di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Luglio	1	1 21 46	5 26B	3 23	12 56A	13 47	20 44	3 41
	7	1 24 6	5 30	3 33	13 28	13 30	20 29	3 28
	13	1 26 23	5 33	3 42	13 56	13 13	20 14	3 15
	19	1 28 35	5 37	3 51	14 22	12 57	20 0	3 3
	25	2 0 43	5 41	3 59	14 44	12 40	19 45	2 50
	31	2 2 47	5 45	4 8	15 5	12 26	19 30	2 37
Agosto	6	2 4 46	5 50	4 16	15 21	12 6	19 14	2 22
	12	2 6 40	5 54	4 23	15 36	11 48	18 58	2 8
	18	2 8 28	6 0	4 31	15 47	11 32	18 42	1 52
	24	2 10 7	6 5	4 38	15 57	11 14	18 25	1 36
	30	2 11 39	6 10	4 44	16 4	10 56	18 7	1 18
Settem.	5	2 13 3	6 16	4 50	16 9	10 39	17 50	1 1
	11	2 14 17	6 22	4 55	16 12	10 19	17 31	0 43
	17	2 15 22	6 28	4 59	16 12	10 1	17 13	0 25
	23	2 16 15	6 34	5 3	16 12	9 40	16 52	0 4
	29	2 16 55	6 39	5 6	16 10	9 20	16 32	23 44
Ottobre	5	2 17 20	6 45	5 8	16 7	8 58	16 9	23 20
	11	2 17 32	6 50	5 9	16 3	8 36	15 47	22 58
	17	2 17 29	6 55	5 8	15 59	8 12	15 23	22 34
	23	2 17 10	6 58	5 7	15 54	7 48	14 58	22 8
	29	2 16 35	6 59	5 5	15 49	7 22	14 32	21 42
Novem.	4	2 15 45	7 0	5 1	15 44	6 55	14 5	21 15
	10	2 14 40	6 57	4 57	15 40	6 26	13 36	20 46
	16	2 13 24	6 52	4 52	15 36	5 59	13 8	20 17
	22	2 11 57	6 44	4 46	15 34	5 29	12 38	19 47
	28	2 10 23	6 33	4 39	15 32	5 0	12 8	19 16
Dicem.	4	2 8 48	6 18	4 32	15 33	4 30	11 38	18 46
	10	2 7 17	6 3	4 26	15 35	4 0	11 8	18 16
	16	2 5 51	5 43	4 20	15 39	3 29	10 38	17 47
	22	2 4 36	5 23	4 15	15 46	2 59	10 9	17 19
	28	2 3 37	5 1	4 10	15 56	2 29	9 40	16 51

Posizioni di Giove di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo	1	11 27 8	1 17A	23 51	2 17A	23 12	5 6	11 0
	13	11 28 52	1 14	23 58	1 31	22 28	4 25	10 22
	25	0 1 1	1 12	0 5	0 18	21 42	3 45	9 47
Febbrajo	6	0 3 22	1 9	0 14	0 18	21 3	3 7	9 11
	18	0 5 53	1 8	0 23	1 20	20 20	2 29	8 38
Marzo	2	0 8 35	1 7	0 33	2 24	19 38	1 51	8 4
	14	0 11 22	1 6	0 44	3 32	18 57	1 14	7 31
	26	0 14 14	1 5	0 54	4 39	18 15	0 37	6 59
Aprile	7	0 17 7	1 5	1 5	5 46	17 35	0 1	6 27
	19	0 20 1	1 5	1 16	6 52	16 52	23 23	5 54
Maggio	1	0 22 52	1 5	1 26	7 56	16 11	22 47	5 23
	13	0 25 39	1 6	1 36	8 56	15 31	22 11	4 51
	25	0 28 19	1 6	1 46	9 53	14 49	21 33	4 17
Giugno	6	1 0 49	1 8	1 56	10 45	14 9	20 56	3 43
	18	1 3 10	1 9	2 5	11 31	13 26	20 17	3 8
	30	1 5 17	1 10	2 13	12 12	12 45	19 39	2 33
Luglio	12	1 7 7	1 12	2 20	12 47	12 2	18 58	1 54
	24	1 8 38	1 15	2 26	13 14	11 18	18 17	1 16
Agosto	5	1 9 48	1 17	2 31	13 33	10 34	17 34	0 34
	17	1 10 32	1 19	2 34	13 44	9 48	16 49	23 50
	29	1 10 49	1 21	2 35	13 47	9 2	16 3	23 4
Settem.	10	1 10 36	1 24	2 34	13 41	8 14	15 15	22 16
	22	1 9 59	1 26	2 32	13 26	7 27	14 26	21 25
Ottobre	4	1 8 52	1 27	2 28	13 4	6 36	13 34	20 32
	16	1 7 27	1 28	2 22	12 37	5 45	12 41	19 37
	28	1 5 51	1 28	2 16	12 5	4 55	11 48	18 41
Novem.	9	1 4 17	1 26	2 10	11 35	4 3	10 54	17 45
	21	1 2 51	1 23	2 4	11 7	3 12	10 1	16 50
Dicem.	3	1 1 44	1 21	2 0	10 48	2 22	9 9	15 56
	15	1 1 3	1 18	1 57	10 38	1 32	8 19	15 6
	27	1 0 1	1 14	1 56	10 37	0 44	7 31	14 18

Posizioni di Saturno di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

	Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
	s ° '	° '	h '	° '	h '	h '	h '
Gennajo 1	10 6 25	0 39A	20 36	19 18A	21 12	1 52	6 32
13	10 7 47	0 40	20 41	18 57	20 29	1 11	5 53
25	10 9 12	0 40	20 47	18 35	19 43	0 27	5 11
Febbrajo 6	10 10 37	0 42	20 53	18 13	19 0	23 46	4 32
18	10 12 2	0 42	20 59	17 51	18 17	23 5	3 53
Marzo 2	10 13 24	0 43	21 4	17 29	17 34	22 23	3 12
14	10 14 40	0 45	21 9	17 8	16 49	21 40	2 31
26	10 15 49	0 46	21 14	16 49	16 4	20 57	1 50
Aprile 7	10 16 51	0 48	21 18	16 33	15 21	20 14	1 7
19	10 17 41	0 50	21 21	16 19	14 36	19 30	0 24
Maggio 1	10 18 19	0 52	21 24	16 9	13 50	18 45	23 40
13	10 18 44	0 53	21 26	16 3	13 3	17 59	22 55
25	10 18 55	0 55	21 27	16 2	12 17	17 13	22 9
Giugno 6	10 18 56	0 57	21 27	16 4	11 29	16 25	21 21
18	10 18 38	1 0	21 26	16 12	10 42	15 37	20 32
30	10 18 9	1 1	21 24	16 22	9 50	14 48	19 42
Luglio 12	10 17 30	1 3	21 21	16 36	9 5	13 58	18 51
24	10 16 42	1 5	21 18	16 52	8 16	13 8	18 0
Agosto 5	10 15 50	1 6	21 14	17 9	7 26	12 17	17 8
17	10 14 56	1 6	21 11	17 25	6 37	11 26	16 15
29	10 14 6	1 7	21 8	17 41	5 48	10 36	15 24
Settem. 10	10 13 23	1 7	21 5	17 54	4 58	9 45	14 32
22	10 12 49	1 7	21 2	18 4	4 9	8 55	13 41
Ottobre 4	10 12 27	1 7	21 1	18 9	3 22	8 7	12 52
16	10 12 19	1 6	21 0	18 11	2 34	7 19	12 4
28	10 12 26	1 6	21 1	18 9	1 47	6 32	11 17
Novem. 9	10 12 48	1 5	21 2	18 2	1 0	5 46	10 32
21	10 13 22	1 5	21 4	17 51	0 14	5 1	9 48
Dicem. 3	10 14 10	1 5	21 8	17 37	23 29	4 17	9 5
15	10 15 9	1 5	21 12	17 19	22 45	3 34	8 23
27	10 16 15	1 5	21 16	16 58	22 0	2 51	7 42

Posizioni di Urano di dodici in dodici giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	0 2 33	0 43A	0 10	0 21B	23 20	5 24	11 28
	13	0 2 50	0 42	0 11	0 29	22 33	4 38	10 43
	25	0 3 13	0 42	0 13	0 38	21 47	3 53	9 59
Febbrajo	6	0 3 38	0 41	0 15	0 50	20 59	3 6	9 13
	18	0 4 15	0 41	0 17	1 4	20 14	2 21	8 28
Marzo	2	0 4 53	0 41	0 19	1 19	19 27	1 36	7 45
	14	0 5 32	0 41	0 21	1 35	18 40	0 51	7 1
	26	0 6 12	0 41	0 24	1 51	17 56	0 7	6 18
Aprile	7	0 6 52	0 41	0 26	2 7	17 11	23 22	5 34
	19	0 7 32	0 41	0 29	2 23	16 24	22 37	4 50
Maggio	1	0 8 11	0 41	0 31	2 38	15 38	21 52	4 6
	13	0 8 43	0 42	0 33	2 51	14 51	21 6	3 21
	25	0 9 14	0 42	0 35	3 2	14 6	20 21	2 36
Giugno	6	0 9 39	0 42	0 37	3 11	13 19	19 35	1 51
	18	0 9 57	0 42	0 38	3 18	12 32	18 49	1 6
	30	0 10 9	0 43	0 39	3 23	11 46	18 3	0 20
Luglio	12	0 10 13	0 43	0 39	3 25	10 59	17 16	23 33
	24	0 10 14	0 43	0 39	3 23	10 11	16 28	22 45
Agosto	5	0 10 5	0 44	0 38	3 20	9 23	15 40	21 57
	17	0 9 51	0 44	0 37	3 13	8 36	14 52	21 8
	29	0 9 31	0 44	0 36	3 5	7 49	14 4	20 19
Settem.	10	0 9 9	0 44	0 35	2 55	7 0	13 15	19 30
	22	0 8 40	0 44	0 33	2 44	6 12	12 26	18 40
Ottobre	4	0 8 10	0 44	0 31	2 33	5 23	11 37	17 51
	16	0 7 42	0 44	0 29	2 22	4 35	10 48	17 1
	28	0 7 15	0 44	0 28	2 12	3 47	9 59	16 11
Novem.	9	0 6 51	0 43	0 26	2 3	2 59	9 10	15 21
	21	0 6 37	0 43	0 25	1 57	2 11	8 22	14 33
Dicem.	3	0 6 27	0 42	0 25	1 53	1 23	7 34	13 45
	15	0 6 21	0 42	0 24	1 52	0 35	6 46	12 57
	27	0 6 23	0 42	0 25	1 54	23 48	5 59	12 10

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Gennajo	1	☿ in ☊.
	6	☿ nel perielio.
	7	☽ perigea.
	7	♃ nella massima latit. A.
	12	☿ ☌ inf. ⊙.
	16	☿ nella massima lat. B.
	19	☽ apogea.
	19	⊙ entra in ♒ a 15^h 45′.
	29	♄ ☌ ⊙.
Febbrajo	4	♀ in ☋.
	4	☿ nella mass. elongaz. occid.
	4	☽ perigea.
	8	☿ in ☋.
	9	♃ nel perielio.
	11	⚳ ☌ ⊙.
	16	☽ apogea.
	18	⊙ entra in ♓ a 6^h 24′.
	19	☿ nell' afelio.
Marzo	3	♂ in ☋.
	5	☽ perigea.
	10	♀ nell' afelio.
	11	☿ nella massima lat. A.
	16	☽ apogea.
	20	⊙ entra in ♈ a 6^h 21′.
	22	☿ ☌ sup. col ⊙.
	26	♅ ☌ ⊙.
	28	☽ apogea.
	30	☿ in ☊.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	1	☿ nella massima lat. A.
	3	☿ nel perielio.
	6	♃ ☌ ⊙.
	8	♂ in quadratura col ⊙.
	12	☽ apogea.
	14	☿ nella massima lat. B.
	17	☿ nella mass. elong. orient.
	19	⊙ entra in ♉ a 18^h 31′.
	24	☽ perigea.
Maggio	7	☿ in ☋.
	8	☿ ☌ inf. ⊙ e pass. di ☿ sul dis. ⊙
	8	♄ in quadratura col ⊙.
	10	☽ apogea.
	15	♀ ☌ sup. ⊙.
	17	☿ nell' afelio.
	20	⊙ entra in ♊ a 18^h 43′.
	22	☽ perigea.
	28	♀ in ☋.
Giugno	4	☿ nella massima elong. occ.
	6	☽ apogea.
	7	☿ nella massima lat. A.
	20	☽ perigea.
	21	⊙ entra in ♋ a 3^h 19′.
	26	☿ in ☊.
	30	♀ nel perielio.
	30	☿ nel perielio.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Luglio	1	♅ in quadratura col ☉.
	4	☽ apogea.
	5	☿ ☌ sup. ☉.
	11	☿ nella massima lat. B.
	18	☽ perigea.
	22	♀ nella massima lat. B.
	22	☉ entra in ♌ a $^{h}14$ $17'$.
	31	⚳ ☍ ☉.
	31	☽ apogea.
Agosto	1	♃ in quadratura col ☉.
	3	☿ in ☊.
	6	♂ nella massima lat. A.
	7	♄ ☍ ☉.
	13	☿ nell' afelio.
	15	☽ perigea.
	15	☿ nella mass. elong. orient.
	17	♂ ☍ ☉.
	20	⚳ ☍ ☉.
	22	☉ entra in ♍ a 20^{h} $50'$.
	27	☽ apogea.
	30	♂ nel perielio.
Settembre	3	☿ nella massima lat. A.
	11	☿ ☌ inf. ☉.
	12	☽ perigea.
	16	♀ in ☊.
	22	☿ in ☊.
	22	☉ entra in ♎ a 17^{h} $30'$.
	24	☽ apogea.
	26	☿ nel perielio.
	27	☿ nella massima elong. occid.

Giorni.		Fenomeni ed osservazioni.
Ottobre	1	♅ ☍ ☉.
	7	♀ nella massima latitud. B.
	8	☽ perigea.
	20	☿ nell' afelio.
	22	☽ apogea.
	23	☉ entra in ♏ a 1^{h} $43'$.
	26	☿ ☌ sup. ☉.
	28	♃ ☍ ☉.
	30	☿ in ☊.
Novembre	4	♄ in quadratura col ☉.
	7	☽ perigea.
	9	☿ nell' afelio.
	12	♀ nella massima lat. A.
	19	☽ apogea.
	21	☉ entra in ♐ a 22^{h} $18'$.
	30	☿ nella massima lat. A.
Dicembre	1	⚶ ☍ ☉.
	1	☽ perigea.
	9	♀ nella mass. elong. orient.
	16	☽ apogea.
	19	☿ in ☋.
	20	♀ nella mass. elong. orient.
	21	♂ in quadratura col ☉.
	21	☉ entra in ♑ a 11^{h} $4'$.
	23	☿ nel perielio.
	27	☿ ☌ inf. ☉.
	27	♅ in quadratura col ☉.
	29	☽ perigea.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

DELL' ANNO 1845.

ANALISI

DI

ALCUNE EQUAZIONI TRASCENDENTI

DI

PAOLO FRISIANI.

Nell'esame delle equazioni trascendenti, che forma il soggetto dell'attuale discussione, ammetto che si abbia conoscenza de' risultati ottenuti dal signor Fourier rispetto alla risoluzione delle equazioni algebriche a coefficienti reali sia per ciò che riguarda la distinzione e separazione delle radici, sia rispetto al calcolo delle radici reali. Dopo aver richiamate le necessarie definizioni ed i teoremi generali dal citato autore dimostrati, indico su quali fondamenti siamo autorizzati ad applicare quest'ultimi alle equazioni trascendenti, contenenti soltanto costanti reali. Fra queste equazioni scelgo le più semplici e fondamentali onde farne tali applicazioni che possano servire d'esempio in casi di simil genere. Accenno in seguito l'analogia esistente fra la determinazione de' limiti della convergenza delle serie nate dagli sviluppi delle funzioni implicite le più usitate, e la risoluzione di un'equazione dipendente dalle stesse funzioni proposte. Indico le conseguenze che nascono dal paragone fra il metodo d'approssimazione usato da Euler nella risoluzione di alcune equazioni trascendenti con quello dell'approssimazione lineare di Newton, del quale fornisco un esteso esempio numerico nella determinazione della radice della nota equazione di Kepler. Indico finalmente un altro metodo d'approssimazione appoggiato alla teorica delle interpolazioni, che può in alcuni casi essere utilmente impiegato.

1. S'indichi con $f(x) = y = 0$ un'equazione algebrica intera a coefficienti reali e con $F(x) = y = 0$ un'equazione trascendente non contenente costanti immaginarie. Denotando con apici le derivate di y rapporto ad x, si formerà la serie dei termini

$$(A) \ldots\ldots y^{(n)}, \quad y^{(n-1)}, \quad y^{(n-2)} \ldots y'', \quad y', \quad y,$$

che sarà detta serie delle derivate. Suppongasi aver posto in luogo di x nei diversi termini della serie (A) due valori reali qualunque $x = a$, $x = b$, essendo $b > a$. Se nelle due serie che risultano si fa astrazione da valori numerici dei diversi termini e si ritengono soltanto i loro segni, si avranno due serie di segni, di cui la prima si dirà serie dovuta al limite a, la seconda serie dovuta al limite b. Ritenuto per maggiore generalità che la serie (A) continui indefinitamente a sinistra del termine $y^{(n)}$, se superiormente a ciascun segno $+$ ovvero $-$ di queste due serie intendiamo scritto il numero corrispondente alle *Variazioni di segno* che ebbero luogo nella succession de' termini della serie a sinistra di $y^{(n)}$, dovremo naturalmente scrivere un numero incognito α sopra il segno competente ad $y^{(n)} = \overset{(n)}{f}(a)$ ed un numero incognito β su quello dovuto al termine $\overset{(n)}{f}(b)$. I numeri delle variazioni seguenti a destra dipenderanno dai numeri stessi α, β, e saran noti quando sian noti α e β. Chiamasi serie degl' indici quella che nasce dal pigliar la differenza fra i termini della serie delle variazioni dovuta ad $x = a$ ed i termini rispettivi della serie delle variazioni dovuta ad $x = b$. Così se supponiamo $n = VI$ e si conoscano i segni che assumono i termini della serie (A) dovuti ad $x = a$ ed $x = b$ quali sono indicati nel prospetto seguente, e si ponga $\alpha - \beta = \delta$, si avrà

$$\left\{\begin{array}{llllllll} \ldots\ldots & y^{VI}, & y^{V}, & y^{IV}, & y''', & y'', & y', & y \\ & \alpha, & \alpha, & \alpha+1, & \alpha+1, & \alpha+2, & \alpha+3, & \alpha+4 \\ x=a\cdot\cdot & - & - & + & + & - & + & - \\ \ldots\ldots & \delta, & \delta, & \delta+1, & \delta, & \delta+1, & \delta+1, & \delta+2 \\ & \beta, & \beta, & \beta, & \beta+1, & \beta+1, & \beta+2, & \beta+2 \\ x=b\cdot\cdot & + & + & + & - & - & + & + \end{array}\right\}$$

La serie ... δ, δ, $\delta+1$, δ, $\delta+1$, $\delta+2$ è la serie degl' indici. Rappresentando con δ^n un indice corrispondente al termine $y^{(n)}$ della serie (A), rappresenteremo in seguito la serie degl' indici per $\ldots\ \delta^n\ \delta^{n-1}\ \delta^{n-2}\ \ldots\ \delta'''\ \delta''\ \delta'\ \Delta$, e con δ^i un indice generico qualunque corrispondente ad un termine $y^{(i)}$ qualunque della serie (A), sia esso o non sia compreso in quelli già scritti.

Un qualsivoglia valor reale $x = c$ che annulli una derivata $y^{(i)}$ e che renda dello stesso segno le due derivate $y^{(i+1)}$, $y^{(i-1)}$, che chiamerem *Laterali*, senza che annulli in pari tempo tutti i termini della serie (A) che seguono a destra di $y^{(i)}$, dicesi *Valore Critico* della $y = 0$. Se annullando la $y^{(i)}$ annulla anche tutti i termini a destra di $y^{(i)}$, il valore c è una radice multipla delle $y = 0$, la quale ha per lo meno un numero $= i$ di radici eguali a c.

2. Rappresentiamo col numero finito ed intero m il grado della funzione $f(x)$. Per ogni determinato valore di x la

$f(x)$ assume necessariamente un valore unico e determinato. Essendo essa inoltre una funzione continua, vi si verifica la proprietà fondamentale in questa teoria, che cioè per due valori a, b della x non può assumere la $f(x)$ due valori di segno contrario senza divenir zero per un valore di x intermedio fra a, b. È necessario che tali proprietà esistano pure nella $F(x)$, acciò i principj che servono per le equazioni algebriche possano applicarsi alla $F(x) = 0$. Dobbiamo ammettere che la $F(x)$ rappresenti una funzione determinata, tale cioè che per ogni determinato valore di x essa ottenga, sia con un numero finito d' operazioni, sia per una serie di successive approssimazioni, un unico e determinato valore o esattamente o approssimato quanto si voglia. Se $F(x)$ sia data per una serie convergente, bisogna che si possa sempre sapere se il suo valore per un dato valore di x sia maggiore o minore di un dato numero. Se $F(x)$ non fosse atta a fornire un determinato valore per ogni valore di x, non sarebbe nemmeno il caso di proporsi da risolvere l' equazione $F(x) = 0$. Quando ciò abbia luogo, anche una derivata di un ordine qualsivoglia è pur essa una funzion determinata, la quale si conserva convergente entro quegli stessi limiti ne' quali è convergente la $F(x)$. Dobbiamo ammettere inoltre che la $F(x)$ varii per gradi insensibili al variare di gradi insensibili la x; od almeno intendiamo di considerare soltanto quegl' intervalli, nella totale variabilità della x, nei quali è mantenuta la legge di continuità. Nella prossimità di que' valori di x, pei quali la $F(x)$ cessa d' essere continua, esistono intervalli entro i quali non si può applicar la teorica delle variazioni di segno. Nulla però impedisce che le teoriche stesse siano applicabili fra quei limiti di x ne' quali sussistendo la continuità nella funzione, questa deve annullarsi per un valore di x compreso fra quelli che rendono di segno contrario il valor della funzione stessa.

3. La $f(x)$ ha particolari caratteri che mancano in generale alla $F(x)$. Essa acquista sempre valori finiti per valori finiti della variabile. Non può divenire infinita che per valori infiniti positivi o negativi di x, nè può mai annullarsi per quest' ultimi valori. Le stesse proprietà competono a tutti i termini della serie (A), la quale, per essere la m numero finito ed intero, si riduce ad un numero finito di termini. I valori di x che annullano $f(x)$ non annullano in generale una derivata qualunque $y^{(n)}$. Ciò può accadere soltanto in casi speciali, cioè o quando tali valori sono radici multiple della $f(x)=0$, ciò che importa in pari tempo l'annullamento di tutte le derivate di ordine inferiore ad n, o quando coincidono per particolari circostanze con alcuni valori critici. Supposto $k>h$, esistono sempre due valori h, k della variabile x tali che per valori di $x>k$ tutti i termini della serie (A) acquistino valori positivi, e per valori di $x<h$ acquistino valori alternativamente positivi e negativi. Ne deriva che per due valori di x che comprendano fra loro i valori h, k, l'ultimo indice Δ diventa eguale ad m. La Δ è sempre composta di $r+2c$ unità, ove la r è il numero de' valori reali di x che annullano la $f(x)$, e la c è dotata della proprietà di essere sempre eguale al numero dei valori critici che competono alla $f(x)=0$. La $2c$ in questa teoria è contraddistinta col nome di *Numero di radici deficienti*. Siccome d'altronde è dimostrato che la $f(x)=0$ ha $m=\Delta$ radici, fra le quali un numero $=r$ di reali ed un numero $=c$ di coppie di radici immaginarie conjugate, ne risulta che il numero de' valori critici è un indicatore di altrettante coppie di tali radici. Potranno risultare r, c eguali a zero, ma non mai sarà c negativa, non potendo il numero delle radici reali oltrepassare il valor Δ. Quanto qui è detto si applica al numero di radici reali o deficienti che la $f(x)=0$ può avere entro limiti più

ristretti a, b. In tal caso il nuovo indice $\Delta = r' + 2c'$ è composto ancora e del numero r' di radici e c' di valori critici che la $f(x) = 0$ contiene fra que' limiti. Sebbene i caratteri proprj alla $f(x)$ non siano comuni alla $F(x)$, risulterà però dalle seguenti riflessioni che gli stessi principj che valgono per le equazioni algebriche sono applicabili alle trascendenti purchè fra le proposizioni che si avverano per le prime si applichino solo alle seconde quelle che sussistono indipendentemente dal numero de' termini della serie (A). La diversità di natura delle due funzioni $f(x)$, $F(x)$ riducesi in questa teoria alla sola differenza nel numero de' termini della serie (A) essenzialmente finito nella $f(x)$ ed infinito nella $F(x)$.

4. È dimostrato che qualunque siasi $F(x)$, essa può sempre essere annullata per valori di x della forma $x = p + q\sqrt{-1}$, essendo p, q quantità reali qualunque, non escluso lo zero od i valori $\pm\left(\frac{1}{0}\right)$. La serie indefinita α, β, γ, δ . . . rappresenti tutti i valori possibili di x che hanno la proprietà di annullare la $F(x)$, ed il prodotto indefinito

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \ldots\ldots$$

sia rappresentato da $\mathrm{f}(x)$. Potrà in generale la $\mathrm{f}(x)$ differire da $F(x)$ in modo che questa in luogo di equivalere ad $\mathrm{f}(x)$ equivalga in vece al prodotto $\phi(x)\,\mathrm{f}(x)$. Il fattore $\phi(x)$ se non è una costante, sarà in generale una tale funzione di x che o non possa annullarsi per qualunque valore reale od immaginario di x, o se può per qualche valore di x annullarsi, lo sia solo per quelli che riducendo infinita la $\mathrm{f}(x)$, e perciò $F(x) = \frac{0}{0}$ o rimanga la $\frac{0}{0}$ affatto indeterminata, o non si riduca al valor determinato $= 0$. Se potessero esistere tali valori α', β', γ' . . . che annullassero il fattore $\phi(x)$ senza rendere infinita la $\mathrm{f}(x)$, o rendendola infinita, il valore indeterminato della $F(x)$ si riducesse coi noti metodi a zero, siccome essi annullerebbero $F(x)$, non sarebbe allora la $f(x)$ il prodotto di tutti i fattori lineari fatti dei possibili valori di x che annullano la $F(x)$, ciò che è contro l'ipotesi. Dalla relazione $F(x) = \phi(x)\ \mathrm{f}(x)$ ne risulta pertanto che que' valori che possono annullare il fattore $\phi(x)$, quand'esso esista, non saranno radici dell'equazione $F(x) = 0$ in quanto che riducendo essi infinito l'altro fattore $\mathrm{f}(x)$, renderanno la $F(x)$ o indeterminata o non eguale a zero. Quando la $F(x)$ si riduce ad una funzione intera $= f(x)$, la $\phi(x)$ diventa necessariamente una costante $= A$, ed il numero de' fattori lineari di $\mathrm{f}(x)$ diviene eguale al grado m della $f(x)$. Dall'essere in tal caso $f(x) = A\,\mathrm{f}(x)$ si deduce che le radici della $f(x) = 0$ sono le stesse di quelle dell'equazione $\mathrm{f}(x) = 0$. Per lo stesso motivo dalla $F(x) = \phi(x)\ \mathrm{f}(x)$ si deduce che le radici della $F(x) = 0$ sono tutte comprese nelle radici della $\mathrm{f}(x) = 0$. Siccome la quistione che ci occupa ha soltanto di mira non già i diversi valori che la $F(x)$ può assumere per diversi valori di x, ma sibbene, o la distinzione, o la separazione in intervalli, o il calcolo approssimato delle radici delle $F(x) = 0$, dovremo sempre intendere applicato il discorso alla $\mathrm{f}(x)$ sia nel caso che la $F(x)$ equivalga ad $A\,\mathrm{f}(x)$, sia che equivalga alla $\phi(x)\ \mathrm{f}(x)$: potremo cioè sempre far astrazione nella $F(x)$ dalla $\phi(x)$, in quanto le radici delle $\phi(x) = 0$ non appartengono alla proposta $F(x) = 0$. Useremo sempre in seguito la $\mathrm{f}(x)$ in luogo della $F(x)$, e ne' diversi esempi che si daranno non ometteremo di segnalare i casi in cui è necessario introdurre un tale scambio di funzioni. Ciò ritenuto, sia che si consideri $\mathrm{f}(x)$ come il prodotto di un numero indefinito di fattori lineari, sia che si supponga sviluppato il prodotto stesso e ridotto alla forma

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots.$$

siccome ha in tal caso tutti i caratteri di una funzione intera, il cui grado m converge verso l'infinito positivo, così la differenza che le due funzioni $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$ apporterranno ai risultati dimostrati per la $f(x)$ sarà dovuta soltanto al passaggio che fa il grado m dal finito ad un valore infinito. Ma quei risultati che nel caso della $f(x) = 0$ sono indipendenti dal numero intero m potranno applicarsi egualmente alla $\mathrm{f}(x) = 0$. La $\mathrm{f}(x)$ è da considerarsi come una funzione a cui si accosta continuamente una $f(x)$ al crescere indefinitamente del suo grado m. Così le conseguenze a cui è soggetta la $\mathrm{f}(x)$ saran da considerarsi come i limiti a cui si accostano continuamente que' risultati che si ottengono per la $f(x)$ al crescere di m. Così la serie degl' indici dovuti a due dati limiti a, b va crescendo in numero, ed in pari tempo i valori degl' indici stessi convergono verso quei valori che rappresentano il numero delle radici che le diverse equazioni derivate

$$\ldots y^{(n)} = 0, \quad y^{(n-1)} = 0 \ldots y''' = 0, \quad y'' = 0, \quad y' = 0, \quad y = 0$$

contengono fra i limiti stessi e che finiscono a raggiungere solo allorquando divenuta m infinita, la serie stessa degli indici diventa infinita. Dal che ne deriva che la diversa natura delle funzioni $f(x)$, $\mathrm{f}(x)$ non induce altra differenza che ridurre il numero de' termini della serie (A) dal finito all' infinito. Giova quì avvertire che ogni volta che la proposta funzione possa essere sviluppata in serie convergente, che si mantenga tale per tutti i valori positivi e negativi di x, si potrà essa sostituire allo sviluppo degl' indefiniti fattori lineari di cui si è parlato. Se la serie anzidetta fosse soltanto convergente entro limiti finiti di x, i risultati che a questa sono applicabili dovranno valere rispetto alla proposta funzione soltanto entro i limiti ne' quali la serie che si sostituisce alla proposta si mantien convergente. Ciò vale anche pel caso in cui la funzion proposta stessa non sia data su termini finiti, ma sibbene in serie o totalmente o parzialmente convergente. Quei risultati pertanto che si dimostrano pel caso di una funzione intera $f(x) = 0$ e che sussistono indipendentemente da alcun riguardo al grado m della stessa, val quanto dire che sono indipendenti dal numero de' termini della serie (A), saranno egualmente applicabili alle equazioni trascendenti.

5. Così risulta dal § 3 che essendo δ^i un indice corrispondente ad una derivata $y^{(i)}$ dovuto ai limiti sostituiti $x = a$, $x = b$, l'equazione derivata $y^{(i)} = 0$ non può avere nell'anzidetto intervallo più di δ^i radici reali, il numero intero δ^i constando esso pure di $r'' + 2c''$ unità, r'' e c'' essendo il numero delle radici reali e dei valori critici compresi fra gli stessi intervalli. Dal modo di formazione della serie degl' indici risulta inoltre che l' indice corrispondente alla derivata $y^{(i+1)}$ posta nella serie (A) a sinistra di $y^{(i)}$ non può essere che o δ^i, o $\delta^i - 1$, o $\delta^i + 1$. Dati che siano i limiti a, b, si saprà in ogni caso quale di questi tre valori competa all' indice della $y^{(i+1)}$. Queste proposizioni sono affatto indipendenti dalla natura della funzione $y^{(i)}$ o della proposta y. Esse riposano sul principio che il valore di x che si sostituisce nella serie (A), venendo a crescere per gradi insensibili, la serie de' segni che ne risulta perde una variazione ogni qual volta il numero sostituito coincide con una radice. Una tale verità non è limitata ad una funzione algebrica, essa è una proprietà che si avvera ad ogni punto d' intersezione coll' asse delle ascisse di una curva qualunque, sia algebrica, sia trascendente. La serie stessa perde due variazioni, e l' indice δ^i trovasi accresciuto

di due unità, cioè trovasi $\delta^i = \delta^{i+2} + 2$ ogni qual volta il numero sostituito coincide con un valor critico della $y^{(i)}$.

6. Supposto noto il valore dell' indice generico δ^i competente ai due limiti noti $x = a$, $x = b$, la sostituzione degli stessi valori a, b nella serie (A) da $y^{(i+1)}$ sino all' ultimo termine y farà conoscere i valori di tutti i corrispondenti indici

$$\delta^{i+1}, \quad \delta^i, \quad \delta^{i-1}, \quad \delta^{i-2} \ldots \delta'', \quad \delta', \quad \Delta,$$

l' ultimo de' quali $= \Delta = r + 2c$ indicherà il numero delle radici reali $= r$ e de' valori critici $= c$ che la $y = 0$ contiene fra gli stessi limiti a, b. Tale proposizione sussiste comunque la serie (A) sia fatta di un numero finito od indefinito di termini. La sola differenza si è che pel caso di $y = f(x)$ si conosce sempre il valore di un indice qualsivoglia δ^i, qualunque siano i limiti sostituiti a, b, giacchè essendo finita la serie (A) ed il 1.° termine a sinistra essendo costante, il suo corrispondente indice è zero, e da quello in avanti si conoscono mano mano i valori de' successivi indici sino all' ultimo Δ. Ma pel caso di $y = \mathrm{f}(x)$ la serie (A) essendo infinita, rimane ignoto il valore di un indice qualsivoglia δ^i competente a due limiti qualunque a, b.

7. Supporremo per ora che essendo proposta un' equazione trascendente, vi sia qualche mezzo di conoscere il valore di un qualche indice δ^i corrispondente a due limiti a, b, ciò che vedremo realmente verificarsi in qualche caso particolare. Risulterà nota allora la serie de' successivi indici

$$\delta^i, \quad \delta^{i-1} \ldots\ldots \delta'', \quad \delta', \quad \Delta$$

corrispondenti agli stessi limiti. La regola che s' impiega pel caso delle equazioni algebriche sarà quì pure applicabile, onde conoscere la natura delle radici comprese fra i detti limiti a, b ed ottenere la separazione delle radici reali, impiegando il seguente processo. Se l' ultimo indice Δ è zero, non vi è alcuna radice fra a, b. Se è $\Delta = 1$, la proposta ha una sola radice reale fra detti limiti. Però se l' indice precedente la Δ e che corrisponde alla derivata prima y' non è zero, si dovrà suddividere l' intervallo a, b e si giungerà ad ottenere nuovi limiti a', b', rispetto a cui tal condizione sia adempita. È solo quando tal condizione è verificata che si dice che la radice reale compresa fra i limiti a', b' è completamente separata. Allora i limiti a', b' sono quelli che servono a calcolarne il suo valore colle successive approssimazioni. Se Δ è maggiore di uno, si dovrà percorrere la serie degl' indici incominciando da Δ e venendo a sinistra, ed arrestarsi a quello degl' indici che si presenta pel primo eguale ad uno. Corrisponda questo ad una funzione $y^{(n)}$; la $y^{(n)} = 0$ avrà una sola radice reale compresa fra a, b. Questo indice $= 1$ avrà necessariamente a destra un indice $= 2$. Se il designato indice $= 1$ non ha lo zero per indice a sinistra, si dovrà dividere l' intervallo a, b in due altri a', b' compresi in esso e talmente scelti che, l' indice di $y^{(n)}$ essendo ancora $= 1$, abbia lo zero a sinistra di esso. La $y^{(n)} = 0$ avrà ancora una sola radice reale compresa fra a', b'. Potrà però accadere che l' indice immediatamente a destra, o sia rimasto ancora $= 2$, o sia divenuto < 2. Se questo 2.° caso ha luogo, si cercherà nella nuova serie di indici dovuta ai limiti a', b' quello fra gl' indici eguale ad uno che si trova più vicino all' ultimo indice Δ, e si ripeteranno su questo i riflessi già fatti sul primo. Se in vece ha luogo il 1.° caso, allora i tre indici corrispondenti alle funzioni $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ sono rispettivamente 0, 1, 2. È soltanto quando si giunge a questo risultato 0, 1, 2 che si deve esaminare se l' indice 2 corrisponde a due radici reali disuguali od eguali dell'equazione $y^{(n-1)} = 0$, o se è dovuto ad un valor critico di essa. La sostituzione della radice esatta dell'equazione $y^{(n)} = 0$ che esiste fra i limiti anzidetti nelle due funzioni $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ fornirebbe due risultati di segno contrario nel 1.° caso, e due risultati dello stesso segno nel 2.° È questa la proposizione generale che richiameremo nel § 11. quando essa verrà estesa alle equazioni trascendenti. Per distinguere quale di questi due casi abbia luogo si seguirà la regola più compendiosa che in tal caso si usa per le equazioni algebriche, la quale indica se le dette radici sono reali ed ineguali, se reali ed eguali o se sono deficienti. Se dall'applicazione di detta regola risulta che esse sono reali e disuguali, si dovrà separarle col suddividere l'intervallo a', b' ed esaminar di nuovo le serie degl'indici dovute ai nuovi intervalli e ripetere inoltre lo stesso processo e le stesse avvertenze indietro indicate. Se in vece risulta dalla stessa regola che l'indice 2 è dovuto ad un valor critico, siccome questo deve competere pure a tutte le equazioni subordinate

$$y^{(n-2)} = 0, \quad y^{(n-3)} = 0 \ldots\ldots y' = 0, \quad y = 0,$$

si dovrà sottrarre un tal numero $= 2$ a ciascuno degl'indici subordinati δ^{n-1}, δ^{n-2} . . . δ', Δ e scrivere una nuova serie d'indici che diremo *Serie ridotta*. Se risulta che le due radici sono eguali, si esaminerà secondo il processo noto se queste radici eguali fanno svanire inoltre tutte le funzioni $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$ . . . y', y; in questo caso si conoscerebbero le radici eguali che la $y = 0$ ha fra i limiti proposti; ma se non vi è un fattore comune alla $y^{(n-1)}$ ed a tutte quelle sopra indicate, le conseguenze relative alla natura delle radici saranno le stesse come se le due radici eguali della $y^{(n-1)} = 0$ fossero deficienti. Si dovrà cioè sottrarre qui pure il numero 2 a ciascuno degl'indici δ^{n-1}, δ^{n-2}, δ^{n-3} . . . δ', Δ ed ottenersi una serie ridotta come si è fatto prima. Ciò riposa sul principio che un valore $x = \alpha$

che annulla una $y^{(n)}$ e rende dello stesso segno $y^{(n+1)}$, $y^{(n-1)}$ può tanto indicare due radici eguali ad α nella $y^{(n-1)} = 0$, quanto due radici deficienti nella stessa equazione. Si riguarderà questa serie ridotta come se essa fosse dovuta agli stessi due limiti a', b'. Si procederà nell' esame di questa colle stesse indagini indicate indietro, e con successive ripetizioni di tali operazioni non potrà mancare di ottenersi finalmente una serie d' indici di cui l' ultimo termine Δ risulti o eguale a zero od eguale ad uno, ed inoltre a raggiungere l' intento che risultando $\Delta = 1$, sia esso preceduto da zero.

8. Ottenuti così due limiti in cui una delle radici reali è completamente separata, si applicheranno le stesse regole che servono nel caso delle equazioni algebriche a regolare l' approssimazione lineare col trovar sempre due limiti di cui uno sia maggiore, l' altro minore della radice cercata. Ho dato di questa regola un' estesa applicazione rispetto all' equazione trascendente cui si giunge nella teorica del moto elittico acciò serva di norma per altre equazioni trascendenti occorribili. La misura della convergenza è dello stesso ordine come nelle equazioni algebriche. Così il numero delle cifre esatte che a ciascun' operazione si determina cresce secondo la stessa legge in ambi i casi, in quanto il carattere dell' approssimazione lineare riposa sul principio delle successive sostituzioni, il quale è applicabile ad ogni sorta di funzioni.

9. I precedenti risultamenti riposano sull' ipotesi che si conosca il valore di un indice qualsivoglia δ^{i} che nelle equazioni trascendenti rimane generalmente ignoto. Ma la propietà caratteristica de' valori critici si è che se in un' equazione derivata qualunque $y^{(i)} = 0$ esiste fra i limiti a, b un numero $= c$ di valori critici, un egual numero c di valori critici per lo meno esiste in tutte le equazioni derivate inferiori compresa la stessa $y = 0$; vale a dire che esiste

in tutte entro quell' intervallo almeno un numero $= 2c$ di radici deficienti. È dimostrato pure che se la $y^{(i)} = 0$, oltre le $2c$ radici deficienti, contiene un numero pari $2d$ di radici reali eguali ad α, il valor comune α, se annulla inoltre un certo numero di termini seguenti $y^{(i-1)}$, $y^{(i-2)}$ ... $y^{(i-n)}$ sino ad $y^{(i-n-1)}$, che è il primo che non viene annullato, sarà esso pure radice multipla delle equazioni

$$y^{(i-1)} = 0\,,\quad y^{(i-2)} = 0 \ldots y^{(i-n)} = 0\,,$$

ma le equazioni derivate che seguono sino alla proposta, cioè le

$$y^{(i-n-1)} = 0\,,\quad y^{(i-n-2)} = 0 \ldots y' = 0\,,\quad y = 0\,,$$

avranno ciascuna un numero $2d + 2c$ per lo meno di radici deficienti, ossia il loro indice corrispondente conterrà un numero $d + c$ almeno di valori critici. Ne deriva pertanto che assicurati, non aver la proposta $y = 0$ radici multiple in numero $> i$, ciò che coi noti metodi è facile a constatarsi, se si giunge in qualsivoglia modo a scoprire che una qualsivoglia equazione derivata $y^{(i)} = 0$, o non ha fra i limiti a, b radici reali, od ha un numero pari $= 2d$ di radici eguali, l'indice δ^i corrispondente alla $y^{(i)}$ nella serie (A) si ridurrà a $\delta^i = 2d + 2c$. Incominciando dell' indice δ^i ignoto, si potrà coi limiti noti a, b formare la serie degli indici sino all' ultimo Δ, ciascun de' quali conterrà l' incognita δ^i. Siccome non si tratta quì che della separazione delle radici reali della $y = 0$, si potrà passare alla serie ridotta col sottrarre $\delta^i = 2d + 2c$ a ciascuno de' suoi termini, in quanto non si viene nell' equazione che importa di esplorare che ad aver levato l' indicazione di un certo numero di radici deficienti senza alterare l' indice del numero delle reali ch' essa contiene. Si dovà, come è occorso di vedere nel § 7 pel caso di sole due radici eguali, considerare la serie ridotta fatta di termini tutti noti come se fosse risultata dall'immediata sostituzione dei limiti a, b. Questa non contenendo più l'incognita δ^i, e l'indice corrispondente alla $y^{(i)}$, essendo rimpiazzato dallo zero, i successivi indici sino a Δ inclusivo saranno ridotti a numeri noti, l'ultimo de' quali indicherà che non si debbono cercare nella $y = 0$ più indici reali di quello che sianvi unità nel numero che vi corrisponde. Con tal serie ridotta si procederà dietro le norme del § 7 alla distinzione e separazione delle radici.

10. Alla soluzione della quistione non resta più che a mostrare come l'indice ignoto δ^i che per limiti generici a, b è della forma $r + 2c$ possa sempre ridursi semplicemente a $2d + 2c$ col sostituire ai limiti generici a, b due altri limiti opportunamente scelti: resta a mostrarsi cioè come si possa determinare un intervallo ε tale che fra i due limiti a ed $a + \varepsilon$ un'equazion derivata $y^{(i)} = 0$ o non abbia fra detti limiti alcuna radice reale, ovvero abbia, oltre un numero c di valori critici, un numero soltanto pari di radici eguali. Assicurati prima che la $y = 0$ non ha radici multiple in numero $> i$, basterà, per ottener questo intento, che la $y^{(i)}$ conservi costantemente lo stesso segno per tutta l'escursione di x fra i suddetti limiti. Ora essendo per ipotesi $y = \mathrm{f}(x)$ una funzione determinata, tali saranno pure tutte le sue derivate di un ordine qualunque, e si potrà sempre trovare, qualunque sia a, un tal valore di ε pel quale una tal condizione sia adempita. Di fatto sia la $y^{(i)}$ un'espressione finita; posto

$$y^{(i)} = \overset{(i)}{\mathrm{f}}(x) = \varphi(x), \quad \text{sarà} \quad \varphi(a + \varepsilon) = \varphi(a) + \varepsilon\, \varphi'(a + \theta\, \varepsilon),$$

essendo θ un numero compreso fra 0 ed 1, ed il valore di $\varphi(a + \varepsilon)$ sarà compreso fra i valori delle due funzioni

$$\varphi(a) + \varepsilon\, \varphi'(a) \quad ; \quad \varphi(a) + \varepsilon\, \varphi'(a + \varepsilon).$$

Si potrà pertanto trovare un valore di ε tale che il segno di queste due espressioni sia quello della $\phi(a)$ per tutti i valori da o ad ε. Sarà perciò la ε tale che la $y^{(i)}$ fra i limiti a ed $a + \varepsilon$ conservi sempre lo stesso segno. Se la $y^{(i)}$ non è un'espressione finita, in quanto s' intenda derivata da una $y = f(x)$ che sia data in serie infinita e convergente, siccome la stessa $y^{(i)}$ risulterà determinata e convergente e perciò dotata di *Somma*, potrà sempre concepirsi una funzione finita, comunque di natura trascendente, che ne rappresenti la somma: e le conseguenze superiormente dedotte varranno allora anche per questa. Si potranno cioè concepir sempre due funzioni di cui una sia maggiore e l'altra minore della $y^{(i)}$ per tutta l'escursione di un certo intervallo finito opportunamente scelto, si potranno cioè trovar tali limiti a ed $a + \varepsilon$ che una tal condizione d' ineguaglianza sussistendo in tutto l' intervallo ε, conservino le due funzioni lo stesso segno entro i suddetti limiti a ed $a + \varepsilon$. Ottenuti i limiti a ed $a + \varepsilon$ entro i quali la $y^{(i)}$ si mantien dello stesso segno, si formerà la serie ridotta col sottrar l'incognita δ^i a tutti gl' indici, come si è detto nel § 9, e si procederà su di essa seguendo la regola del § 7, onde distinguere la natura delle radici che la $y = o$ contiene in quell' intervallo, ed a separarle, se si riconosce che ne esistono di reali. Un tale processo si ripeterà per tutti gl' intervalli successivi che nascono dal far variare la a. Si giungerà finalmente a conoscere tutti gl' intervalli ne' quali sono da cercarsi le radici della $f(x) = o$ ed a separarle completamente, onde passare al calcolo approssimato de' loro valori numerici.

11. Il processo anteriormente seguito, limitandosi alla separazione delle radici, lascia ancora ignoto in un'equazione trascendente sia il numero de' valori critici, sia l' intervallo in cui essi si trovano. Richiamando quanto si è avvertito al § 5 sulle perdite di variazioni di segno che hanno luogo in particolari punti della curva $f(x) = y$, risulta che nella stessa guisa che le

radici reali corrispondono ad ascisse di punti particolari della curva ne' quali essa taglia l'asse delle ascisse, i valori critici competono ad altri particolari punti di essa dotati di un certo carattere di curvatura che talvolta è manifesto nella stessa curva $y = f(x)$, e talvolta è latente in essa e non si rende manifesto che nelle curve subordinate dipendenti dalle funzioni derivate. Tali qualità sono affatto indipendenti dalla natura della funzione algebrica o trascendente ch' essa sia. Siccome in un' equazione algebrica sussiste il teorema che ogni valor critico è *Indicatore* di una coppia di radici immaginarie conjugate, comunque grande sia il grado m della funzione $f(x)$, esso sussisterà al convergere di m verso l'infinito e sarà applicabile all' equazione trascendente $f(x) = 0$. Si dovrà ammettere generalmente che un' equazione algebrica o trascendente che sia ha tante coppie di radici immaginarie quanti esistono valori reali di x, che sostituiti in una funzione derivata intermedia $y^{(i)}$ la rendono nulla, dando due risultati dello stesso segno alle due funzioni laterali $y^{(n+1)}$, $y^{(n-1)}$. Se si giunge a provare che non vi è alcun valore reale di x che facendo svanire una funzion derivata intermedia dia lo stesso segno alle due laterali, si è certi che la proposta non può avere alcuna radice immaginaria. Si deve intendere cioè che essendo $y^{(i)}$ un termine qualunque della serie (A), se per un determinato valore i si trovano m valori critici distinti, avrà la $f(x) = 0$ m coppie di radici immaginarie. Se per un altro valore di i si trovano m' altri valori critici distinti e diversi fra loro, comunque alcuni di questi possano coincidere coi precedenti, l'equazione stessa avrà altre m' coppie di radici immaginarie: lo stesso si dirà per tutti i valori di i pei quali esistono valori critici, avvertendo che per la natura della $f(x)$ il numero i converge indefinitamente verso l'infinito. Si deve però riflettere che se un valore $x = \alpha$, che annulla una

$y^{(i)}$, annullasse contemporaneamente tutti i termini della serie (A) posti a destra della $y^{(i)}$, sino ad y inclusiva, tal valore $x = \alpha$ non sarebbe un valor critico, ma sibbene una radice multipla della proposta, la quale avrebbe per lo meno $i+1$ radici reali eguali ad α. Inoltre se la funzion proposta y cessasse d'essere finita e continua in certi intervalli, il teorema sussiste allora entro que' limiti di x entro cui la funzione si mantien finita e continua; cioè il numero di valori critici esistente fra essi limiti indica un equivalente numero almeno di coppie di radici immaginarie che la proposta deve contenere.

12. Sia che ad una funzione finita $f(x)$ venga sostituita la serie infinita $S(x)$, purchè convergente nata dallo sviluppo di $f(x)$ per le potenze di x, sia che venga immediatamente proposta una serie $S(x)$, la di cui convergenza sia constatata, l'equazione $S(x) = 0$ è parimente un'equazion trascendente da trattarsi cogli stessi princìpj, giacchè la $S(x)$ essendo in tal caso dotata di somma, potrà sempre immaginarsi una certa funzion trascendente finita, se non altro espressa per interali definiti da cui possa intendersi derivata la stessa serie $S(x)$. Ma le conseguenze che si dedurranno in questi due surriferiti casi dovranno soltanto sussistere entro quei limiti della variabile x, ne' quali la serie stessa si conserva convergente. Si troverà in seguito un'applicazione del teorema del § 11 ad alcuna di tali equazioni trascendenti date per serie convergenti, una delle quali è quella stessa a cui si giunge nella ricerca delle leggi del moto del calore in un cilindro solido.

13. Si è detto che, nell'applicazione dei teoremi alle due equazioni $f(x) = 0$ od $\mathrm{f}(x) = 0$, si deve solo aver riguardo alla differenza essenziale che presenta la serie degli indici, cioè di essere nella prima completamente nota e nella seconda non divenir nota se non nel caso in cui diventi noto

un qualsivoglia indice δ^i. Ma dai §§ 9 e 10 risulta che, quando non si tratti che della separazione delle radici reali, una tal differenza conduce in ultima analisi alla conclusione, che pel caso della $f(x) = o$ non tutti i limiti impiegati sono atti a far conoscere il numero delle sue radici reali comprese fra detti limiti, mentre pel caso della $f((x) = o$ due limiti qualunque che comprendano un intervallo, sia finito, sia infinito, sono sempre idonei a risolvere tale quistione. Ciò non per altro accade se non in quanto che la serie finita degl'indici, dando per qualsivoglia intervallo lo zero per valore del primo indice a sinistra corrispondente alla derivata costante $y^{(m)}$, essendo m il grado della $f(x) = o$, l'applicazione della regola generale del § 7 conduce alla completa determinazione dell'ultimo indice Δ. Si deduce di quì che quando la sostituzione di due limiti a, b qualsivogliano nella serie (A) conduce a due risultati, o serie di segni che termine per termine non differiscono fra loro, il numero delle variazioni di segno della serie dovuta ad a coincidendo termine per termine con quella dovuta a b, concludiamo con certezza che tutti gl'indici sono zero, perchè eguali a quello che corrisponde alla derivata costante $y^{(m)}$; perciò la $\Delta = o$ indica che non vi saranno nè radici, nè valori critici fra i limiti a, b. Se, fatta una tal sostituzione nella serie (A) presa rispetto alla funzion trascendente $f(x)$, accadesse parimente che la serie dovuta al limite a fosse identica, termine per termine, con quella dovuta al limite b, comunque si possa prevedere quali esser debbano i segni di tutta la serie indefinitamente procedente a sinistra, non possiamo conchiudere come prima che la $f(x) = o$ non ha nè radici reali, nè valori critici fra i limiti a, b, giacchè non arrivando mai a conoscersi il valore di alcun indice δ^i, non si potrà altro dedurre se non che la serie totale degl'indici avrà tutti i suoi termini eguali δ^i, ossia non potremo altro conchiudere se non che una qualunque equazione derivata $y^{(i)} = o$ ha nè più, nè meno radici e valori critici compresi fra i detti intervalli di quello che ne abbia una qualsivoglia altra equazione $y^{(j)} = o$, essendo j qualunque, non escluso lo zero, e perciò nè più, nè meno di quello che ne abbia la stessa $y = f(x) = o$. Un tal caso si presenta, per esempio, quando la $f(x)$ e le sue successive derivate siano funzioni periodiche in cui il valor che ristabilisce il periodo sia lo stesso per ciascuna di esse. Se dicasi p un tal valore in cui si compiono i diversi periodi, la sostituzione nelle serie (A) dei due limiti a ed $a + np$, essendo n numero intero qualunque, fornirà due risultati identici, e non si potrà conchiudere che non esistano radici della $f(x) = o$ entro i limiti a ed $a + np$, ma soltanto che il numero loro è lo stesso di quello che entro gli stessi limiti ammette una qualsivoglia equazione derivata $y^{(i)} = o$, essendo i qualunque, rimanendo la $\delta^i = r + 2c$ incognita entro que' limiti, sia rispetto ad r, sia rispetto a c. Si conchiuderà cioè che questi limiti sono troppo lontani, e si potrà, ristringendoli entro limiti a, b, la cui differenza $b - a$ sia $< p$, giungere a conoscere che almeno la r è o eguale a zero, od eguale a $2d$, e che perciò la $y^{(i)} = o$ o non ha radici reali entro i detti limiti, o ne ha soltanto di eguali in numero pari, ciò che basta, dietro quanto si è detto, per ottenere i limiti in cui son comprese le radici reali. Lo stesso vale a più forte ragion quando si volessero sostituire i limiti $-(a + np)$ e $b + n'p$, in cui n, n' fossero numeri estremamente grandi o convergenti verso l'infinito. Quando si presenti un tal caso di periodicità, basterà esaminare gli accidenti della $f(x) = o$ per valori compresi nei limiti $\mp \varepsilon$ e $\pm \varepsilon \pm p$ essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, onde conchiuderne il numero N delle radici reali che sono da cercarsi fra due limiti qualunque $\mp \varepsilon$ e $\pm \varepsilon \pm b$. Di fatto supposto $b = np + b'$, ove sia n il numero dei periodi compresi in b, e chiamato r il numero delle radici comprese fra $\mp \varepsilon$ e $\pm \varepsilon \pm b'$, ed r il numero delle radici comprese nell'intero periodo da $\mp \varepsilon$ a $\pm \varepsilon \pm p$, sarà $N = r + nr'$.

14. Quantunque la separazione delle radici, ossia la determinazion degl'intervalli in cui sono da cercarsi le radici reali, si ottenga senza incertezza coi metodi esposti, pure si potrà in molti casi giungere più speditamente a tale scopo col metodo delle costruzioni di cui si vedrà in seguito qualche esempio. La ricerca del numero completo dei valori critici e di tutti gl'intervalli in cui essi giaciono, donde dipende la cognizione del numero delle coppie di radici immaginarie che l'equazione può contenere, richiede sempre l'applicazione del teorema generale del § 11. Osserveremo però che, siccome l'applicazione di detto teorema richiede ancora la ricerca del numero e degl'intervalli in cui giaciono le radici reali delle equazioni derivate $y^{(i)} = 0$, così il metodo stesso delle costruzioni sarà atto in molti casi a risolvere anche la questione della ricerca de' valori critici da cui dipende quella delle radici immaginarie. Gli esempi che di ciò si danno in seguito basteranno per indicare il modo di procedere in casi simili. Giova osservare che la sostituzione del valor generale $y + z\sqrt{-1}$, o della forma *Modulare* $y e^{z\sqrt{-1}}$, in luogo della x in una proposta equazione è spesso impiegata per giungere alla conoscenza delle sue radici immaginarie. Tale sostituzione conduce a due equazioni da risolversi, ciascuna delle quali contiene le due incognite y, z. Il metodo dell'eliminazione che nelle equazioni algebriche, comunque laborioso, è sempre possibile, è ben di rado effettuabile quando la proposta equazione è trascendente. Nei casi però in cui le incognite y, z possano separarsi, la determinazione delle radici reali delle due equazioni da risolversi ricadendo nei metodi sopra indicati, diventa in tali casi atta alla determinazione stessa

delle radici immaginarie della proposta. Si daranno pure in seguito esempi di tale sostituzione. Nelle applicazioni che si danno come le più atte a render manifeste le proposizioni teoriche quì enunciate si ebbe di mira di fornir qualche esempio relativo a ciascuna di esse assumendo diverse forme della funzion trascendente ed incominciando dalle più semplici; ma in particolar modo si ebbe di mira l'applicazione della proposizione del § 11 riguardo alle radici immaginarie, siccome quella che fu il soggetto di molte contestazioni da parte di distinti geometri, onde appaja che almeno ne' casi che quì si trattano non conduce ad erronee conseguenze.

15. Prima di procedere alle applicazioni giova avvertire che essendo proposta un'equazione algebrica intera $f(z) = 0$, sarà essa da trattarsi coi metodi che si riferiscono alle equazioni algebriche non ostante che la z rappresenti una qualunque delle trascendenti semplici $l(x)$, e^x, $\sin x$ .... Determinate cioè le diverse radici reali od immaginarie α, β, γ, δ ... della proposta considerata come un'equazione contenente l'incognita z, e supposto che $\chi(x)$ indichi una qualsivoglia delle trascendenti semplici, resterà a dedursi coi metodi noti i diversi valori di x dalle equazioni

$$\chi(x) = \alpha\,, \quad \chi(x) = \beta\,, \quad \chi(x) = \gamma\,, \quad \chi(x) = \delta\,\ldots\,.$$

Le equazioni in cui un tal processo di risoluzione non è effettuabile sono quelle in cui l'incognita entra esplicitamente nella funzione ed implicitamente in un trascendente, ovvero quello in cui l'incognita che entra nell'equazione è affetta da trascendenti di diversa specie. È specialmente a queste equazioni trascendenti propriamente dette o miste che sono diretti i metodi che sono stati quì indietro indicati. Se nel seguito avremo occasione di trattare equazioni risolubili coi metodi ordinarj, ciò non sarà che per dare esempi dell'applicazione de' principj teorici e mostrare la corrispondenza fra i risultati ottenuti con essi e coi metodi ordinarj di risoluzione. È parimente da avvertirsi che l'equazione

$$\frac{1}{x^m}\left\{a + bx + cx^2 + \ldots + px^{m-1} + qx^m\right\} = 0$$

ove sia m numero intero e positivo, ed $a, b, c \ldots p, q$ costanti reali, dovrà riguardarsi dietro i riflessi del § 4 della forma $\phi(x)\,f(x) = 0$. Di fatto le m radici infinite che annullano il fattore $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \phi(x)$, rendono infinito l'altro fattore $f(x)$; e l'espressione indeterminata $\frac{0}{0}$ a cui si riduce per tali valori la proposta non divenendo zero, ma assumendo il valor finito $= q$, le suddette radici non appartengono alla proposta. Ne deriva che le radici della proposta sono tutte comprese in quelle dell'equazione $f(x) = 0$, ossia dell'equazione algebrica intera

$$a + bx + cx^2 + \ldots + px^{m-1} + qx^m = 0, \qquad \text{(a)}.$$

Perciò anche le radici dell'equazione algebrica non intera

$$\frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \frac{c}{x^{m-2}} + \ldots + \frac{p}{x} + q = 0; \qquad \text{(b)}$$

che equivale alla proposta, sono comprese nelle radici della precedente equazione intera. Se si volesse trattare direttamente la (b) e dedurne la serie delle derivate successive, essa fornirebbe per la serie (A) un infinito numero di termini, laddove l'equazione (a) che è quella a cui propriamente dobbiamo applicare i principj di questa teorica ne fornisce un numero finito, ed è quì appunto il caso in cui esistendo un fattore $\phi(x)$ dotato de' caratteri voluti dal § 4, dev'essere escluso onde rendere legittima l'applicazione degli enunciati teoremi. Così in particolare essendo data la $\frac{1}{x} - a = 0$, in luogo di costruire la serie (A) col valore $y=\frac{1}{x}-a$, si dovrà costruirla assumendo il valore $y=1-ax$ in quanto nella proposta equivalente al prodotto dei due fattori $\frac{1}{x}$ ed $1-ax$ si deve escludere il fattore $\frac{1}{x}$. Ciò vale anche pel caso in cui la a converga verso lo zero. Per lo stesso motivo se fosse proposta un' equazione della forma $\frac{f(x)}{\chi(x)}=0$, ove $f(x)$, $\chi(x)$ sono funzioni intere, la prima di grado m, la seconda di grado m', se sarà $m>m'$, le radici della stessa saranno tutte comprese nelle radici dell' equazione $f(x)=0$, giacchè le radici $x=\left(\frac{1}{0}\right)$ che annullano il fattore $\frac{1}{\chi(x)}$, rendono eguale ad una costante il valore indeterminato $\frac{0}{0}$ che assume in tal caso il rapporto $\frac{f(x)}{\chi(x)}$, e perciò si dovrà sopprimere il fattore stesso. Ma qualora fosse $m<m'$ il valore $x=\left(\frac{1}{0}\right)$ che annulla il detto fattore, riducendo a zero il valore indeterminato $\frac{0}{0}$ a cui si riduce il primo membro della proposta, le radici dell' equazione $\frac{1}{\chi(x)}=\phi(x)=0$ non sarebbero da escludersi. Si dedurrebbe anzi che l' equazione in questione, oltre le radici della $f(x)=0$, conterrebbe anche le radici della $\frac{1}{\chi(x)}=0$. Ciò è conforme al contenuto del § 4, ove si ammette la soppressione del fattore $\phi(x)$ che entra in un' equazione proposta solo allorquando i valori che lo annullano non sono radici della proposta stessa.

16. Sia proposta l'equazion semplicissima $y=\sin x=0$. Suppongansi sostituiti i limiti $x=a$, $x=a+2n\pi$ nella serie (A). La serie delle derivate

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad y^{v},\quad y^{iv},\quad y''',\quad y'',\quad y',\quad y$$

darà la serie ... $\cos a$, $\sin a$, $-\cos a$, $-\sin a$, $\cos a$, $\sin a$

tanto pel limite a quanto pel limite $a + 2n\pi$. Se supponiamo che pel limite a nasca la serie de' segni

$$\ldots\ldots + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - ;$$

la stessa serie di segni avrà luogo pel limite $a + 2n\pi$. Se l'incognita α indica il numero delle variazioni competente al primo termine a sinistra per la serie dovuta al limite a; β quello che compete al primo termine della serie dovuta al limite $a + 2n\pi$, si avranno le due serie delle variazioni

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha, & \alpha+1, & \alpha+1, & \alpha+2, & \alpha+2, & \alpha+3 \\ \ldots\ldots & + & - & - & + & + & - \\ & \beta, & \beta+1, & \beta+1, & \beta+2, & \beta+2, & \beta+3 \\ \ldots\ldots & + & - & - & + & + & - \end{array}$$

Se si suppone $\alpha - \beta = \delta^r$ che è l'indice ignoto corrispondente ad y^r, si avrà per serie d'indici la

$$\ldots\ldots \delta^r, \quad \delta^r, \quad \delta^r, \quad \delta^r, \quad \delta^r, \quad \delta^r.$$

Dietro il § 14 non si potrà dalla sostituzione di tali limiti null'altro conchiudere se non che tutte le equazioni derivate hanno per indice il numero incognito δ^r. Cioè che una qualsivoglia $y^r = \cos x = 0$ non ha nè più nè meno radici reali e valori critici di quello che ne abbia la stessa proposta $y = \sin x = 0$. Ciò significa che l'intervallo de' limiti è troppo grande. Anzi si presenta quì lo stesso caso di periodicità di cui si è parlato al § 14. Dietro la regola del § 10 dobbiamo cercare due limiti a ed $a + \varepsilon$, ne' quali una derivata qualunque $y^{(i)}$ non cambi di segno. Indicando con θ una quantità piccola quanto si voglia, supponiamo $a = -\theta$ ed $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$. I nuovi limiti saranno $-\theta$ e $\frac{1}{2}\pi - \theta$. Si vede manifestamente che fra questi limiti una delle derivate y', y''', y^v ... si mantiene dello stesso segno in tutta l'escursione dell'intervallo. Ottenuta una tal condizione, la serie degl' indici risulterà

$$\ldots . \delta^r, \quad \delta^r + 1, \quad \delta^r, \quad \delta^r + 1, \quad \delta^r, \quad \delta^r + 1.$$

Col sottrarre a ciascun termine la quantità incognita δ^r si potrà passare alla serie ridotta che si ridurrà ai numeri noti

$$\ldots . 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1.$$

Questa serie d' indici noti, che indicheremo più semplicemente con $\ldots 010101$, deve considerarsi come quella che risulterebbe dall' immediata sostituzione dei limiti proposti, in quanto non si tratta quì che della separazione delle radici reali. L' ultimo indice Δ che risulta $= 1$ mostra che nella proposta $\sin x = 0$ esiste fra i limiti $-\theta$ e $\frac{1}{2}\pi - \theta$ una radice reale. Lo stesso si dirà di $y'' = 0$, $y^{IV} = 0 \ldots$ Mentre si conchiuderà che non sono da cercarsi radici reali fra gli stessi limiti nelle equazioni $y' = 0$, $y''' = 0 \ldots\ldots$ Esplorato collo stesso metodo il numero delle radici che trovansi nel seguente intervallo da $\frac{1}{2}\pi - \theta$ a $\pi + \theta$, si troverà esservi un' altra radice reale. Il seguente intervallo $\pi + \theta$ e $2\pi - \theta$ non contenendo alcuna radice, si conchiude che fra i limiti $-\theta$ e $2\pi - \theta$, ossia nell' intervallo 2π, esistono due radici reali, e siccome siamo nel caso della periodicità di cui si è parlato nel § 13, essendo quì $p = 2\pi$, si conosceranno i limiti in cui sono comprese tutte le radici reali della proposta $\sin x = 0$, e quindi il loro numero che manifestamente risulterà infinito. Se s' impiegasse il processo dell' approssimazione lineare pel calcolo effettivo di ciascuna radice, quando essa sia completamente separata come quì è il caso e seguendo i precetti voluti per un tal calcolo, si giungerebbe a determinare, ciò che si fa d' altronde, che le radici reali delle $\sin x = 0$ sono tutte comprese nella formola

$x = \pm j\pi$, ove j può ricevere tutti i valori $0, 1, 2, 3 \ldots$ all'infinito. Ma nulla ancora sappiamo sull'esistenza di valori critici, ossia ignoriamo se la proposta abbia radici immaginarie. Applicando a questa ricerca il teorema del § 11, chiamata $y^{(n)}$ una derivata qualunque della funzion proposta $\sin x$, dovremo esplorare quali segni inducano nelle derivate laterali $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ i valori reali che annullano una qualunque $y^{(n)}$. Dall'ispezion della serie delle derivate si vede tosto che, qualunque siasi n, esiste sempre la relazione $y^{(n-1)} + y^{(n+1)} = 0$. Qualunque siano pertanto i valori reali che annullano la derivata intermedia $y^{(n)}$, dovranno necessariamente render di segno contrario le derivate laterali, acciò sia soddisfatta la stabilita relazione. Non esisteranno dunque valori critici della $\sin x = 0$, e perciò nemmeno radici immaginarie. Lo stesso processo applicato all'equazione $\cos x = 0$ darà a conoscere i limiti in cui si trova compresa ciascuna radice reale e ad assicurarci ch' essa non ammette punto radici immaginarie. Le radici reali di quest' equazione sono tutte comprese nella formola $x = \pm (2j + 1)\frac{\pi}{2}$, avendo j gli stessi valori sopra indicati. Tanto la $\sin x$ quanto $\cos x$ equivalgono al prodotto dei fattori semplici in numero infinito che si possono formare con tutti i valori che annullano le dette funzioni. Tali funzioni non possono ridursi alla forma $\phi(x)\,\mathrm{f}(x)$ se non ammettendo $\phi(x) = 1$.

Se in vece sia proposta l'equazione $\tang x = 0$, siccome essa equivale a $\sin x \sec x = 0$, converrà quì aver riguardo a quanto è detto al § 4. Le radici cioè di $\tang x = 0$ saranno comprese nelle radici delle equazioni $\sin x = 0$, $\sec x = 0$ purchè le radici reali od immaginarie di una di queste non rendano infinito il primo membro dell'altra, o rendendolo infinito, il valore $\frac{0}{0}$ che assume la proposta $\tang x$, possa ottenere un determinato valore $= 0$. Se nell'equazione $\sec x = 0$

si pone il valor generico $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, essendo α, β quantità reali, essa si decompone nelle due

$$\frac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}\cos\alpha = \left(\frac{1}{0}\right), \qquad \frac{e^{-\beta}-e^{\beta}}{2}\sin\alpha = 0,$$

dalle quali possono separarsi le incognite ed ottenersi

$$e^{2\beta}+e^{-2\beta} = \left(\frac{1}{0}\right), \qquad \tang\alpha = 0.$$

Queste dovendo essere verificate per valori reali di α e β, ne risulta

$$\beta = \pm\left(\frac{1}{0}\right), \qquad \alpha = \pm n\pi,$$

sapendosi d'altronde essere n un numero intero qualunque non escluso lo zero. Le radici di $\sec x = 0$ saranno comprese nel valore generale $x = \pm n\pi \pm \left(\frac{1}{0}\right)\sqrt{-1}$. Se un tal valore si pone nel fattore $\sin x$, esso si riduce, qualunque siasi il valor di n, all'espressione

$$\frac{\pm e^{\mp\left(\frac{1}{0}\right)} \mp e^{\pm\left(\frac{1}{0}\right)}}{2\sqrt{-1}},$$

vale a dire o alla

$$\frac{\pm e^{-\left(\frac{1}{0}\right)} \mp e^{+\left(\frac{1}{0}\right)}}{2\sqrt{-1}} = -\left(\frac{1}{0}\right)$$

ovvero alla

$$\frac{\pm e^{+\left(\frac{1}{0}\right)} \pm e^{-\left(\frac{1}{0}\right)}}{2\sqrt{-1}} = +\left(\frac{1}{0}\right).$$

Una qualsivoglia radice di $sec\, x = 0$ riducendo infinito il valor di $sin\, x$ e rimanendo affatto indeterminato il valore $\frac{0}{0}$ di $tang\, x$, ne deriva che le radici di $tang\, x = 0$ sono soltanto que' valori che annullano $sin\, x$, le radici di $sec\, x = 0$ non appartenendo alla proposta $tang\, x = 0$. Apparisce di quì come il prodotto di tutti i fattori lineari che si formano cogli infiniti valori di x che verificano la $tang\, x = 0$ non equivale alla funzione proposta $tang\, x$, ma soltanto a $sin\, x$ che è uno dei due fattori di cui essa consta. Questo è uno dei casi di cui si è parlato nel §. 4 in cui una proposta funzione trascendente $F(x)$ essendo della forma $\phi(x)\, f(x)$, deve nella ricerca delle radici della $F(x) = 0$ essere rimpiazzata dalla semplice $f(x) = 0$, quando si avveri che le radici di $\phi(x) = 0$ non appartengono alla proposta. L'equazione $tang\, x = 0$ non avrà perciò radici immaginarie, le radici reali essendo, come nella $sin\, x = 0$, in numero infinito e tutte comprese nella formola $x = \pm j\pi$.

17. Sia proposta l'equazione $y = x - sin\, x = 0$. Formata la serie (A) delle derivate, si troverà pel caso di $n > 2$ la relazione $y^{(n-1)} + y^{(n+2)} = 0$ come nel §. 16. Qualunque siano i valori di x che per $n > 2$ annulleranno una derivata intermedia $y^{(n)}$, dovranno render di segno contrario le derivate laterali. Se pertanto la proposta ammette valori critici, questi non potranno trovarsi che fra que' valori di x che annullando o la y'', o la y' rendano le rispettive derivate laterali dello stesso segno. Per $n = 2$ si avrà in luogo della precedente la relazione $y' + y''' = 1$. I valori di x che annullano la derivata intermedia $y'' = sin\, x$ senza annullar la proposta sono compresi nella formola $x = \pm j\pi$, escluso il valore $j = 0$. Fra questi valori quelli che soddisfano alla stabilita relazione sono compresi nella formola $\pm 2j\pi$, escluso il valore $j = 0$; e siccome essi rendono dello stesso segno le derivate laterali y', y''', ne risulta che la

proposta ha un' infinità di valori critici risultanti dalla $\pm 2j\pi$ col dare ad j tutti i valori interi $1, 2, 3 \ldots\ldots$ Si osserverà che la y' per uno qualunque de' suddetti valori risulta $= 0$. Il valor zero può considerarsi in generale come il limite delle quantità decrescenti, siano esse positive che negative. Ma ne' casi speciali dovrà considerarsi lo zero come il limite delle quantità positive, e perciò positivo egli stesso quando una funzione $\phi(x)$ che diventa zero per $x = p$ si mantien positiva fra i limiti $p - \varepsilon$ e $p + \varepsilon$, essendo ε piccola quanto si vuole, e considerarsi lo zero come il limite delle quantità negative, e perciò negativo esso stesso quando fra i detti limiti, ossia nella prossimità del valore p, la $\phi(x)$ si mantien negativa. Una tale avvertenza dovrà sempre aversi nel seguito. È perciò che nel caso attuale le y', y'' si sono riguardate entrambe positive. Per $n = 1$ si avrà la relazione $y'' + y = x$, e si troverà parimente che i valori che annullano la derivata intermedia y' senza annullar la proposta sono compresi nella formola $x = \pm 2j\pi$, ove j può avere tutti i numeri interi escluso lo zero. Ma questi valori riducono zero la y'' lasciando indeterminato il segno che gli si deve attribuire; giacchè fra i limiti $\pm 2j\pi - \varepsilon$ e $\pm 2j\pi + \varepsilon$, la y'' non conservandosi dello stesso segno, può essa nel convergere verso lo zero considerarsi tanto positiva, quanto negativa. Nulla pertanto si dovrà in questo caso conchiudere rispetto all' esistenza di valori critici. Si dovranno solo ritenere quelli precedentemente determinati e compresi nei valori alternativi che annullano la y''. A questo numero infinito di valori critici corrisponderà un numero infinito di coppie di radici immaginarie. Rispetto alle radici reali senza esplorare il criterio fondato sulla serie degl' indici, basterà l' osservare che essendo un arco sempre maggiore del proprio seno, tranne pel caso di $x = 0$, ed un tal valore $x = 0$ soddisfacendo non solo alla proposta, ma inoltre alle equazioni derivate $y' = 0$, $y'' = 0$, avrà la proposta stessa tre radici reali eguali a zero, e non ne potrà avere di più.

Sia proposta l'equazione $y = x - \cos x = 0$. Risulterà parimente per $n > 2$ la relazione $y^{(n-1)} + y^{(n+1)} = 0$; e si conchiuderà che tutte le equazioni derivate $y^{(n)} = 0$ di ordine $n > 2$ non possono fornire radici che siano valori critici della proposta. Se queste esistono, non possono cercarsi che nelle equazioni $y'' = \cos x = 0$, $y' = 1 + \cos x = 0$. Tutti i valori di x che annullano la prima di queste sono compresi nella formola $x = \pm \frac{2j + 1}{2} \pi$, ove j può avere tutti i valori della serie infinita $0, 1, 2 \ldots$. Ora per tutti i valori pari di j incluso lo zero, la y' è sempre positiva, e la y''' sempre negativa. Ma per tutti i valori dispari di j la y''' sarà sempre positiva, e la y' che è sempre zero è da riguardarsi pur essa positiva in quanto riman positiva intorno a quei valori di x che annullano la y'. Questi valori di j in numero infinito forniranno un numero infinito di valori critici. I valori poi che annullano la y' ossia che soddisfano la $1 + \sin x = 0$ sono compresi nella formola stessa $x = \pm \frac{2j + 1}{2} \pi$ in cui j abbia tutti i valori dispari. Ma per questi valori la y'' è zero, e siccome essa non si mantien dello stesso segno nella prossimità di detti valori, il suo segno rimane indeterminato e non si può dire che si riduca dello stesso segno della y, la quale è positiva pei suddetti valori positivi di x, ed è negativa pei valori negativi. Non ostante rimangono i valori critici indicati dai valori $x = \pm \frac{2j + 1}{2} \pi$, ove la j possa ottenere tutti gl'infiniti valori dispari $1, 3, 5 \ldots$ Avrà dunque la proposta un numero infinito di coppie di radici immaginarie. Rispetto alle radici reali siccome il valor di $\cos x$ è sempre compreso fra -1 e $+1$, ne deriva che se esse esistono, non possono essere comprese che fra i limiti $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Anzi siccome la x non diventa eguale ad uno, se non quando l'arco è $57^\circ\ 17'\ 44'',8 \ldots$ che porremo $= \frac{\pi}{2}\rho$, così si potranno impiegare i limiti $x = \theta$, $x = \frac{\pi}{2}\rho$, essendo θ una quantità positiva piccola quanto si voglia. Effettivamente se nella serie delle derivate si pongono questi limiti, si ottengono le due serie del seguente prospetto:

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \ldots\ldots & y^{v}, & y^{iv}, & y''', & y'', & y', & y \\ & \alpha, & \alpha+1, & \alpha+1, & \alpha+2, & \alpha+2, & \alpha+3 \\ \ldots\ldots & + & - & - & + & + & - \\ & \beta, & \beta+1, & \beta+1, & \beta+2, & \beta+2, & \beta+2 \\ \ldots\ldots & + & - & - & + & + & + \end{array}\right\}$$

Posto $\alpha - \beta = \delta^{v}$, la serie degl' indici sarà

$$\ldots\ldots \quad \delta^{v}, \quad \delta^{v}, \quad \delta^{v}, \quad \delta^{v}, \quad \delta^{v}+1,$$

e la serie ridotta, in quanto una qualsivoglia delle

$$\ldots\ldots \quad y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{iv}, \quad y^{v}$$

si mantiene dello stesso segno, diverrà $\ldots . 00001$. La proposta non ha pertanto che una sola radice reale fra i detti limiti. L'ultimo indice corrispondente alla y risultando $= 1$ ed essendo preceduto dallo zero, una tale radice è completamente separata e si potrà passare al calcolo approssimato del suo valore seguendo le tracce dell'esempio che daremo in seguito. Il processo seguito nelle equazioni $\sin x - x = 0$, $\cos x - x = 0$ fa prevedere quali analoghe conseguenze saranno da derivarsi qualora fossero proposte le equazioni $\sin x - f(x) = 0$, $\cos x - f(x) = 0$, essendo $f(x)$ una funzione intera.

18. Un valore che annulla una derivata intermedia $y^{(i)}$ e dia lo stesso segno alle due derivate laterali, acciò possa

riguardarsi come un valor critico, conviene, come si è detto al § 11, che non siano annullati per quel valore tutti i termini che nella serie (A) seguirebbero a destra della $y^{(i)}$; che quando ciò accada, il valore in quistione è una radice multipla della proposta $y = 0$. Così nell' equazione trascendente $y = e^x = 0$ in cui la e^x è finita e continua per tutta l' escursione di x, incominciando da $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$ sino ad un valore positivo $= m$ grande quanto si voglia, sussistendo indefinitamente le relazioni

$$y = y' = y'' = \ldots\ldots = y^{(n)} = \ldots\ldots = e^x,$$

il valore che annulla una qualsivoglia $y^{(n)}$ è $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$. Ammesso pure che un tal valore riduca dello stesso segno le due derivate laterali, siccome esso annulla in pari tempo tutte le derivate inferiori ad n, non esclusa la y, così il valore $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$ è una radice per lo meno n^{pla} della $y = 0$. Siccome poi la n può essere grande quanto si vuole, ne risulta che l'equazione proposta $e^x = 0$ è da riguardarsi come dotata di un numero infinito di radici eguali, il cui valore comune è $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$. Se nascesse dubbio che un valore infinito positivo o negativo possa ritenersi come radice di un' equazione qualunque $f(x) = 0$ che sia verificata per $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$, sarà tolta ogni difficoltà quando la proposta stessa sia trasformata in un' altra equazione $\chi(y) = 0$ nata dalla sostituzione di $x = \pm\frac{1}{y^2}$. La trasformata in quistione sarà certamente verificata per $y = 0$, ed un tal valore sarà una radice della $\chi(y) = 0$. Ma come il valore zero non è escluso dalla serie delle radici di una equazione $\chi(x) = 0$, dobbiamo necessariamente ammettere che nemmeno il valore $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$ dev' essere escluso dalla serie delle radici della $f(x) = 0$.

Per confermare altrimenti tali conclusioni ed assicurarci inoltre che altre radici diverse dalle accennate può ammettere la proposta $e^x = 0$, si consideri il binomio esponenziale $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, ove sia m numero intero. L'equazione $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 0$ che non cessa di essere algebrica per quanto grande sia m avrà sempre un numero m di radici eguali, il cui valor comune sarà $x = -m$; al crescere di m tali radici convergeranno verso un numero infinitamente grande negativo, e diverranno in numero pure estremamente grande. Ma siccome è

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left(\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right)^x,$$

ed inoltre indicando con e al solito la base de' logaritmi neperiani, siccome si ha

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{x}{m}} = 2 + \frac{\left(1 - \frac{x}{m}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{x}{m}\right)\left(1 - \frac{2x}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \frac{\left(1 - \frac{x}{m}\right)\left(1 - \frac{2x}{m}\right)\left(1 - \frac{3x}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

si otterrà per $m = \left(\frac{1}{0}\right)$

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ecc.} = e,$$

e perciò si avrà in questa ipotesi $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$. La e^x pertanto risulta equivalente al prodotto di un numero infinito di fattori semplici ciascuno eguale ad $1+\frac{x}{m}$, e non può avere altri fattori diversi. Ne risulta che le radici della $e^x = 0$ saranno tutte comprese nei valori $x = -m = -\left(\frac{1}{0}\right)$ in numero infinito. Parimente la $e^{-x} = 0$ avrà un numero infinito di radici eguali, il cui valor comune sarà $x = \left(\frac{1}{0}\right)$. Ne deriva da ciò che siccome la $e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ si può trasformare in $e^{-y} = 0$ col porre $\frac{1}{x^2} = y$ ossia $x = \pm y^{-\frac{1}{2}}$, così avrà essa un numero infinito di radici eguali a zero. Se in vece fosse proposta $F(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = 0$, ove sia m numero intero e positivo, essa sarebbe della forma $\phi(x)\, f(x) = 0$, ove $\phi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(x) = \frac{1}{x^m}$, e le radici della proposta $F(x) = 0$ sarebbero tutte comprese nelle m radici eguali all' infinito dell' equazione $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^m = 0$, ossia dietro il § 15 nelle m radici eguali a zero della trasformata $y^m = 0$ che nasce dal porre $\frac{1}{x} = y$, giacchè una qualunque delle radici zero della $\phi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ sostituita nel fattore $f(x) = \frac{1}{x^m}$ lo rende infinito e rende completamente indeterminato il valore $\frac{0}{0}$ che assume in tal caso la $F(x)$ e che non può mai ridursi ad un determinato valore per $x = 0$.

Dalla cognizione delle radici della $e^x = 0$ ne risulta quella della $\alpha^x = 0$ essendo α una costante reale e positiva;

giacchè posto $l(\alpha) = \beta$, indi fatto $x = \frac{y}{\beta}$, la $\alpha^x = 0$ è trasformata nella $e^y = 0$, e perciò avrà non altrimenti che la $e^y = 0$ un numero infinito di radici eguali a $\pm\left(\frac{1}{0}\right)$. Lo stesso vale per le equazioni $e^{\alpha x + \beta} = 0$, $a^{\alpha x + \beta} = 0$, le cui radici si deducono da quelle di un' equazione della forma $e^y = 0$.

Sia in vece proposta l' equazione $y = e^x - a = 0$ ove sia la a quantità reale e positiva. Applicando a questo caso il criterio delle radici immaginarie, si trova che una delle radici di una derivata qualunque $y^{(i)} = e^x = 0$ è $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$. Un tal valore, che deve ritenersi compreso in quelli pei quali la funzion proposta y rimane finita e continua, annulla le due derivate laterali, e siccome non annulla la proposta, esso valore non è radice multipla di essa. Si deve quindi esplorare qual segno deve attribuirsi alle derivate laterali seguendo i riflessi dati nel § 16. Ma per ottenere senza incertezza un tale intento conviene, come si è fatto precedentemente, considerare la funzione e^x come il limite verso cui converge l' espressione $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ al convergere di m verso l' infinito positivo. Il valore $x = -m$ che annulla una derivata qualunque $y^{(n)}$ rendendo zero le derivate laterali, converrà esplorare qual segno esse ricevono pei due valori $x = -m - \theta$, $x = -m + \theta$, essendo θ quantità piccola quanto si vuole. Dalla sostituzione si vede che per m pari le derivate laterali sono entrambe positive e per m dispari entrambe negative, e che debbono riguardarsi dello stesso segno pel valore intermedio $x = -m$. Ora una tale conseguenza sussiste per quanto grande sia m. Si deve dunque ritenere che anche pel limite $m = \left(\frac{1}{0}\right)$

[pel quale, mentre la $y^{(n)} = 0$ diventa $e^x = 0$, la cui radice assume il valore $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$] le due derivate laterali debbono considerarsi dello stesso segno; ciò verificandosi per tutti gl' infiniti valori di n, ne deriva che la proposta ha un numero infinito di valori critici, ossia un numero infinito di coppie di radici immaginarie. Si sa di fatti d'altronde che la proposta $e^x - a = 0$ può essere risoluta logaritmicamente ed ottenersi $x = l((a))$, ove le doppie parentesi sono impiegate per rappresentare uno qualunque dei valori multipli che rappresentano le radici stesse. Si è convenuto di rappresentare colla parentesi semplice $l(x)$ il valor della radice reale della stessa equazione. Dietro ciò le radici della proposta sono tutte inchiuse nell' espressione $x = l(a) \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, ove k può ricevere tutti i valori della serie $0, 1, 2 \ldots$ ecc. Uno stesso processo dimostra che la $e^x + a = 0$, essendo ancora a positivo, ammette un infinito numero di coppie di radici immaginarie. Esse sono tutte comprese nell' espressione $x = l(a) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$, ove parimente k può ricevere tutti i valori dell' anzidetta serie. L' equazione $e^x - a = 0$ ammette una radice reale corrispondente a $k = 0$, la $e^x + a = 0$ non ammette che radici immaginarie.

A conferma di quanto si è detto sulle radici delle $e^x = 0$ supponiamo di risolvere col metodo ordinario l' equazione $e^x = a$ essendo a positiva, si troverà

$$x = l((a)) = l(a) \pm 2k\pi\sqrt{-1} = \mu\, e^{\rho\sqrt{-1}},$$

ove sarà

$$\mu = \left\{\overline{l(a)}^2 + (2k\pi)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = arc.\ tang\left(\pm\frac{2k\pi}{l(a)}\right)$$

indicando le parentesi semplici il più piccolo degli archi, la cui tangente è $\pm \frac{2k\pi}{l(a)}$. Le diverse radici della proposta saranno quelle che risultano dando a k i valori della serie o, 1, 2, 3 . . . . idefinitamente, sarà cioè

$$x = \left\{ \overline{l(a)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} e^{arc.\, tang(o)\sqrt{-1}} = l(a)$$

$$x = \left\{ \overline{l(a)}^2 + \left(\frac{2\pi}{l(a)}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} e^{arc.\ tang\left(\pm \frac{2\pi}{l(a)}\right)\sqrt{-1}}$$

$$x = \left\{ \overline{l(a)}^2 + \left(\frac{4\pi}{l(a)}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} e^{arc.\ tang\left(\pm \frac{4\pi}{l(a)}\right)\sqrt{-1}}$$

$$x = \left\{ \overline{l(a)}^2 + \left(\frac{6\pi}{l(a)}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} e^{arc.\ tang\left(\pm \frac{6\pi}{l(a)}\right)\sqrt{-1}},$$

e così dicasi indefinitamente. Queste sussistono per quanto piccolo sia il valore di a. Se si riduce esso precisamente a zero, siccome allora $l(a)$ si riduce a $l(o) = -\left(\frac{1}{o}\right)$, tutte queste radici si riducono a $+\left(\frac{1}{o}\right)$.

Si dovrà però ritenere sempre nel seguito che il trascendente e^x che entra in una funzione $F(x)$ possa considerarsi o come il limite stesso della $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ per m eguale realmente all'infinito positivo ovvero come la stessa $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ in cui m, senza essere l'infinito, possa essere grande quanto si voglia. Questa seconda significazione dovrà dietro i riflessi del § 3 attribuirsi alla e^x ogni qualvolta la $F(x)$ cessa di essere finita e continua per $x = -\left(\frac{1}{o}\right)$.

Data l'equazione $y = e^x - a = \left(\frac{1}{o}\right)$, si ammetterà per e^x la prima significazione in quanto y rimane finita e continua anche per $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$. Supposto per maggior semplicità $a > 1$, si sostituiscano nella serie (A) successivamente i limiti

$$x = -m,\ x = -\theta,\ x = \theta,\ x = l(a) - \theta,\ x = l(a) + \theta,\ x = m,$$

ove θ ed $\frac{1}{m}$ siano quantità piccole quanto si vuole senza raggiungere il limite zero. Arrestandoci nella serie delle derivate alla y^{v}, l'equazione $y^{\mathrm{v}} = e^{x} = 0$ non avendo nè radici reali, nè immaginarie fra i limiti finiti $x = -m$, $x = m$, nè a più forte ragione fra limiti intermedj, si dovrà nell'indice $\delta^{\mathrm{v}} = r + 2c$ corrispondente alla derivata y^{v} supporre $r = c = 0$, e perciò $\delta^{\mathrm{v}} = 0$. È questo uno de' casi accennati al § 7 in cui può la δ^{i} essere altrimenti determinata e divenire con ciò nota la porzione estrema della serie degl' indici, non ostante che la serie (A) sia fatta di un numero infinito di termini. Dietro ciò si avrà per le serie degl' indici dovute ai limiti sostituiti il seguente quadro:

		y^{v}	y^{iv}	y'''	y''	y'	y
$x = -m$	$x = -\theta$	0	0	0	0	0	0
$x = -\theta$	$x = \theta$	0	0	0	0	0	0
$x = \theta$	$x = l(a) - \theta$	0	0	0	0	0	0
$x = l(a) - \theta$	$x = l(a) + \theta$	0	0	0	0	0	1
$x = l(a) + \theta$	$x = m$	0	0	0	0	0	0

la proposta $y = 0$ non ha dunque fra i limiti

$$-m \ldots -\theta;\quad -\theta \ldots +\theta;\quad \theta \ldots l(a) - \theta;\quad l(a) + \theta \ldots m$$

nè radici reali, nè valori critici, ma fra i limiti $l(a) - \theta$ ed $l(a) + \theta$ esiste una sola radice reale $= l(a)$ e nessun valor critico. Dunque fra i limiti $-m \ldots +m$, grandi quanto si vuole, ma finiti non ha la $y = 0$ che una sola radice reale senza valori critici. Ciò è una conferma del teorema generale, giacchè in questo caso i valori critici non esistono fra limiti finiti per quanto grandi essi siano, trovandosi essi come si è già osservato nel limite stesso infinito $y = -\left(\frac{1}{0}\right)$, il quale non cessa di essere un valore pel quale la proposta funzione y si conserva finita.

19. Nell' esposizione dei principj teoretici di questa dottrina delle equazioni si è ammesso ch' essi erano applicabili alle equazioni algebriche o trascendenti purchè fossero di natura determinata e non contenessero costanti immaginarie: che inoltre se nell' equazione $F(x) = 0$ la $F(x)$ cessava in certi intervalli dell' escursione indefinita della x di conservarsi finita e continua, i dimostrati teoremi erano soltanto applicabili entro quegl' intervalli o limiti di x ne' quali la funzione stessa si mantiene continua. Sia pertanto proposta l'equazione $y = l((x)) - a = 0$ ovvero $y = l((-x)) - a = 0$, essendo a quantità reale. Siccome sappiamo essere

$$l((x)) = l(x) \pm 2k\pi\sqrt{-1} \quad \text{ed} \quad l((-x)) = l(x) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

ove la k può avere uno qualunque dei valori della serie $0, 1, 2, 3 \ldots$ le equazioni proposte sarebbero escluse da questa trattazione perchè indeterminate. Che se per renderle determinate si supponesse attribuito a k uno dei valori della serie stessa, le proposte equazioni sarebbero escluse in quanto conterrebbero una costante immaginaria, tranne la prima pel solo valore $k = 0$. La sola equazione che ammette l'applicazione di questa teorica sarebbe la $y = l(x) - a = 0$. La funzione $l(x) - a = F'(x)$ esaminata in tutta l'escursione di x da $-\left(\frac{1}{0}\right)$ a $+\left(\frac{1}{0}\right)$ mostra ch' essa si mantiene bensì finita e continua da un valore positivo $x = m$ estremamente grande ad un valore positivo $x = \theta$ piccolo quanto si vuole purchè non precisamente $= 0$, ma nell' escursione di x da $x = \theta$ ad $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$ o cessa di mantenersi finita e continua, o introduce una costante immaginaria. I teoremi generali non cesseranno però di essere applicabili all'equazione $y = l(x) - a = 0$, dietro ciò che si è avvertito al § 2, purchè nella loro applicazione non si supponga attribuito ad x alcun valore che oltrepassi quei limiti oltre i quali la $F(x)$ cessa di avere i voluti caratteri. Nel caso nostro tali limiti di x sono $x = \theta$ ed $x = m$, essendo θ ed $\frac{1}{m}$ piccoli quanto si vuole senza raggiungere il valore $= 0$. Essendo data l'equazione $y = l(x) - a = 0$, si formi la serie (A) delle derivate, e s'intenda posti ne' suoi diversi termini i successivi valori

$$x = \theta\,, \quad x = e^{a} - \theta\,, \quad x = e^{a} + \theta\,, \quad x = e^{a} + m\,,$$

essendo θ ed $\frac{1}{m}$ piccoli quanto si vuole. Una qualsivoglia derivata dell'ordine $= i$ sarà data da

$$y^{(i)} = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots i \left(\frac{1}{x}\right)^{i},$$

valendo il segno superiore per i numero dispari, l'inferiore per i numero pari. Siccome fra i tre sopra stabiliti intervalli la $y^{(i)} = 0$ non ammette radici nè reali, nè immaginarie, perciò essendo $r = c = 0$, la $\delta^{i} = r + 2c$ si ridurrà a $\delta^{i} = 0$. È questo uno de casi accennati al § 7 in cui può la δ^{i} essere altrimenti determinata e divenir nota la porzione estrema della serie degl'indici, non ostante che sia infinita la serie (A) da cui essa dipende. La serie degli indici competenti alle derivate

$$y^{v}\,, \quad y^{iv}\,, \quad y'''\,, \quad y''\,, \quad y'\,, \quad y$$

e dovute ai limiti accennati risulta come nel seguente quadro

....		y^{V},	y^{IV},	y''',	y'',	y',	y
$x=\theta$,	$x=e^a-\theta$	o ,	o ,	o ,	o ,	o ,	o
$x=e^a-\theta$,	$x=e^a+\theta$	o ,	o ,	o ,	o ,	o ,	o
$x=e^a+\theta$,	$x=e^a+m$	o ,	o ,	o ,	o ,	o ,	o

la proposta $y=o$ non ha fra i limiti θ ed $e^a-\theta$ e fra i limiti $e^a+\theta$ ed e^a+m nè radici reali, nè valori critici. Una sola radice reale è compresa fra i limiti $e^a-\theta$ ed $e^a+\theta$. Dunque fra i limiti $x=\theta$ ed $x=m$ la proposta equazione ammette una sola radice reale data da $x=e^a$. E di fatto se nella proposta equazione si pone per x l'espressione generale delle radici immaginarie data sotto forma modulare alla quale può sempre ridursi l'espressione immaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; se si può cioè $x=y\,e^{z\sqrt{-1}}$ ove y, z sono quantità reali, essa si scompone nelle due $l(y)-a=o$, $z=o$, da cui risulta $x=y=e^a$, cioè si riduce ad una semplice radice reale.

Quando vogliasi applicare all'equazione $y=l(x)-a=o$ il teorema generale del § 11, si dovrà esplorare se l'equazione

$$y^{(i)}=\pm\,1.2.3\,...\,i\left(\frac{1}{x}\right)^i=o \quad \text{ossia la} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^i=o$$

ammette radici reali comprese fra i limiti $x=\theta$, $x=m$ entro cui siamo obbligati a restringerci, i valori delle quali sostituiti nelle derivate laterali, le riducano dello stesso segno. Ora è manifesto che fra detti limiti non esistendo alcuna radice della $y^{(i)}=o$, non esistono valori critici indicatori di radici immaginarie entro la stabilita escursione della variabile x. Giova riflettere che la $\left(\frac{1}{x}\right)^i=o$ non può essere verificata che pel valore $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$, ed un tale valore quantunque annulli le derivate laterali, le riduce dello stesso segno nel caso che si assuma i numero dispari. Di fatto se si trasformano le derivate stesse colla sostituzione di $x = \frac{1}{z}$, il valore $z = 0$ che è una delle radici della $y^{(i)} = (z)^i = 0$ annulla le derivate laterali. Ma siccome esse si mantengono dello stesso segno per la sostituzione tanto di $z = 0 + \theta$ quanto di $z = 0 - \theta$ dietro il riflesso del § 17, si deve conchiudere che il valore $z = 0$ od il valore $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$ riduce dello stesso segno le due derivate laterali d' ordine pari. Ma il valore $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$ è escluso dai limiti entro i quali abbiamo detto essere applicabili i principj della teorica di cui ci occupiamo. Non è quì come nel caso della equazione $e^x - a = 0$ contemplato nell'antecedente paragrafo ove il valore $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$ è compreso nei limiti entro cui la funzione $e^x - a$ rimane finita e continua, e perciò non può essere escluso un tal valore dal novero delle radici della $y^{(i)} = 0$ mentre nel caso attuale il valore $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$ che è escluso dai limiti stessi, è pure escluso dal novero delle radici della $\left(\frac{1}{x}\right)^i = 0$.

I casi pertanto, sia dell' equazione $l(x) - a = 0$ per a immaginaria, sia delle equazioni $l((x)) - a = 0$, $l((-x)) - a = 0$, non ostante che sia reale la a, essendo esclusi dalla teorica in questione, dovranno trattarsi coi metodi ordinarj. Essendo a immaginaria nella $l(x) - a = 0$, il valore $x = e^a$ non lascia di soddisfarla. Siccome le altre due equazioni in cui si suppone la a reale si riducono la 1.ª a $\quad l(x) \pm 2k\pi\sqrt{-1} - a = 0 \quad (1)$

la 2.ª a $\quad l(x) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1} - a = 0 \quad (2)$

ossia supposto $\quad a \mp 2k\pi\sqrt{-1} = b\,, \quad a \mp (2k+1)\pi\sqrt{-1} = b'$

si riducono a $\quad l(x) - b = 0\,, \quad l(x) - b' = 0\,,$

ove b, b' sono immaginarie, il valore di x che soddisfa alla (1) sarà $x = e^{b}$, quello che soddisfa alla (2) sarà $x = e^{b'}$

ossia $\quad x = e^{a \mp 2k\pi\sqrt{-1}}\,, \ (3) \quad x = e^{a \mp (2k+1)\pi\sqrt{-1}} \ (4)$

ossia $\quad x = e^{a} \cdot e^{\mp 2k\pi\sqrt{-1}}\,, \quad x = e^{a} \cdot e^{\mp (2k+1)\pi\sqrt{-1}}.$

Giova quì avvertire che sebbene i fattori

$$e^{\mp 2k\pi\sqrt{-1}}\,, \qquad e^{\mp (2k+1)\sqrt{-1}}$$

che equivalgono alle funzioni circolari

$$\cos(2k\pi) \mp \sqrt{-1}\,\sin(2k\pi)\,, \quad \cos(2k+1)\pi \mp \sqrt{-1}\,\sin(2k+1)\pi\,,$$

si riducano il primo $= +1$, il secondo $= -1$, e perciò $x = e^{a}$ pel primo caso, $x = -e^{a}$ pel secondo, siccome tali valori ridotti non siddisfano le equazioni (1), (2), così non si dovrà eseguire alcuna riduzione nei secondi membri delle (3), (4), quando vuolsi ch' esse rappresentino le radici delle (1), (2), o le radici delle $l((x)) - a = 0$, $l((-x)) - a = 0$. Il valore ridotto $x = e^{a}$ rappresenta soltanto la radice della equazione $l(x) - a = 0$. Ritenuto che

$$l(e^{q}) = q\,, \quad l((e^{q})) = q \pm 2k\pi\sqrt{-1}\,,$$

$$l((p\,q)) = l((p)) + l(q) = l((q)) + l(p)\,,$$

si giunge allo stesso risultato quando nell' equazione

$$l((\pm x)) - a = 0$$

si sostituisca ad x la forma modulare $x = y\,e^{z\sqrt{-1}}$. Essa si riduce a $l((\pm y)) + z\sqrt{-1} - a = 0$. Se si assume il segno superiore, essa equivale alla $l(y) \pm 2k\pi\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} - a = 0$ ossia alle due $l(y) - a = 0$, $\pm 2k\pi + z = 0$, da cui si deduce

$$x = y\,e^{z\sqrt{-1}} = e^{a} \cdot e^{\mp 2k\pi\sqrt{-1}} = e^{a \mp 2k\pi\sqrt{-1}}.$$

Se si piglia il segno inferiore, essa equivale a

$$l(y) \pm (2k + 1)\pi\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} - a = 0$$

od alle due

$$l(y) - a = 0\,, \quad z \pm (2k + 1)\pi = 0,$$

da cui

$$x = y\,e^{z\sqrt{-1}} = e^{a} \cdot e^{\mp(2k+1)\pi\sqrt{-1}} = e^{a \mp (2k+1)\pi\sqrt{-1}}.$$

Si dovrà in queste avere la stessa avvertenza di conservarle sotto questa forma acciò possano soddisfare all' equazione $l((\pm x)) - a = 0$.

19. Sia proposta l'equazione $y = l(x) - x = 0$. Si cerchi primieramente il numero delle radici reali e de' valori critici ch' essa può contenere unicamente fra i limiti finiti $x = \theta$, $x = \mu$, essendo θ piccolo quanto si vuole e $\mu > 1 + \theta$. Pei valori di $i > 1$ l' equazione

$$y^{(i)} = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i\left(\frac{1}{x}\right)^{i} = 0$$

ossia la $\left(\frac{1}{x}\right)^{i} = 0$ non ammette alcuna radice nè reale, nè immaginaria fra i limiti θ e μ. Nella serie (A) arrestandoci alla δ^{r}, si avrà $\delta^{r} = r + 2c = 0$. Dalla sostituzione successiva dei valori

$$x = \theta\,, \quad x = 1 - \theta\,, \quad x = 1 + \theta\,, \quad x = \mu$$

si avrà per le rispettive serie degl' indici il seguente quadro :

	y^{v}	y^{iv}	y'''	y''	y'	y
$x = \theta$, $x = 1 - \theta$	0	0	0	0	0	0
$x = 1 - \theta$, $x = 1 + \theta$	0	0	0	0	1	2
$x = 1 + \theta$, $x = \mu$	0	0	0	0	0	0

Ci si offre quì un' applicazione della regola del § 7. Essendo zero l' ultimo indice dovuto ai limiti θ e $1 - \theta$ ed ai limiti $1 + \theta$ e μ, non esistono fra questi intervalli nè radici reali, nè valori critici. Ma fra i limiti $1 - \theta$ ed $1 + \theta$ essendo l' ultimo indice $= 2$, ed il primo indice 1, che s' incontra procedendo da destra a sinistra nella serie stessa essendo intermedia fra 2 e 0 ossia incontrandosi gl' indici 0, 1, 2, siamo nel caso ivi contemplato in cui si deve esplorare se l' indice 2 indica due radici reali eguali o disuguali o due radici deficienti. L' equazione $y' = 0$ ha una radice reale fra i limiti $1 - \theta$ ed $1 + \theta$, giacchè l' indice di y' risulta $= 1$, la radice di essa è $x = 1$. Un tal valore $x = 1$ non essendo radice della $y = 0$ ed inoltre riducendo le derivate laterali y'' ed y dello stesso segno, siamo avvertiti che il valore $x = 1$ corrisponde ad un valor critico della $y = 0$, e che perciò l' indice 2 corrisponde a due radici deficienti. Perciò l'equazione $l(x) - x = 0$ non ha radici reali fra i limiti $x = \theta$, $x = \mu$, e non può mancare di esistere una coppia di radici immaginarie. Comunque si supponesse μ un numero assai grande, ci troveremmo condotti alla stessa conseguenza. Per riconoscere se altre coppie di radici immaginarie ammette la proposta, si osserverà primieramente che, dietro i già fatti riflessi, divenendo $l(x)$ immaginaria per valori negativi di x, e divenendo $= -\left(\frac{1}{0}\right)$ per $x = 0$, non possiamo applicar la teorica in quistione che entro l' escursione dei valori positivi di x ossia fra limiti più ristretti. Siccome la proposta equazione equivale alla $\frac{l(x)}{x} - 1 = 0$, la quale rimane finita e continua per $x = \theta$ piccolo quanto si vuole sino ad $x = \left(\frac{1}{0}\right)$ inclusive, siamo autorizzati ad impiegare questi stessi limiti nell' equazione $l(x) - x = 0$ che per $x = \left(\frac{1}{0}\right)$ si presenta sotto l' aspetto indeterminato $\left(\frac{1}{0}\right) - \left(\frac{1}{0}\right)$. Applicando il teorema del § 11 alla proposta equazione fra i limiti $x = \theta$, $x = \left(\frac{1}{0}\right)$, dobbiamo ritenere che per tutti i valori di $i > 1$ l'equazione $y^{(i)} = 0$ ha una radice $x = \left(\frac{1}{0}\right)$, e che le derivate laterali, non ostante che si annullino per un tal valore, conservano lo stesso segno almeno quelle di ordine pari, come si è avvertito al § 18. Avrà dunque la proposta, oltre il valore critico distinto $x = 1$ di già determinato, un numero infinito di valori critici tutti situati al limite stesso $x = \left(\frac{1}{0}\right)$; perciò oltre la coppia distinta di radici immaginarie già segnalata, avrà inoltre un numero infinito di altre coppie immaginarie segnalate da questi ultimi valori critici trovati. Di fatto se nella proposta si pone per x la sua espressione modulare $y e^{z\sqrt{-1}}$ e dalle due equazioni risultanti si elimini la y, si giunge all'equazione $l\left(\frac{z}{\sin z}\right) - z \cot z = 0$ (1) essendo y dato per z col mezzo della $y = \frac{z}{\sin z}$ (2). Si avranno le radici immaginarie della proposta quando coi metodi sopra indicati si determinino le radici reali della (1). Essendo il primo membro della (1) una funzion pari, trovato un valor positivo $z = p$ che la soddisfi, vi sarà un valor negativo $z = -p$ che la soddisfa parimente. Essendo poi il secondo membro della (2) una funzion pari, entrambi questi valori daranno per y lo stesso risultato. Se dicasi q questo valore di y risultante da $z = \pm p$, una delle coppie immaginarie della proposta sarà $x = q \cos p \pm q \sin p \sqrt{-1}$. Che l'equazione (1) ammetta più radici reali rendesi manifesto dall'osservare che essa cambia di segno negl'intervalli da $x = 2k\pi$ ad $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ che nascono dando a k ognuno dei valori $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ Essa avrà almeno una radice reale compresa in ciascun intervallo, e perciò ne avrà un numero infinito. Una tale disamina ci mostra come si debba procedere quando fosse proposta l'equazion più generale $l(x) - f(x) = 0$, ove $f(x)$ indichi una funzione intera.

20. Sia proposta l'equazione $y = e^x - b e^{ax} = 0$ ove a, b siano costanti reali e positive. Prese le successive derivate, si potranno dedurre tre derivate successive, le quali, essendo n numero qualunque, saranno date dalle

$$y^{(n-1)} = e^x - b a^{n-1} e^{ax}\,; \quad y^{(n)} = e^x - b a^n e^{ax}\,; \quad y^{(n+1)} = e^x - b a^{n+1} e^{ax}.$$

Dobbiamo ora esaminare quali segni inducano alle derivate laterali le diverse radici reali dell'equazione $y^{(n)} = 0$ ossia della $e^x - b a^n e^{ax} = 0$. Siccome il primo membro di questa consta dei due fattori e^x ed $1 - b a^n e^{(a-1)x}$, così le radici reali della $y^{(n)} = 0$ sarebbero quelle che soddisfano le due equazioni $e^x = 0$, $1 - b a^n e^{(a-1)x} = 0$. Ma i valori $= -\left(\frac{1}{0}\right)$ che annullano e^x senza rendere infinito l'altro fattore, annullano in pari tempo tutte le derivate inferiori ad n ed inclusivamente la proposta. Dietro quanto si è accennato in principio, è questo il caso delle radici multiple. Esiste dunque un fattore comune alla proposta ed a tutte le sue derivate indefinitamente, il quale risulta essere la stessa

e^x. Essendo dunque la proposta decomponibile in due fattori, le radici di essa saranno i diversi valori di x che annullano i due fattori in quistione purchè quei valori che rendono zero uno di essi non rendano l'altro infinito. La proposta equazione pertanto messa sotto la forma $e^x\{1 - b e^{(a-1)x}\} = 0$ avrà per radici quelle delle due equazioni

$$e^x = 0 \quad (a), \qquad 1 - b e^{(a-1)x} = 0 \quad (b).$$

Siccome le radici della (a) già determinate nel § 18 non rendono infinito il primo membro della (b), così esse competeranno pure alla proposta: saranno inoltre da cercarsi le radici della (b). Tre successive derivate generiche saranno date, qualunque sia n, dalle relazioni

$$y^{(n-1)} = -b(a-1)^{n-1} e^{(a-1)x}; \quad y^{(n)} = -b(a-1)^n e^{(a-1)x};$$

$$y^{(n+1)} = -b(a-1)^{n+1} e^{(a-1)x}.$$

Le radici reali dell' equazione $y^{(n)} = 0$ sono quei valori reali che verificano la $e^{(a-1)x} = 0$, la quale è della forma $e^{\pm\alpha x} = 0$, valendo il segno $+$ ovvero $-$ secondo che sarà $a >$ ovvero < 1. Si è già avvertito nel citato paragrafo che le infinite radici della $e^{\pm\alpha x} = 0$ che annullano le derivate laterali, le riducono sempre dello stesso segno sia per n pari che per n dispari. Siccome tali valori di x, cioè

$$x = \left(\frac{1}{0}\right) \text{ se è } a < 1 \quad \text{od} \quad x = -\left(\frac{1}{0}\right) \text{ se } a > 1,$$

non sono radici della (b) e sono in numero infinito a seconda degl' infiniti valori di n, ne risulta che avendo la (b) un numero infinito di radici immaginarie, anche la proposta, oltre le radici della (a), avrà un numero infinito di radici immaginarie dovute alla (b). Di fatto la (b) posta sotto la forma $e^{(a-1)x} = \frac{1}{b}$ e trattata col metodo ordinario, avuto riguardo ai valori multipli nel pigliare i logaritmi, darà

$$(a-1)x = l\left(\left(\frac{1}{b}\right)\right) = l\left(\frac{1}{b}\right) + l((1)),$$

essendo $l((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, ove k sarà uno qualunque dei termini della serie $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ da cui si deduce

$$x = \frac{l(b)}{1-a} \mp \frac{2k\pi}{1-a}\sqrt{-1}.$$

Per $k = 0$ si ha $x = \frac{l(b)}{1-a}$. Ha dunque la proposta una sola radice reale ed un numero infinito di radici immaginarie competenti ai valori di $k = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ oltre le infinite radici della $e^x = 0$ date al § 18.

21. Sia proposta l'equazione $y = e^x - x = 0$. La y divenendo infinita per valori di $x = \pm\left(\frac{1}{0}\right)$, dovremo dietro i riflessi del § 18 contenerci, nell'esplorare una tale funzione, entro i limiti $x = -m$, $x = m$, essendo m grande quanto si vuole senza divenire $= \left(\frac{1}{0}\right)$. Si dovrà quindi considerare la e^x come equivalente ad $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ come si è detto nel citato paragrafo. Inoltre siccome per valori reali e positivi di x è sempre $e^x > x$, così sarà impossibile con tali valori soddisfare alla $y = 0$. Se si suppone $x = -\zeta$, la proposta si trasforma in $\zeta e^{-\zeta} + 1 = 0$, e siccome per valori positivi di ζ la $\zeta e^{-\zeta}$ ha sempre un valor positivo, così non potendosi per tali valori soddisfare a questa, non si potrà nemmeno soddisfare alla proposta con valori negativi di x. Non ammetterà per ciò la proposta alcuna radice reale. Dalle derivazioni della y risulta che per $n > 2$ tre

derivate consecutive qualunque si riducono a

$$y^{(n-1)} = y^{(n)} = y^{(n+1)} = e^x.$$

Siccome risulta dal già esposto che per ciascun valore di $n > 2$ il valore $x = -m$ che annulla la derivata intermedia $y^{(n)}$ rende dello stesso segno le derivate laterali senza annullar la proposta, vi sarà nella proposta un valore critico, ossia una coppia di radici immaginarie per ogni valore di n superiore a 2, e siccome infinito è il numero delle successive derivate, così vi sarà un numero infinito di tali coppie. Per $n = 2$ mancherà il criterio delle radici immaginarie, ma per $n = 1$ si avrà $y' = e^x - 1$. Il valore unico reale $x = 0$ che annulla y' riducendo dello stesso segno la y ed y'', ammetterà la proposta pel caso di $n = 1$ una coppia distinta di radici immaginarie. In generale supposto che $f(x)$ rappresenti una funzione intera di grado h, siccome l'equazione $y = e^x + f(x) = 0$ ammetterà sempre la relazione $y^{(h+1)} = y^{(h+2)} = y^{(h+3)} = \ldots = e^x$, così essa, non altrimenti che nel caso più semplice dato sopra, ammetterà un infinito numero di radici immaginarie. Per mostrare come le conseguenze desunte dal teorema generale convengono con quelle che possono con altri metodi dedursi, e per dare in pari tempo un'applicazione del processo di determinare col mezzo delle costruzioni i limiti delle radici reali di un'equazione trascendente, si ponga per x nella proposta equazione la forma generale delle radici immaginarie $x = y + z\sqrt{-1}$, ove y, z sono quantità reali. Essa allora è rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$e^y \cos z - y = 0, \qquad e^y \sin z - z = 0 \qquad (a).$$

Colla combinazione delle precedenti si potrebbero ottenere equazioni analoghe a quelle del § 19, giacchè potendosi passare dalla $l(x) - x = 0$ di quel paragrafo alla $e^x - x = 0$

che quì si tratta, si otterrebbero anche le analoghe

$$y = l\left(\left(\frac{z}{\sin z}\right)\right), \qquad l\left(\left(\frac{z}{\sin z}\right)\right) - z \cot z = 0.$$

Ma per evitare la moltiplicità dei valori introdotti dal logaritmo si farà in vece il quadrato dei due membri $y = e^y \cos z$, $z = e^y \sin z$, e dalla loro somma si otterrà $z = \pm\sqrt{e^{2y} - y^2}$ colla quale, avvertendo che in generale è $\cos(\pm\rho) = \cos\rho$, si ottiene

$$e^y \cos\left\{\sqrt{e^{2y} - y^2}\right\} - y = 0 \qquad (b).$$

Determinate le radici reali della (b), si avrà per determinare la z una o l'altra delle due

$$z = \pm\sqrt{e^{2y} - y^2}, \qquad \cos z = y\, e^{-y}.$$

Si vede da quest'ultima relazione che, qualunque siasi il valore delle radici reali della (b), non potendosi per alcun valore positivo o negativo di y soddisfare alla $y e^{-y} = 1$ in quanto è sempre $e^y > y$, così non potendo mai essere $\cos z = 1$, non potrà nemmeno aversi $z = 0$; perciò in conferma di quanto si è già detto non potrà la $e^x - x = 0$ avere radici reali. La conoscenza de' limiti entro cui son comprese le radici reali, ossia la determinazione degl' intervalli $(a \ldots b)$, $(a' \ldots b')$, $(a'' \ldots b'') \ldots$ in ciascun de' quali sia compresa una delle radici della proposta, esigerebbe secondo le norme indietro prescritte il calcolo delle successive derivate y', y'', $y''' \ldots$, le quali divenendo sempre più complesse condurrebbero a computi troppo prolissi comunque esenti da ogni incertezza. Mostreremo perciò come si giunga allo stesso intento facendo dipendere una tale ricerca da quella di equazioni più semplici della forma $e^{2y} - y^2 - \rho^2 = 0$, nell' ottenere le quali ci si offre occasione di mostrare di quale vantaggio siano in simili ricerche le costruzioni geometriche.

Supposto che y rappresenti le ascisse ed u le ordinate, si costruiscano le curve che nascono dalle due equazioni

$$ye^{-y} = u \,, \qquad cos(e^{2y} - y^2)^{\frac{1}{2}} = u.$$

La curva dovuta alla prima di queste sarà rappresentata nella fig. 1.ª dalla $SomS'$. Questa taglia l'asse delle ascisse all'origine, giacchè per $y = 0$ si ha $u = 0$. Il ramo diretto nel senso delle ascisse positive da 0 ad X avrà tutte le sue ordinate positive, la massima fra le quali competerà all'ascissa $y = 0p = 1$, e sarà data da $pm = \frac{1}{e}$. Le ordinate corrispondenti alle ascisse negative saranno pur esse negative e crescenti da zero a $-\left(\frac{1}{0}\right)$. La curva rappresentata dalla seconda equazione incontrerà il semiasse positivo $0Y$ delle ordinate in un punto b tale che sia

$$0b = cos(1) = cos\left\{57^\circ\ 17'\ 44'',8\right\} = 0,5403 \ldots.$$

Il ramo che si avvolge al semiasse positivo delle ascisse taglierà l'asse stesso nei punti $0'$, $0''$, $0'''$ ... tali che sia $00'$ la radice dell'equazione $e^{2y} - y^2 = \frac{\pi^2}{4}$, $00''$ la radice della $e^{2y} - y^2 = \frac{9\pi^2}{4}$, la $00'''$ sia la radice della $e^{2y} - y^2 = \frac{25\pi^2}{4}$, e così dicasi delle successive intersezioni. Le ascisse $0q$, $0q'$, $0q''$, $0q'''$ .... corrispondenti alle massime ordinate positive e negative saranno date dai valori della radice competente rispettivamente alle equazioni

$$e^{2y}-y^2 = \pi^2, \quad e^{2y}-y^2 = 4\pi^2, \quad e^{2y}-y^2 = 9\pi^2, \quad e^{2y}-y^2 = 16\pi^2 \ldots.$$

lo stesso si dirà per le successive ascisse $0q^{IV}$, $0q^{V}$ .... Rispetto al ramo di curva che passato il punto b si dirige dalla parte del semiasse negativo si deduce dall'esame della equazione che questa per valori negativi di y non diventa negativa se non al di là di un certo valore $y = -\rho = o\alpha$ che è determinato dalla radice positiva dell'equazione $e^{-2\rho} - \rho^2 = 0$. Per tutti i valori di y compresi fra zero e $-\rho$ le ordinate saranno positive e crescenti, e pel valore stesso $y = -\rho = o\alpha$ risulterà $u = \alpha\beta = 1$. Da questo punto in avanti divenendo immaginaria l'espressione $\sqrt{e^{2y} - y^2}$, si metterà essa sotto la forma $(y^2 - e^{2y})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$, ed il ramo corrispondente all'equazione $\cos\sqrt{e^{2y} - y^2} = u$ sarà rappresentato per valori negativi di y al di là di $y = -\rho$ dalla funzione

$$\frac{1}{2}\left\{e^{\sqrt{y^2 - e^{2y}}} + e^{-\sqrt{y^2 - e^{2y}}}\right\} = u,$$

la quale sebben cambiata di forma non cesserà di rappresentare l'escursione continua della curva. Siccome per valori negativi e crescenti di y al di là di detto limite le ordinate u si conserveranno sempre positive e crescenti, così un tal ramo sarà dato dal prolungamento indefinito della curva βP. Le ascisse corrispondenti alle intersezioni delle due curve descritte $\ldots . SomS' \ldots .$, $\ldots . P\beta bnp'n'Q \ldots .$ saranno le radici reali della proposta equazione (b). Risulta primieramente dall'ispezione della figura ch'essa non ammetterà radici reali negative, ma avrà uu numero infinito di radici positive, in quanto l'ordinata massima $pm = \frac{1}{e}$ della curva $SomS'$ sarà minore di tutte le ordinate massime $p'q'$, $p''q'' \ldots .$ della curva $P\beta np'n'Q$, e siccome la z, come si è già osservato, non può essere zero, così la $e^x - x = 0$ avrà nn numero infinito di coppie di radici immaginarie $= y \pm z\sqrt{-1}$, la cui parte reale sarà sempre una quantità positiva.

Restano ora a trovarsi i limiti in cui sono comprese le diverse radici reali della (b). Siccome l'equazione $e^{2y} - y^2 = \rho^2$

in cui sia $\rho^2 > 1$ ha una sola radice reale, come vedremo fra poco, così se si chiamano a, a', a'', a''', a^{IV} .... le rispettive radici reali delle equazioni

$$e^{2y} - y^2 = \frac{\pi^2}{4}, \quad e^{2y} - y^2 = \pi^2, \quad e^{2y} - y^2 = 4\pi^2,$$
$$e^{2y} - y^2 = 9\pi^2, \quad e^{2y} - y^2 = 16\pi^2, \ldots;$$

i limiti delle radici della (b) saranno dati dagl' intervalli

$$(a \ldots a'), \quad (a' \ldots a''), \quad (a'' \ldots a'''), \quad (a''' \ldots a^{IV}) \ldots$$

e così di seguito, dai quali le radici saranno separate trovandosene una sola in ciascuno di essi. Ma se i due limiti che servono a trovare la a sono $(\alpha \ldots \beta)$, quelli per la a' sono $(\alpha' \ldots \beta')$, quelli per la a'', $(\alpha'' \ldots \beta'')$, e così di seguito essendo di già tali limiti sufficientemente prossimi alle radici stesse, le radici della (b) disposte per ordine di grandezza saranno definitivamente comprese fra i limiti

$$(0 \ldots \beta), \quad (\beta' \ldots \alpha''), \quad (\beta'' \ldots \alpha''') \ldots$$

e così di seguito ciò che trattavasi di trovare. Per ottenere i limiti delle radici della $e^{2y} - y^2 = \rho^2$ in cui $\rho^2 > 1$ donde apparisca in pari tempo che essa non ammette che un' unica radice reale, applichiamo il metodo generale della separazione delle radici al caso speciale in cui ρ^2 si riduca al valore $\frac{\pi^2}{4}$, ciò che servirà d' esempio per tutti gli altri valori di ρ^2. Posto $e^{2y} - y^2 - \frac{\pi^2}{4} = Y$ e prese le successive derivate, si avrà

$$Y' = 2e^{2y} - 2y, \quad Y'' = 2^2 e^{2y} - 2, \quad Y''' = 2^3 e^{2y}, \ldots \quad Y^{(n)} = 2^n e^{2y}, \ldots$$

Non curandoci delle radici immaginarie le quali sono quì, come nella già discussa equazione $e^x - a = 0$, constatate da valori indicatori situati alla distanza $-\left(\frac{1}{0}\right)$ dall' origine, si assumano per limiti i valori $y = +1$, $y = 0$, $y = 1$. Arrestandoci alla derivata Y^{IV} e riflettendo che $Y^{IV} = 0$ non ha nè radici reali, nè radici deficienti fra i limiti -1 e $+1$, e che perciò è $\delta^{IV} = 0$, si otterranno per le serie rispettive d' indici dovute ai due anzidetti intervalli quelle comprese nel seguente quadro:

Derivate	Y^{IV},	Y''',	Y'',	Y',	Y
$y = -1)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
Indici	0,	0,	0,	1,	0
$y = 0$)	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
Indici	0,	0,	0,	0,	1
$y = 1$)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Dalle serie degl' indici risulta che una radice reale è compresa fra 0 ed 1. Anzi introducendo fra 0 ed 1 un altro limite $y = 0{,}5$, pel qual valore risulta $Y = 0{,}0008\ldots$ la serie de' segni competenti ad $y = 0{,}5$ consterà tutta di segni positivi come quella dovuta ad $y = 1$. Vi sarà dunque una radice reale compresa fra i limiti più ristretti $y = 0$, $y = 0{,}5$. Inoltre siccome per tutti i valori di $y > 0{,}5$ indefinitamente risulta sempre una serie di segni tutti positivi e perciò tutti eguali a zero i termini costituenti le indefinite serie d' indici che si possono formare, così nessun' altra radice reale positiva esisterà fra i limiti $y = 0{,}5$, $y = m$, essendo m grande quanto si voglia. Parimente fra i limiti $y = -1$, $y = 0$ non esisterà alcuna radice reale negativa essendo l' ultimo indice $= 0$. Se si stabiliscono altri limiti inferiori $y = -2$, $y = -3\ldots$, $y = -m\ldots$ si trova che la serie de' segni si mantiene la stessa di quella dovuta al limite $y = -1$, e perciò si conchiude che non esistono radici reali negative. L'unica radice reale pertanto che ammetta l'equazion proposta è da cercarsi fra i soli limiti $y = 0$, $y = 0{,}5$, dal che ne deriva che la più piccola delle radici reali dell'equazione (b) è compresa fra $y = 0$ ed $y = 0{,}5$. E di fatto posto il primo membro della (b) eguale ad Y, per $y = 0$, si ha

$$Y = cos\,(1) = cos\,(57^\circ\ 17'\ 44,''8) = 0{,}5403\ldots$$

e per $y = 0{,}5$ risulta $Y = -0{,}018\ldots$ Fra i due suddetti limiti esisterà pertanto un valore di y che renderà zero la Y. Impiegati questi limiti per la ricerca della radice dell'equazione (b), seguendo uno dei metodi di approssimazione lineare che verranno in seguito indicati, si trova per valore approssimato $y = 0{,}3181317\ldots$ Una delle due equazioni che danno z per y impiegando per y l'ottenuto valore, somministra $z = \pm 1{,}3372357\ldots$ Una pertanto delle coppie di radici immaginarie dell'equazione

$$e^x - x = 0 \quad \text{è data da} \quad x = 0{,}3181317\ldots \pm 1{,}3372357\ldots\sqrt{-1}.$$

Se finalmente nel primo membro della proposta $y = e^x - x = 0$ e nella serie delle derivate di y si pongono i limiti $x = -\varepsilon$ $x = +\varepsilon$, essendo ε piccola quanto si vuole, si avrà la seguente serie d'indici

Derivate	y^{v},	y^{iv},	y''',	y'',	y',	y
$x = -\varepsilon$)	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
Indici	0,	0,	0,	0,	1,	2
$x = \varepsilon$)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

La serie degl'indici di questo quadro mostra che le equazioni $y'' = y''' = y^{iv} = \ldots = 0$ non hanno radici fra i limiti $x = -\varepsilon$, $x = \varepsilon$; che l'equazione $y' = 0$ ha una radice reale $x = 0$ fra detti limiti per essere $= 1$ l'indice corrispondente alla y'; che l'equazione $y = 0$ può ammettere o due radici reali, o due radici deficienti, essendo $= 2$ l'indice corrispondente ad y. Siccome si è provato che la $y = 0$ non può ammettere radici reali, così l'indice 2 deve corrispondere a due radici deficienti, ossia indicare l'esistenza di due radici immaginarie conjugate. Di fatto fra i limiti $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ esiste il valore $x = 0$ che è un valor critico della $y = 0$, giacchè per esso è annullata la derivata intermedia y' e le funzioni laterali y, y'' ridotte dello stesso segno. Se si formassero le due serie di segni corrispondenti ai limiti $x = -m$, $x = m$, si otterrebbero; per quanto grande sia m, per le serie di segni e per la relativa serie degl' indici le stesse serie ottenute pei limiti $x = -\varepsilon$, $x = \varepsilon$; giacchè fra i detti limiti $-m$ e $+m$ non si può mai trovare più che un solo valore critico indicatore di una coppia di radici immaginarie; le altre coppie in numero infinito che abbiamo dimostrato ammettere l'equazione $y = 0$ sono indicate da valori critici non compresi entro i detti intervalli, giacchè ognun d'essi si riduce precisamente al valore $x = -\left(\frac{1}{0}\right)$; vale a dire che ognuno di essi è situato in un punto del semiasse negativo delle ascisse posto ad una distanza infinita dall'origine.

22. Comunque le costanti che entrano in un'equazione non siano espresse in numeri, ciò che sembrerebbe necessario ad ottenere la specie de' segni dovuti alla serie (A) delle derivate, pure dall' applicazione delle enunciate regole si possono dedurre; sebbene con processo alquanto più complicato, conseguenze generali sul numero e sulla specie delle radici che una tal equazione letterale può ammettere. Serviranno di esempio per questo caso le equazioni

$$\tang x = px + q \quad (a)\,; \qquad \cot x = px + q \quad (b)$$

in cui p, q siano costanti reali. Cercheremo primieramente i limiti delle loro radici reali col metodo delle costruzioni per fornire anche di ciò un esempio analogo a quello dell' equazione numerica $e^x - x = o$ le cui costanti sono espresse per numeri noti.

Pongasi in O l'origine delle coordinate (fig. 2.ª). Sia OX il semiasse positivo delle ascisse, ed OY quello delle ordinate. A destra ed a sinistra del punto O si segnino lungo l'asse XX' i punti

$$\ldots\ldots \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha,\ O,\ a,\ b,\ c,\ d \ldots\ldots$$

in modo che sia

$$\frac{\pi}{2} = Oa = ab = bc = cd = \ldots\ldots = O\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = \ldots\ldots$$

Supposta x l'ascissa ed y l'ordinata, si costruisca la curva cui corrisponde l'equazione $\tan g\, x = y$. Essa è composta di un numero infinito di rami curvilinei, ciascun dei quali si estende indefinitamente al di sopra ed al di sotto dell' asse XX' sempre compreso fra due stesse parallele. Questi rami sono indicati nella figura per le linee non punteggiate. Si costruisca inoltre la retta la cui equazione è $px + q = y$. Questa retta attraverserà in un senso determinato dai segni delle p, q non solo i diversi rami infiniti di curve descritti nelle figure, ma inoltre quelli che sarebbero tracciati indefinitamente sul semiasse positivo e negativo delle ascisse. Le ascisse positive e negative dei punti d' intersezione della retta indefinitamente prolungata in ambi i versi coi differenti rami curvilinei saranno le radici reali dell' equazione $\tan g\, x = px + q$, e si riconoscerà che questa ammette un' infinità di radici reali, le une positive, le altre negative. Entro due limiti corrispondenti a due valori dell' ascissa x la cui differenza sia $\frac{\pi}{2}$ o non vi saranno di tali radici, o ve ne sarà in generale una sola. Potendo accadere per valori particolari di p, q che in un intervallo cadano due radici reali, ciò non potrà avverarsi che in quel solo intervallo in cui cade l' intersezione della retta segante coll' asse. Colla suddivisione di un tale intervallo si potranno separare le dette radici se vi esistono ed ottenersi definitivamente i limiti entro i quali giace ciascuna radice reale dell' equazione proposta (a).

Se nella serie dei limiti che nascono dalle $m\frac{\pi}{2}$ col dare ad m tutti i valori interi positivi e negativi non escluso lo zero vogliamo controdistinguere quegl' intervalli entro i quali giaciono le radici in quistione, porremo fra quei due limiti successivi in cui ciò si avvera una parentesi $\Big)$, e fra quei due limiti in cui vi è la possibilità che cadano o due radici, o nessuna, vi sostituiremo per distinguere questo caso il segno $\mathring{\Big)}$. Nella serie dei limiti dati dalle $m\frac{\pi}{2}$ s' introduca anche il limite $i = -\frac{q}{p}$ collocato opportunamente avuto riguardo al suo segno ed al suo valor numerico, e chiamisi S una tal serie. Per collocare adequatamente il segno $\Big)$ o $\mathring{\Big)}$ nella serie S onde conoscere gl' intervalli in cui sono comprese le radici reali a seconda dei diversi segni che possono avere la p, q, si seguirà la seguente regola che risulta evidentemente dall' ispezione della figura supposta attraversata da una retta tracciata analogamente ai segni che si vorranno attribuire alle costanti p, q.

Comunque la p sia positiva o negativa, si dovrà per q positiva scrivere il segno $\Big)$ a destra dello zero per q negativa scriverlo a sinistra. Indi si ripeterà il segno $\Big)$ nella serie S ogni due termini sia a destra che a sinistra della parentesi già tracciata. Siccome il caso di trovarsi due radici o nessuna in un intervallo si avvera soltanto in quell' intervallo che trovasi a destra od a sinistra del limite inserito i ed unicamente nell' ipotesi di p positiva, così si sostituirà il segno $\overset{\circ}{\Big)}$ come si è detto a quella parentesi che s' incontrerà a destra od a sinistra del limite i soltanto nel caso di p positiva.

Così supposto q positiva e p negativa e tali che il limite $-\frac{q}{p}=i$ cada fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, la serie S diverrà

$$\ldots\ldots\Big)-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\Big)-\frac{\pi}{2},\ 0\Big)\ \frac{\pi}{2},\ \pi\Big)\ \frac{3\pi}{2},\ i\Big)\ 2\pi\ \ldots\ldots$$

e per q negativa e p positiva ritenuti gli stessi valori numerici di q, p, si avrà per la S

$$\ldots\ldots\ -\frac{3\pi}{2}\Big),\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2}\Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\overset{\circ}{\Big)}\ i,\ 2\pi\Big)\ldots\ldots$$

Se q, p sono entrambe positive od entrambe negative, e tali che $-\frac{p}{q}=i$ cada fra 0 e $-\frac{\pi}{2}$, si avrà nel primo caso

$$\ldots\ldots\Big)\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2}\overset{\circ}{\Big)}\quad -i,\ 0\Big)\ \frac{\pi}{2},\ \pi\Big)\ \frac{3\pi}{2}\quad\ldots\ldots$$

e nel secondo

$$\ldots\ldots\ -\pi\Big)\quad -\frac{\pi}{2},\quad -i\Big)\quad 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\Big)\ldots\ldots$$

In queste serie vi sarà sempre una radice reale entro l' intervallo contraddistinto dalle parentesi $\Big)$ ed in quell' intervallo contraddistinto dal segno $\overset{\circ}{\Big)}$ o non vi sarà alcuna radice reale, o ve ne saranno due a seconda dei particolari valori di p, q.

Per trovare pói i limiti delle radici reali dell'equazione (b), cioè della $\cot x = px + q$, in luogo dei rami curvilinei precedentemente contemplati, si avrà riguardo nella fig. 2.ª alle linee punteggiate. Esse rappresenteranno i diversi rami curvilinei nati dalla costruzione dell'equazione $\cot x = y$. Costrutta parimente la retta che ha per equazione $px + q = y$, questa indefinitamente prolungata dall'una e dall'altra parte dell'asse delle ascisse segherà i diversi rami curvilinei che indefinitamente si succedono ogni due intervalli. Le ascisse positive e negative dei punti d'intersezione della segante coi rami curvilinei in numero infinito saranno le radici reali dell'equazione (b). Siccome poi i rami curvilinei di questa costruzione sono compresi fra le stesse parallele in cui giaciono quelli della costruzion precedente, così avrà luogo la stessa regola data indietro rispetto alla collocazione della $)$ nella serie S. Le radici perciò cadranno negli stessi intervalli. La sola differenza cadrà sulla sostituzione del segno $\overset{\circ}{)}$ al segno $)$. Una tale sostituzione avrà luogo in questo caso quando sia p negativa, ritenute del resto le stesse cose ammesse nella già data regola. Così ammesse le stesse ipotesi sopra p, q come nelle prime due serie già date, le serie competenti a questo caso diverranno

$$\cdots\cdot\ -\pi\ \Big)\ -\frac{\pi}{1},\ 0\ \Big)\ \frac{\pi}{2},\ \pi\ \Big)\ \frac{3\pi}{2},\ i\ \overset{\circ}{\Big)}\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{3}\ \Big)\cdots\cdot$$

$$\cdots\cdot\ \Big)\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2}\ \Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\ \Big)\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\ \Big)\ i,\ 2\pi\ \Big)\ \cdots\cdots$$

ove nella prima il segno $\overset{\circ}{)}$ cadendo fra i e 2π, potranno o due radici reali, o nessuna esser comprese in quell'intervallo.

23. Prima di trattare l'equazione $\tang x = ax + b$ che è la proposta (a) del § 22, s'incominci dal caso più semplice in cui sia $b = 0$. L'equazione $\tang x = ax$ in cui la a è una costante reale può scomporsi in due fattori e ridursi a

$$\sec x \left\{ \sin x - a \cos x \right\} = 0.$$

Siccome le radici dell'equazione $\sec x = 0$ non annullano la proposta, ma riducono indeterminata la $\tang x$, come si è già osservato, così esse non appartengono alla proposta equazione. Le radici della (a) saranno date dai valori che annullano l'altro fattore, ossia saranno comprese nelle radici della equazione $\sin x - a \cos x = 0$. Posto $\sin x - a \cos x = y$, si prendano le successive derivate di y rispetto ad x. Si troverà per n pari

$$y^{(n)} = \left\{ na - 1 + ax \cot x \right\} \frac{d^{n-2} \sin x}{dx^{n-2}}$$

e per n dispari

$$y^{(n)} = \left\{ na - 1 - ax \tang x \right\} \frac{d^{n+2} \sin x}{dx^{n+2}}.$$

Nel primo caso tre successive derivate saranno date dalle

$$y^{(n-1)} = \left\{ (n-1)a - 1 - ax \tang x \right\} \frac{d^{n+1} \sin x}{dx^{n+1}}$$

$$y^{(n)} \quad = \left\{ na - 1 + ax \cot x \right\} \frac{d^{n-2} \sin x}{dx^{n-2}} \qquad (1)$$

$$y^{(n+1)} = \left\{ (n+1)a - 1 - ax \tang x \right\} \frac{d^{n+3} \sin x}{dx^{n+3}}$$

e nel secondo caso dalle

$$y^{(n-1)} = \left\{ (n-1)a - 1 + a\,x\,cot\,x \right\} \frac{d^{n-3} sin\,x}{dx^{n-3}}$$

$$y^{(n)} \quad = \left\{ na - 1 - a\,x\,tan\,x \right\} \frac{d^{n+2} sin\,x}{dx^{n+2}} \qquad (2)$$

$$y^{(n+1)} = \left\{ (n+1)a - 1 + a\,x\,cot\,x \right\} \frac{d^{n-1} sin\,x}{dx^{n-1}}.$$

I valori reali di x che annullano $y^{(n)}$ saranno, per n pari, le diverse radici reali delle equazioni

$$\frac{d^{n-2} sin\,x}{dx^{n-2}} = 0\ ; \qquad n\,a - 1 + a\,x\,cot\,x = 0 \qquad (3)$$

e per n dispari le diverse radici reali delle equazioni

$$\frac{d^{n+2} sin\,x}{dx^{n+2}} = 0\ ; \qquad n\,a - 1 - a\,x\,tan\,x = 0 \qquad (4).$$

Ma per n pari si ha $\dfrac{d^{n-2} sin\,x}{dx^{n-2}} = \pm\, sin\,x$

e per n dispari si ha $\dfrac{d^{n+2} sin\,x}{dx^{n+2}} = \pm\, cos\,x.$

Fra tutte le radici di $sin\,x = 0$ non vi è che il valore $x = 0$ che annulli la (1), e fra tutte le radici di $cos\,x = 0$ nessuna annulla la (2). Dunque tutte le radici reali che annullano la (1) saranno, oltre la $x = 0$, le diverse radici della $n\,a - 1 + a\,x\,cot\,x = 0$, e quelle che annullano la (2) saranno tutte comprese nelle radici reali della $n\,a - 1 - a\,x\,tang\,x = 0$. Trattasi di vedere quali segni inducono nelle derivate laterali della (1) le radici della (3), e quali segni nelle derivate laterali della (2) vi inducano le radici reali della (4). Siccome si ha

per n pari $$\frac{d^{n+3}\sin x}{dx^{n+3}} = -\frac{d^{n+1}\sin x}{dx^{n+1}}$$

per n dispari $$\frac{d^{n-1}\sin x}{dx^{n-1}} = -\frac{d^{n-3}\sin x}{dx^{n-3}},$$

così le radici della (3) renderanno $y^{(n-1)}$ ed y^{n+1} derivate laterali della (1) o dello stesso segno o di segno contrario secondo che le stesse radici renderanno i fattori

$$(n-1)a-1-ax\,tang\,x = \mathrm{P}, \quad (n+1)a-1-ax\,tang\,x = \mathrm{P}'$$

o di segno contrario o dello stesso segno. Parimente le radici reali della (4) renderanno le derivate $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ laterali della (2) o dello stesso segno o di segno contrario secondo che le stesse radici renderanno o di segno contrario o dello stesso segno i fattori

$$(n-1)a-1+ax\cot x = \mathrm{D}, \quad (n+1)a-1+ax\cot x = \mathrm{D}'.$$

Se il valore di na cavato dalla (3) si sostituisce nei fattori P, P′, ed il valore di na cavato dalla (4) si sostituisce nei fattori D, D′, si ottiene

$$\mathrm{P} = -a\left\{\frac{2x}{\sin 2x}+1\right\}, \quad \mathrm{P}' = -a\left\{\frac{2x}{\sin 2x}-1\right\}, \quad \mathrm{PP}' = a^2\left\{\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2-1\right\} \tag{5}$$

$$\mathrm{D} = a\left\{\frac{2x}{\sin 2x}-1\right\}, \quad \mathrm{D}' = a\left\{\frac{2x}{\sin 2x}+1\right\}, \quad \mathrm{DD}' = a^2\left\{\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2-1\right\} \tag{6}$$

Qualunque siano i valori reali di x che annullano le (3), (4), essi ridurranno sempre i prodotti PP′, DD′ a quantità positive qualunque siasi n ed a, giacchè è sempre $2x > \sin 2x$, astrazion fatta dal segno: dunque nessuna delle radici potrà rendere dello stesso segno le derivate laterali $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ per qualsivoglia valore di n. Se non esistessero che le radici delle (3), (4), si conchiuderebbe che la proposta non può avere radici immaginarie. Ma si è veduto che esiste un' altra radice $x = 0$ che verifica $y^{(n)} = 0$ per n pari, e tale radice quantunque annulli la proposta non è però radice multipla di essa. Posto un tal valore $x = 0$ nei fattori P, P', essi diventano

$$P = (n-1)a - 1\,, \qquad P' = (n+1)a + 1$$

e perciò

$$y^{(n-1)} = \pm\left\{(n-1)a - 1\right\}, \qquad y^{(n+1)} = \mp\left\{(n+1)a - 1\right\}$$

ove i segni superiori avranno luogo per n paro-pari, gli inferiori per n paro-dispari, ossia

$$y^{(n-1)}y^{(n+1)} = -\left\{(na-1)^2 - a^2\right\}.$$

Per valori negativi di a, o per valori di $a > 1$, essendo $n > 1$, sarà sempre $(na-1)^2 > a^2$ (7).
Di fatto pongasi $a = -c$, essendo c positiva, sarà $(nc+1)^2 > c^2$; il prodotto $y^{(n-1)}y^{(n+1)}$ sarà perciò negativo, e quindi di segno contrario le derivate laterali $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$. Suppongasi $a > 1$ ossia $a = 1 + \varepsilon$, essendo ε quantità positiva, e pongasi $n = 1 + i$. La (7) diverrà $(1+\varepsilon+i\varepsilon)^2 > (1+\varepsilon)^2$; dunque anche in questo caso la radice $x = 0$ indicherà assenza di radici immaginarie nella proposta. Sia ora a compreso fra 0 ed 1. Posto $a = \frac{p}{q}$, essendo $q > p$, sarà

$$(na-1)^2 = \frac{(np-q)^2}{q^2}\,, \quad a^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Ora è manifesto che si potrà prendere n numero intero maggiore di 1 tale da rendere $(np-q)^2 < p^2$, e perciò tale da rendere negativa la $(na-1)^2 - a^2$, ossia da ridur positivo il prodotto $y^{(n-1)} y^{(n+1)}$. Ne risulta che soltanto pel caso di a compreso fra zero ed 1 avrà la proposta equazione radici immaginarie. E come uno solo sarà il valore di n capace di soddisfar la detta condizione, così per $a = \frac{p}{q}$ la proposta avrà una sola coppia di radici immaginarie. Siccome potrebbe credersi che nel caso di $p = 1$ vi fossero due valori di $n = q \pm 1$ capaci di ridurre dello stesso segno le derivate laterali, sarà tolto il dubbio considerando i segni che dovran prendere le $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$. Si supponga $p = 1$ e q numero pari, siccome in tal caso sarà

$$y^{(n-1)} = \pm \frac{1}{q} \{n - q - 1\}, \quad y^{(n+1)} = \mp \frac{1}{q} \{n - q + 1\}$$

ove valgono i segni superiori per n paro-pari, gl'inferiori per n paro-dispari; se si fa $n = q$, risulteranno le $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ dello stesso segno, e non vi sarà altro valore di n che adempia tal condizione. Se si suppone q dispari, non si potrà prendere che $n = q \pm 1$. Piglisi $n = q + 1$, si avrà

$$y^{(n-1)} = \pm \frac{0}{q}, \quad y^{(n+1)} = \mp \frac{2}{q}.$$

Supponiamo che lo zero sia il limite delle quantità positive, e sia q tale che $q + 1$ sia paro-pari, allora le $y^{(n-1)}$, $y^{(n+1)}$ si riducono a

$$y^{(n-1)} = 0, \quad y^{(n+1)} = -\frac{2}{q},$$

cioè di segno opposto. Se s'impiegasse il valore $n = q - 1$, sarebbe n paro-dispari, e si avrebbe in tal caso

$$y^{(n-1)} = +\frac{2}{q}, \qquad y^{(n+1)} = 0,$$

cioè dello stesso segno. Dunque il solo valore $n = q - 1$ renderà dello stesso segno le due derivate laterali. Se poi sia $q + 1$ paro-dispari, allora sarà per $n = q + 1$

$$y^{(n-1)} = 0, \qquad y^{(n+1)} = +\frac{2}{q},$$

cioè dello stesso segno, mentre il valore $n = q - 1$, nel qual caso sarà n paro-pari, darà

$$y^{(n-1)} = -\frac{2}{q}, \qquad y^{(n+1)} = 0,$$

ossia di segno contrario. Sarà dunque $n = q - 1$ il solo valore che in tal caso ridurrà dello stesso segno le due derivate laterali.

Se si adottasse in vece lo zero per limite delle quantità negative, si giungerebbe alle stesse conclusioni, cioè che esiste sempre un solo valore di n che riduce le derivate laterali dello stesso segno.

24. Se fosse proposta l'equazione $\cot x = ax$, siccome posto $x = \frac{\pi}{2} - y$ si trasforma in $\operatorname{tang} y = -ay + \frac{a\pi}{2}$, e se fosse proposta l'equazione $\cot x = ax + b$, siccome posto pure $x = \frac{\pi}{2} - y$ si trasforma in $\operatorname{tang} y = py + q$, ove è $p = -a$, $q = \frac{2b + a\pi}{2}$, così la loro discussione rientra in quella di $\operatorname{tang} x = ax + b$.

Se lo stesso processo dato per l'equazione $\operatorname{tang} x = ax$ si applica all'equazione $\operatorname{tang} x = ax + b$ in cui a, b siano costanti reali, si conchiuderà parimente che le radici della $\sec x \left\{ \sin x - (ax + b) \cos x \right\} = 0$ a cui si riduce la proposta sono tutte comprese nelle radici della equazione $\sin x - (ax + b)\cos x = 0$. Supposto il primo membro di questa rappresentato da y e da $y^{(n)}$ una derivata n^{esima} di y rispetto ad x, si troverà

$$\text{per } n \text{ pari} \qquad y^{(n)} = \left\{ na - 1 + (ax + b)\cot x \right\} \frac{d^{(n-2)}\sin x}{dx^{n-2}}$$

$$\text{per } n \text{ dispari} \quad y^{(n)} = \left\{ na - 1 - (ax + b)\tan x \right\} \frac{d^{(n+2)}\sin x}{dx^{n+2}}$$

Siccome nessuna delle radici delle equazioni

$$\frac{d^{(n-2)}\sin x}{dx^{n-2}} = \pm \sin x = 0\,, \qquad \frac{d^{(n+2)}\sin x}{dx^{n+2}} = \pm \cos x = 0$$

annulla la $y^{(n)}$, perciò le radici reali che devon servire di criterio alla distinzione delle radici immaginarie saranno soltanto quelle comprese nelle equazioni

$$(a) \qquad na - 1 + (ax + b)\cot x = 0 \qquad \text{per } n \text{ pari},$$

$$(b) \qquad na - 1 - (ax + b)\tan x = 0 \qquad \text{per } n \text{ dispari}.$$

Se si chiama $\bar{P}$, $\bar{P}'$, $\bar{D}$, $\bar{D}'$ ciò che diventano le P, P′, D, D′ dell'antecedente paragrafo, quando in queste si sostituisce $ax + b$ in luogo di ax, si avrà

$$\bar{P} = (n-1)a - 1 - (ax+b)\tan x\,, \qquad \bar{P}' = (n+1)a - 1 - (ax+b)\tan x$$

$$\bar{D} = (n-1)a - 1 + (ax+b)\cot x\,, \qquad \bar{D}' = (n+1)a - 1 + (ax+b)\cot x.$$

Se il valore di $\operatorname{tang} x = \dfrac{ax + b}{na - 1}$ cavato dalla (a) si sostituisce nei fattori $\bar{P}$, $\bar{P}'$, ed il valore di $\cot x = \dfrac{ax + b}{na - 1}$ cavato dalla (b) si sostituisce nei fattori $\bar{D}$, $\bar{D}'$, si ottiene

$$\bar{P} = (n-1)a - 1 + \frac{(ax+b)^2}{na-1}, \quad \bar{P}' = (n+1)a - 1 + \frac{(ax+b)^2}{na-1}$$

$$\bar{D} = (n-1)a - 1 + \frac{(ax+b)^2}{na-1}, \quad \bar{D}' = (n+1)a - 1 + \frac{(ax+b)^2}{na-1}$$

donde risulta che i prodotti $\bar{P}\bar{P}'$ e $\bar{D}\bar{D}'$ hanno un valor comune dato da

$$\left\{ na - 1 + \frac{(ax+b)^2}{na-1} \right\}^2 - a^2 \qquad (c)$$

il quale per n pari rappresenta il prodotto $\bar{P}\bar{P}'$ e per n dispari il prodotto $\bar{D}\bar{D}'$.

Siccome per $a = 0$ l'espressione (c) si riduce a $(1+b^2)^2$ che è sempre quantità positiva, qualunque sia b e qualunque siano i valori delle radici reali delle equazioni (a), (b), ne risulta che la $\tan g\, x = b$ a cui si riduce in questa ipotesi la proposta non potrà avere radici immaginarie. Parimente se si suppone a negativa, cioè $a = -c$, essendo c positiva, l'espressione (c) postovi per compendio $1 + \frac{(b-cx)^2}{nc+1} = p$ si riduce a

$$(n^2 - 1)\, c + 2ncp + p^2 \qquad (d)$$

la quale per essere p, c quantità positive ed n eguale o superiore ad 1, sarà per qualsivoglia valore reale di x che annulli le equazioni (a), (b) sempre quantità positiva, e perciò nell' ipotesi di a negativa la proposta equazione non avrà radici immaginarie.

Sia a quantità positiva. Se il valore di $na - 1$ cavato dalla (a) si pone nelle espressioni $\bar{P}$, $\bar{P}'$, ed il valore di $na - 1$ cavato dalla (b) si pone nelle espressioni $\bar{D}$, $\bar{D}'$, ne risulta che i prodotti $\bar{P}\bar{P}'$, $\bar{D}\bar{D}'$, posto $\frac{2b}{a} = h$, avranno un valor comune espresso da

$$a^2 \left\{ \left(\frac{2x+h}{\sin 2x} \right)^2 - 1 \right\} \qquad (e)$$

Se x e b saranno dello stesso segno, siccome si ha sempre $2x > \sin 2x$, a più forte ragione $2x + h > \sin 2x$, sarà perciò $\frac{2x + h}{\sin 2x} > 1$; onde in questa ipotesi l'espressione (e) sarà positiva. Ne deriva che fra le radici delle equazioni (a), (b) tutte quelle che avran lo stesso segno di b non indicheranno esistenza di radici immaginarie. Ma se si suppone $b = -c$ e rappresentiamo con x' una qualunque delle radici positive delle equazioni (a), (b), qualora x' sia tale da rendere $2x' - \frac{2c}{a} < \sin 2x'$, ossia

$$\frac{c}{a} > x' \left\{ 1 - \frac{\sin 2x'}{2x'} \right\}$$

o supponendo b positiva $= c$, essendo $-x_1$ una qualunque delle radici negative delle (a), (b), sia x_1 tale da rendere

$$\frac{2x_1 - \frac{2c}{a}}{\sin 2x_1} < 1, \quad \text{cioè} \quad \frac{c}{a} > x_1 \left\{ 1 - \frac{\sin 2x_1}{2x_1} \right\}$$

allora si conchiuderà che la proposta equazione ha radici immaginarie. Trattasi dunque di vedere entro quali limiti siano comprese le radici delle (a), (b), i cui valori numerici siano i più piccoli. Se per esempio esistono radici positive x' comprese fra 0 e $\frac{c}{a}$ per b negativa, ovvero radici negative, i cui valori numerici x_1 siano compresi fra gli stessi limiti 0 e $\frac{c}{a}$, essendo b positiva, sarà constatata l'esistenza di radici immaginarie. Se di più pei diversi valori di n esistono di tali radici, si dovrà conchiudere che il numero delle radici immaginarie è infinito. Ciò richiede che si determinino i limiti delle radici reali di queste due equazioni (a), (b).

Applicando a questo caso le regole per la separazione delle radici reali date nel § 22, si avranno quì a contemplare tre equazioni, una delle quali sarà la proposta stessa $tang\, x = a x + b$, e le altre due, cambiate di forma, saranno le stesse antecedenti (a), (b). Sia z il valore che verifica la $a z - 1 = 0$. Siano ρ, δ i numeri pari, ed i numeri dispari superiori a z e ρ', δ' rispettivamente i numeri pari e dispari inferiori a z. Ritenuto essere a sempre negativa, si supponga b positiva, e ritenuto che la i del § 22 cada fra $-j\frac{\pi}{2}$ e $-(j+1)\frac{\pi}{2}$, essendo j numero intero, i limiti delle radici reali delle tre equazioni

$$tang\, x = a x + b \qquad (\alpha),$$

$$cot\, x = \frac{a}{\delta a - 1} x + \frac{b}{\delta a - 1} \qquad (\beta),$$

$$tang\, x = -\frac{\rho a}{\rho a - 1} - \frac{b}{\rho a - 1} \qquad (\gamma)$$

per tutti i valori di ρ, δ saranno indicati nelle tre serie (L), (M), (N).

$$\begin{matrix} P' \\ D' \end{matrix}\Big\} \cdots\Big) -\frac{3\pi}{2},\ -2\frac{\pi}{2}\Big) -\frac{\pi}{2},\ 0\Big) \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big) \cdots \qquad (L)$$

$$\begin{matrix} P'' \\ D'' \end{matrix}\Big\} \cdots\Big) -\frac{3\pi}{2},\ -2\frac{\pi}{2}\Big) -\frac{\pi}{2},\ 0\Big) \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{4}\Big) \cdots \qquad (M)$$

$$\begin{matrix} P''' \\ D''' \end{matrix}\Big\} \cdots\ -3\frac{\pi}{2}\Big)\ -2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ 2\frac{\pi}{2}\ \cdots \qquad (N)$$

ove si è supposto

$$P' = \cdots \quad -(j+1)\frac{\pi}{2}\Big)^{\circ} \; i\,, \; -j\frac{\pi}{2}\Big) -(j-1)\frac{\pi}{2}$$

$$D' = \cdots\Big) -(j+1)\frac{\pi}{2}\,, \; i\Big)^{\circ} -j\frac{\pi}{2}\,, \; -(j-1)\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$P'' = \cdots \quad -(j+1)\frac{\pi}{2}\Big) \; i\,, \; -j\frac{\pi}{2}\Big) -(j-1)\frac{\pi}{2}$$

$$D'' = \cdots\Big) -(j+1)\frac{\pi}{2}\,, \; i\Big) -j\frac{\pi}{2}\,, \; -(j-1)\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$P''' = \cdots\Big) -(j+1)\frac{\pi}{2}\,, \; i\Big) -j\frac{\pi}{2}\,, \; -(j-1)\frac{\pi}{2}\Big)$$

$$D''' = \cdots \quad -(j+1)\frac{\pi}{2}\Big) \; i\,, \; -j\frac{\pi}{2}\Big) -(j-1)\frac{\pi}{2}.$$

In ciascuna delle serie (L), (M), (N) si dovrà adottare P ovvero D secondo che j sarà pari o dispari. Si vede di quì che le radici delle (β), (γ) che presentano la doppia proprietà di avere un valor numerico minore del valor numerico di $i = -\frac{b}{a}$ e di essere di segno contrario alla b sono tutte racchiuse fra i limiti o ed i, e che in quegl' intervalli in cui non esiste radice della (β) esistendo appunto una radice della (γ), e ciò per tutti i valori in numero infinito superiori a z, ne deriva che in ciascuno degl' intervalli compresi fra o ed i esiste per b positiva un numero infinito di valori critici della (α); esistono cioè in intervalli alternativi valori critici per tutti i valori pari superiori a z; negli altri intervalli vi esistono per tutti i valori dispari superiori a z. Avrà perciò la (α) un numero infinito di radici immaginarie in ciascuno degli anzidetti intervalli.

Così in particolare se si suppone che la i risulti compresa fra 0 e $-\frac{\pi}{2}$, sarà $j = 0$, e le tre serie (L), (M), (N) si ridurranno alle

$$\cdots - 3\frac{\pi}{2}\Big) - 2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\ i,\ 0\Big)\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big)\ 3\frac{\pi}{2},\ 4\frac{\pi}{2}\Big)\cdots$$

$$\cdots - 3\frac{\pi}{2}\Big) - 2\frac{\pi}{2}\quad -\frac{\pi}{2}\Big)\ i,\ 0\Big)\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big)\ 3\frac{\pi}{2},\ 4\frac{\pi}{2}\Big)\cdots$$

$$\cdots - 3\frac{\pi}{2}\quad - 2\frac{\pi}{2}\Big) -\frac{\pi}{2},\ i\Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ 2\frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2}\Big),\ 4\frac{\pi}{2}\cdots$$

L' ultima di queste indica che esiste per ciascun valor pari di ρ superiore a z una radice fra 0 ed i, e siccome il valor di questa è minore del valor numerico di $-\frac{b}{a}$, ossia della i, ed è di segno contrario alla b, così si conchiude che fra 0 ed i esiste un numero infinito di valori critici; onde la proposta ha in questo caso un numero infinito di radici immaginarie.

Se, essendo sempre a negativa, si suppone b negativa, e la $i = -\frac{b}{a}$ sia compresa fra $j\frac{\pi}{2}$ e $(j+1)\frac{\pi}{2}$, si avranno queste tre serie

$$\cdots\Big) - 2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ 2\frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2}\Big)\cdots\left\{\begin{matrix}\bar{P}'\\ \bar{D}'\end{matrix}\right.\qquad (L')$$

$$\cdots\Big) - 2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\ 0,\ \frac{\pi}{2}\Big)\ 2\frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2}\Big)\cdots\left\{\begin{matrix}\bar{P}''\\ \bar{D}''\end{matrix}\right.\qquad (M')$$

$$\cdots\quad - 2\frac{\pi}{2}\Big) -\frac{\pi}{2},\ 0\Big)\ \frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big)\ 3\frac{\pi}{2}\quad\cdots\left\{\begin{matrix}\bar{P}'''\\ \bar{D}'''\end{matrix}\right.\qquad (N')$$

nelle quali sarà

$$\bar{P}' = \quad (j-1)\frac{\pi}{2} \Big) \, j\frac{\pi}{2}, \; i \Big) \; (j+1)\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdot$$

$$\bar{D}' = \quad (j-1)\frac{\pi}{2}, \; j\frac{\pi}{2} \Big) \, i, \; (j+1)\frac{\pi}{2} \Big) \cdots\cdot$$

$$\bar{P}'' = \quad (j-1)\frac{\pi}{2} \Big) \, j\frac{\pi}{2}, \; i \Big) \; (j+1)\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdot$$

$$\bar{D}'' = \Big) \, (j-1)\frac{\pi}{2}, \; j\frac{\pi}{2} \Big) \, i, \; (j+1)\frac{\pi}{2} \Big) \cdots\cdot$$

$$\bar{P}''' = \Big) \, (j-1)\frac{\pi}{2}, \; j\frac{\pi}{2} \Big) \, i, \; (j+1)\frac{\pi}{2} \Big) \cdots\cdot$$

$$\bar{D}''' = \quad (j-1)\frac{\pi}{2} \Big) \, j\frac{\pi}{2}, \; i \Big) \; (j+1)\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdot$$

Si vede di quì che le radici delle equazioni (β) ; (γ) che hanno la doppia proprietà sopra accennata si trovano in ciascuno degl' intervalli compresi fra o ed i, e soltanto in essi, e siccome ciò ha luogo per ogni valore intero superiore a z indefinitamente, siccome cioè esiste in intervalli alternativi un' infinità di valori critici per tutti i valori pari $> z$, e negli altri intervalli per tutti i valori dispari $> z$, si conchiude che in ciascuno degl' intervalli compresi fra o ed i esiste un' infinità di valori critici, e perciò esiste nell' equazione (α) un' infinità di radici immaginarie.

Così in particolare supposto che $i = -\frac{b}{a}$ risulti compreso fra o e $\frac{\pi}{2}$, sarà $j = 0$, e le tre serie si ridurranno alle

$$\cdots\quad -3\frac{\pi}{2}\Big)-2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\,0,\ i\overset{\circ}{\Big)}\,\frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big)\,3\frac{\pi}{2}\quad\cdots$$

$$\cdots\quad -3\frac{\pi}{2}\Big)-2\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\Big)\,0,\ i\Big)\,\frac{\pi}{2},\ 2\frac{\pi}{2}\Big)\,3\frac{\pi}{2}\quad\cdots$$

$$\cdots\Big)-3\frac{\pi}{2},\ -2\frac{\pi}{2}\Big)-\frac{\pi}{2},\ 0\Big)\,i,\ \frac{\pi}{2}\Big)\,2\frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2}\Big)\cdots$$

L' ultima di queste mostra che fra 0 ed i vi è una radice per ogni valor pari superiore a z, e siccome per ciascuna di esse è adempita la doppia proprietà di essere minore del valor numerico di $i = -\frac{b}{a}$ e di essere di segno contrario alla b, così la proposta ha pur in questo caso un numero infinito di radici immaginarie.

Se si ripetesse lo stesso processo relativamente alle tre equazioni che risultano dalle (β), (γ) col porvi ρ', δ' in luogo di ρ, δ e coll' ordinarle nel seguente modo

$$tang\, x = a x + b\,,$$

$$tang\, x = \frac{a}{1-\rho' a}\, x + \frac{b}{1-\rho' a}\,,$$

$$cot\, x = -\frac{a}{1-\delta' a} - \frac{b}{1-\delta' a}\,,$$

si otterrebbero per queste le stesse rispettive serie (L), (M), (N) per b positiva, e le (L'), (M'), (N') per b negativa, solo che nelle (M), (N), (M'), (N') il segno $\Big)$ prossimo alla i verrebbe rimpiazzato dal segno $\overset{\circ}{\Big)}$. Quì parimente si dedurrebbero relativamente all' esistenza dei valori critici le stesse conseguenze date superiormente, solo che in questo caso il numero dei valori critici in ciascun intervallo alternativo sarebbe limitato al numero de' valori pari inferiori a z; e negli altri intervalli al numero de' valori dispari pure inferiori a z. Dal che si conchiude finalmente che in ciascuno degl' intervalli compresi fra o e $-\frac{b}{a}$ esiste un' infinità di valori critici dovuti o ai numeri pari $< z$ ed a tutti i numeri dispari $> z$, ovvero ai numeri dispari $< z$ ed a tutti i numeri pari $> z$.

25. Sia proposta l' equazione

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^m}{1.2.3.4\ldots m}=y=0 \qquad (1)$$

che supporremo per ora composta di un numero finito di termini, nel qual caso essa non è trascendente, ma algebrica. La sostituzione di due limiti $x=0$, $x=\left(\frac{1}{0}\right)$ nella serie (A) applicata a questo caso rende zero tutti i termini della serie degl' indici, giacchè le due serie di segni non contengono alcuna variazione. Ma pei limiti $x=-\left(\frac{1}{0}\right)$ e $x=0$ si ha $\Delta=m$. Perciò le radici ed i valori critici sono da cercarsi in quest' ultimo intervallo. Si avrà derivando

$$y'=y-\frac{x^m}{1.2\ldots m}, \quad y''=y'-\frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}=y'-\frac{m}{x}\cdot\frac{x^m}{1.2\ldots m}$$

da cui risulta fra y, y', y'' la relazione

$$my+xy''=y'(x+m),$$

la quale è un' equazione lineare di secondo ordine che è soddisfatta pel valore y dato dalla proposta. Derivando successivamente ed arrestandoci a quell' equazione in cui la derivata più grande $y^{(n)}$ sia la generica, si avrà

$$xy^{(n)}-(x+m+2-n)y^{(n-1)}+(m+2-n)y^{(n-2)}=0 \qquad (\alpha).$$

In questa la n potrà avere tutti i valori da $n = 2$ ad $n = m$ inclusive, e conterrà la relazione fra tre derivate consecutive qualunque. Tutte le radici reali di $y^{(n-1)} = 0$, se ne ha, sono negative, ed i loro valori riducono la (α) alla

$$x y^{(n)} + (m + 2 - n) y^{(n-2)} = 0.$$

Acciò questa sia verificata, converrà che i detti valori sostituiti in $y^{(n)}$ ed $y^{(n-2)}$, o li riducano dello stesso segno o gli annullino contemporaneamente, per essere x negativa e la $n \overline{\gtrless} m$. Nel primo caso tutte le radici negative della $y^{(n-1)} = 0$ saranno altrettanti valori critici corrispondenti ad altrettante coppie di radici immaginarie. Nel secondo caso risulta dalla stessa (α) in cui si diano ad n diversi valori che tali radici annullerebbero tutte le derivate di ordine inferiore ad n e la y stessa. L' equazione proposta avrebbe in tal caso tutte le sue radici eguali fra loro per ciascuno de' valori che si può attribuire ad m. Dovrebbe perciò potersi ridurre alla forma $(a + x)^m$, od avere almeno un fattore della forma $(a + x)^{n-i}$: ciò che non avendo luogo, sarà il solo primo caso quello che potrà verificarsi.

Ma non sappiamo ancora se la $y^{(n-1)} = 0$ abbia radici reali. Suppongasi m pari, vi saranno $\frac{m}{2}$ derivate di y che saranno di grado dispari. Vi saranno dunque $\frac{m}{2}$ equazioni della forma $y^{(n-1)} = 0$ che avranno certamente almeno una radice reale. Esisteranno dunque $\frac{m}{2}$ valori critici, e perciò avrà la proposta m radici immaginarie. E siccome il numero totale delle radici è $= m$, così non potrà avere radici reali. Perciò anche tutte le equazioni $y^{(n-1)} = 0$ di grado pari non avranno radici reali. Se m è dispari, vi saranno al certo $\frac{m-1}{2}$ equazioni della forma

$y^{(n-1)} = 0$ di grado dispari, ciascuna delle quali avrà per lo meno una radice. Vi saranno perciò per lo meno $\frac{m-1}{2}$ valori critici, ossia avrà la proposta per m dispari, per lo meno $m-1$ radici immaginarie, e siccome il numero totale di radici è eguale ad m, ed una è necessariamente reale, così ne risulta definitivamente che un'equazione della forma qual è la proposta ha una sola radice reale e negativa per m dispari, e nessuna radice reale per m pari. Tali conseguenze sono affatto indipendenti dalla grandezza del numero intero m che può oltrepassare un qualsivoglia dato numero.

Se supponiamo che m raggiunga il limite $\left(\frac{1}{0}\right)$, e si supponga rappresentata con e la somma totale della serie (1) nata dal porvi $x = 1$, vale a dire che la e sia fatta di un numero indefinito di decimali, la proposta diventa trascendente ed equivale alla $e^x = 0$. Ma abbiamo veduto che questa è dotata di un numero infinito di radici $= -\left(\frac{1}{0}\right)$, dunque le m che ammette la (1) della forma generale $\mu e^{\rho\sqrt{-1}}$ sono tali che al crescere indefinitamente di m i diversi valori del modulo μ convergono verso $\left(\frac{1}{0}\right)$, mentre quelli dell'arco ρ convergono verso π.

Se fosse proposta in vece l'equazione

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{1.2.3\ldots m} = 0 \qquad (2),$$

siccome l'equazione (1) si cambia nella (2) col porvi $-x$ in luogo di x, così la relazione fra tre derivate consecutive generiche della (2) risulterà parimente dal rimpiazzare nella (α) la x per $-x$, e si otterrà la (β)

$$-xy^{(n)} - (m+2-x-n)y^{(n-1)} + (m+2-n)y^{(n-2)} = 0 \qquad (\beta).$$

I valori reali di x che annullano la $y^{(n-1)}$ non potendo essere quì che quantità positive, ne risulta come precedentemente che tali valori dovranno rendere dello stesso segno le due derivate laterali $y^{(n)}$, $y^{(n-2)}$. Seguendo le stesse riflessioni già fatte, risulta che per m pari tutte le radici della (2) sono immaginarie, e per m dispari avrà essa una radice reale positiva ed $m-1$ radici immaginarie conjugate. Supposto quì pure che m raggiunga il limite estremo $\left(\frac{1}{0}\right)$ ed abbia la e la significazione sopra stabilita, la proposta si cambia nell' equazione trascendente $e^{-x}=0$. Avendo questa un numero infinito di radici $=\left(\frac{1}{0}\right)$, ne risulta che le m radici della (2) comprese pure sotto la forma generale $\mu e^{\rho\sqrt{-1}}$ sono tali che al crescere indefinitamente di m i diversi valori del modulo μ convergono verso $\left(\frac{1}{0}\right)$, mentre quelli dell' arco ρ convergono verso lo zero.

26. Si consideri ora il polinomio nato dallo sviluppo di $(1-x)^m$. Si moltiplichi termine per termine per gli $m+1$ primi termini della serie

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \frac{1}{1.2.3.4},\ldots\frac{1}{1.2\ldots m},\ldots \qquad (a),$$

la cui somma rappresenta la base de' logaritmi neperiani; e chiamato y il risultante polinomio, si formi l'equazione algebrica

$$0=y=1-mx+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^m\cdot\frac{m(m-1)\ldots[m-(m-1)]}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{x^m}{1.2.3\ldots m} \qquad (b).$$

Se si formano le derivate y' ed y'' rapporto ad x, si vedrà facilmente che fra le tre quantità y, y', y'' esiste la relazione

$$xy'' + (1 - x)y' + my = 0,$$

la quale può verificarsi colla sostituzione dei valori di y, y', y'' dati per x. Pigliando le differenziali ulteriori di questa equazione lineare di secondo ordine, si otterrà la relazione generica che esiste fra tre successive derivate qualunque, cioè

$$xy^{(n)} + (n - 1 - x)y^{(n-1)} + (m + 2 - n)y^{(n-2)} = 0 \qquad (c),$$

nella quale la n non dovrà oltrepassare il numero intero m.

Le radici reali di una qualunque equazione $y^{(n-1)} = 0$ dovranno essere necessariamente positive; giacchè una quantità qualsivoglia negativa sostituita nella $y^{(n-1)}$, riducendo positivi tutti i suoi termini, non potrà mai annullarla. Supposto pertanto che x abbia uno qualsivoglia dei valori positivi che verificano la $y^{(n-1)} = 0$, l'equazione (c) si ridurrà alla

$$xy^{(n)} + (m + 2 - n)y^{(n-2)} = 0.$$

Essendo x ed $m + 2 - n$ necessariamente positivi, i valori assunti di x non potranno soddisfare la precedente a meno che o riducendo le due derivate laterali $y^{(n)}$ ed $y^{(n-2)}$ di segno contrario, od annullandole entrambe. Questo secondo caso non può essere ammesso in quanto svanirebbero tutte le derivate della y, e la y stessa: questo caso sarebbe quello in cui la $y = 0$ avrebbe tutte le sue radici eguali, ciò che risulterebbe dalle $(1 - x)^m = 0$, e non già da quella risultante dall'aver moltiplicato i termini del suo sviluppo pei rispettivi termini delle serie (a) come abbiamo supposto. Nessuna adunque delle radici suddette avrà la proprietà caratteristica de' valori critici. Siccome ciò si può ripetere rispetto a ciascun valore di n, ne segue che la proposta equazione (b), la quale per m numero intero e finito è algebrica, non avrà radici immaginarie, ma sibbene un numero m di radici reali e positive comunque grande sia lo stesso numero m.

Se nella proposta equazione si pone $x = \frac{z}{m}$, essa si trasforma nella

$$0 = 1 - \frac{z}{1} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{z^2}{(1.2)^2} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{z^3}{(1.2.3)^2}$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\frac{z^4}{(1.2.3.4)^2} - \dots\dots$$
$$\dots\dots + (-1)^m\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{z^m}{(1.2...m)^2}$$

Le m radici di questa equazione in z saranno parimente tutte reali e positive, non essendo che le radici della proposta moltiplicate per m. Siccome tali conseguenze sussistono comunque grande sia m, si deduce che fatto esso convergere verso l'infinito positivo, l'equazione trascendente che ne risulta non cesserà di conservare la stessa proprietà; la detta equazione in tal caso si riduce alla

$$0 = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{(1.2)^2} - \frac{z^3}{(1.2.3)^2} + \dots\dots \qquad (d),$$

la quale avrà radici in numero infinito tutte reali e positive. Se si moltiplica la (d) termine per termine per la serie

$$1,\ 1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4\dots\dots$$

ciascuna delle radici della risultante equazione diventa eguale all'infinito positivo in quanto si riduce alla $e^{-z} = 0$.

27. Prima di procedere all'applicazione del metodo d'approssimazione ad una individuata equazione trascendente di cui vogliasi il valore approssimato di una radice, indicherò i fondamenti e le regole prescritte per le equazioni algebriche, non che i comparativi vantaggi di un tal processo. Siano a, b due limiti pei quali una radice di un'equazione qualunque algebrica o trascendente $\phi(x) = 0$ è completamente separata. Per passare al calcolo del valore approssimato della radice si richiede che i limiti a, b siano abbastanza vicini fra loro da adempiere l'ulteriore condizione che gli ultimi termini della serie degl'indici si riducano a $\ldots 0001$. Tal condizione potrà sempre ottenersi colla suddivisione dell'intervallo stesso $(a \ldots b)$, tranne pel caso particolare in cui la $\phi''(x) = 0$ avesse fra i limiti a, b una radice comune con quella della $\phi(x) = 0$ che si cerca. Questo caso non può presentarsi se non in quanto la $\phi(x)$ e $\phi''(x)$ abbiano un fattore comune $\chi(x)$ che si annulli pel valore stesso della radice in quistione. In tal caso la radice che si deve cercare nell'equazione $\phi(x) = 0$ sarà da cercarsi in vece nell'equazione più semplice $\chi(x) = 0$ come se questa fosse stata l'equazione proposta a risolversi. Fatta astrazione da un tale accidente, siano y_0, y_1 due limiti pei quali la serie degl'indici adempie la condizione di ridursi a $\ldots 0001$. Nella $\phi(x) = 0$ pongasi $x = y + \omega_1$, essendo y quello dei due limiti y_0, y_1 che rende positivo il prodotto $\phi(x)\,\phi''(x)$, e che vien detto *limite esteriore*. Trattandosi di un'approssimazione lineare, la $\phi(x) = \phi(y + \omega_1) = 0$ si ridurrà a $\phi(y) + \omega_1\,\phi'(y) = 0$, e chiamato y_2 il valore che assume la x quando la ω_1 è determinata da questa equazione, si avrà

$$y_2 = y - \frac{\phi(y)}{\phi'(y)} = y - \phi(y)\,\frac{dy}{d\,\phi(y)} \qquad (a).$$

Il valore y_2 così determinato sarà sicuramente più prossimo al valore della radice di quello che lo sia la y. Ma per regolare l'approssimazione in modo da risparmiare il calcolo inutile di decimali che non appartenessero alla radice stessa e per ottenere in pari tempo due nuovi limiti entrambi più dei precedenti prossimi alla radice conviene che i limiti y_0, y_1 prima di essere impiegati nel calcolo della y_2 siano abbastanza ravvicinati da soddisfare ad un'altra condizione. Si scelga il più grande dei valori numerici delle due quantità $\phi''(y_0)$, $\phi''(y_1)$ e si divida pel più piccolo valor numerico delle due quantità $2\phi'(y_0)$, $2\phi'(y_1)$. Basterà di conoscere il posto della prima cifra che un tal quoziente presenta, e di osservare qual è l'unità dell'ordine decimale immediatamente più grande di questo quoziente. Sia $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ questa unità. Si conoscerà così il numero k che potrà essere positivo o negativo. Sia $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ l'unità decimale almeno eguale alla differenza dei due dati limiti y_0, y_1. Si esaminerà se il numero n è almeno eguale ad $1-k$. Se questa condizione non è adempita, converrà ravvicinare i limiti y_0, y_1 colla sostituzione di numeri intermedj. Avendo riconosciuto che la condizione $n = 1-k$ ovvero $n > 1-k$ è soddisfatta, si sceglierà fra i limiti y_0, y_1 quello che rende positivo il prodotto $\phi(x)\phi''(x)$. Sia y questo limite scelto come si è già detto indietro. Si dividerà secondo la regola della *divisione ordinata* $\phi(y)$ per $\phi'(y)$ continuando l'operazione sino a che l'ultima cifra ottenuta nel quoziente sia dell'ordine decimale $2n+k$. Si aumenterà quest'ultima cifra di un'unità e si aggiungerà il quoziente così ridotto al limite y o si sottrarrà allo stesso secondo che le quantità $\phi(y)$, $\phi'(y)$ saranno di segni diversi o dello stesso segno. Il nuovo limite che diremo y_2 potrà essere o maggiore o minore del valore della radice, ciò che sarà facile da riconoscere col sostituirlo in

$\phi(x)$, ma esso differirà sempre dalla radice di una quantità minore di $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Conseguentemente diminuendo od aumentando di un'unità l'ultima cifra di y_2, si formerà un secondo limite y_3 che sarà minore della radice se y_2 si riconosce più grande di essa, e più grande della radice se y_2 è piccolo di essa. Si opererà così sui nuovi limiti y_2, y_3 come si è operato sugli antecedenti y_0, y_1, e si continuerà quanto si vuole la stessa regola. Ciascuna nuova operazione farà conoscere un numero di cifre appartenenti alla radice sempre più grande. I numeri delle cifre decimali esatte che seguono la virgola dopo la 1.ª, 2.ª, 3.ª .... operazione sono rispettivamente $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$ ..... L'andamento del calcolo è sicuro e regolare; esso non dà luogo ad alcuna superflua operazione, e non si corre mai rischio di determinare alcuna cifra che non appartenga al vero valore della radice. Si è quì riguardato il numero k come costante. Può talvolta accadere che calcolando di nuovo il suo valore col mezzo di limiti più approssimati ottenuti nel seguito dell'operazione, si trovi per k un valore più grande del primo, ciò che renderebbe l'approssimazione più rapida.

Siccome a rendere sempre più approssimato alla radice un nuovo limite si aggiunge successivamente al limite esteriore il valore della sottotangente $\frac{\phi(y)}{\phi'(y)}$ ad esso competente, così un tal metodo dicesi *approssimazione lineare per le tangenti successive.*

Siano ora l_0, l_1 due limiti tali che la differenza positiva $l_1 - l_0$ rappresenti il massimo intervallo entro cui si conserva la proprietà che la radice non solo è completamente separata, ma che inoltre si ha per indici estremi i valori ... 0 0 1, cioè a dire che per limiti $l_0 - \varepsilon$ ed $l_1 + \varepsilon$ essendo ε piccola quanto vuolsi, non esiste più la condizione che la serie degl' indici finisca coi tre valori 0 0 1. Siano y_0, y_1 due valori compresi fra l_0, l_1 e pongasi $y_1 - y_0 = \omega_0$. Se nell' equazione $\phi(x) = 0$ si pone $x = y_0 + \omega_1$, si avrà, trattandosi, come indietro, di un' approssimazione lineare, $\phi(y_0) + \omega_1 \phi'(y_0) = 0$. Si avrà parimente

$$\phi(y_1) = \phi(y_0 + \omega_0) = \phi(y_0) + \omega_0 \phi'(y_0).$$

Eliminata $\phi'(y_0)$ da queste due equazioni, si ottiene

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0 \phi(y_0)}{\phi(y_1) - \phi(y_0)} \qquad (b).$$

Il valore $y_0 + \omega_1$ considerato come un nuovo limite si ponga eguale ad y_2, si avrà

$$y_2 = y_0 - \frac{\omega_0 \phi(y_0)}{\phi(y_1) - \phi(y_0)} = \frac{y_1 \phi(y_0) - y_0 \phi(y_1)}{\phi(y_0) - \phi(y_1)} \qquad (c).$$

Se in questa si pone $\omega_0 = \Delta y_0$, siccome è parimente $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ e

$$\phi(y_1) - \phi(y_0) = \phi(y_0 + \Delta y_0) - \phi(y_0) = \Delta\phi(y_0),$$

così risulterà

$$y_2 = y_0 - \phi(y_0) \frac{\Delta y_0}{\Delta\phi(y_0)} \qquad (d).$$

Quest' equazione (d) deriva evidentemente dalla (a) col cambiarvi i differenziali espressi da d nelle differenze finite espresse con Δ.

Se si considerano le quantità $\phi(y_0)$, $\phi(y_1)$ come due ordinate corrispondenti alle rispettive ascisse y_0, y_1 e si congiunga con una retta l' estremità di queste due ordinate, prolungata se abbisogni sino all' incontro coll' asse delle ascisse, l' espressione data per y_2 nella (c) si trova coincidente coll' espressione che rappresenta la distanza dall' origine dell'anzidetto punto d' intersezione coll' asse. Ciò risulta manifestamente dal rapporto che esiste fra i lati omologhi dei due triangoli simili costituiti dalle due ordinate; dalla corda e dalle porzioni dell' asse delle ascisse comprese fra l' intersezione ed i piedi delle ordinate; avvertendo che, stante la condizione che dev' essere verificata pei limiti l_0, l_1, la retta che congiunge i punti estremi delle due ordinate sarà una corda che entro i detti limiti non taglia che in questi due soli punti la curva. Se, in quella guisa che si è chiamato y_2 il valore risultante dal secondo membro della (c) dipendente dai due limiti y_0, y_1, si chiamano y_3, y_4, $y_5 \dots y_n$ i valori che si ottengono dalla stessa (c) corrispondenti rispettivamente a due limiti immediatamente precedenti

$$(y_1\,,\ y_2)\,,\ (y_2\,,\ y_3)\,,\ \dots\ (y_{n-2}\,,\ y_{n-1})\,,$$

si avrà il valor generale y_n colla formola

$$\left.\begin{aligned} y_n &= y_{n-2} - \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})\,\phi(y_{n-2})}{\phi(y_{n-1}) - \phi(y_{n-2})} \\ &= \frac{y_{n-1}\,\phi(y_{n-2}) - y_{n-2}\,\phi(y_{n-1})}{\phi(y_{n-2}) - \phi(y_{n-1})} \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

La y_n è il termine generale di una serie ricorrente in cui un termine qualunque dipende dai due precedenti.

Qualunque siasi la legge d' approssimazione che tali valori di y_n ammettono, il calcolo risultante dalla continua applicazione della formola (e) costituisce il metodo dell' approssimazione lineare per *corde successive* in analogia a quello delle tangenti successive sopra accennato, e fornisce sempre valori di y continuamente convergenti verso il valore della radice. Ma per conoscere i diversi accidenti di tale convergenza basterà di fissare nei diversi casi quale dei due limiti fondamentali compresi fra l_0 ed l_1 debba essere indicato con y_0 piuttosto che con y_1. I suddetti limiti fondamentali possono essere tali che sostituiti successivamente nel prodotto $\phi(x)\,\phi''(x)$ diano

1.° entrambi un risultato positivo; 2.° entrambi un risultato negativo; 3.° uno dei limiti un risultato positivo e l'altro un risultato negativo. Vediamo in questi diversi casi quale relazione hanno i diversi valori di y_n colla radice in questione.

Nel primo caso i limiti stessi saranno o entrambi maggiori od entrambi minori della radice. S'indichi con y_1 quello dei due limiti in discorso che è più vicino alla radice, cioè quello che sostituito nella $\phi(x)$ dà per risultato un minor valore numerico. I successivi valori di y_n calcolati colla formola (e), mentre convergono verso la radice, si manterranno tutti maggiori o minori di essa, secondo che y_0 sarà esso stesso maggiore o minore della radice.

Nel secondo caso in cui parimente i limiti saranno o entrambi minori od entrambi maggiori della radice, ritenuto ancora che y_1 rappresenti quello dei due limiti che induce in $\phi(x)$ il più piccolo valor numerico, i diversi valori di y_n per n pari saranno maggiori o minori della radice secondo che y_0 sarà minore o maggiore di essa, e per n dispari saranno maggiori o minori secondo che y_0 sarà maggiore o minore della radice stessa.

Nel terzo caso s'indichi con y_1 quello dei due limiti che presenta un valor numerico più grande. O sarà questo y_1 quello dei due limiti che rende positivo il prodotto $\phi(x)\,\phi''(x)$, o sarà la y_0. Nel primo di questi due casi i valori di y_n saranno maggiori della radice se sarà n della forma $3i+1$, essendo i uno qualunque dei numeri $0, 1, 2, 3\ldots\ldots$ e minori di essa per valori di n diversi di $3i+1$. Nel secondo caso i valori di y_n saranno minori della radice per n della forma $3i$ e maggiori di essa pei valori di n non compresi nella forma $3i$. La costruzione che fornisce la rappresentazione geometrica della formola (c) quale fu indicata indietro, modificata a seconda di questi tre diversi casi rende manifeste le conclusioni qui enunciate. Risulta pertanto che nel secondo e terzo caso il numero di decimali comuni a que' valori calcolati di y_n che comprendono fra loro la radice saranno pure comuni alla radice stessa, del quale vantaggio manca il primo caso.

Supponiamo ora che l_0, l_1 rappresentino i limiti pei quali si ha soltanto la separazione completa della radice, ed oltre i quali cessi di essere adempita la condizione che l'ultimo indice essendo $= 1$ sia preceduto da zero. In questo caso nella prossimità di l_0, l_1 sonovi valori che rendono massima o minima la $\phi(x)$. Supponiamo inoltre che l'indice zero che occupa il penultimo posto sia seguito a sinistra da 1, cioè che si abbia per estrema serie d'indici $\ldots 1\,0\,1$. Impiegando due limiti y_0, y_1 compresi fra l_0 ed l_1, non varranno nel calcolo della formola (e) per le prime approssimazioni le stesse conseguenze che si sono stabilite nei tre differenti casi relative alla legge dell'approssimazione lineare, ma non mancherà in generale dopo ripetute operazioni di ottenersi ben presto due limiti y_{n-1}, y_n, pei quali sia verificata la condizione che la serie degl' indici si riduca a $\ldots 0\,0\,1$, ed essere così condotti al caso in cui la formola (e) goda di una legge costante d'approssimazione, tranne però il caso particolare in cui le equazioni $\phi(x) = 0$, $\phi''(x) = 0$ abbiano in comune la radice cercata. Ma quando un tal caso di eccezione si presenta, la radice in quistione sarà da cercarsi, come si è osservato, non più nella $\phi(x) = 0$, ma nella $\chi(x) = 0$, essendo $\chi(x)$ un fattore comune alla $\phi(x)$, $\phi''(x)$ che si annulla pel valore della radice che si cerca. Ritengasi pertanto che ai limiti l_0, l_1 corrisponda la serie degl' indici $\ldots 0\,0\,1$ e che siano essi così discosti che per un intervallo appena maggiore di $l_1 - l_0$ il penultimo indice dell'anzidetta serie cessi di essere zero e divenga

$=1$. Se si suppone che i due valori y_0, y_1 non siano più compresi fra l_0, l_1, ma siano o entrambi minori di l_0 od entrambi maggiori di l_1, allora la formola (e) darà risultati sempre divergenti, giacchè quella porzione di corda che unendo le estremità delle ordinate $\phi(y_0)$, $\phi(y_1)$ giunge a segare l'asse delle ascisse ha visibilmente una direzione non convergente verso quella intersezione della curva coll'asse che giace fra i limiti l_0, l_1. I valori successivi di y_n forniti dalla formola (e) hanno per limite un valore diverso da quello della radice cercata. E quand'anche uno solo dei due valori y_0, y_1 fosse situato al di fuori dell'intervallo che comprendono le l_0, l_1, possono i valori calcolati colla formola (e) divenire divergenti se non per tutti i valori di quello dei due y_0, y_1 che trovasi compreso fra l_0, l_1, almeno per alcuni di essi. Anzi può in questo caso alcuno dei valori di y_n divenire anche infinito, ciò che si avvera quando od y_0, y_1 verifichino la condizione $\phi(y_0)=\phi(y_1)$, ovvero in generale quando per due successivi valori y_{n-1}, y_n sia verificata la condizione $\phi(y_{n-1})=\phi(y_n)$. Se poi le due ipotesi y_0, y_1 comprendono fra loro i limiti l_0, l_1 quand'anche si supponga che rendano $\phi(x)$ di segno contrario, e che il valore calcolato di y_2 cada non solo fra y_0, y_1, ciò che deve necessariamente accadere, ma fra l_0, l_1, ciò che può nei casi più favorevoli avverarsi, saremmo ancora nei casi sopra contemplati rispetto alle due nuove coppie di limiti (y_0, y_2), (y_2, y_1). Questi accidenti di divergenza però non potranno mai presentarsi quando i valori y_0, y_1 impiegati come limiti fondamentali siano compresi fra l_0, l_1.

Ho creduto opportuno d'indicare i casi in cui la formola (e) può essere in difetto in quanto è essa generalmente impiegata senza il dovuto riguardo ai criterj che indicano quando essa fornisce valori convergenti e quando può dare valori divergenti od incerti, e senza mostrare, pur nel caso della convergenza, la relazione fra la radice che si cerca ed i limiti che successivamente si ottengono, che consiste in conoscere quando essi comprendono fra loro la radice e quando ne sono o sempre maggiori o sempre minori di essa, le quali cognizioni sono un necessario complemento del metodo dell'approssimazione lineare per le corde successive. In fatti la formola (e) che abbiamo discusso non è in ultima analisi che l'espressione della *regula falsi* che vien ordinariamente desunta dal semplice principio della proporzionalità. È questa usata nella risoluzione di alcune equazioni trascendenti che si presentano nell'analisi applicata ed in particolare nell'astronomia come nel problema di Kepler, nell'equazione da cui dipende la determinazione dell'orbita parabolica di una cometa col mezzo di tre osservazioni, ed in molte altre di cui i metodi ordinarj di risoluzione o non sono applicabili od esigono processi troppo lunghi e laboriosi. La *regula falsi* è il fondamento della risoluzione di quelle equazioni trascendenti trattate da Euler nel cap. XXII, T. 2.° dell'opera *Introductio in analysin infinitorum*, ed il criterio sulla convergenza della formola (e) rende ragione del pronto e felice successo delle soluzioni ivi date. È la *regula falsi* o di *falsa posizione* a cui ricorrono gli aritmetici quando s'imbattono in quistioni che oltrepassano i limiti degli ordinarj metodi elementari da essi praticati. Per usare in fatti la *regula falsi* nella risoluzione di una data equazione $\phi(x) = 0$ si fanno due ipotesi sul valore di x, e siano esse y_0, y_1. I risultati delle due ipotesi saranno rispettivamente $\phi(y_0)$, $\phi(y_1)$. Fra il valore x che si cerca e le quantità date si stabilisce la proporzione, come la differenza $y_1 - y_0$ delle ipotesi sta alla differenza $\phi(y_1) - \phi(y_0)$ dei risultati, così la differenza $x - y_0$ sta alla differenza dei risultati $\phi(x) - \phi(y_0) = -\phi(y_0)$, ossia

$$y_1 - y_0 : \phi(y_1) - \phi(y_0) :: x - y_0 : -\phi(y_0)$$

da cui

$$x = y_0 - \frac{(y_1 - y_0)\,\phi(y_0)}{\phi(y_1) - \phi(y_0)} = \frac{y_1\,\phi(y_0) - y_0\,\phi(y_1)}{\phi(y_0) - \phi(y_1)} \;; \qquad (f)$$

ovvero posto

$$x - y_0 = \omega_1 \quad \text{ed} \quad y_1 - y_0 = \omega_0 \,,$$

dall'analoga proporzione comunemente in uso

$$\omega_0 : \phi(y_0) - \phi(y_1) :: \omega_1 : \phi(y_0)$$

si deduce

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\,\phi(y_0)}{\phi(y_0) - \phi(y_1)} \qquad (g).$$

Il valore di x dato dalla (f) non è che il primo valore approssimato y_2 dato dalla formola (c), ed il valore fornito dalla (g) corrisponde a quello che vien dato dalla (b). Le conclusioni pertanto stabilite sulle formole (b), (c) che rappresentano l'approssimazione per le corde dovranno applicarsi alle formole (f), (g) che sono l'espressione analitica della *regula falsi*.

Non tutte le ipotesi perciò che si fanno sul valore di x sono atte a dare un risultato convergente, per ottenere il quale si vede necessario che le ipotesi fatte y_0, y_1 siano comprese fra i limiti l_0, l_1, a stabilire opportunamente i quali limiti convien ricorrere alla determinazione delle serie degl'indici col mezzo delle derivate. Impiegata una tal regola colle stesse norme e cautele che si sono stabilite per l'approssimazione per le corde nella formola (e), si rileverà non solo quando le due ipotesi fatte possono essere impiegate come conducenti a risultati convergenti, ed a stabilire gli accidenti dell'approssimazione, ma inoltre a conoscere ed escludere quelle che indurrebbero risultati divergenti od incerti. Comunque il metodo d'approssimazione per le corde completato colle accennate norme presenti il vantaggio di dare, almeno nel secondo e terzo caso, limiti che comprendano fra loro la radice, e che perciò i decimali comuni ai due limiti siano anche comuni alla radice stessa, pure siccome può accadere anche il primo dei tre accennati casi, e non sarebbe in generale così semplice in questo l'assegnare il grado di convergenza de' limiti ottenuti verso il valore che si cerca, nè si potrebbe d'altronde evitare un calcolo superfluo di cifre decimali che non appartengono al vero valore della radice, sarà in ogni caso preferibile il metodo regolare d'approssimazione per le successive tangenti, ordinato e completato colle regole date in principio di questo paragrafo. Per fare un'applicazione di tal metodo a qualche caso particolare ho scelto l'equazione trascendente che è fondamentale nella teorica del moto elittico, nella trattazione della quale si vedranno nel seguente paragrafo usate le stesse regole date in questo che sono comuni alle equazioni algebriche e trascendenti. Apparirà inoltre da tale applicazione se nel caso di forti eccentricità non fosse per avventura un tal metodo preferibile a quello delle serie comunemente in uso, il quale, quando si voglia spingere l'approssimazione entro i decimi di secondo, esigerebbe il calcolo di un numero troppo grande di termini.

28. Sia da cercarsi la radice x dell'equazione

$$x - e \sin x - a = 0$$

essendo

$a =$ anomalia media

$x =$ anomalia eccentrica

$e =$ eccentricità.

Primieramente si supponga per maggiore semplicità che a rappresenti l'anomalia presa o dall'afelio o dal perielio secondo che risulterà più piccolo un tal angolo. In qualunque posizione del pianeta sarà in nostro arbitrio di scegliere piuttosto l'afelio che il perielio a cui riferire la a dopo o prima del passaggio dell'astro a questi punti in modo che risulti $a < 90^\circ$. Pongasi $x - a = y$ l'equazione a risolversi, sarà

$$X = y - e \sin(a + y) = 0 \qquad (1).$$

Si potrebbero cercare i due limiti della radice y col metodo noto di sostituire successivamente nella serie delle funzioni

$$\ldots . X^{v}, \quad X^{iv}, \quad X''', \quad X'', \quad X', \quad X,$$

le quali stanno quì in luogo dei termini

$\ldots . y^{v}$, y^{iv}, y''', y'', y', y della serie (A)

all'incognita y i termini della serie

$$0{,}1\,;\quad 0{,}2\,;\quad 0{,}3\,;\quad 0{,}4\,;\quad 0{,}5\,;\quad 0{,}6 \ldots . .$$

Una semplice riflessione però somministra subito due limiti entro cui è compresa la radice. Di fatto nel 2.° membro dell'equazione $y = e \sin(a + y)$ per la supposizione fatta sulla a non potrà mai essere $a + y > 180^\circ$, e perciò il seno sarà positivo e perciò positiva la y. Si distinguerà in fine se la radice y ottenuta debba essere aggiunta o sottratta dalla a per ottenerne l'anomalia eccentrica, secondo che si sarà presa la a dal perielio o dall'afelio. La y è zero nell'afelio e nel perielio ossia quando $a = 0$, ed aumenta indipendentemente dal segno avvicinandosi al limite e che viene raggiunto quando $a + y = 90^\circ$. Si avrà dunque un limite superiore alla radice ponendo e in luogo di y nel secondo membro $e \sin(a + y)$ ed un limite inferiore alla radice ponendovi zero in luogo di y. Si avrà dunque limite superiore $= e \sin(a + e)$, limite inferiore $= e \sin a$, quando sia però $a + e < 90^\circ$. Se sarà $a + e > 90^\circ$, allora i limiti della radice sono numericamente gli stessi, ma il limite superiore sarà $e \sin a$ e l'inferiore sarà $e \sin(a+e)$ per essere in questo caso $\sin a > \sin(a+e)$. Se però essendo pure $a+e > 90^\circ$, si abbia $90^\circ - a > \frac{1}{2} e$, allora i limiti tornano i medesimi come nel caso di $a+e < 90^\circ$. Di fatto preparate le successive derivate di X, si ha

$$
\begin{aligned}
X &= y - e \sin(a+y) \\
X' &= 1 - e \cos(a+y) \\
X'' &= \quad + e \sin(a+y) \\
X''' &= \quad + e \cos(a-y) \\
X^{iv} &= \quad - e \sin(a+y) \\
X^{v} &= \quad - e \cos(a+y). \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Da questa derivata X^{v} in avanti all'infinito si vede come debbano progredire i termini ed i loro segni corrispondenti, vale a dire che succederanno due $+$, indi due $-$ all'infinito. Assumendo pel limite inferiore $e \sin a$ e pel superiore $e \sin(a+e)$ ed arrestandoci alla X^{v}, siccome risulterà che la $X^{v} = -e \cos(a+y) = 0$ non ha fra i detti limiti nè radici reali, nè valori critici, così il corrispondente indice δ^{v} sarà zero, e risulterà per la serie d'indici $\ldots 0\,0\,0\,0\,0\,1$, come si vede nel seguente quadro

Derivate	.....	X^{v},	X^{iv},	X''',	X'',	X',	X
$e \sin a$)	.....	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
Indici	.....	0,	0,	0,	0,	0,	1
$e \sin(a+e)$)	.....	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Nel caso però che si avveri la condizione che $a+e > 90^\circ$ senza che sia $90^\circ - a > \frac{1}{2} e$, allora nella serie superiore va posto $e\,sin(a+e)$ che è il limite inferiore, ed $e\,sin\,a$ nella serie sottoposta: i segni rimangono gli stessi. Nella serie degli indici si vede di più che è adempita la condizione che l'unità sia preceduta da tre zeri. Il limite esteriore che è quello che deve scegliersi per il calcolo della radice sarà in ogni caso sempre il limite che corrisponde alla serie inferiore, ossia sarà quello che ha il maggior valore, dando esso lo stesso segno alla X ed alla X''. Si potrà dunque passare al calcolo della radice quando siasi assegnato un valore ad a ed e. Ma prima determiniamo, per non ispingere le approssimazioni al di là del bisogno, entro quante cifre decimali dovrà calcolarsi la y, acciò convertita in gradi, minuti e secondi, si abbia l'esattezza entro un decimo di secondo. Rappresenti e'' un numero di secondi contenuti in un dato arco e rappresenti e lo stesso arco espresso in parti del raggio, sarà

$$e = e''\,sin\,1'' = e''[0{,}0000048481368 1\ldots],$$

sia $e'' = 0'',1$, sarà $e = 0{,}00000048\ldots$

Vale a dire che un decimo di secondo porta una cifra significativa sulla settima cifra decimale. Ritenuto dunque il valore di y esatto inclusivamente all'ottava cifra dopo la virgola, saremo sicuri che nel convertir questa frazione decimale in arco non si commetterà errore entro il decimo di secondo.

Dati che siano i valori numerici di e e di a volendosi la y in frazion decimale, si riterrà la e in frazion decimale sino all'ottava cifra inclusiva ove compare la e fuori del trascendente, e si porrà $\frac{e}{sin\,1''} = e\,R''$, essendo $R'' = 206264'',8$ quando trovasi sotto trascendenti circolari. Data la e, si ha subito per mezzo di una tavola la sua conversione in gradi, minuti e secondi.

Sia l'anomalia media $= z = 330°\ 28'\ 13''$

l'eccentricità $= e = 0{,}2541748$,

che è quella competente all'orbita di Giunone, ed x l'anomalia eccentrica. L'equazione da cui si deve desumere la x è

$$x - e \sin x - z = 0 \quad (1).$$

Rappresenti a l'anomalia media presa o dall'afelio o dal perielio secondo che risulterà quest'angolo $< 90°$, e si sostituisca a in luogo di z. Posto $x - a = y$, come si è già detto, l'equazion da risolversi sarà $y - e \sin(a + y) = 0$. Nel nostro caso sarà $a = 360° - 330° 28' 13'' = 29° 31' 47''$, la radice y sarà compresa fra i due valori $e \sin a$ ed $e \sin(a + e)$. Per calcolare questi due limiti si cercherà la e espressa in secondi per porsi sotto il seno, sarà

$$e R'' = 0{,}2541748 \times 206264'',8 = 14° 33' 47'';$$

$a + e = 44° 53' 4''$, onde

$$e \sin a = 0{,}254 \sin(29.31) = 0{,}254 \times 0{,}49 = 0{,}124,$$

$$e \sin(a + e) = 0{,}254 \sin(44.53) = 0{,}254 \times 0{,}696 = 0{,}177.$$

Facilmente può essere qui verificato quanto si è detto, cioè che l'equazione $X' = 0$, la quale si riduce a $\cos(a + y) = 0$, non ha radici fra questi limiti, ossia non può essere adempita per valori compresi fra $a + 0{,}124$ ed $a + 0{,}177$, onde risulta $\delta^r = 0$, e la serie degl'indici si riduce a... 0001. La radice è dunque compresa fra 0,1 e 0,2. La differenza dei limiti è $= 0{,}1$, perciò $n = 1$. Si deve ora cercare il valore di k per vedere se è soddisfatta la condizione di essere $n \gtreqless 1 - k$. Si dovrebbe calcolare la quantità $\frac{X''}{2X'}$ ove X'' sia il più grande dei valori risultante dai due limiti 0,1 e 0,2, ed X' sia il più piccolo. Nel nostro caso sarebbe a calcolarsi la quantità $\frac{e \sin(a + 0{,}2)}{2(1 - e \cos(a + 0{,}1)}$

intendendo di aver ridotto i valori $0,1$ e $0,2$ in secondi moltiplicandoli per R''. Per risparmio di calcolo si potrà alla precedente sostituire un'altra che abbia il più gran valore possibile da cui risulti k minore del vero: e se la condizione $n \overline{\gtrless} 1 - k$ è soddisfatta in questo caso, lo sarà a più forte ragione pel vero valore di k risultante dalla esatta formola. Si potrà dunque supporre che $e\,cos(a + y)$ si avvicini il più possibile all'unità, e per essere $e < 1$ converrà sostituire a $cos(a + y)$ il suo valor massimo $= 1$, e risulterà $2X' = 2(1 - e)$, e per render massimo il valore di X'' si porrà 1 in luogo di $sin(a + y)$. La formola a calcolarsi sarà perciò $\frac{e}{2(1 - e)} = \frac{0,2541}{1,4918} = 0,1 \ldots$ la cifra dell'ordine immediatamente superiore è 1, onde si ha $k = 0$, e la condizione $n \overline{\gtrless} 1 - k$ è soddisfatta per essere $n = 1$, $k = 0$. Si potrà dunque passare al calcolo della radice usando il limite esteriore $\beta = 0,2$. Si avrà il primo valore approssimato sottraendo da $\beta = 0,2$ il quoziente $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ spinto sino alla cifra decimale dell'ordine $2n + k$, vale a dire nel nostro caso sino ai centesimi inclusivi; ma prima di operare la sottrazione si deve aumentare di un'unità l'ultima cifra del quoziente ritenuto. Si ha pertanto

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,2 - 0,254\,sin(29.31.47 + 0,2\,R'')}{1 - 0,254\,cos(29.31.47 + 0,2\,R'')}$$

$$= \frac{0,2 - 0,254\,sin(40.59.20)}{1 - 0,254\,cos(40.59.20)}$$

$$= \frac{0,2 - 0,254 \times 0,655}{1 - 0,254 \times 0,754}$$

$$= \frac{0,0336}{0,8085} = 0,04.$$

Risulta dunque

Primo valore approssimato $= 0,2 - 0,05 = 0,15$.

Questo valore è esatto almeno entro $\frac{1}{100}$ circa, ma s'ignora se esso è minore o più grande della radice. Se la sostituzione di questo valore nella X darà $+$, sarà un limite superiore, se darà $-$, sarà inferiore. Siccome questo limite rende X negativa per essere

$$X = 0,15 - 0,254\, sin(29.31.47 + 0,15\, R'')$$
$$= 0,15 - 0,254\, sin(38.\ 7.26)$$
$$= 0,15 - 0,254 \times 0,6173 = 0,15 - 0,1566 = -0,0\ldots.$$

sarà $0,15$ il limite inferiore, e la radice sarà compresa fra $0,15$ e $0,16$. Posto dunque $\beta = 0,16$ ed essendo ora $n = 2$, si spingerà la divisione sino alla cifra di quart' ordine

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,16 - 0,254\, sin(29.31.47 + 0,16\, R'')}{1 - 0,254\, cos(29.31.47 + 0,16\, R'')}$$

$$= \frac{0,16 - 0,254\, sin(38.41.49)}{1 - 0,254\, cos(38.41.49)}$$

$$= \frac{0,16 - 0,254 \times 0,6252}{1 - 0,254 \times 0,7804}$$

$$= \frac{0,16 - 0,158904}{1 - 0,19835}$$

$$= \frac{0,001096}{0,80164} = 0,0013.$$

Divisione ordinata.

1096	801
8	0,0013
29	
0	
29	

Aumentando di un' unità l' ultima cifra 3, sarà

Secondo valore approssimato $= 0,16 - 0,0014 = 0,1586$.

Per conoscere se questo valore ottenuto è inferiore o superiore alla radice converrà farne la sostituzione nella funzione X per conoscere il segno del risultato; sarà

$$\begin{aligned} X &= 0{,}1586 - 0{,}2541748 \, \sin(29.31.47 + 0{,}1586 \, R'') \\ &= 0{,}1586 - 0{,}2541748 \, \sin(38.37.9{,}3) \\ &= 0{,}1586 - 0{,}2541748 \times 0{,}624108 \\ &= 0{,}1586 - 0{,}158632 \ldots \end{aligned}$$

Essendo il risultato negativo è segno che il limite assunto è inferiore alla radice. Il limite esteriore da usarsi per la successiva approssimazione sarà dunque $\beta = 0{,}1587$, onde

$$\begin{aligned} X &= 0{,}1587 - 0{,}2541748 \, \sin(29.31.47 + 0{,}1587 \, R'') \\ &= 0{,}1587 - 0{,}2541748 \, \sin(38.37.20{,}9) \\ &= 0{,}1587 - 0{,}2541748 \times 0{,}624186 \\ &= 0{,}1587 - 0{,}15865235 16728 \\ &= 0{,}0000476483272 = f(\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X' &= 1 - 0{,}2541748 \cos(38.37.20{,}9) \\ &= 1 - 0{,}2541748 \times 0{,}781275 \\ &= 1 - 0{,}19858041687 \\ &= 0{,}80141958313 = f'(\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} &= \frac{0{,}0000476483272}{0{,}80141958313} \\ &= \frac{476483272}{8014195831300} \\ &= 0{,}00005945. \end{aligned}$$

Divisione ordinata.

47648 | 80141
40 | 0,00005945
76
72
44
5 = 1.5
39
32
78
29 = 4.0+1.9+4.5
49
40
9
⋮

Si è spinta la divisione sino alla cifra di ottavo ordine decimale, giacchè la differenza dei due limiti dava $n = 4$. Aumentata l'ultima cifra di un'unità e sottratto dal limite 0,1587, si ha

Terzo valore approssimato $= 0{,}1587 - 0{,}00005946$
$= 0{,}15864054$

$$
\begin{array}{rl}
y = & 9^\circ\ 5'\ 21'',9 \\
 & 29\ \ 31\ \ 47,0 \\
\hline
360 - & 38\ \ 37\ \ \ 8,9 = 321^\circ\ 22'\ 51'',1,
\end{array}
$$

che sarà il valore dell'anomalia eccentrica cercata che soddisfa all'equazione proposta (1).

Quando si vogliano evitare le moltiplicazioni che occorrono nel calcolo delle funzioni $f(\beta)$, $f'(\beta)$ e ridurle a non dipendere che da somme di numeri, si premetterà la seguente riduzione. Nella formola

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{y - e \sin(a + y)}{1 - e \cos(a + y)}$$

pongasi $e = \sin e'$, risulterà allora e' un arco il cui seno sarà la frazione decimale e che si cercherà nella tavola dei seni naturali, e si vedrà qual arco vi corrisponda: quest'arco sarà la e'. La formola in tal modo diventa

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{y - \sin e' \sin(a + y)}{1 - \sin e' \cos(a + y)},$$

nella quale ponendo in luogo dei prodotti del seno pel seno, e del seno pel coseno dei due archi, le semisomme o semidifferenze dei coseni e seni della somma e differenza degli archi semplici, si troverà

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{y + \frac{1}{2}\cos(a + e' + y) - \frac{1}{2}\cos(a - e' + y)}{1 + \frac{1}{2}\sin(a - e' + y) - \frac{1}{2}\sin(a + e' + y)}.$$

29. Si è già avvertito come un'equazione algebrica intera, sostituita all'incognita la forma generale delle radici immaginarie, si può sempre coll'eliminazione ridurre a due equazioni in cui le incognite siano separate, e come dalla determinazione dei valori delle radici reali di queste ne risulti la determinazione dei valori delle radici immaginarie della proposta stessa. Si è detto inoltre che nelle equazioni trascendenti non era in generale effettuabile una tale eliminazione, tranne in pochi casi speciali di cui si è fornito qualche esempio. Sebben l'esposta teoria estesa alle equazioni trascendenti faccia conoscere il numero delle radici reali ed immaginarie, e delle prime anche i valori numerici approssimati quanto si voglia, pure non si avrà dalla teorica stessa un metodo che fornisca in generale il valore delle radici immaginarie. Eppure vi sono quistioni di analisi in cui interessa, non solo di conoscere se una data equazione trascendente ammetta o no radici immaginarie e quante ne contenga, ma inoltre di ottenere l'espressione numerica, se non di tutte, almeno di alcune di esse. Di tali questioni una che si presenta continuamente nell'analisi è il criterio della convergenza delle serie nate dagli sviluppi delle funzioni sia esplicite che implicite. Risulta in fatti che il criterio della divergenza nello sviluppo di tali funzioni è dipendente dalla legge della discontinuità delle funzioni stesse quando si assuma per carattere di discontinuità quello che si verifica in una funzione di x, quando al variar per gradi insensibili la x la funzione non varia per gradi insensibili, o varia almeno per gradi di ordine inferiore. Su quali fondamenti questo si appoggi, e come un tal criterio si riduca definitivamente alla ricerca della più piccola fra le radici di una equazione dipendente dalla proposta stessa, nasce dai seguenti principj che possono derivarsi dal noto teorema sulla convergenza della serie di Maclaurin.

Nell'espressione modulare $x = \mu e^{\rho\sqrt{-1}}$ s'immagini che ad ogni valore di μ da o ad $\left(\frac{1}{0}\right)$ l'arco ρ compia tutta l'escursione de' valori da $-\pi$ a $+\pi$. In forza di questa duplice variabilità di μ e ρ l'espressione data sarà atta a rappresentare l'escursione totale sia reale, sia immaginaria della variabile x. Un valor reale di x diventa così un caso particolare di una delle sue espressioni immaginarie. Lo sviluppo di una funzione qualunque $\phi(x)$ per le potenze intere della variabile reale od immaginaria x sia rappresentato da $S(x)$. Per essere la $S(x)$ una funzione intera di x di un numero infinito di termini, è di natura diversa dalla $\phi(x)$ ed ha perciò dei caratteri che entro certe escursioni della x sono proprj ad essa e non comuni colla $\phi(x)$ quantunque da essa derivata. Uno dei caratteri specifici della $S(x)$ non comune alla $\phi(x)$ si è che se nell'escursione della variabile immaginaria x s'incontrano due valori finiti $\mu=v$, $\rho=\omega$ pei quali la $S(x)$ diventa discontinua, essa si mantiene discontinua indefinitamente per tutti i valori di μ da $\mu=v$ a $\mu=\left(\frac{1}{0}\right)$ qualunque siasi il valore dell'arco ρ, vale a dire che il carattere della discontinuità di $S(x)$ è indipendente dall'arco ρ e dipende solo dal modulo μ. Laddove la $\phi(x)$ nell'escursione della variabile immaginaria x comincerà ad imbattersi in valori determinati sia di μ che di ρ che la rendano discontinua, e ridiverrà continua per valori diversi, indi potrà divenire ancor discontinua e così di seguito: ma il carattere della discontinuità sarà dipendente e dall'una e dall'altra delle quantità μ e ρ. La $S(x)$ al primo valore di μ pel quale diventa discontinua non riacquista più un corso continuo, ma in forza dell'essere una funzione intera di un numero infinito di termini è obbligata a mantenersi discontinua pei successivi valori di μ e per qualsivoglia valore di ρ. Dicesi divergente la serie $S(x)$, sia quando per un certo valore finito $\mu = \upsilon$ diventa infinita, e tale si mantiene per valori superiori a υ qualunque siasi ρ, sia quando pei suddetti valori la $S(x)$ non converga verso un limite fisso. Nel 1.° caso la $S(x)$ diventa discontinua per $\mu \gtreqless \upsilon$, e nel 2.° caso diventa indeterminata, giacchè a misura che più termini della serie si assumono acquista differenti valori non convergenti verso un valore fisso, e perciò è anche in questo caso discontinua. La divergenza pertanto della $S(x)$ ricade nel divenire essa stessa discontinua. Per avere pertanto il criterio della divergenza della $S(x)$ converrà cercare il più piccolo de' valori di μ, ed un valore corrispondente di ρ pei quali essa diventa discontinua. Per quella escursione di μ da zero a υ per la quale la $S(x)$ si mantiene continua, essa deve fornire valori coincidenti coi valori di $\phi(x)$, altrimenti sarebbe illusorio e falso in generale lo sviluppo di $\phi(x)$. Se tali valori possono essere discordanti, debbono essi corrispondere a' valori di x che presentino per μ valori $=$ ovvero $> \upsilon$. Dunque il criterio della divergenza di $S(x)$ dipenderà dalla ricerca del più piccolo valore di μ, comunque siasi l'arco ρ, pel quale la stessa $\phi(x)$ cessa di essere continua. Il carattere generale della discontinuità in una funzione finita $\phi(x) = y$ presentandosi, come si è ammesso, quando per particolari valori della variabile divenendo l'incremento $\Delta(x)$ infinitamente piccolo, la $\Delta(y)$ si mantiene o finita o di un ordine inferiore, ne viene che il $lim. \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$ deve ridursi allo zero ossia $\frac{dx}{d\,\phi(x)} = 0$ che somministra $\frac{1}{\phi'(x)} = 0$. Converrà dunque cercare in quest' equazione quella fra le radici $x = \mu\, e^{\rho\sqrt{-1}}$ che presenta il più piccolo valore del modulo μ qualunque siasi l'arco ρ. Allora la $S(x)$ rimarrà convergente per valori reali od immaginarj di x pei quali il modulo di x sia inferiore al più piccolo dei moduli delle radici reali od immaginarie dell'equazione $\frac{1}{\phi'(x)} = 0$. Ecco pertanto come in questa ricerca rendesi necessaria la conoscenza dell' effettivo valore almeno di una delle radici immaginarie di una data equazione. Non ostante i riflessi fatti in principio di questo paragrafo, la circostanza che in questa speciale questione basta la sola determinazione del più piccolo de' moduli che presentano le radici reali od immaginarie dell'equazione $\frac{1}{\phi'(x)} = 0$, tornerà assai utile, quando processi più semplici non siano praticabili, l'impiego del metodo delle serie ricorrenti, il quale rendesi atto appunto a fornire il valore approssimato del più piccol modulo di una radice sia essa reale, sia immaginaria. Lo sviluppo delle quì date riflessioni e la determinazione delle radici per serie ricorrenti le quali godono di maggior estensione di quella che ordinariamente viene loro attribuita fornirà in altra occasione il soggetto di speciale esame. Intanto prima di passare ad estendere la questione della convergenza alle funzioni implicite si applichi la ricerca dei limiti della convergenza nello sviluppo delle funzioni esplicite ai seguenti casi particolari:

Rappresenti $\phi(x)$ una qualunque delle funzioni

(1) $\frac{1}{a \pm x}$, (2) $\frac{1}{(b \pm x)^a}$, (3) $\frac{1}{a + x^2}$

(4) $\frac{1}{(b + x^n)^2}$, (5) $\frac{1}{a - \sqrt{x}}$, (6) $\frac{x}{1 + \sqrt{a \mp x^2}}$

(7) $\sqrt{a \pm x^n}$, (8) $(x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$, (9) $\sin x$

(10) $\cos x$, (11) $\text{tang}\, x$, (12) $\text{arc.} \sin x$

(13) $\text{arc.} \text{tang}\, x$, (14) e^x, (15) $l(x)$

$$(16)\quad l(a \pm x)\,, \quad (17)\quad a^{x}\,, \quad (18)\quad e^{\pm x^2}$$

$$(19)\quad e^{-x^{-2}}\,, \quad (20)\quad \cos(1 - x^2)\,, \quad (21)\quad e^{\pm \frac{1}{x}}$$

$$(22)\quad l\left(\frac{1}{a - x}\right), \quad (23)\quad \cos\frac{1}{x}\,, \quad (24)\quad \frac{1}{(x^2 - 2x\cos\theta + 1)^{\frac{1}{n}}}$$

$$(25)\quad l(1 + 2x\cos\theta + x^2)\,, \qquad (26)\quad e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$$

$$(27)\quad \left\{1 - x^2 + \sqrt{(x^4 - 2x^2)}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{1 - x^2 - \sqrt{(x^4 - 2x^2)}\right\}^{\frac{1}{3}}\,,$$

$$(28)\quad \frac{1}{x^3 - ax^2 + bx - c}\;; \ldots\ldots$$

ove riterremo che le costanti che entrano in queste funzioni siano positive. Le equazioni date dalla $\frac{1}{\phi'(x)} = 0$, omessi quei fattori che sono annullati o per valori che non appartengono all'equazion proposta, o per valori il cui modulo non sia visibilmente il più piccolo fra le radici della proposta, saranno rispettivamente date dalle

$$(1)\quad x \pm a = 0, \quad (2)\quad x \pm b = 0, \quad (3)\quad x^2 + a = 0$$

$$(4)\quad x^{1-n}(x^n + b)^{a+1} = 0, \quad (5)\quad \sqrt{x} = 0, \quad (6)\quad x^2 \mp a = 0$$

$$(7)\quad x^{1-n}(a \pm x^n)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (8)\quad x^4 - 3x + 2 = 0, \quad (9)\quad \sec x = 0$$

$$(10)\quad \operatorname{cosec} x = 0, \quad (11)\quad \cos x = 0, \quad (12)\quad 1 - x^2 = 0$$

$$(13)\quad 1 + x^2 = 0, \quad (14)\quad e^{-x} = 0, \quad (15)\quad x = 0$$

$$(16)\quad x \pm a = 0, \quad (17)\quad a^{-x} = 0, \quad (18)\quad \frac{e^{\mp x^2}}{x} = 0$$

(19) $x^3 e^{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$, (20) $\frac{1}{x} = 0$, (21) $x^2 e^{\mp\frac{1}{x}} = 0$

(22) $x - a = 0$, (23) $\frac{x^2}{\sin\frac{1}{x}} = 0$, (24) $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$

(25) $1 + 2x\cos\theta + x^2 = 0$, (26) $e^{-x} = 0$, (27) $x^2 - 2 = 0$

(28) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ .....

Il valore del più piccolo fra i moduli μ delle radici delle superiori equazioni sarà dato rispettivamente come segue

(1) $\mu = a$, (2) $\mu = b$, (3) $\mu = \sqrt{a}$

(4) $\begin{cases} \mu = 0, & \text{per } n > 1 \\ \mu = \sqrt{b}, & \text{per } n < 1 \end{cases}$ (5) $\mu = 0$, (6) $\mu = \sqrt{a}$

(7) $\begin{cases} \mu = 0, & \text{per } n > 1 \\ \mu = \mp\sqrt[n]{a}, & \text{per } n < 1 \end{cases}$ (8) $\mu = 1$, (9) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$

(10) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$, (11) $\mu = \frac{\pi}{2}$, (12) $\mu = 1$

(13) $\mu = 1$, (14) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$, (15) $\mu = 0$

(16) $\mu = \mp a$, (17) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$, (18) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$

(19) $\mu = 0$, (20) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$, (21) $\mu = 0$

(22) $\mu = a$, (23) $\mu = 0$, (24) $\mu = 1$

(25) $\mu = 1$; (26) $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$, (27) $\mu = \sqrt{2}$

se nella (28) si suppone $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, si trova $\mu = 1$, se si suppone in vece $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 4 + 6\sqrt{2}$, $c = 12$, si trova $\mu = 2$.

Rispetto a questi valori di μ giova osservare che siccome di una data funzione $\phi(x)$ si vuole lo sviluppo per potenze intere e positive di x, è ben naturale che la funzione (5) sarà sviluppabile per le potenze intere di $\sqrt{x}$, ma non già per quelle della stessa x; è perciò che l'equazione $\sqrt{x}(a-\sqrt{x})^2 = 0$ che è data dalla $\frac{1}{\phi'(x)} = 0$ relativa alla funzione (5) fu ridotta alla sola $\sqrt{x} = 0$, potendosi omettere quel fattore che è annullato per valori aventi moduli superiori a zero. Se si fosse chiesto lo sviluppo per le potenze di $\sqrt{x}$, allora la $a - \sqrt{x} = 0$ avrebbe dato per modulo $\mu = a^2$. Una tale avvertenza vale anche per le funzioni (4), (7). Parimente, siccome si è già veduto al § 16 che le radici di $\sec x = 0$ sono comprese nella formola $x = \pm n\pi \pm m\sqrt{-1}$ ove è $m = \left(\frac{1}{0}\right)$, perciò il modulo di una radice qualsivoglia della $\sec x = 0$ è dato da $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$ come si è stabilito nella (9). Lo stesso vale rispetto al valore dato nella (10).

Nell' equazione (18) si tratta di trovare il più piccolo dei moduli delle radici delle due equazioni $\frac{1}{x} = 0$, $e^{\mp x^2} = 0$. Se assumiamo il segno $-$, entrambe queste equazioni hanno per radice il valore $x = \left(\frac{1}{0}\right)$. Se si prende il segno $+$, la radice della seconda equazione è immaginaria ed espressa da $x = m e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ ove $m = \left(\frac{1}{0}\right)$, e perciò in entrambi i casi il valore del modulo è $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$ come si è stabilito.

Nell' equazione (19) che equivale al sistema delle due $x^3 = 0$, $e^{\frac{1}{x^2}} = 0$ quella fra le sue radici che presenta il modulo più piccolo è la $x = 0$. Comunque un tal valore riduca la funzione $x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, siccome il vero valore di tale indeterminata si sa essere lo zero, così il più piccolo dei moduli delle radici della (19) è $\mu = 0$.

Se nell' equazione (21) si assume il segno negativo, si trova parimente che la più piccola fra le radici che ammettono le due equazioni $x^2 = 0$, $e^{-\frac{1}{x}} = 0$ è $x = 0$, e perciò $\mu = 0$; se in vece si assume il segno positivo, si trova per radice comune alle due equazioni $x^2 = 0$, $e^{\frac{1}{x}} = 0$ la forma immaginaria $x = \alpha e^{\pi\sqrt{-1}}$ in cui sia $\alpha = 0$. Un tal valore in fatti verifica la $x^2 = 0$ che diventa $\alpha^2 = 0$, e la $e^{\frac{1}{x}} = 0$ che diventa $e^{\frac{1}{\alpha} e^{-\pi\sqrt{-1}}} = e^{-\frac{1}{\alpha}} = 0$. Perciò il modulo più piccolo sarà in ogni caso $\mu = 0$.

Rispetto all' equazione (23) siccome i valori che rendono infinita $\sin y$ ovvero $\cos y$ sono compresi, come si è veduto, nella formola $y = m e^{\rho\sqrt{-1}}$ ove sia $m = \left(\frac{1}{0}\right)$, così il valore $\frac{1}{x} = m e^{\rho\sqrt{-1}}$ annullerà il fattore $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ della (20); ossia il valore che lo annulla sarà $x = \alpha e^{-\rho\sqrt{-1}}$ ove sia $\alpha = 0$. Perciò il modulo più piccolo delle radici tanto della $x^2 = 0$ che della $\operatorname{cosec}\frac{1}{x} = 0$ avrà un valor comune dato da $\mu = 0$. Se si fosse cercato lo sviluppo della funzione (23) non più per le potenze intere e positive di x, ma per le potenze negative, una tale quistione non sarebbe più ripugnante alla forma stessa della funzione proposta, come lo è nel primo caso.

Rispetto alla funzione (27) l'equazione $\frac{1}{\phi'(x)}=0$ si riduce propriamente alla $\frac{\sqrt{2-x^2}}{AB'+A'B}=0$ nella quale è

$$A=+2x\sqrt{(2-x^2)}+(2-3x^2)\sqrt{-1}\;;\quad B=\left\{1-x^2+\sqrt{(x^4-2x^2)}\right\}^{\frac{2}{3}}$$

$$A'=-2x\sqrt{(2-x^2)}-(2-3x^2)\sqrt{-1}\;;\quad B'=\left\{1-x^2-\sqrt{(x^4-2x^2)}\right\}^{\frac{2}{3}}$$

Il valore $x=\pm\sqrt{2}$ che annulla il numeratore rende zero anche il denominatore dell' antecedente equazione il cui primo membro diventa $\frac{0}{0}$ in vece di ridursi a zero. Per conoscere il vero valore di questo indeterminato si ponga la $\phi(x)$ rappresentata dalla funzione (27) eguale ad y, si avrà allora la relazione

$$y^3-3y-2(1-x^2)=0, \qquad (a)$$

la quale differenziata rapporto ad x dà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{3(1-y^2)},\quad \text{e perciò}\quad \frac{1}{\phi'(x)}=\frac{3(1-y^2)}{4x}.$$

Ora per $x=\pm\sqrt{2}$ la (a) si riduce a $y^3-3y+2=0$ da cui si ha $y=1$, dunque il valore dato sopra di $\frac{1}{\phi'(x)}$ per $x=\pm\sqrt{2}$ ed $y=1$ si riduce a zero. Perciò risultando $x=\pm\sqrt{2}$ per radice della $\frac{1}{\phi'(x)}=0$, si è sostituito a questa l'equazione (27), omettendo il fattore che è superfluo nella determinazione del modulo μ che si cerca.

Risulta pertanto che le 28 funzioni date sopra saranno sviluppabili in serie convergenti colla formola di Maclaurin purchè il modulo μ della variabile immaginaria $x=\mu e^{\rho\sqrt{-1}}$

sia inferiore, qualunque siasi ρ, ai rispettivi valori superiormente determinati. Supposto successivamente $\rho = \pi$, $\rho = 0$, ne deriva egualmente che le stesse funzioni saranno sviluppabili in serie convergenti per le potenze intere e positive della variabile reale x, purchè il suo valore sia compreso fra $-\mu$ e $+\mu$. Tutte quelle funzioni alle quali compete il valore $\mu = \left(\frac{1}{0}\right)$ saranno sviluppabili in serie convergente per tutti i valori di x dall'infinito negativo all'infinito positivo. Quelle per le quali è $\mu = 0$ non saranno convergenti per alcun valore di x, e perciò illusorio lo sviluppo stesso. Quelle finalmente alle quali corrisponde per μ un valor finito e determinato $\mu = m$ saranno sviluppabili in serie convergenti soltanto per valori di x compresi fra $-m$ e $+m$. Per valori di x al di là di tali limiti sarà illusorio lo sviluppo stesso ossia incompatibile l'eguaglianza fra la funzione finita $\phi(x)$ ed il proprio sviluppo infinito.

Gli stessi principj sono applicabili allo sviluppo in serie convergente delle funzioni implicite. Di fatto se in luogo di esser data la funzione esplicita $y = \phi(x)$, la cui convergenza dipende come si è detto dalla radice più piccola dell'equazione $\frac{dx}{dy} = 0$, fosse in vece data l'implicita $f(x,y) = 0$: differenziando rapporto ad x ed indicando con f' la derivata di $f(x,y)$ rispetto ad x e con f_1 quella rapporto ad y, si avrà

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_1(x,y)}{f'(x,y)}.$$

Acciò la y espressa in serie per x sia convergente converrà che il modulo di x sia ancora compreso fra i limiti 0, μ, essendo μ il più piccolo dei moduli delle radici dell'equazione tutta in x che nasce dall'eliminazione di y

fra le due equazioni $f(x, y) = 0$, $\frac{dx}{dy} = 0$, ossia fra le due

$$f(x, y) = 0\,; \qquad \frac{f_1(x, y)}{f'(x, y)} = 0.$$

Ne deriva da ciò che se la y in funzione di x sia data, implicitamente dall'equazione $F(y) + f(x) = 0$ in cui $F(y)$ ed $f(x)$ indicano due funzioni intere, la prima rapporto ad y, la seconda rapporto ad x, e si cercano i limiti dei valori di x entro i quali sia convergente la serie che rappresenta la y sviluppata per le potenze ascendenti di x, si dovrà nell'equazione $F'(y) = 0$ cercare il più piccolo valore di y che la soddisfi. Supposto r un tal valore, lo sviluppo di y per le potenze ascendenti di x ottenuto coi noti metodi dalla proposta funzione implicita sarà convergente fintanto che il modulo della variabile reale od immaginaria x rimane inferiore al più piccolo de' moduli che presentano le radici dell' equazione $F(r) + f(x) = 0$. Così in particolare supposto $F(y) = \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2}$,

$$f(x) = -2(1 - x^2), \text{ si avrà } F'(y) = y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2} = 0,$$

da cui risulta $r = \frac{1}{2}$. L'equazione $F(r) + f(x) = 0$ si riduce a $x^2 - \frac{409}{384} = 0$, da cui si cava il valore $\mu = 1{,}032\ldots$ Se fosse $f(x, y) = y - x\varpi(y)$, ove $\varpi(y)$ non contiene la x, la y data dall'equazione $y - x\varpi(y) = 0$ sarà sviluppabile in serie convergente procedente per le potenze intere e positive di x, quando il valore del modulo della variabile reale od immaginaria x sia compreso fra 0, μ, essendo μ il più piccolo de' moduli delle radici dell' equazione nata dall'eliminazione di y fra le due equazioni

$$y - x\,\varpi(y) = 0, \quad (1); \qquad \frac{1 - x\,\varpi'(y)}{\varpi(y)} = 0 \quad (2).$$

Se la $\varpi(y)$ sarà una tale funzione di y che per nessun valore di y diventi infinita, e che inoltre la $\varpi(y)$ non divenga zero per $y = 0$, giacchè il risultato dell' eliminazione di y fra le due (1), (2) deve sussistere per tutti i valori di y, e perciò anche per $y = 0$, nel qual caso il primo membro della (2) diverrebbe o infinito o indeterminato, allora il sistema (1), (2) si ridurrà semplicemente a

$$y - x\,\varpi(y) = 0\,, \qquad 1 - x\,\varpi'(y) = 0.$$

Se in vece si elimina la x, allora converrà dall' equazione in y trovare tutte le radici, e prendere per μ il più piccolo valore dei moduli di x che risulta da ciascuno dei valori trovati di y.

Per farne un' applicazione si supponga nell' equazione di Kepler data al § 28 $a = \frac{\pi}{2}$, $x - \frac{\pi}{2} = y$, $e = x$, essa si riduce a

$$y - x \cos y = 0 \qquad (a).$$

Risultando $\varpi(y) = \cos y$ che non diventa infinita per alcun valore di y, nè diventa zero per $y = 0$, sarà applicabile alla (a) quanto si è sopra stabilito; cioè la y data dall' equazione (a) sarà sviluppabile in serie convergente ordinata per le potenze intere e crescenti di x, purchè il modulo di x sia compreso fra 0, μ, essendo μ il più piccolo dei moduli delle radici dell' equazione risultante dall' eliminazione di y dal sistema

$$y - x \cos y = 0\,, \qquad 1 + x \sin y = 0.$$

Ma siccome non è effettuabile l' eliminazione di y, così si seguirà l' altro processo di eliminare in vece la x e di scegliere que' valori di y che renderanno il modulo di x il più piccolo. Dall' eliminazione risulta

$$y \tang y = -1 , \qquad (1)$$

e siccome sarà

$$x = \frac{y}{\cos y} = \frac{-1}{\sin y} ,$$

si avrà

$$x^2 = \frac{y^2}{\cos^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} = 1 + y^2 \qquad (2).$$

Quella fra le radici della (1) che sarà atta a fornire pel modulo di x il più piccolo valore fra quelli che essa otterrebbe per le altre radici, sarà da impiegarsi nella (2). Una radice qualsivoglia della (1) sia espressa da $y = \eta e^{p\sqrt{-1}}$ ove p può avere uno qualunque dei valori compresi in $-\pi$ e $+\pi$. Posto un tal valore nella (2), essa diverrà

$$x^2 = \sqrt{\left\{1 + 2\eta^2 \cos 2p + \eta^4\right\}}\, e^{q\sqrt{-1}} \qquad (3)$$

ove sarà

$$q = \mathrm{arc}\left\{\tang = \frac{\eta^2 \sin 2p}{1 + \eta^2 \sin 2p}\right\},$$

ossia posto

$$\sqrt{\left\{1 + 2\eta^2 \cos 2p + \eta^4\right\}} = M,$$

sarà

$$x^2 = M\, e^{q\sqrt{-1}}. \qquad (4)$$

La M sempre quantità positiva sarà il modulo di x^2. I valori di p, η che rendono massima o minima la M si hanno coi metodi noti desumendoli dalle equazioni

$$-4\eta^2 \sin 2p = 0 , \qquad 4\eta \cos 2p + 4\eta^3 = 0 ;$$

cioè

$$p = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \pm 1.$$

I valori

$$p = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = 1$$

saranno quelli che rendono la M minima. Si sviluppi la (1) per la potenza di y e si ponga per y il suo valore $\eta e^{p\sqrt{-1}}$, indi avuto riguardo alla formola

$$e^{mp\sqrt{-1}} = \cos mp + \sqrt{-1}\sin mp,$$

i diversi valori η, p che formano le radici della (1) dovranno verificare le due equazioni

$$1 = -\frac{\eta^2}{2}\cos 2p + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\eta^4}{4}\cos 4p - \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\eta^6}{6}\cos 6p + \cdots$$

$$0 = -\frac{\eta^2}{2}\sin 2p + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\eta^4}{4}\sin 4p - \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\eta^6}{6}\sin 6p + \cdots \qquad (5)$$

Suppongansi trovati i valori η, p che verificano le anzidette equazioni, e supponiamo che siano esse verificate anche per valori $p = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \zeta$ e $p = \theta$, $\eta = \xi$. Si avranno dalla 1.ª le tre equazioni

$$1 = \frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\zeta^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\zeta^6}{6} + \cdots \qquad (6)$$

$$1 = -\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\xi^4}{4} - \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\xi^6}{6} + \cdots \qquad (7)$$

$$1 = -\frac{\eta^2}{2}\cos 2p + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\eta^4}{4}\cos 4p - \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\eta^6}{6} + \cdots \qquad (8)$$

Supposto come abbiam detto che ζ sia uno qualunque dei moduli delle radici della forma $\zeta\sqrt{-1}$, i valori di ξ, η atti a soddisfare le (7), (8) dovranno essere necessariamente maggiori di ζ. Di fatto se la serie dei termini della (6) si moltiplica termine per termine, per la serie

$$\cos 2p', \quad \cos 4p', \quad \cos 6p' \ldots.$$

siccome questi hanno valori numerici < 1, così l'equazione che ne risulterebbe e che indicheremo con

$$1 = \frac{\zeta_1^2}{2}\cos 2p' + \frac{1}{2}\cdot\frac{\zeta_1^4}{4}\cos 4p' + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\zeta_1^6}{6}\cos 6p' + \cdots$$

non potrà essere soddisfatta che con valori di ζ_1 più grandi di ζ, ed a più forte ragione l'equazione (8) composta di una serie di termini positivi meno una serie di termini pur positivi non potrà essere soddisfatta che per valori di η più grandi di ζ. Per la stessa ragione l'equazione (7) che non differisce dalla (6) che per aver termini alternativi in luogo di termini tutti positivi non potrà essere soddisfatta che per valori di ξ più grandi di ζ.

Fra le diverse radici della forma $\zeta\sqrt{-1}$ che potrebbero soddisfare la (1) siavene una che presenti un modulo $\zeta > 1$. Si potrà conchiudere che tutte le radici in cui la η sia diversa da $\frac{\pi}{2}$ avranno moduli superiori a ζ. Siccome i valori di η e p che rendono minima la M sono $p = \frac{\pi}{2}$, $\eta = 1$, così se fra tutte le radici della forma $\zeta\sqrt{-1}$ si sceglierà quella il cui modulo è il più prossimo all'unità, sia esso $>$ ov. $<$ di 1, una tal radice sarà quella che darà per M il modulo più piccolo fra tutti i moduli che risulterebbero da tutte le altre radici. La condizione pertanto che deve avverarsi sulle radici della (1) per poterne desumere il valor di quella radice della forma $\zeta\sqrt{-1}$ che avrà un modulo il più prossimo all'unità, è che fra le radici di detta forma se ne trovi una almeno che presenti un modulo $\zeta > 1$.

Per vedere se una tale condizione esiste nell'equazione (1) si ponga in essa $y = \zeta\sqrt{-1}$, essa si trasforma nella

$$2\zeta = l(\zeta + 1) - l(\zeta - 1). \qquad (9)$$

Converrà dunque cercare fra le radici reali di questa se avvene una che sia > 1. Ciò supposto avverato, cercare se avvi altra radice reale che sia la più prossima all'unità comunque fosse essa $>$ ovvero < 1. Se un tal valore sarà $= \alpha$, si avrà $y = \pm\alpha\sqrt{-1}$, giacchè se nella (1) esiste una radice $a + b\sqrt{-1}$, esiste anche l'altra $a - b\sqrt{-1}$, e la (2) darà

$$x^2 = 1 + (\alpha\sqrt{-1})^2 = 1 - \alpha^2;$$

se sarà inoltre $\alpha > 1$, si avrà

$$x^2 = -(\alpha^2 - 1), \qquad x = \sqrt{\alpha^2 - 1}\cdot\sqrt{-1},$$

e in tal caso il modulo μ della x sarà dato da $\mu = \sqrt{\alpha^2 - 1}$.

Applicando alla (9) ossia alla

$$y = l(\zeta - 1) - l(\zeta + 1) + 2\zeta = 0$$

i processi descritti per la separazione delle radici e la determinazione numerica del valore approssimato di una radice reale che quì per brevità ometto, si troverebbe che per tutti i valori di ζ compresi fra $-\left(\frac{1}{0}\right)$ e zero, e fra zero ed uno, divenendo immaginario il corrispondente valore di y, non sono da cercarsi radici entro i suddetti intervalli. Ma che fra i limiti 1 e 2, anzi fra limiti più ristretti 1 ed 1,2 esiste una radice che è in pari tempo la più prossima all'unità. La determinazione di tal radice coi metodi d'approssimazione descritti somministra $\alpha = 1,199678\ldots$ Si ha quindi $\mu = \sqrt{\alpha^2 - 1} = 0,662742\ldots$ Risulta pertanto che la più piccola radice dell'equazione $y - x \cos y = 0$ sarà sviluppabile in serie convergente ordinata per le potenze ascendenti di x, purchè il modulo della variabile reale od immaginaria x non oltrepassi il numero $0,662742\ldots$ È questo il risultato a cui il sig. La Place è giunto in una memoria sulla convergenza della serie che fornisce lo sviluppo del raggio vettore di un pianeta secondo le potenze ascendenti dell'eccentricità e che fu in appresso confermato dal sig. Cauchy in una nota inserita nei *Comptes rendus* del 20 aprile dell'anno 1840. Se pertanto il valore dell'eccentricità eccede il limite sopra stabilito, la radice in quistione non è più determinabile col mezzo dello sviluppo in serie; laddove il metodo seguito nel § 28 presenta il vantaggio di non esser soggetto ad alcuna restrizione sul valore dell'eccentricità stessa. Esso fornisce in ogni caso il valore della radice entro quel grado d'approssimazione che si desidera.

30. Il metodo d'approssimazione per le tangenti successive non ammette soltanto l'approssimazione lineare quale fu esposta nei paragrafi 27 e 28, giacchè se nello sviluppo della $\phi(y + \omega_1) = 0$ dato al § 27 si ritengono le potenze di ω_1 superiori alla prima, si avranno formole che daranno approssimazioni di ordine superiore che furono ampiamente discusse dal signor Fourier nel libro secondo della sua opera sulle equazioni determinate. Ma il processo seguito nel citato paragrafo rispetto al metodo dell'approssimazione per le corde ossia per la determinazione della formola da cui dipende la *regula falsi* mostra manifestamente che ritenendo le potenze superiori dell'aumento ed eliminando col mezzo di un opportuno numero

d' ipotesi le derivate che non debbon far parte della formola finale, si ottengono, parimente in questo caso, formole atte all' approssimazione d' ordine superiore analoghe a quelle del metodo delle tangenti. Senza entrare nello sviluppo di tale processo mi limito solo a mostrare come nel caso più generale in cui si vogliono far concorrere molte ipotesi alla determinazione del valore approssimato di ordine superiore alla prima, la quistione si trova allora intimamente connessa col noto metodo d' interpolazione. Si vede allora discendere da questo la formola stessa dell' approssimazione lineare per le corde come caso particolare; anzi il metodo d' approssimazione sia lineare, sia d' ordine superiore delle tangenti successive, è esso stesso un caso particolare del metodo d' interpolazione, al quale si riduce quando si supponga che le differenze delle ipotesi diventino infinitamente piccole, giacchè sappiamo che in tal caso la formola d' interpolazione si cambia in quella dello sviluppo di Taylor. Discende inoltre da questo stesso metodo un' altra specie d' approssimazione di qualsivoglia ordine che può chiamarsi, analogamente alle precedenti, *l' approssimazione per logaritmi*, come si vedrà quì appresso.

Essendo dati due valori $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ corrispondenti a due noti argomenti α, β, se si cerca il valore della funzione $\varphi(x)$ corrispondente ad $\alpha + i$, esso sarà dato dall' espressione

$$\varphi(\alpha) + \frac{i}{\beta - \alpha} \Delta \varphi(\alpha) + \frac{i(i - \beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)^2} \Delta^2 \varphi(\alpha) + \dots$$

Se si cerca in vece il valore dell' argomento che rende zero l' espressione stessa, vale a dire se si cerca la radice della $\varphi(x) = 0$, si dovrà cercare il valore di i che soddisfa una tal equazione. Ma la determinazione completa della i esige la conoscenza di tutte le differenze

$$\Delta \varphi(\alpha), \quad \Delta^2 \varphi(\alpha), \quad \Delta^3 \varphi(\alpha) \dots$$

ossia dei valori delle

$$\phi(\alpha)\,,\quad \phi(\beta)\,,\quad \phi(\gamma)\,,\quad \phi(\delta)\,,\quad \phi(\varepsilon)\ldots$$

corrispondenti alle ipotesi α, β, γ, δ, ε.... la serie delle quali formi una progressione aritmetica, ciò che è sempre in nostro arbitrio di ottenere. Se saranno noti i due soli valori $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$, dovuti alle due ipotesi α, β, ritenuti nella precedente serie i soli due primi termini, e posto $\beta-\alpha=\Delta\alpha$, si avrà per determinare la i l'equazione $\phi(\alpha)+\frac{i}{\Delta\alpha}\Delta\phi(\alpha)=0$, e si avrà per valore approssimato della radice che si cerca l'espressione

$$\alpha-\phi(\alpha)\frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi(\alpha)}\,,$$

come si è già trovato nel § 27 per l'approssimazione lineare per le corde. Fatta infinitamente piccola la differenza delle due ipotesi, essa diventa quella delle tangenti successive

$$\alpha-\phi(\alpha)\frac{d\alpha}{d\phi(\alpha)}=\alpha-\frac{\phi(\alpha)}{\phi'(\alpha)}.$$

Ma se alle ipotesi α, β, γ la cui differenza seconda sia zero corrispondono i valori noti $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$, $\phi(\gamma)$, si avrà per determinare la i l'espressione

$$\phi(\alpha)+\left(\frac{2\Delta\phi(\alpha)-\Delta^2\phi(\alpha)}{2\Delta\alpha}\right)i+\frac{\Delta^2\phi(\alpha)}{2\Delta\alpha^2}i^2=0$$

ossia la

$$\phi(\alpha)+\frac{4\phi(\beta)-3\phi(\alpha)-\phi(\gamma)}{2\Delta\alpha}i+\frac{\phi(\alpha)-2\phi(\beta)+\phi(\gamma)}{2\Delta\alpha^2}i^2=0$$

ed il valore $\alpha+i$ darà per la radice cercata un'approssimazione di secondo ordine. Lo stesso dicasi per gli ordini superiori. Ma se le ipotesi fatte non fossero in progressione aritmetica, allora alla precedente formola, che vale soltanto per intervalli eguali, si dovrà sostituire la formola generale d' interpolazione data da Lagrange, e si giungerà in ogni caso alla determinazione di valori approssimati di ordini superiori.

Dietro gli stessi principj se venga data l'equazione $\phi(X, z) = 0$ e sia ω un valore di X che prossimamente la soddisfi, sostituito $\omega + x$ alla X, si avrà per determinare la x l' equazione

$$\phi(\omega + x, z) = 0 \qquad (a).$$

Sia y_x una tale funzione di x che soddisfi la

$$\phi(\omega, z) + y_x = 0 \qquad (b).$$

Riguardando x come un aumento variabile della ω, si avrà sottraendo (b) dalla (a) la relazione

$$\phi(\omega + x, z) - \phi(\omega, z) = y_x,$$

ossia

$$y_x = \Delta_x \phi(\omega, z).$$

Si consideri la funzione logaritmica della $\phi(\omega, z) + y_x$ espressa da $l\big(\phi(\omega, z) + y_x\big)$. Si formi la serie di logaritmi che risulta da questa col supporre successivamente

$$y_x = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots .$$

Pongasi

$$l\big(\phi(\omega; z) + 1\big) - l\phi(\omega, z) = \Delta \qquad \Delta_1 - \Delta = \Delta^2$$
$$l\big(\phi(\omega, z) + 2\big) - l\big(\phi(\omega, z) + 1\big) = \Delta_1 \qquad \Delta_2 - \Delta_1 = \Delta_1^2$$
$$l\big(\phi(\omega, z) + 3\big) - l\big(\phi(\omega, z) + 2\big) = \Delta_2 \qquad \ldots\ldots$$

. . . .

Si avrà dalla sopraccitata formola d' interpolazione

$$l\left(\phi(\omega, z) + y_x\right) = l\,\phi(\omega, z) + y_x\,\Delta + \frac{y_x(y_x - 1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots.$$

e per essere

$$l\left(\phi(\omega, z) + y_x\right) - l\,\phi(\omega, z) = l\left(\phi(\omega, z) + \Delta_x\,\phi(\omega, z)\right) - l\,\phi(\omega, z)$$

$$= \Delta_x\, l\,\phi(\omega, z)$$

ne risulta dalla precedente

$$\Delta_x\, l\,\phi(\omega, z) = y_x\,\Delta + \frac{y_x(y_x - 1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots. \qquad (c).$$

Si formi ora la serie de' logaritmi che nasce dalla $l\,\phi(\omega + x, z)$ col supporre successivamente

$$x = 0\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \quad 3\,, \quad 4\,\ldots\ldots$$

e pongasi

$$l\,\phi(\omega+1, z) - l\,\phi(\omega, z) = \delta$$

$$\delta_1 - \delta = \delta^2$$

$$l\,\phi(\omega+2, z) - l\,\phi(\omega+1, z) = \delta_1 \qquad \delta_1^2 - \delta^2 = \delta^3 \ldots.$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta_1^2$$

$$l\,\phi(\omega+3, z) - l\,\phi(\omega+2, z) = \delta_2$$

. . . .

La stessa formola d' interpolazione darà parimente

$$l\,\phi(\omega + x, z) = l\,\phi(\omega, z) + x\delta + \frac{x(x-1)}{1.2}\delta^2 + \ldots.$$

ossia, per essere $l\,\phi(\omega + x, z) - l\,\phi(\omega, z) = \Delta_x\, l\,\phi(\omega, z)$,

$$\Delta_x\, l\,\phi(\omega, z) = x\delta + \frac{x(x-1)}{1.2}\delta^2 + \ldots. \qquad (d).$$

Dal confronto delle equazioni (c), (d) risulta

$$x\delta + \frac{x(x-1)}{1.2..}\delta^2 + ... = y_x\Delta + \frac{y_x(y_x-1)}{1.2}\Delta^2 + ... \quad (e).$$

Determinata con questa la y_x in funzione di x e posta nella (b), si avrà un'equazione tutta in x; dalla determinazione della quale risulterà noto il valore $\omega + x$ che deve verificare la proposta (a).

Se per un caso speciale vogliamo ommettere le differenze superiori alla prima, si ha dalla (e)

$$y_x = \frac{\delta}{\Delta}x \quad \text{e dalla } (b) \quad x = -\frac{\Delta}{\delta}\phi(\omega, z),$$

onde il valore dipendente dall'approssimazione lineare che adempie la (a) più prossimamente che la ω sarà dato da $\omega - \frac{\Delta}{\delta}\phi(\omega, z)$. La continua applicazione di una tal regola fornirebbe valori di X di più in più approssimati. Si vede inoltre di quì come abbiasi a procedere quando vogliasi un'approssimazione di un ordine superiore alla prima.

Suppongasi ora che l'equazione data $\phi(X, z) = 0$ sia della forma $X - z - F(X) = 0$, essendo F una funzione qualunque di X e di costanti. Posto ancora $X = \omega + x$, si avrà

$$\omega + x - z - F(\omega + x) = 0, \quad \omega + x - z - \left(F(\omega) + y_x\right) = 0,$$

sottratta la prima dalla seconda, si ha pure $y_x = \Delta_x F(\omega)$. Posto pertanto come sopra

$$\begin{aligned} l\left(F(\omega)+1\right) - lF(\omega) &= \Delta \\ l\left(F(\omega)+2\right) - l\left(F(\omega)+1\right) &= \Delta_1 \end{aligned} \qquad \Delta_1 - \Delta = \Delta^2 \; ....$$

. . . .

ed inoltre

$$\left.\begin{aligned} l\,F(\omega+1) - l\,F(\omega) &= \delta \\ l\,F(\omega+2) - l\,F(\omega+1) &= \delta_1 \end{aligned}\right\} \quad \delta_1 - \delta = \delta^2 \;\ldots\ldots$$

risulterà parimente

$$y_x = \frac{x\delta}{\Delta}, \qquad (f)$$

ed il valore di x risulterà qui

$$x = \frac{\Delta}{\Delta - \delta}\left(z - \omega + F(\omega)\right).$$

In particolare se supponiamo $F(X) = e'' \sin X$, rappresentando la e'' un certo numero di secondi di arco, la proposta si riduce a

$$X - z - e'' \sin X = 0$$

che è l'equazione di Kepler già trattata, in cui la z è l'anomalia media, la X l'anomalia eccentrica ed e'' l'eccentricità espressa in secondi. Risulterà

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= l(e'' \sin \omega + 1) - l(e'' \sin \omega) \\ \Delta_1 &= l(e'' \sin \omega + 2) - l(e'' \sin \omega + 1) \end{aligned}\right\} \quad \Delta^2 = \Delta_1 - \Delta$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

indi osservando che la e'' scompare, sarà

$$\left.\begin{aligned} \delta &= l \sin(\omega + 1) - l \sin \omega \\ \delta_1 &= l \sin(\omega + 2) - l \sin(\omega + 1) \end{aligned}\right\} \quad \delta^2 = \delta_1 - \delta \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se si limita la ricerca alla semplice approssimazione lineare, risulterà pel valore cercato di x

$$x = \frac{\Delta}{\Delta - \delta} (z - w + e'' \sin w).$$

Questa contiene la regola data dal sig. Gauss al § 11 dell'opera *Theoria motus corporum cœlestium*, onde ottenere la correzione da applicarsi ad un valore ω che già prossimamente soddisfi all'equazione di Kepler, avvertendo che le Δ, δ stanno quì in luogo di μ, λ impiegate dal citato autore. La continua applicazione della data formola a nuovi valori approssimati darà il cercato valore come negli altri metodi fu praticato, ed in questo pure si potrà come in quelli ottenere un'approssimazione di ordine superiore in quanto un tal metodo è generale e non si limita all'approssimazione lineare se non per impiegare formole più comode al calcolo. Da quanto si è esposto risulta che tutti gli accennati metodi d'approssimazione hanno per comun fondamento lo stesso sistema generale d'interpolazione.

OSSERVAZIONI

DELLA PRIMA COMETA DELL'ANNO 1844

FATTE

AL SETTORE EQUATORIALE

DI CINQUE PIEDI DI RAGGIO

DA

FRANCESCO CARLINI.

Questa cometa fu scoperta all'osservatorio di Parigi dal signor Mauvais nella notte del 7 luglio, e due giorni dopo è stata veduta all'osservatorio di Berlino. Sull'indicazione data dai giornali francesi l'ho quì ritrovata il dì 16 dello stesso mese, e l'ho seguita fino al dì 8 settembre, dopo la qual epoca non fu più visibile, tramontando assai prima del termine del crepuscolo. La posizione esatta delle piccole stelle di confronto da me adoperate non si potrà stabilire per mezzo di osservazioni fatte nel meridiano se non nel prossimo inverno; ho perciò creduto conveniente di pubblicar ora le sole osservazioni originali della cometa, riserbando ad altro tempo la loro riduzione.

La luce del nuovo astro era troppo debole per sostenere l'illuminazione dei fili del micrometro, e si è dovuto determinarne la posizione notando la sua immersione ed emersione, e quella delle stelle di confronto dietro due laminette d'ottone poste nel fuoco del cannocchiale. Nella seguente tabella si è scritto, sotto il titolo di *passaggio pel mezzo*, il medio dei quattro appulsi. La posizione del settore è stabilita in modo che il grado dieci corrisponde prossimamente all'indice del circolo delle distanze polari.

Gior. 1844.	Stelle di confronto.	Passaggio pel mezzo Stella.	Passaggio pel mezzo Cometa.	Divisione del settore. Stella.	Divisione del settore. Cometa.	Equatore.	Circolo di distanza al polo.
		h ′ ″	h ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′	
Luglio 16	ν Boote	18 13 25,0	18 25 51,25	10 42 0	10 34 22	2 47	48°
17	»	18 13 17,5	18 20 35,0	10 40 30	11 13 30	»	»
20	ν Corona	18 30 27,6	18 18 48,0	12 39 40	13 29 33	3 0	»
21	μ Boote	18 20 35,0	18 15 17,0	14 8 29	14 4 10	»	»
22	»	18 20 43,25	18 10 59,25	14 8 15	14 48 0	»	»
23	»	18 20 32,75	18 6 30,5	14 8 0	15 32 28	»	»
24	δ Boote	18 19 16,0	18 10 27,75	16 8 58	14 17 30	3 10	50
25	»	18 24 12,4	18 11 26,5	6 7 45	5 2 8	3 15	60
26	»	18 30 21,4	18 13 37,5	6 7 57	5 48 30	3 20	»
27	σ Boote	17 48 52,1	18 9 44,0	9 36 28	6 34 30	»	»
27	δ Boote	18 50 39,0	18 30 9,25	6 7 50	6 36 0	3 40	»
28	σ Boote	18 9 44,25	18 26 56,5	9 36 58	7 23 30	»	»
30	»	18 9 37,5	18 20 1,25	9 36 40	8 56 50	»	»
Agosto 2	ε Boote	19 27 51,25	19 18 28,25	12 19 0	11 21 38	4 50	»
3	»	19 24 10,75	19 11 52,0	12 21 7	12 10 5	4 45	»
5	»	19 3 51,25	18 46 11,5	12 20 28	13 42 10	4 25	»
8	26 Boote	18 50 11,0	18 37 44,0	17 6 52	15 59 47	4 25	»
9	»	18 54 47,5	18 40 0,75	17 6 40	16 44 58	4 30	»
14	η Boote	18 46 19,0	18 59 14,75	10 55 3	10 30 10	5 0	70
16	»	17 51 56,5	18 1 13,0	10 54 20	11 53 58	4 5	»
17	»	17 41 24,9	17 48 57,75	10 54 15	12 35 55	3 55	»
19	14 Boote	18 51 8,25	18 35 57,5	16 23 54	14 0 35	4 45	»
27	15 Boote	18 46 18,0	18 18 58,0	9 10 15	9 12 15	4 40	80
28	»	18 46 17,1	18 17 42,5	9 10 9	9 49 56	»	»
30	»	18 56 17,25	18 25 15,9	9 10 3	11 4 10	4 50	»
31	64 Vergine	18 8 32,0	18 29 15,1	14 1 45	11 40 38	4 55	»
Settem. 1	»	18 7 56,5	18 27 29,2	14 1 50	12 16 54	»	»
2	»	18 7 35,5	18 26 0,75	14 1 52	12 53 3	»	»
8	»	18 42 17,6	18 54 28,6	4 4 0	6 22 20	5 30	90

Giorni. 1844.	Correz. del pendolo.	Giorni. 1844.	Correz. del pendolo.
	′ ″		′ ″
Luglio 16	— 0 48,0	Agosto 8	+ 0 36,0
17	— 0 45,1	9	+ 0 37,1
...	....	...	....
20	+ 0 1,9	14	+ 1 12,6
21	+ 0 3,3	16	+ 1 15,3
22	+ 0 4,9	17	+ 1 16,8
23	+ 0 5,8	19	+ 1 16,9
24	+ 0 7,5	21	+ 1 19,4
25	+ 0 9,4	23	+ 1 22,8
27	+ 0 13,7	26	+ 1 27,5
30	+ 0 16,1	28	+ 1 32,7
Agosto 1	+ 0 25,5	30	+ 1 33,8
2	+ 0 26,3	31	+ 1 34,5
3	+ 0 29,4	Settembre 2	+ 1 38,1
5	+ 0 30,9	...	......
6	+ 0 32,7	6	+ 2 5,9
7	+ 0 34,6	7	+ 2 6,8
		9	+ 2 8,0

Sulla prima osservazione fatta a Parigi il dì 7 luglio e sulle mie proprie del 17 e del 27 ho fondato il calcolo degli elementi parabolici che quì si riferiscono.

Passaggio pel perielio 17 ottobre $4^h\ 47'\ 26''$ tempo medio contato da mezzodì a Milano.

Longitudine del perielio	$179^\circ\ 52'\ 46''$
Longitudine del nodo	32 0 26
Inclinazione all' eclittica	48 42 45
Distanza perielia	0,84412, movimento retrogrado.

Le tre posizioni fondamentali sopraccennate sono:

Giorni.	Tempo medio a Milano.	Longitudine.	Latitudine.
Luglio 7	$13^h\ 28'\ 25''$	$228^\circ\ 26'\ 23''$	$66^\circ\ 29'\ 11''$ B
17	10 36 35	213 4 6	57 18 11
27	9 57 35	205 29 13	46 46 34

Dagli elementi trovati risulta (come annunciai già nella gazzetta di Milano del dì 20 agosto p.° p.°) che la cometa dopo il passaggio pel perielio si renderà di nuovo visibile nell' emisfero australe. Sul principio del nuovo anno ritornerà bensì nel nostro emisfero, ma la sua distanza dal Sole e dalla Terra ne renderà per noi la luce assai debole.

Questi elementi calcolati per una prima approssimazione non differiscono notabilmente da quelli stabiliti dal sig. Mauvais e dal sig. Plantamour, il primo sulle osservazioni del 9, 15, 21 luglio, il secondo su quelle dell' 8 e 21 luglio e 5 agosto, preventivamente corrette dall'aberrazione e dalla parallasse. Si ha in fatti

	Secondo Mauvais.	Secondo Plantamour.
Passaggio pel perielio 1844 ottobre	17,316106	17,29040
	tempo medio	a Parigi.
Longitudine del perielio . .	180 21 23,7	180 15 46,0
Longitudine del nodo . . .	31 40 38,5	31 43 2,5
Inclinazione	48 36 40,0	48 37 33,5
Distanza perielia	0,8543846	0,8526526

Riportiamo qui l' Effemeride della cometa calcolata dal secondo dei sunnominati astronomi, la quale si estende dal primo ottobre a tutto il corrente anno.

Tempo medio a Parigi.	Asc. retta.	Declin.	Distan. della cometa dal Sole.	dalla Terra
h	° ′ ″			
1 Ottob. 9	196 15 25	8 37 14A	0,9023	1,8726
11	193 51 55	13 47 0	0,8597	1,8396
21	191 14 4	19 11 51	0,8560	1,7572
31	188 12 16	25 11 30	0,8918	1,6295
10 Novem.	184 22 47	32 13 34	0,9613	1,4693
20	178 41 53	40 52 52	1,0556	1,2960
30	168 18 22	51 31 41	1,1664	1,1364
10 Dicem.	144 56 51	62 30 56	1,2875	1,0260
20	100 12 16	65 19 34	1,4145	1,0029
30	67 1 22	55 27 45	1,5446	1,0859

Estratto delle osservazioni meteorologiche fatte alla nuova torre astronomica dell'I. R. Osservatorio di Brera all'altezza di tese 13,62 (metri 26,54) sull'orto botanico, e di tese 75,48 (metri 147,11) sul livello del mare.

GENNAJO 1840.

Gior.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R.								Direzione del vento.			
	5^h m		8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	5^h m	11^h m	5^h s	11^h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	9,9	10,1	10,1	9,6	9,7	9,8	9,8	E	S E	E S E	E N E
2	27	9,0	9,3	9,4	9,0	9,1	9,4	9,6	N O	E N E	S E	E
3	27	10,0	10,4	10,5	10,1	10,0	9,8	9,6	E	E	O S O	O
4	27	8,9	8,9	8,7	8,2	8,1	7,8	7,2	O	O	O N O	N O
5	27	6,1	5,9	5,6	4,9	4,8	5,0	5,0	N	O N O	N O	N
6	27	4,9	5,3	5,5	5,2	5,3	5,4	5,9	N	N O	N N E	E
7	27	6,9	8,2	9,0	9,2	9,5	10,2	10,3	N	S E[1]	E S E	N E
8	27	10,1	10,3	10,3	9,8	9,9	10,2	10,3	E	S E	O	E
9	27	10,3	10,6	10,9	10,7	10,8	11,2	11,4	E N E	E	N	N E
10	28	0,0	0,6	1,3	1,2	1,5	2,2	2,4	E S E	N	S O	N N O
11	28	2,4	2,4	2,4	1,9	2,1	2,4	2,4	N	N	N O	N O
12	28	2,1	2,5	2,6	1,8	1,8	1,9	1,9	N E	O	N N O	N
13	28	1,4	1,8	2,0	1,3	1,3	1,5	1,5	N O	N O	N	N O
14	28	0,7	0,8	0,8	0,1	0,0	0,2	0,4	N O	N O	O	N
15	28	0,2	0,5	0,8	0,4	0,5	0,4	0,4	N O	O	O	O N O
16	27	11,4	11,2	10,9	9,8	9,6	9,4	9,3	N O	N O	S O	N
17	27	8,8	8,9	8,8	7,9	7,8	7,9	8,0	N O	N	S O	N
18	27	8,2	9,0	9,8	9,9	10,6	11,3	11,5	N O	N O	O	N N E
19	27	11,5	11,6	11,8	11,3	11,2	11,2	10,7	S O	N O	O	N N E
20	27	9,7	9,4	9,6	9,5	10,0	10,3	10,2	O S O	N	N O	N E
21	27	9,9	10,2	10,3	9,7	9,3	9,2	8,8	N E	S E	O N O	N
22	27	8,9	9,7	10,1	9,3	8,9	7,7	8,2	O	O	N	N N E
23	27	8,9	9,5	9,8	9,3	9,6	9,9	10,5	E	O N O	N O	S[2]
24	27	10,6	10,9	11,0	10,3	10,3	10,1	9,8	E	S E	S E	E
25	27	7,6	6,7	5,9	5,5	6,1	6,6	7,2	E S E	E	O	O
26	27	8,2	9,1	9,1	8,2	8,0	7,8	7,5	N N O	E	O	N N E
27	27	5,5	5,6	5,9	5,6	5,6	5,9	6,3	N E	N O	N O	N O
28	27	8,6	9,2	9,7	9,1	9,0	8,6	8,2	O	O	O N O	N
29	27	7,7	7,4	7,4	6,7	6,7	7,2	7,8	N N E	N	O	E
30	27	8,6	8,9	9,5	9,1	9,5	9,7	9,9	E	S	O	E
31	27	10,1	10,3	10,4	9,8	9,5	8,9	8,6	E N E	E N E	E N E	N E

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 2,61
» minima............... » 27 » 4,80
» media................ » 27 » 9,7227.

Le ore sono in tempo vero civile; le lettere m ed s indicano rispettivamente le ore della mattina od antimeridiane e quelle della sera o pomeridiane.

GENNAJO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R.							Stato del cielo	
	5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	− 0,3	0,0	+ 0,7	+ 3,1	+ 1,8	+ 1,2	+ 0,5	Sereno.	Ser. nebbioso.
2	− 0,1	− 0,5	+ 0,3	+ 2,9	+ 1,9	+ 0,2	− 0,6	Ser. nebb.	Nebbia.
3	− 0,8	+ 1,0	+ 2,8	+ 3,6	+ 2,5	+ 1,7	+ 1,7	Nuvolo.	Nuv. nebb.
4	+ 1,7	+ 1,0	+ 3,3	+ 3,9	+ 3,1	+ 3,1	+ 2,9	Nuvolo.	Nuv. piogg.
5	+ 2,4	+ 2,6	+ 3,3	+ 3,9	+ 3,4	+ 3,3	+ 2,9	Pioggia.	Nuvolo.
6	+ 2,7	+ 2,7	+ 3,1	+ 3,2	+ 1,9	+ 2,1	+ 2,0	Nuvolo.	Nuvolo.
7	+ 1,0	+ 2,6	+ 2,5	+ 2,4	+ 0,6	− 0,6	− 1,5	Nuv. ser.	Sereno.
8	− 3,1	− 2,9	− 0,8	+ 0,5	− 0,5	− 1,3	− 2,5	Sereno.	Sereno.
9	− 3,8	− 3,4	− 0,7	+ 0,5	− 0,4	− 1,7	− 1,8	Sereno.	Ser. nuv.
10	− 1,4	− 1,1	0,0	+ 0,8	+ 0,1	− 0,9	− 1,4	Ser. nuv.	Nuvolo.
11	− 2,9	− 2,8	− 1,1	+ 0,5	− 1,9	− 3,4	− 3,6	Nuv. nebb.	Ser. nuv. neb.
12	− 4,2	− 4,8	− 3,4	− 3,0	− 3,9	− 4,3	− 4,7	Nuvolo.	Nuv. nebbioso.
13	− 4,7	− 5,0	− 4,1	− 2,8	− 3,4	− 4,0	− 4,4	Nuv. nebb.	Nuv. nebb.
14	− 5,7	− 5,7	− 2,4	+ 0,9	0,0	− 1,6	− 1,9	Ser. nuv. neb.	Sereno.
15	− 2,6	− 3,2	0,0	+ 2,8	+ 1,3	0,0	− 0,1	Sereno.	Sereno.
16	− 2,7	− 2,4	+ 1,3	+ 4,4	+ 3,3	+ 1,1	+ 0,9	Sereno.	Sereno.
17	− 1,7	− 1,4	+ 1,7	+ 2,2	+ 1,4	+ 0,5	+ 0,3	Sereno.	Nuv. piogg.
18	− 0,5	− 1,6	+ 1,2	+ 4,6	+ 3,5	+ 1,4	− 0,1	Nuv. ser.	Ser. nebb.
19	− 1,0	− 0,4	+ 0,9	+ 2,2	+ 2,3	+ 2,0	+ 2,0	Nuv. ser.	Nuv. nebb.
20	+ 2,0	+ 1,7	+ 0,5	+ 3,8	+ 3,5	+ 1,5	0,0	Nuvolo.	Nuv. ser. neb.
21	− 0,1	0,0	+ 2,0	+ 3,1	+ 2,7	+ 1,9	+ 1,2	Ser. nebbioso.	Nuvolo.
22	− 0,1	+ 1,0	+ 6,1	+10,0	+ 8,2	+ 6,9	+ 3,4	Nuv. neb. ser.	Sereno.
23	− 1,4	0,0	+ 5,4	+10,5	+ 8,6	+ 5,4	+ 2,7	Sereno.	Sereno.
24	+ 0,6	− 0,4	+ 2,1	+ 5,4	+ 2,4	+ 1,9	+ 1,5	Ser. nuv. neb.	Nebbioso.
25	+ 1,9	+ 1,9	+ 2,6	+ 3,3	+ 2,3	+ 1,8	+ 1,1	Pioggia.	Piogg. ser.
26	+ 0,6	+ 0,2	+ 3,5	+ 6,5	+ 4,4	+ 3,2	+ 1,3	Sereno.	Sereno.
27	+ 1,3	+ 1,9	+ 4,6	+ 6,7	+ 5,2	+ 3,8	+ 3,2	Nuv. piogg.	Sereno.
28	+ 2,0	+ 2,2	+ 5,8	+ 7,8	+ 7,0	+ 4,2	+ 2,6	Sereno.	Sereno.
29	+ 0,9	+ 2,0	+ 4,2	+ 7,2	+ 6,0	+ 4,0	+ 2,4	Ser. nuv.	Sereno.
30	+ 0,8	+ 1,0	+ 5,0	+ 7,0	+ 4,8	+ 3,6	+ 2,2	Sereno.	Sereno.
31	+ 1,9	+ 1,9	+ 3,5	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,6	+ 3,5	Ser. piog. nuv.	Nuv. piogg.

Altezza massima del termometro + 10°,52 Temp.ª massima + 11°,2
" minima................ − 5,74 " minima − 6,2
" media................ + 1,1244.

Quantità della pioggia linee 13,07.

FEBBRAJO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5h m		8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Direzione del vento. 5h m	11h m	5h s	12h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	7,7	7,8	8,1	8,0	7,8	8,0	7,9	N O	O	S	E
2	27	8,0	8,3	8,5	8,1	8,3	8,4	8,2	S E	N E	E(1)	E N E
3	27	6,5	6,0	5,5	4,3	4,0	3,6	3,7	E	E S E	O S O	N(2)
4	26	15,2	15,2	14,6	13,5	13,0	12,0	11,9	S E	E	E S E(1)	E S E
5	26	11,5	11,8	12,2	12,4	13,1	13,9	13,4	S E(1)	N	S E	N E
6	27	3,4	4,2	5,2	5,4	6,0	6,7	7,2	N O	O	O S O	S E
7	27	7,4	7,9	8,1	8,1	8,2	8,4	8,2	N E	O	S E	E
8	27	7,2	7,0	6,5	5,8	5,9	6,6	6,7	N E	N E	S O	E S E
9	27	7,4	7,7	8,1	7,8	8,2	8,7	9,0	E S E	S E	O	N E
10	27	9,9	10,4	10,9	10,5	10,6	11,0	11,2	N	O	O S O	N E
11	27	11,0	11,2	11,2	11,1	11,5	11,6	11,7	E N E	E	N	N N E
12	27	11,7	11,8	11,9	11,3	11,0	11,1	11,1	N	O S O	O S O	N N E
13	27	10,5	10,4	10,3	9,6	9,5	9,3	9,3	N	O	O S O	N N E
14	27	8,8	8,8	8,9	8,2	7,9	8,3	8,5	N E	N O	O N O	E N E
15	27	8,4	8,6	8,8	8,4	8,5	8,6	8,7	E S E	E S E	S E	E S E
16	27	8,4	8,7	8,9	8,6	8,7	8,9	9,0	E N E	N E	N	N E
17	27	8,8	8,8	8,7	8,0	7,4	7,4	6,9	O	S O	O S O	N
18	27	6,1	6,2	6,1	5,3	5,9	6,6	6,8	N O	N O	S E	E
19	27	6,8	7,3	7,6	7,5	7,7	8,3	8,5	E S E(1)	S E(2)	E S E	E(1)
20	27	9,0	9,1	9,6	9,5	9,5	9,9	10,0	E	S S E	E S E	S E
21	27	9,5	10,0	9,9	9,7	9,5	9,8	9,8	S E	S	N O	N
22	27	9,6	9,7	10,1	9,8	9,9	10,4	10,6	S O	S E	S	E
23	27	10,8	11,4	12,0	11,9	11,9	12,8	13,4	S E	S E	E	S E
24	28	1,5	1,8	2,0	1,6	1,6	2,2	2,5	S E	S E	N O	N N E
25	28	2,4	2,4	2,6	2,2	1,7	2,2	2,4	O N O	O S O	N O	E
26	28	2,3	2,3	2,1	1,6	1,1	1,2	1,2	E	S E	S E	E
27	27	12,7	12,8	12,2	11,1	10,8	11,1	11,1	N E	N O	S O	O
28	27	10,9	11,1	11,0	10,3	10,0	10,3	10,3	E	S S O	O N O	N E
29	27	10,1	10,2	10,3	10,1	9,8	10,4	10,9	E S E	S E	S	E S E(1)

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 2,58
» minima.............. » 26 » 11,53
» media.............. » 27 » 8,8810.

FEBBRAJO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5ʰ m	8ʰ m	11ʰ m	2ʰ s	5ʰ s	8ʰ s	11ʰ s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+ 3,2	+ 3,6	+ 4,8	+ 4,9	+ 4,9	+ 4,9	+ 4,4	Pioggia.	Piogg. nuv.
2	3,2	2,9	4,4	5,3	4,5	4,5	4,4	Nuv. nebb.	Nuvolo.
3	4,5	5,5	5,8	8,1	7,0	6,2	6,1	Nuvolo.	Nuv. piogg.
4	5,2	5,0	5,3	5,6	5,5	4,4	5,1	Pioggia.	Pioggia.
5	3,3	3,7	4,8	4,5	4,5	4,0	3,6	Nuvolo.	Piogg. nuv.
6	2,3	2,5	5,7	6,3	5,5	3,7	3,3	Nuv. ser.	Nuv. ser.
7	5,1	2,0	4,7	7,2	6,8	5,3	4,5	Sereno.	Ser. nuv.
8	1,9	2,5	5,4	7,0	6,5	4,0	3,2	Sereno.	Sereno.
9	1,2	2,3	6,7	7,5	6,6	4,8	2,5	Sereno.	Sereno.
10	1,1	1,8	5,0	7,5	6,6	4,0	1,4	Sereno.	Ser. nebb.
11	0,7	1,2	4,6	6,6	4,8	3,1	1,3	Sereno.	Ser. nebb.
12	− 0,6	+ 0,5	4,3	7,1	6,3	3,4	2,1	Sereno.	Ser. nebb.
13	− 0,2	+ 0,6	4,9	7,4	6,2	4,6	1,9	Sereno.	Sereno.
14	+ 0,2	0,5	5,2	7,6	6,9	4,3	3,1	Sereno.	Ser. nuv.
15	3,6	4,0	5,4	6,1	5,2	4,3	3,7	Nuvolo.	Pioggia.
16	2,9	3,2	3,7	5,1	3,4	3,7	3,7	Nuv. piogg.	Nuv. piogg.
17	3,4	3,6	6,9	7,8	7,5	5,1	3,5	Ser. nebb.	Sereno.
18	0,4	0,7	5,6	7,5	5,9	4,9	4,3	Sereno.	Ser. nuv.
19	2,4	2,5	4,2	4,2	3,1	2,2	1,6	Nuvolo.	Nuvolo.
20	− 0,2	+ 0,8	1,8	2,3	1,3	0,0	− 0,6	Sereno.	Ser. nuv.
21	− 1,0	− 1,1	+ 0,5	1,2	− 0,2	− 0,8	− 1,1	Nuvolo.	Ser. nuv.
22	− 1,7	− 1,0	+ 0,5	0,7	− 0,5	− 1,2	− 1,4	Nuvolo.	Ser. nuv.
23	− 1,0	0,0	+ 0,8	− 0,1	− 0,1	− 0,5	− 0,6	Nuvolo.	Nuvolo.
24	− 2,0	− 1,7	+ 0,8	+ 1,9	+ 1,0	+ 0,3	− 1,1	Sereno.	Sereno.
25	− 2,8	− 2,2	+ 1,9	+ 3,7	+ 2,8	+ 0,1	− 0,3	Sereno.	Sereno.
26	− 1,8	− 0,5	+ 1,8	2,9	1,2	0,0	0,1	Ser. nuv.	Ser. nuv.
27	− 1,7	− 0,3	+ 2,2	3,7	2,6	0,5	0,0	Sereno.	Sereno.
28	− 1,9	0,0	+ 3,6	4,2	3,4	1,6	0,0	Sereno.	Sereno.
29	− 1,6	+ 0,4	3,2	3,8	4,0	2,4	1,5	Sereno.	Sereno.

Altezza massima del termometro + 8°,10 Temp.ª massima + 8°,30
» minima.............. − 2,75 » minima − 3,00
» media.................. + 2,7701.
Quantità della pioggia linee 20,82.

MARZO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5h m		8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Direzione del vento. 5h m	11h m	5h s	11h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	11,7	12,1	12,5	12,2	12,2	12,7	12,9	S E[1]	S	S E	S E
2	27	12,4	12,4	12,2	11,5	11,1	11,2	10,9	N O	N O	E S E	E N E
3	27	9,3	9,1	8,7	8,3	8,2	9,4	9,4	N	S E	N	N N E
4	27	10,3	10,9	11,4	11,4	11,7	12,1	14,4	N E	S E	S	E S E
5	28	2,7	3,0	2,0	1,6	0,1	1,3	1,7	S	S	S O	E S E
6	28	1,6	1,9	2,0	0,9	1,5	1,8	2,0	E	E S E	N O	N E
7	28	2,2	2,5	2,6	2,2	2,2	2,5	2,6	N N E	S O	S O[1]	N
8	28	2,7	2,8	2,6	1,6	1,5	1,4	1,2	N	O	O S O	N O
9	27	12,7	12,4	12,0	11,1	10,4	10,2	10,0	N O	O	O	O
10	27	9,2	9,5	9,5	8,7	8,4	8,4	8,2	N	S	S E	E N E
11	27	8,2	8,4	8,5	8,3	8,5	9,3	9,8	E S E	S E	S S E[1]	E
12	27	10,2	10,4	10,4	9,9	9,4	9,7	9,8	E	S E	S	S S O
13	27	9,7	9,5	10,4	8,8	8,1	7,9	7,8	S	N	O	N O
14	27	7,1	6,1	5,5	5,2	4,9	5,8	5,8	N O	O N O	O[1]	O N O
15	27	5,9	6,0	5,9	5,3	5,3	5,7	6,0	E	S O	E N E	E
16	27	6,2	6,4	6,5	6,5	6,5	6,9	7,3	E S E	E S E	N E	E S E
17	27	7,8	8,3	8,5	8,3	7,8	7,7	7,6	E	S E	S E	S O
18	27	7,1	7,2	7,1	6,5	5,9	5,8	5,8	N E	S E	S E	S E
19	27	5,6	5,5	5,6	5,6	5,8	6,8	7,3	E	E S E[1]	S E	N E
20	27	7,9	8,3	8,2	7,6	7,1	7,5	7,4	N E	S	S O	E
21	27	6,8	6,5	6,0	6,0	6,5	7,0	7,1	E	N	N N E[2]	N N E[2]
22	27	7,3	7,6	7,8	7,5	7,8	8,1	8,5	N N E	N E[3]	N E	N N E[1]
23	27	7,2	8,2	6,9	7,0	6,7	6,9	6,9	O	S O	S O	E N E
24	27	6,6	6,6	6,4	5,8	5,5	5,8	6,0	E	S S E	S	E S E
25	27	6,0	6,2	6,4	5,7	6,8	6,9	7,1	E N E	S E[1]	S E[1]	E
26	27	7,4	7,5	7,5	7,0	6,8	7,2	7,4	N E	S O	S	E
27	27	7,8	8,1	8,2	8,2	8,1	8,5	8,5	E	S E	E	N
28	27	7,9	8,0	7,5	6,8	6,0	5,9	5,8	N N E	N O	O	N N O
29	27	5,7	5,5	5,5	5,1	5,0	5,5	6,0	E	S E	S E	S E
30	27	6,4	6,9	7,2	7,1	7,2	7,6	8,4	E	S O	S O	E
31	27	9,1	9,2	9,3	9,2	9,0	9,3	9,6	E S E	S	S S O	O N O

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 2,96
» minima.................. » 27 » 4,91
» media.................. » 27 » 8,7758.

MARZO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	− 1,0	− 0,7	+ 0,2	1,4	0,8	− 0,6	− 1,4	Nuv. ser.	Sereno.
2	− 3,2	− 2,3	+ 1,8	1,8	1,2	− 0,6	− 0,2	Sereno.	Ser. nuv.
3	− 1,7	− 0,8	+ 0,3	0,2	0,0	0,3	0,5	Nuv. neve.	Piogg. neve.
4	+ 0,8	+ 1,6	+ 4,6	5,5	3,5	2,9	2,0	Ser. nuv.	Ser. nuv.
5	+ 0,8	+ 1,5	3,2	3,7	3,6	1,0	0,3	Sereno.	Sereno.
6	− 1,0	+ 0,7	2,7	3,6	3,8	1,9	0,3	Sereno.	Sereno.
7	− 1,1	+ 0,8	4,8	6,4	5,5	3,4	1,4	Sereno.	Sereno.
8	− 0,8	+ 0,6	5,6	7,4	7,4	5,0	2,9	Sereno.	Sereno.
9	− 0,9	+ 0,9	7,7	9,5	9,5	7,5	4,0	Sereno.	Sereno.
10	+ 0,3	3,5	7,7	10,4	10,1	7,3	4,1	Sereno.	Sereno.
11	+ 4,0	4,1	7,2	9,0	7,8	5,6	4,5	Nuv. ser.	Nuv. ser.
12	+ 2,2	4,0	5,7	7,2	7,3	5,3	4,1	Sereno.	Sereno.
13	+ 1,5	2,9	6,8	8,7	8,7	6,2	4,3	Sereno.	Sereno.
14	+ 2,9	5,1	9,6	10,3	11,1	6,8	5,7	Sereno.	Sereno.
15	+ 2,3	4,6	8,6	12,8	12,2	8,8	7,5	Sereno.	Ser. nuv.
16	+ 5,5	6,2	8,2	6,2	6,9	6,3	5,5	Nuvolo.	Pioggia.
17	+ 3,8	4,1	4,8	6,1	6,7	4,6	4,0	Piogg. nuv.	Ser. nuv.
18	+ 2,6	3,7	6,9	7,6	6,7	4,8	4,5	Nuvolo.	Ser. nuv.
19	+ 2,5	3,7	5,6	6,5	6,1	4,0	3,7	Nuvolo.	Ser. nuv. piog.
20	+ 0,9	3,6	6,5	6,3	6,9	3,7	2,2	Ser. nuv.	Sereno.
21	+ 0,5	2,5	6,4	5,6	4,0	2,7	1,8	Sereno.	Ser. nuv. neve.
22	+ 0,3	2,9	4,7	5,9	4,3	2,6	1,3	Sereno.	Sereno.
23	0,0	+ 2,7	5,7	6,9	5,8	3,1	1,3	Nuvolo.	Sereno.
24	− 1,0	+ 0,2	4,3	6,4	7,6	3,4	2,3	Sereno.	Sereno.
25	− 0,7	+ 2,1	4,4	6,3	5,2	2,0	1,3	Sereno.	Ser. nuv.
26	− 0,7	+ 2,2	5,5	6,6	5,5	3,2	1,8	Ser. nuv.	Nuvolo.
27	+ 1,2	2,0	2,2	3,5	3,2	1,1	0,2	Nuvolo.	Nuv. ser.
28	− 1,2	+ 1,6	4,9	6,1	6,6	3,5	1,0	Sereno.	Sereno.
29	− 1,0	+ 1,9	6,5	7,5	4,5	4,4	1,9	Ser. nuv.	Sereno.
30	+ 0,1	2,4	6,9	9,5	9,0	5,3	2,6	Sereno.	Sereno.
31	+ 2,6	4,6	8,1	9,4	9,2	6,1	3,5	Ser. nuv.	Sereno.

Altezza massima del termometro R. + 12°,8 Temp.ª massima + 13°,3
" minima. . . . . − 3 ,2 " minima − 3 ,5
" media. . . . . + 3 ,6017
Quantità della pioggia e neve sciolta linee 3,63.

APRILE 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10°. R.								Direzione del vento.			
	5h m		8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	5h m	11h m	5h s	11h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	9,4	9,3	9,1	8,5	8,1	8,1	8,2	E	S S O	S	E S E
2	27	7,4	7,3	6,9	6,4	6,1	6,6	6,6	E	S E	S O	S O
3	27	6,5	6,6	6,8	6,6	6,4	6,8	7,0	N O	S O	N O	N
4	27	6,7	6,7	6,4	5,8	5,5	5,6	5,6	E	S S E	S S E	E
5	27	5,1	4,9	4,8	4,3	4,2	4,4	4,4	E	S O	O S O	N N O(1)
6	27	4,8	4,9	4,9	4,7	4,4	4,9	5,2	N E	S	S	E S E
7	27	4,9	5,0	5,3	5,3	5,1	5,5	5,7	S E	S	E	E
8	27	5,6	5,8	6,1	6,1	6,1	6,6	6,7	N	S E(3)	E S E(1)	E(2)
9	27	6,0	6,1	6,9	7,0	7,2	7,5	7,5	S E	E S E(3)	E S E	N
10	27	8,0	8,3	8,7	8,6	8,4	9,1	9,4	E	E S E	S E	E N E
11	27	9,7	9,9	9,8	10,0	9,8	10,2	10,0	E N E	N	S S E	N
12	27	9,5	9,3	9,2	8,4	7,9	7,9	7,8	S E	N	N E(1)	N N E
13	27	6,5	6,6	6,7	6,2	6,2	6,8	7,2	E N E	S	O	N E
14	27	7,3	8,0	8,4	8,3	8,3	8,7	8,7	E	O N O	N N O	N O
15	27	8,9	8,7	8,4	7,5	7,2	7,9	6,7	O S O	O	O S O	N E
16	27	8,7	9,0	9,3	9,0	9,1	9,3	9,7	E S E(1)	E S E	S	S E
17	27	9,8	10,3	10,3	9,9	10,0	10,3	10,5	E	E S E	S E	E
18	27	10,6	10,8	10,9	10,6	10,6	10,7	10,2	E S E	E	E	N E
19	27	9,3	9,0	9,1	8,6	8,0	7,9	7,7	N E	E	E	N
20	27	6,6	6,6	6,4	5,6	5,4	5,8	6,1	O S O	O	O S O	N N O
21	27	7,7	7,0	7,3	7,2	7,1	8,9	9,8	E	S O	E S E	E
22	27	10,4	10,7	10,9	10,6	10,3	10,7	10,8	O	N O	O S O	N E
23	27	11,0	11,2	11,1	10,7	10,2	10,4	10,5	S S O	S O	N O	N O
24	27	10,6	10,7	10,7	10,3	9,8	9,8	9,9	S	S R	E S E	E S E
25	27	10,6	11,1	11,7	11,6	11,1	11,2	11,3	E S E	E S E(2)	E S E	S
26	27	11,0	11,0	11,2	10,8	10,3	11,0	11,6	E	E S E	S E	E
27	27	11,2	11,2	10,9	10,3	9,9	10,0	10,1	E	O S O	O	O N O
28	27	10,3	10,4	10,3	9,6	9,0	9,3	9,7	N E	N O	O	N N E
29	27	10,2	11,2	11,2	10,9	10,9	10,7	10,8	N E	I E(1)	S E	E
30	27	10,8	10,7	10,3	9,7	8,9	8,9	8,7	E	S O	N O	N O

Altezza massima del barometro poll. 27 lin. 11,68
» minima.................. » 27 » 4,18
» media.................. » 27 » 8,3979.

APRILE 1840.

	Altezza del termometro.							Stato del cielo	
Giorni.	5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+ 1,4	+ 4,0	+ 8,7	+ 9,8	+ 9,1	+ 6,7	+ 6,4	Ser. nuv.	Nuvolo.
2	5,1	6,8	8,1	8,3	7,6	6,5	5,7	Nuvolo.	Nuv. ser.
3	2,5	4,8	9,3	11,2	12,3	8,8	6,9	Ser. nuv.	Ser. nuv.
4	5,4	6,7	9,6	9,7	8,4	7,0	6,6	Nuvolo.	Pioggia.
5	5,6	7,0	8,9	9,2	8,3	6,5	6,1	Nuvolo.	Nuv. ser.
6	5,2	8,8	10,2	11,9	11,8	8,3	6,8	Sereno.	Ser. nuv.
7	5,4	5,8	7,0	7,0	7,1	6,4	5,4	Nuvolo.	Pioggia.
8	4,3	5,2	7,0	7,7	8,5	7,1	6,9	Pioggia.	Piogg. nuv.
9	6,0	7,1	6,1	6,3	5,2	4,7	4,5	Nuv. piogg.	Pioggia.
10	4,8	5,7	7,7	8,8	9,5	7,3	6,8	Nuv. piogg.	Nuvolo.
11	6,2	8,8	11,1	6,5	9,5	7,8	6,6	Ser. nuv.	Piog. temp. nu.
12	5,8	7,0	9,3	9,6	10,0	7,5	7,0	Ser. nuv.	Piog. temp. nu.
13	5,7	7,9	10,7	9,4	9,7	8,8	8,5	Ser. nuv.	Nuvolo.
14	7,0	9,0	9,8	12,6	12,3	9,8	7,5	Nuvolo.	Nuvolo.
15	6,3	8,4	10,7	12,3	13,6	12,0	8,7	Sereno.	Sereno.
16	7,4	7,5	8,8	10,4	9,6	8,9	7,6	Nuvolo.	Nuvolo.
17	6,6	8,7	9,6	10,9	11,1	8,7	7,5	Nuv. ser.	Nuvolo.
18	6,9	7,2	8,8	9,1	6,1	4,9	4,0	Nuvolo.	Nuv. piogg.
19	5,4	5,9	6,4	7,1	6,8	6,9	6,8	Pioggia.	Pioggia.
20	6,2	7,7	9,5	12,0	11,8	8,9	8,8	Nuv. ser.	Nuv. rotto ser.
21	8,0	10,7	13,8	15,6	13,0	10,6	9,2	Sereno.	Nuv. rotto.
22	7,7	10,2	13,8	15,4	14,7	12,5	10,8	Sereno.	Sereno.
23	8,7	13,6	15,5	17,3	16,4	14,8	12,2	Sereno.	Sereno.
24	10,5	13,0	15,8	16,9	17,5	12,9	11,8	Sereno.	Sereno.
25	9,9	12,0	13,1	13,7	13,6	11,1	9,3	Ser. nuv.	Nuv. ser.
26	8,4	11,4	13,7	15,0	15,6	12,3	9,4	Sereno.	Sereno.
27	10,1	12,8	14,4	16,1	16,8	15,4	10,9	Sereno.	Sereno.
28	8,8	12,6	16,4	18,4	18,4	15,8	12,2	Sereno.	Sereno.
29	10,8	13,5	16,3	18,4	17,4	15,5	12,1	Sereno.	Sereno.
30	11,0	14,2	17,3	19,5	19,9	16,8	13,6	Sereno.	Sereno.

Altezza massima del termometro R. + 19°,90 Temp.ª massima + 21°,5
" minima . . . . + 1,44 " minima + 1,0
" media . . . . + 9,3419.
Quantità della pioggia linee 27,25.

MAGGIO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Direzione del vento. 5h m	11h m	5h s	11h s
	poll. lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27 7,8	7,8	7,6	7,2	6,8	7,3	7,6	N O	O[2]	N N E	O E[1]
2	27 8,5	8,8	8,8	8,6	8,2	8,7	9,2	E S E	S E	S S E	E S E
3	27 9,5	9,5	9,4	8,7	8,0	8,6	8,7	E S E	S E	S O	O
4	27 9,5	9,8	10,0	9,8	9,5	9,9	10,2	S E[1]	S	S E	E
5	27 10,1	9,9	9,8	9,6	9,4	9,4	9,5	E S E	S E	E N E	E N E
6	27 9,3	9,4	9,4	9,3	9,1	9,4	9,4	S O	E	S O	N N E
7	27 9,4	9,5	9,2	8,8	8,2	8,2	8,1	E N E	S E[1]	O	N E
8	27 7,5	7,8	7,9	7,8	7,3	7,4	7,5	E	S E	E S E	N N E
9	27 6,9	6,7	6,4	5,9	5,2	5,3	4,9	S S E	S E[1]	S E	S E[1]
10	27 3,4	3,1	2,6	2,1	1,9	2,3	2,2	E S E[1]	S S R[1]	E S E	N N E
11	27 2,1	2,3	2,4	2,5	2,8	3,6	4,0	O	S O	S S E	E
12	27 4,9	5,5	5,8	5,7	5,6	5,6	7,1	S E	S S E	S O	N
13	27 7,5	7,8	8,2	8,1	7,6	8,2	8,2	N N O	N O	E	N N E
14	27 7,9	7,3	7,3	7,0	6,6	7,0	6,8	E	E N E	N E	S E
15	27 6,4	6,3	5,8	4,9	4,8	5,0	5,1	E S E	S S E	E S E	N O
16	27 5,2	5,4	5,4	5,5	5,5	5,5	5,5	O	S O	S O	N E
17	27 5,3	5,5	5,4	4,8	4,4	4,6	4,9	N E	S E	E N E	O
18	27 5,4	6,1	6,2	6,3	6,3	7,5	7,9	N E	O	E S E	N N E
19	27 8,4	8,8	8,7	8,2	8,1	7,9	7,4	N E	S O	S	S
20	27 6,4	6,1	6,0	5,8	5,3	5,7	5,8	N	N O	O S O	N O
21	27 6,3	6,6	6,7	6,5	6,0	6,8	7,2	N O	N O	N O	N E
22	27 8,5	8,5	8,9	9,0	8,7	9,3	9,6	S E	S	O S O	S O
23	27 9,5	9,8	10,1	10,1	10,0	10,5	11,2	O	O	S O	S
24	27 11,5	11,8	11,8	11,4	10,9	11,1	11,2	S E	N O	O	O S O
25	27 11,2	11,3	10,9	10,2	9,3	8,7	8,9	S	S O	N N O	O
26	27 7,9	7,2	7,3	6,9	6,5	6,8	7,0	O	O	O N O	N O
27	27 7,2	7,4	7,6	7,4	7,4	7,9	8,4	N N E	O	O	N
28	27 9,2	9,7	9,8	9,7	9,3	9,4	10,0	N E	S O	E S E	N O
29	27 10,0	10,1	10,0	9,4	9,1	9,6	9,8	N E	N O	N O	O
30	27 9,7	9,9	9,9	9,6	9,0	9,7	10,7	N N E	O S O	O S O	S E[2]
31	27 12,2	12,3	12,2	12,1	11,7	12,0	12,1	S E	S	S E	S

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 0,26
" minima .... " 27 " 1,92
" media .... " 27 " 7,8135.

MAGGIO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+10,8	+13,6	+18,0	22,5	22,7	18,6	16,6	Sereno.	Ser. nebbioso.
2	12,7	14,8	16,8	18,5	18,9	15,2	11,6	Sereno.	Sereno.
3	10,9	12,2	14,9	17,8	17,7	14,6	12,6	Sereno.	Sereno.
4	10,4	9,9	13,8	14,8	15,0	13,0	11,5	Nuvolo.	Nuvolo.
5	10,3	10,5	12,0	10,2	9,3	8,9	8,9	Nuvolo.	Pioggia.
6	9,1	11,5	13,7	13,9	13,3	11,9	10,6	Nuvolo.	Nuv. ser.
7	9,5	13,2	15,9	16,8	16,0	14,5	11,9	Ser. neb. nuv.	Nuv. piogg.
8	11,0	11,6	13,4	14,2	14,7	12,6	12,3	Pioggia.	Nu. piog. temp.
9	10,8	12,0	12,5	11,9	11,4	11,5	11,1	Pioggia.	Pioggia.
10	11,1	10,8	11,6	11,0	10,4	9,5	8,8	Pioggia.	Piogg. nuv.
11	8,5	10,5	13,4	15,2	14,4	10,8	10,0	Nuvolo.	Nuv. ser.
12	8,7	11,4	14,3	16,2	16,3	12,1	10,2	Sereno.	Ser. nuv.
13	10,0	11,4	11,5	11,1	11,5	10,9	10,6	Nuv. piogg.	Nuv. piogg.
14	9,0	9,3	9,8	12,3	13,0	11,5	10,9	Piogg. nuv.	Nuvolo.
15	10,4	11,7	12,8	15,1	11,1	10,3	9,1	Nuvolo.	Nuv. ser.
16	8,3	10,2	15,2	14,3	10,7	10,1	8,9	Ser. nuv.	Nuv. piogg.
17	9,1	10,4	13,1	11,3	10,9	9,6	9,1	Piogg. nuv.	Piog. temp. ser.
18	8,9	11,8	14,2	15,6	11,6	11,2	10,1	Ser. nuv.	Piog. temp. ser.
19	8,0	12,6	15,5	16,5	14,0	13,5	12,4	Ser. nuv.	Nuv. piogg.
20	9,1	10,5	11,4	11,5	12,7	9,7	9,1	Piogg. nuv.	Nuv. piog. ser.
21	9,6	12,6	14,0	13,2	14,5	11,2	8,7	Ser. nuv.	Piog. gran. ser.
22	5,9	8,9	9,6	10,1	11,4	9,2	8,5	Piogg. nuv.	Nuv. ser.
23	8,0	10,3	13,0	14,1	14,9	12,3	9,7	Ser. nuv.	Sereno.
24	8,0	13,0	14,0	15,5	17,4	13,6	11,8	Sereno.	Sereno.
25	10,5	13,6	16,8	18,2	18,6	16,9	11,9	Sereno.	Ser. nuv.
26	10,7	14,5	17,3	19,6	20,7	16,4	14,5	Sereno.	Sereno.
27	13,0	15,6	18,3	20,6	21,7	17,7	14,2	Sereno.	Sereno.
28	13,2	16,8	19,2	19,9	18,9	16,8	15,3	Ser. nuv.	Ser. nuv.
29	13,4	15,7	18,4	20,6	20,9	18,3	14,3	Ser. nuv.	Nuv. temp.
30	13,2	16,7	19,1	20,6	20,7	18,6	16,6	Sereno.	Sereno.
31	14,8	15,9	18,4	18,4	18,7	16,5	14,9	Ser. nuv.	Sereno.

Altezza massima del termometro + 22°,73 Temp.a massima + 24°,0
" minima................ + 5 ,91 " minima + 5 ,5
" media................ + 12 ,8203.
Quantità della pioggia linee 63,34.

GIUGNO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R.								Direzione del vento.			
	5h m		8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	5h m	11h m	5h s	11h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	12,4	12,6	12,3	11,8	11,2	10,9	11,1	E	E S E	S O	N E
2	27	10,8	10,8	10,3	9,7	9,1	8,7	8,8	E	S O	S O	N O
3	27	8,2	8,0	7,2	6,4	6,4	7,3	7,8	N O	S O	N N E	N E(1)
4	27	8,6	8,9	9,0	8,9	8,8	9,2	9,6	N	N E	E N E	E S E
5	27	9,9	9,7	9,7	9,5	9,3	9,5	9,8	E S E	S E	E	E
6	27	9,3	9,4	9,5	9,0	8,7	9,0	9,1	N E	S	S	E N E
7	27	9,0	9,0	9,1	8,4	8,1	8,3	8,6	E S E	S O	N	N N O
8	27	8,7	8,7	8,7	8,4	8,4	8,7	8,9	N O	O	N O(1)	N E
9	27	9,0	9,2	9,0	8,6	8,4	8,1	8,3	S E	N O	O N O	O S O
10	27	8,1	8,5	8,5	8,0	8,3	8,5	8,7	N O	O S O	S E	N E
11	27	8,7	9,0	8,9	8,3	8,2	8,2	8,6	E	S O	O S O	E N E
12	27	8,9	8,5	9,1	8,8	8,4	8,8	9,0	E	S S O	N O	O N O
13	27	9,1	8,9	9,0	8,7	8,2	8,4	8,7	N	S O	O	O
14	27	9,1	9,2	9,1	8,8	8,6	9,1	9,5	S	O S O	O S O	S E
15	27	9,8	10,0	9,8	9,3	9,1	9,1	9,1	E	S E	O S O	E
16	27	9,2	9,3	9,2	8,7	8,6	9,2	9,5	S E	S E	O(1)	N O
17	27	9,9	9,9	9,9	9,4	8,8	9,0	9,0	N O	S S O	S E	E
18	27	8,4	8,3	7,8	7,2	6,8	7,0	7,7	N E	O S O	S S O	N E(1)
19	27	9,5	8,9	10,0	9,6	9,3	9,4	9,8	E S E	S O	S S O	E
20	27	10,1	10,0	10,0	9,6	9,1	9,3	9,5	E	S S O	S O	N E
21	27	9,8	10,1	10,1	9,9	9,6	9,7	10,0	E	E	S O	E S E
22	27	9,8	9,6	9,4	8,9	8,4	8,0	7,9	S E	S E	O S O	N O
23	27	6,7	6,8	6,9	6,0	5,2	5,1	5,0	S S E	E S E	O(1)	N O
24	27	4,4	3,9	3,9	3,1	3,8	4,6	5,6	S E	N O	N E(3)	N O
25	27	7,2	7,7	8,0	7,8	7,8	8,3	8,5	N E	N O	S S O	E N E
26	27	8,7	8,6	8,6	8,2	8,1	8,4	9,4	E N E	S	O	E
27	27	10,0	10,3	10,2	10,0	9,7	9,8	10,0	E	S(1)	S S O	E S E
28	27	9,9	9,4	9,8	9,6	9,0	8,9	9,0	S E	S E(1)	E	S S E
29	27	8,9	8,9	9,3	8,4	8,1	8,1	8,3	S E	S E	S O	O
30	27	8,3	8,7	9,1	8,9	8,9	9,3	9,7	N O	N	S	E S E

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 0,64
» minima . . . . » 27 » 3,06
» media . . . . » 27 » 8,7951.

GIUGNO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+12,3	+16,6	+18,4	+19,5	+19,9	+16,1	+14,4	Sereno.	Sereno.
2	13,4	16,9	19,5	20,5	20,4	18,0	16,6	Sereno.	Sereno.
3	15,0	16,4	19,9	20,3	15,1	13,4	11,9	Ser. nuv.	Se.nu.piog.tem.(*)
4	10,5	13,8	15,4	17,0	18,0	14,1	10,7	Sereno.	Sereno.
5	11,0	14,5	16,7	17,4	16,5	14,2	13,1	Sereno.	Sereno.
6	12,2	14,4	17,3	17,8	18,8	15,5	13,6	Nuv. ser.	Sereno.
7	13,4	17,0	18,6	20,0	20,8	17,4	15,4	Sereno.	Sereno.
8	14,0	17,7	19,9	20,8	17,5	15,2	14,3	Ser. nuv.	Ser. nuv. temp.
9	15,8	16,2	18,7	20,1	20,9	17,4	14,9	Ser. nuv.	Ser. nuv.
10	14,0	17,2	19,4	21,6	17,8	14,7	14,0	Ser. nuv.	Ser.nuv.tem.piog.
11	14,7	17,5	20,1	21,5	22,3	19,5	16,6	Sereno.	Sereno.
12	15,7	19,1	21,9	23,0	23,6	20,1	18,1	Ser. nuv.	Sereno.
13	17,8	19,2	20,2	22,6	23,7	18,1	17,5	Sereno.	Ser.nuv.tem.piog.
14	17,6	18,8	21,1	22,6	23,7	20,1	17,6	Sereno.	Sereno.
15	16,4	20,2	21,6	23,0	24,1	20,8	18,4	Sereno.	Sereno.
16	18,0	20,5	22,3	23,8	23,6	16,3	15,6	Ser. nuv. ser.	Nuv. piog. ser.
17	14,9	19,3	21,3	22,2	23,4	20,5	17,5	Sereno.	Sereno.
18	18,3	20,6	22,4	22,4	22,4	17,6	15,5	Sereno.	Piogg. ser.
19	18,7	17,3	19,3	19,7	20,5	18,4	15,2	Sereno.	Ser. nuv.
20	14,7	18,3	20,1	20,9	22,4	19,6	17,2	Sereno.	Sereno.
21	15,4	19,1	20,9	22,7	23,4	21,5	18,4	Sereno.	Sereno.
22	17,5	19,2	21,4	23,7	23,5	21,5	17,9	Sereno.	Sereno.
23	15,0	18,0	20,4	21,2	20,9	18,5	16,8	Ser.nuu.piog.tem.	Ser. nuv.
24	16,0	20,2	20,6	19,2	17,1	15,2	12,9	Sereno.	Sereno.
25	10,8	15,6	17,6	19,1	19,5	17,2	12,5	Ser.nuv.temp.ser.	Sereno.
26	10,6	15,1	17,0	18,7	20,2	17,5	13,8	Sereno.	Sereno.
27	12,3	15,8	17,8	18,7	19,3	15,7	14,3	Sereno.	Sereno.
28	15,6	16,3	18,5	19,6	19,8	17,8	14,7	Sereno.	Ser. nuv. piog.
29	12,5	12,8	14,9	16,3	16,6	15,3	13,1	Pioggia.	Nuv. ser.
30	11,7	15,2	19,2	20,2	20,8	17,8	14,8	Sereno.	Sereno.

Altezza massima del termometro + 24°,10 Temp.ª massima + 25°,65
" minima . . . . + 10,50 " minima + 9,50
" media . . . . + 17,3318.
Quantità della pioggia linee 8,55.

(*) Ad ore 8 e minuti 20 pomerid. si vide una meteora luminosa.

LUGLIO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R.								Direzione del vento.			
	5^h m		8^h m	11^hm	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	5^h m	11^h m	5^h s	11^h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	10,3	10,2	10,5	9,8	9,8	9,7	9,6	E S E	S	N	N
2	27	9,5	9,7	9,5	9,2	8,7	9,0	8,7	E S E	E S E	S	S E
3	27	8,3	8,2	7,9	7,3	6,6	6,7	7,3	S E	E	S O[1]	O
4	27	7,1	7,0	7,0	6,5	6,6	6,5	8,0	N	S E	E	E
5	27	9,1	9,5	9,5	9,2	8,9	8,9	9,0	E S E	S E	S E	E
6	27	8,5	8,4	8,2	7,7	7,6	7,8	8,0	S E	S E	E	E
7	27	8,8	8,1	8,0	7,5	7,2	7,5	7,7	N E	S E	S S O	N N O
8	27	7,9	8,3	8,5	8,1	8,0	7,9	8,1	E S E	S O	S E	N N O
9	27	8,3	8,3	8,0	7,4	7,2	7,4	7,6	E S E	E S E	N O	O N O
10	27	8,1	8,8	8,3	7,7	7,3	7,6	7,9	E S E	S E	S	E S E
11	27	8,0	7,9	8,2	7,7	7,4	7,5	7,6	E S E	S S E	S E	O S O
12	27	7,6	7,6	7,3	6,7	5,6	6,8	7,0	E	S E	E	S E
13	27	7,2	6,8	7,2	6,7	6,5	6,4	6,4	E	S E[1]	E	N N E
14	27	5,9	5,9	6,7	6,9	7,3	7,7	8,4	E S E	N E	N E	O
15	27	8 8	8,8	9,4	9,6	9,7	9,9	10,3	O	S O	O	N N O
16	27	9,7	9,6	8,7	8,4	8,3	8,5	8,3	N E	O S O	E S E	E S E
17	27	7,8	7,2	7,4	6,7	6,3	6,3	6,7	E N E	O	O	O N O
18	27	6,8	7,1	7,1	6,9	6,8	7,2	7,3	N	O S O	O N O	N N E
19	27	7,5	7,6	7,5	6,9	6,7	6,7	7,0	S S E	S O	O	O
20	27	6,9	7,2	7,4	7,1	7,0	7,5	7,9	N O	N	S O[1]	N
21	27	8,0	8,4	8,3	7,8	7,7	7,6	7,6	N E	S O	S	N
22	27	7,5	7,5	7,4	7,1	6,9	7,1	7,3	E	S E	O S O	N
23	27	7,7	8,2	8,4	8,6	8,4	8,3	9,0	N N E	S O	S E	N N E
24	27	8,9	9,3	9,5	9,5	9,0	9,0	8,5	N	S E	E S E	N E
25	27	7,9	7,9	7,7	7,4	7,1	7,6	7,5	O	E	O N O	N N O
26	27	7,4	7,6	7,5	7,0	6,2	6,2	6,3	N E	S E	E	E N E
27	27	5,0	4,7	5,9	6,0	6,3	6,7	7,1	N	E	E N E	N O
28	27	7,1	7,5	7,9	7,6	7,9	8,4	8,5	N O	N	N	N N E
29	27	8,9	9,0	9,2	9,3	9,0	9,3	9,7	E	S E	S	E N E
30	27	9,7	9,8	9,6	9,1	8,6	8,7	8,6	E N	E S E	S E	E
31	27	8,0	7,6	7,6	7,1	6,9	7,0	7,2	N E	S O	S	O

Altezza massima del barometro poll. 27 lin. 10,47
" minima. . . . . " 27 " 4,66
" media . . . . " 27 " 7,8785.

LUGLIO 1840.

Giorni	Altezza del termometro R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+14,1	+17,6	+18,9	+20,6	+21,7	+18,9	+17,1	Sereno.	Ser. nuv.
2	+14,8	18,4	20,4	22,0	22,5	20,5	17,0	Sereno.	Sereno.
3	16,8	19,1	20,7	23,0	22,7	18,5	17,0	Ser. nuv.	Ser. nuv.
4	15,8	17,5	20,9	22,0	15,4	16,2	14,6	Ser. nuv.	Ser.nuv.piog.tem.gran.
5	14,7	16,0	18,5	19,5	20,4	20,2	16,0	Sereno.	Sereno.
6	14,6	17,6	19,0	20,0	18,5	17,8	15,3	Nuvolo.	Ser. nuv.
7	15,0	18,2	19,0	20,9	21,8	17,3	16,3	Sereno.	Sereno.
8	15,2	18,4	20,7	21,5	22,2	21,1	16,6	Sereno.	Sereno.
9	15,4	18,1	19,6	21,7	22,3	19,2	16,8	Sereno.	Sereno.
10	14,1	17,8	19,9	20,4	21,3	17,7	12,9	Sereno.	Nu.tem.piog.gran.
11	13,4	14,6	16,9	19,3	19,6	17,2	15,6	Tem.piog.nuv.	Ser. nuv. temp.
12	13,8	16,0	18,1	19,8	14,4	14,6	14,0	Nuv. piog. ser.	Ser.nuv.tem.piog.
13	13,6	13,3	15,0	16,1	16,3	12,2	11,8	Nuvolo.	Nuv. piog. tem.
14	10,2	10,8	11,5	12,3	11,8	11,3	10,9	Pioggia.	Nuv. piogg.
15	10,2	12,6	14,8	16,3	15,2	13,1	12,0	Nuv. piog. ser.	Nuv. ser.
16	9,4	12,5	16,4	17,6	18,4	15,0	13,0	Sereno.	Sereno.
17	11,5	15,6	17,8	19,8	20,3	17,7	15,4	Sereno.	Sereno.
18	13,2	17,3	20,0	21,2	22,3	18,5	16,5	Sereno.	Sereno.
19	16,0	18,0	20,7	22,4	21,8	18,6	16,3	Ser. nuv.	Ser. piogg.
20	16,6	17,6	19,8	21,4	22,0	18,1	15,4	Sereno.	Sereno.
21	15,4	17,0	19,7	21,4	21,8	20,2	17,7	Ser. nuv.	Ser.nuv.lampi.
22	15,6	18,5	20,9	22,4	23,3	18,9	17,0	Lampi, ser.	Sereno.
23	15,6	19,4	21,1	21,5	22,5	18,9	16,0	Sereno.	Sereno.
24	15,4	19,4	21,5	21,7	21,1	19,0	16,7	Sereno.	Ser. nuv.
25	15,6	14,7	14,3	16,5	19,0	14,8	14,5	Pioggia.	Ser. nuv.
26	13,3	16,1	19,1	19,7	21,1	16,6	14,1	Sereno.	Ser.nuv.piog.tem.
27	13,1	12,5	13,3	16,1	16,5	13,3	12,2	Temp. piog.	Ser. nuv.
28	12,6	15,6	18,5	19,3	20,3	16,4	15,5	Nuv. ser.	Sereno.
29	13,2	17,1	18,9	20,5	21,2	17,8	14,8	Sereno.	Sereno.
30	14,8	17,2	19,4	21,0	21,3	19,0	18,1	Sereno.	Sereno.
31	13,8	17,4	20,5	21,9	21,8	18,9	16,0	Sereno.	Ser. nuv.

Altezza massima del termometro + 23°,00 Temp.ª massima + 24°,50
" minima . . . . + 9 ,43 " minima + 9 ,30
" media. . . . . + 16 ,9877.

Quantità della pioggia linee 58,74.

AGOSTO 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Direzione del vento. 5h m	11h m	5h s	11h s
	poll. lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27 7,6	8,2	8,8	8,6	8,6	9,5	9,6	S E	S E	E	E N E
2	27 9,9	10,0	10,0	9,7	9,4	9,8	10,0	S E	S E	E S E	S E
3	27 10,2	10,3	10,4	10,1	9,8	10,0	10,1	S E	S[2]	S	E N E
4	27 10,0	9,6	9,7	9,2	8,9	9,0	9,2	E	S E	S	E
5	27 9,1	7,2	9,1	8,6	8,2	8,4	8,6	E	S E	S E	N O
6	27 8,8	8,9	8,9	8,5	8,2	8,6	8,9	N	S O	S E	N N O
7	27 8,5	8,3	8,5	8,0	7,9	8,1	8,1	O	S O	N E	O S O
8	27 7,8	7,5	7,7	7,0	6,9	7,5	7,6	N N O	N N O	N E	E N E
9	27 8,1	8,4	8,3	7,9	7,8	8,2	8,4	S E	S S E[1]	S	N E
10	27 8,2	8,3	8,5	7,8	7,6	7,9	8,0	N E	S E[1]	S	E
11	27 7,6	7,3	7,4	6,9	6,5	6,5	6,6	E	S E	O S O	N
12	27 6,0	5,8	5,7	5,7	5,6	6,2	6,4	N E	S E	E	E
13	27 6,7	7,3	7,6	7,6	7,5	8,2	8,7	E	S E	O S O	E
14	27 8,8	9,0	9,2	8,6	8,4	8,5	8,4	S E	N	S	N N E
15	27 8,4	8,6	8,3	7,9	7,5	7,8	7,8	S E	O	O	N E
16	27 7,8	7,8	8,0	8,2	8,3	8,7	8,8	O S O	S[1]	S E	S E[1]
17	27 8,5	8,4	8,6	8,2	7,8	7,7	7,6	S E	S E	S	N O
18	27 6,8	6,7	6,5	6,0	5,9	6,2	6,6	S	S S O	N	N
19	27 7,5	7,5	7,5	7,0	6,9	6,7	6,8	E S E	N O	O N O	N O
20	27 6,9	6,9	7,1	6,7	6,6	7,1	7,3	N E	O S O	N E	S E
21	27 7,6	7,5	7,4	6,9	7,3	7,4	7,7	E S E	S E	S E[1]	E
22	27 7,7	8,0	8,0	7,5	7,5	7,8	8,1	S E	E	S E	E
23	27 8,4	8,6	8,6	8,3	8,0	8,3	8,3	E	S E	S E	E
24	27 8,7	8,9	9,0	8,5	8,5	8,8	9,0	S E	E S E	S O	E S E
25	27 9,0	9,0	9,3	9,0	8,8	8,8	8,9	S E	E	O	N N E
26	27 9,0	9,1	9,1	8,7	8,5	8,8	9,0	E S E	O N O	E	E
27	27 9,3	9,5	9,6	9,3	9,1	9,4	9,8	E S E	S E	S	E
28	27 10,0	10,2	10,1	9,7	9,5	9,7	9,8	E	S E	S E	E
29	27 9,7	9,8	9,9	9,5	8,7	8,9	8,9	E	O	S O	E
30	27 8,6	8,8	8,6	8,3	7,8	7,9	8,9	E	E	E S E	E[1]
31	27 8,8	8,9	9,0	8,8	8,6	9,2	9,2	N	E S E[1]	S E	E[1]

Altezza massima del barometro poll. 27 lin. 10,35
" minima.............. " 27 " 5,60
" media............... " 27 " 8,3199.

AGOSTO 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R.							Stato del cielo	
	5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+14,4	+16,1	+18,8	+18,2	+19,8	+17,3	+14,7	Ser. temp. piog.	Sereno.
2	14,2	18,3	19,3	21,4	20,8	17,5	16,3	Sereno.	Sereno.
3	15,5	17,8	19,7	20,3	20,6	18,6	16,0	Sereno.	Sereno.
4	15,2	18,2	19,7	21,7	21,8	19,2	16,5	Sereno.	Sereno.
5	14,8	18,4	20,0	22,5	22,4	19,9	17,8	Sereno.	Sereno.
6	15,1	18,5	20,0	22,2	22,0	20,1	17,6	Sereno.	Ser. nuv. piog.
7	17,5	18,8	20,9	21,5	17,9	16,5	16,0	Nuv. ser.	Ser. nuv. piog.
8	15,4	18,9	20,6	22,2	22,5	18,3	13,6	Ser. nuv.	Sereno.
9	15,0	17,3	19,3	20,6	20,3	17,1	14,5	Sereno.	Ser. nuv. tem. piog.
10	13,4	17,0	19,5	21,1	21,1	18,4	15,5	Sereno.	Sereno.
11	14,3	17,5	20,1	21,8	22,0	18,3	16,8	Sereno.	Sereno.
12	14,4	14,2	15,0	17,1	19,3	14,4	12,6	Ser. nuv. piog.	Ser. nuv. tem. piog.
13	11,9	13,8	17,5	18,5	19,6	16,0	14,3	Ser. nuv.	Sereno.
14	13,8	16,6	18,6	20,3	20,4	17,4	16,0	Ser. nuv. piog.	Ser. nuv.
15	15,6	17,6	20,4	21,4	18,6	16,3	14,7	Nuv. piog. ser.	Ser. nuv. tem. piog.
16	14,0	14,3	17,4	17,8	16,9	14,6	13,9	Ser. nuv. tem. piog.	Ser. nuv.
17	13,2	14,2	17,0	18,6	19,0	17,5	15,5	Nuvolo.	Nuvolo.
18	14,6	16,8	19,8	20,4	21,3	16,3	14,3	Nuv. ser.	Sereno.
19	12,1	15,6	17,8	20,2	21,3	17,6	15,5	Sereno.	Sereno.
20	12,2	15,2	20,1	22,8	24,7	19,8	17,7	Sereno.	Sereno.
21	15,0	19,0	20,5	21,7	21,9	18,6	16,5	Ser. nuv.	Sereno.
22	15,6	17,7	19,6	21,1	21,3	18,5	16,2	Ser. nuv.	Sereno.
23	15,4	18,1	20,0	20,9	21,4	18,0	16,2	Sereno.	Ser. nuv.
24	15,4	16,5	18,9	21,2	21,3	18,5	16,3	Piogg. ser.	Sereno.
25	14,4	14,6	16,8	19,6	19,5	16,6	15,8	Tem. gran. piog. se.	Sereno.
26	15,3	17,0	19,5	20,9	21,3	18,4	16,5	Sereno.	Sereno.
27	15,5	17,8	20,2	21,5	21,9	18,8	16,7	Sereno.	Sereno.
28	16,0	18,6	20,5	21,9	22,2	18,4	17,4	Sereno.	Sereno.
29	15,3	17,6	18,0	19,4	20,1	17,7	15,5	Ser. nuv. piog.	Ser. nuv.
30	14,6	17,8	19,6	20,9	21,5	18,3	14,3	Sereno.	Sereno.
31	13,4	15,0	17,8	19,7	20,1	16,4	14,8	Nuv. tem. ser.	Sereno.

Altezza massima del termometro + 24°,68 Temp.ª massima + 25°,38
» minima.............. + 11 ,92 » minima + 11 ,50
» media................ + 17,3318.
Quantità della pioggia linee 43,25.

SETTEMBRE 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R.							Direzione del vento.			
	5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	5h m	11h m	5h s	11h s
	poll. lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27 10,0	9,9	10,0	9,7	9,4	9,7	10,0	N E	S	S E	E
2	27 10,1	10,4	10,1	9,7	9,4	9,4	9,5	E S E	S E(1)	S	S E
3	27 9,3	9,2	9,0	9,1	8,4	8,6	8,4	S E(1)	S E(1)	E S E	S B
4	27 7,5	7,6	7,6	7,2	7,2	8,1	8,4	S E	N O	N N O	N E
5	27 9,2	9,5	9,8	9,5	8,8	9,3	9,2	E	S	E S E	E
6	27 9,0	8,9	8,6	8,4	8,3	8,9	9,1	E	S E(1)	S E	N N E
7	27 9,0	9,2	9,1	8,6	8,4	9,1	9,2	O	N O	O S O	N E
8	27 9,3	9,7	9,7	9,4	9,3	9,7	10,0	S E	S E	S E	E
9	27 10,2	10,5	10,7	10,4	10,2	10,5	10,9	E	S E	S S O	N E
10	27 10,9	11,1	11,2	10,8	10,5	10,7	10,8	E N E	N O	N N O	E
11	27 10,7	10,7	10,6	10,1	10,1	10,1	10,0	E	N N O	S O	N
12	27 9,5	9,6	9,6	8,9	8,6	8,5	8,3	N	O N O	S O	N
13	27 7,5	7,4	7,2	6,6	6,0	5,8	5,6	N N O	S E	E S E	N N E
14	27 4,1	3,5	3,0	2,6	1,8	1,9	2,0	E S E(1)	E N E	E	E N E
15	27 1,9	2,0	2,2	1,8	1,6	2,4	3,1	E S E	S	S	N N E
16	27 4,5	5,3	5,6	5,6	5,6	5,7	6,0	N E	E S E	E	E S E
17	27 6,4	6,8	7,1	7,0	6,8	7,1	7,4	E S E	S E(1)	S	S E(1)
18	27 7,6	7,4	7,1	6,8	6,6	7,0	7,3	S E	S E(1)	E(1)	E(2)
19	27 7,0	7,1	7,3	7,4	7,5	7,6	7,4	S E	E S E	E	E
20	27 7,1	7,1	7,5	8,1	8,2	9,3	9,9	O N O	S S O	E N E	S E
21	27 10,8	11,1	11,4	11,2	11,2	11,6	11,5	N	S	E N E	N E
22	27 11,1	11,2	11,2	10,9	10,3	10,4	10,3	N E	E S E	E S E	N N E
23	27 9,8	10,0	10,0	9,6	9,2	9,2	9,3	N	N E	E N E	N E
24	27 9,0	8,2	9,3	8,7	8,4	8,4	8,5	E N E	N	E S E	E S E
25	27 8,0	8,2	8,5	8,3	8,1	8,6	8,5	S E	E	E S E	E
26	27 8,8	9,2	9,4	9,2	9,0	9,1	9,9	N E	S O	E	N O
27	27 10,2	10,7	10,9	10,7	10,5	10,9	10,9	N E	S	S E	S E
28	27 10,5	10,6	10,7	10,0	10,0	10,1	10,2	N	S S E	S S E	N E
29	27 9,6	9,7	9,7	9,1	9,0	8,8	8,7	N E	S O	N N E	N
30	27 8,0	8,2	8,3	7,9	7,9	7,9	7,9	E N E	E	N E	E N E

Altezza massima del barometro poll. 27 lin. 11,50
» minima.............................. » 27 » 1,56
» media.............................. » 27 » 8,5303.

SETTEMBRE 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R.							Stato del cielo	
	5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
1	+12,7	+16,4	+19,5	+20,2	+20,3	+17,7	+15,0	Sereno.	Sereno.
2	14,5	17,1	19,5	20,6	19,7	17,6	15,5	Sereno.	Sereno.
3	14,9	15,8	17,4	15,7	13,8	14,4	14,2	Ser. nuv.	Nuv. piogg.
4	14,2	12,9	17,0	19,4	18,2	14,6	12,2	Ser. nuv. piog.	Sereno.
5	12,0	13,2	16,4	18,0	17,6	15,6	14,1	Sereno.	Sereno.
6	13,0	15,0	17,2	16,8	14,3	13,3	10,9	Ser. nuv.	Ser. nuv.
7	11,0	13,1	16,3	18,0	17,2	14,6	11,9	Ser. nuv.	Piogg. ser.
8	11,6	13,6	17,0	17,8	17,2	15,0	12,9	Nuv. ser.	Sereno.
9	10,8	14,4	17,3	18,2	17,8	15,6	12,3	Ser. nuv.	Sereno.
10	11,0	12,8	17,2	18,7	18,7	16,1	13,4	Sereno.	Sereno.
11	11,4	14,8	18,4	19,5	18,2	17,0	14,5	Sereno.	Ser. nuv.
12	12,4	15,5	17,9	19,5	18,5	15,9	14,3	Sereno.	Nuvolo.
13	13,8	14,8	18,1	18,0	16,8	16,3	14,6	Nuvolo.	Nuv. piogg.
14	13,7	15,4	14,2	16,9	16,8	14,0	12,9	Nuv. piogg.	Nuv. piog. tem.
15	12,2	13,0	16,3	15,9	15,3	11,8	10,4	Ser. nuv.	Nuv. piog. tem. ser.
16	8,5	11,6	14,9	16,3	15,8	14,7	13,9	Sereno.	Ser. nuv.
17	13,2	14,8	16,7	17,3	16,2	15,2	14,3	Nuv. piogg.	Nuv. ser.
18	13,7	13,6	15,4	17,0	16,7	15,3	14,8	Nuv. piogg.	Nuv. piog. ser.
19	13,4	14,2	14,2	15,5	13,7	12,6	11,8	Nuv. piogg.	Nuvolo.
20	9,5	10,2	10,5	13,1	12,8	10,5	10,4	Piogg. nuv.	Nuv. ser.
21	8,7	9,6	14,1	15,4	13,8	11,1	9,2	Ser. nuv.	Ser. nuv.
22	8,8	10,8	13,0	13,6	12,3	11,1	9,9	Ser. nuv.	Nuv. piogg.
23	9,8	10,0	11,4	12,7	12,4	12,2	12,0	Piogg. nuv.	Nuvolo.
24	11,3	12,0	13,1	14,8	13,8	13,1	12,3	Piogg. nuv.	Nuv. piogg.
25	12,3	12,8	12,9	14,1	14,2	13,4	10,3	Pioggia.	Nuvolo.
26	11,0	12,8	14,8	16,8	15,2	13,2	11,2	Nuv. ser.	Sereno.
27	8,4	10,5	13,6	15,8	14,1	12,6	10,8	Ser. nuv.	Ser. nuv.
28	10,0	11,3	15,0	15,8	14,8	12,9	11,0	Ser. nuv.	Sereno.
29	9,4	10,9	14,8	16,8	17,4	14,6	11,8	Ser. nuv.	Ser. nuv.
30	11,8	12,0	13,3	15,3	13,4	12,9	12,3	Ser. nuv. piog.	Nuv. piogg.

Altezza massima del termometro + 20°,64 Temp.a massima + 21°,7
+ minima................ + 8,40 " minima + 6,7
" media................ + 13,9230.
Quantità della pioggia linee 47,74.

OTTOBRE 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	Direzione del vento. 5^h m	11^h m	5^h s	11^h s
	poll. lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27 8,2	8,8	9,5	9,4	9,3	9,7	10,1	E	E(*)	E S E	N E
2	27 10,1	10,5	10,5	10,1	10,0	9,7	9,5	E	S E	S E	N
3	27 8,4	8,2	8,1	7,4	7,0	6,9	6,6	N E	E	N N E	N N E
4	27 6,1	5,8	5,9	5,7	5,5	5,6	5,4	N	E	E	E N E
5	27 5,5	5,7	5,9	5,8	6,3	7,2	7,8	N N E	E	N E	N
6	27 9,9	9,4	9,8	9,5	9,6	10,0	10,4	N E	E	E	N N E
7	27 10,1	10,9	11,1	10,6	10,3	10,4	10,4	E N	E	S	N O
8	27 9,7	10,3	10,4	9,9	9,6	9,8	10,0	E N	S S O	S S E	N N E
9	27 9,9	10,1	10,3	10,1	9,8	10,3	10,4	N	S	O S O	E
10	27 10,7	11,2	11,4	11,2	11,0	11,2	11,4	S E	S E	S E	E
11	27 12,0	12,3	12,6	12,1	11,8	11,9	12,0	E	S O	O S O	E S E
12	27 11,8	11,7	11,4	10,5	10,3	10,6	11,2	E	O	E	S S E(1)
13	27 12,1	12,3	12,4	11,7	11,8	12,1	12,6	N	S E	E	E N E
14	27 13,0	13,4	13,2	12,6	12,0	11,8	11,5	N E	E	N O	N E
15	27 10,5	10,1	9,4	8,4	8,2	7,9	7,6	N O	S S O	O	S O
16	27 7,3	7,6	6,9	6,2	5,9	5,8	5,7	N E	O N O	N O	O S O
17	27 5,0	4,8	4,9	4,6	4,8	4,9	5,8	O	O	S E	E N E
18	27 6,4	6,8	7,4	7,4	7,4	7,9	8,0	N N O	E	E N E	N E
19	27 7,6	7,1	6,4	5,2	3,4	3,0	2,2	N E	S O	O S O	O
20	27 2,4	2,7	3,6	3,6	3,9	4,4	4,7	N N O(3)	N N O(3)	O N O	N O(2)
21	27 4,7	4,9	4,8	4,5	4,8	5,3	5,7	N E(1)	N O(3)	N N O	N N O
22	27 6,2	6,4	6,7	6,3	6,2	6,6	6,6	S	S S O	S O	N N E
23	27 6,7	7,2	7,3	7,1	7,8	7,7	8,3	E	S E	S S O	N
24	27 8,0	8,0	7,6	6,5	5,8	5,1	4,5	N O	N E	N E	O
25	27 3,6	3,5	3,5	3,4	3,6	4,7	5,2	S O	S S O	S O	N(1)
26	27 5,5	6,1	6,5	6,2	6,5	6,6	6,8	S O	O	S O	N
27	27 7,5	8,2	8,4	7,9	7,7	7,6	8,0	N	E S E	S E	E N E
28	27 7,4	7,7	7,8	7,5	7,5	7,4	7,8	N E	N	E N E	O
29	27 7,7	7,5	7,6	7,3	7,2	7,9	7,4	N E	E N E	S S O	E N E(3)
30	27 7,0	7,2	7,4	7,1	7,0	7,0	7,2	E N E(3)	E N E(3)	E S E(3)	E N E(3)
31	27 5,8	5,2	5,2	5,2	5,6	6,6	6,7	E N E(3)	S E(3)	E N E	E N E

Altezza massima del barometro poll. 27 lin. 11,50
» minima.............. » 27 » 1,56
» media............... » 27 » 7,9232.

OTTOBRE 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+11,8	+11,4	+12,3	+12,4	+12,7	+12,1	+11,5	Nuv. piogg.	Nuv. ser.
2	+10,3	12,6	14,7	14,9	15,0	11,8	9,9	Ser. nuv.	Nuvolo.
3	9,0	10,0	12,8	15,3	14,4	12,1	11,3	Ser. nuv.	Nuvolo.
4	11,0	11,3	13,1	13,3	12,3	11,8	11,3	Nuv. piogg.	Nuv. piogg.
5	9,6	10,1	14,7	14,2	9,1	8,9	7,8	Piog. nuv. ser.	Nuv.tem.piog.ser.
6	5,7	7,0	11,4	12,0	11,2	10,3	8,8	Ser. nuv.	Ser. nuv.
7	7,0	8,1	12,2	12,8	11,7	10,8	8,7	Ser. nuv.	Ser. nuv.
8	6,8	7,7	11,8	12,6	12,2	10,3	8,3	Sereno.	Sereno.
9	6,7	7,9	12,7	13,6	11,8	10,2	9,0	Sereno.	Sereno.
10	8,4	9,0	12,4	13,8	12,8	10,3	7,8	Sereno.	Sereno.
11	7,0	8,7	12,3	14,0	12,1	10,5	8,7	Sereno.	Ser. nuv.
12	8,7	10,0	12,5	13,9	13,0	10,6	9,0	Nuv. ser.	Ser. nebb.
13	7,8	9,1	11,8	12,3	11,4	9,5	7,3	Nebb. ser.	Sereno.
14	5,7	7,1	10,2	11,0	9,9	7,9	5,4	Nuvolo.	Nuv. ser.
15	3,3	4,0	9,8	12,0	11,8	9,4	8,1	Sereno.	Sereno.
16	4,8	5,5	10,8	12,5	10,0	9,4	8,1	Ser. nuv.	Ser. nuv.
17	6,6	7,8	12,3	14,0	11,8	10,9	9,3	Ser. nuv.	Ser. nuv.
18	7,2	7,7	11,8	13,1	10,0	9,8	8,5	Sereno.	Ser. nuv.
19	8,2	9,0	11,6	12,4	10,5	9,1	7,9	Nuv. ser.	Nuv. ser.
20	9,8	9,1	12,0	13,2	11,8	10,8	10,1	Sereno.	Sereno.
21	8,7	9,0	12,5	13,3	10,8	9,1	8,1	Sereno.	Sereno.
22	6,3	5,5	10,0	11,6	10,6	7,4	6,6	Ser. nuv. neb.	Sereno.
23	4,4	6,2	8,1	10,1	9,0	7,6	4,1	Ser. nuv. neb.	Nuv. piogg.
24	2,0	4,0	5,7	6,2	6,2	5,3	3,4	Ser. nuv.	Ser. nuv.
25	2,6	3,1	7,3	10,5	9,0	7,5	7,4	Ser. nuv.	Ser. nuv. piog.
26	2,1	2,9	2,0	11,6	9,3	8,0	6,5	Sereno.	Sereno.
27	1,9	2,6	8,5	9,4	7,7	6,4	5,8	Sereno.	Ser. nuv. piog.
28	5,3	5,7	6,4	6,5	6,9	6,9	6,2	Piogg. nuv.	Pioggia.
29	5,4	5,8	6,7	7,0	7,5	7,2	7,5	Pioggia.	Pioggia.
30	10,5	10,8	12,2	12,5	11,7	11,6	11,7	Piogg. nuv.	Nuv. lampi.
31	10,7	10,8	11,1	10,7	10,1	9,8	9,4	Nuv.lam.pio.tem.	Piogg. nuv.

Altezza massima del termometro + 15°,25 Temp.ª massima + 16°,00
" minima. . . . . + 1 ,90 " minima + 1 ,50
" media. . . . . + 9 ,1958.

Quantità della pioggia linee 32,71.

NOVEMBRE 1840.

Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5^h m		8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	Direzione del vento. 5^h m	11^h m	5^h s	11^h s
	poll.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27	7,7	8,5	9,0	9,6	8,9	9,3	9,6	E N E	E	S O	N
2	27	9,7	10,0	10,1	9,3	9,3	9,1	8,6	N E	E N E	E	E[2]
3	27	7,9	7,7	7,4	6,5	6,2	5,8	5,5	E	E N E	E N E	E N E
4	27	5,2	5,6	6,1	6,1	6,2	6,7	7,0	E N E[1]	E S E	E N E	E N E
5	27	7,0	7,4	7,4	6,8	6,5	6,8	6,9	N N E	N	O N O	S S O
6	27	6,6	6,9	7,2	6,9	6,8	6,8	6,6	N E	E N E	E N E	E
7	27	4,1	3,9	4,7	4,5	4,8	5,5	5,9	E[2]	S S O	S O	E N E
8	27	6,0	6.3	6,6	6,4	6,4	6,9	7,0	E N E	E	S S O	N O
9	27	6,8	6,5	6,2	5,7	5,7	5,6	5,5	N E	E N E	N O	S S O
10	27	5,3	5,5	5,4	5,1	4,9	4,6	4,8	O	O S O	O	O
11	27	5,0	5,2	5,8	5,5	5,3	5,4	5,1	O	O S O	N E	N E
12	27	4,8	4,1	5,7	5,5	5,7	6,2	6,7	O	S S O	S E	N N E
13	27	6,6	6,7	6,5	6,1	5,6	5,2	4,9	N[2]	N E	N E	S S E
14	27	3,4	3,3	3,4	3,2	3,3	3,3	3,6	E S E	S S E	N O	O S O
15	27	4,5	5,4	5,6	6,1	5,9	6,0	6,0	O	S O	S S O	N
16	27	6,2	6,8	7,2	7,5	7,6	7,6	8,1	S O	S S E	S S O	O
17	27	8,4	9,1	9,5	9,1	9,3	9,4	10,2	S O	N O	S S E	N N E
18	27	9,9	9,9	9,9	9,4	9,2	9,4	9,5	S	S O	S S O	N
19	27	9,1	8,9	9,0	8,0	7,6	6,9	6,1	S E	E S E	S E	E E S[1]
20	27	4,5	4,1	5,2	4,9	4,6	4,5	5,1	E N E	S	S O	N[1]
21	27	6,4	7,1	7,8	7,3	7,3	7,2	6,3	N E	N E	E	E
22	27	4,7	4,5	4 4	3,9	4,0	4,4	4,6	E	E N E	O N O	O S O
23	27	5,1	5,3	6,1	6,2	6,5	7,2	7,8	O	E N E	O S O	N
24	27	8,1	8,7	8,7	8,3	8,3	8,7	8,7	S O	S	S	N N E
25	27	8,1	8,4	8,9	9,1	9 8	9,2	10,6	N E	N O	N E	E N E
26	27	11,7	12,1	12,5	12,1	12,0	12,4	12,8	N	N E	S S O	N N E
27	27	13,0	13,2	13,0	12,1	11,8	11,8	11,7	N N O	S O	S O	N O
28	27	11,5	11,8	12,1	11,8	11,5	11,7	11,9	N E	E	E	S O
29	27	12,2	12,7	12,5	12,2	12,1	12,2	11,9	S O	S E	O N O	S O
30	27	11,1	10,8	10,6	9,5	9,1	9,1	8,9	O	S	O S O	O S O

Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 1,20
" minima.................. " 27 " 3,17
" media................... " 27 " 7,5083.

NOVEMBRE 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R. 5^h m	8^h m	11^hm	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	Stato del cielo da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	+ 9,5	+ 9,5	+12,3	+12,6	+11,6	+10,5	+ 8,8	Ser. nuv.	Ser. nuv.
2	8,0	8,6	9,8	11,1	10,6	10,5	9,8	Ser. nuv.	Nuv. piogg.
3	9,0	9,1	10,0	10,3	10,2	10,1	10,7	Pioggia.	Pioggia.
4	10,6	10,6	11,8	11,4	11,1	10,4	9,6	Nuv. piogg.	Ser. nuv.
5	8,4	8,1	11,9	11,1	10,6	10,0	9,4	Ser. nuv.	Ser. nuv. piog.
6	8,7	9,3	10,6	10,2	10,0	10,0	9,4	Piogg. dirotta.	Piogg. dirotta.
7	9,7	9,9	10,2	12,3	11,8	9,1	7,6	Piog. nuv. ser.	Sereno.
8	6,1	6,9	10,6	12,1	11,2	9,8	8,2	Sereno.	Sereno.
9	8,3	8,5	8,5	8,8	8,5	8,5	8,2	Nuv. piogg.	Piogg. nuv.
10	7,5	7,2	8,6	9,0	8,9	8,9	8,3	Nuvolo.	Nuvolo.
11	4,5	4,6	6,8	9,4	9,0	6,8	7,0	Nebb. ser.	Ser. nuv. neb.
12	5,5	5,6	9,5	9,9	8,8	8,1	7,7	Ser. nuv.	Ser. nuv.
13	8,4	8,1	8,8	8,6	8,8	8,8	8,7	Ser. nuv. neb.	Nuv. piogg.
14	8,5	9,2	10,6	9,0	9,1	8,5	6,6	Piogg. nuv.	Piog. nuv. ser.
15	4,5	4,7	8,5	9,0	7 4	7,0	5,5	Sereno.	Sereno.
16	3,6	3,7	7,2	9,9	8,6	7,4	5,9	Sereno.	Sereno.
17	4,5	4,7	7,6	8,8	7,8	7,8	7,7	Ser. nuv.	Nuvolo.
18	7,5	7,8	9,1	9,7	9,0	9,1	8,6	Ser. nuv. neb.	Nuv. piogg.
19	8,5	8,6	9,3	9,2	9,3	8,8	8,6	Piog. nuv. neb.	Pioggia.
20	8,4	8,3	10,9	11,2	9,9	8,5	6,8	Piog. ser. nuv.	Nuv. lam. piog.
21	6,3	5,3	8,5	8,5	6,4	5,5	4,6	Nuv. ser.	Ser. nuv.
22	3,9	4,4	4,3	5,1	4,8	3,6	1,1	Nuv. piogg.	Nuv. ser.
23	0,7	0,9	1,8	5,7	4,8	4,0	3,7	Sereno.	Sereno.
24	2,6	1,4	5,4	6,7	5,5	3,0	2,0	Sereno.	Sereno.
25	0,4	0,5	4,4	6,5	5,6	3,4	1,8	Sereno.	Sereno.
26	1,8	1,2	4,3	5,4	4,1	2,9	0,6	Ser. nebb.	Sereno.
27	− 0,3	+ 0,5	4,2	5,3	3,5	2,1	0,7	Sereno.	Sereno.
28	− 0,2	− 0,7	+ 3,1	4,7	3,1	1,7	0,2	Sereno.	Sereno.
29	− 0,9	− 1,9	− 0,2	+ 0,8	− 0,2	− 0,6	− 1,3	Sereno.	Nebb. densa.
30	− 1,9	− 2,3	− 0,2	+ 2,5	+ 1,7	+ 0,4	+ 0,1	Ser. nuv. neb.	Nuv. neb. ser.

Altezza massima del termometro + 12°,62 Temp.ª massima + 13°,5
" minima.............. − 2 ,28 " minima − 2 ,0
" media................ + 6 ,5779.
Quantità della pioggia linee 62,63.

DICEMBRE 1840.

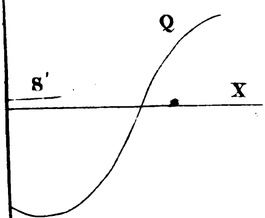
Giorni.	Barometro ridotto alla temperatura + 10° R. 5h m	8h m	11h m	2h s	5h s	8h s	11h s	Direzione del vento. 5h m	11h m	5h s	11h s
	poll. lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.				
1	27 8,3	8,6	9,5	9,1	9,6	10,2	10,4	N E	E	E N E	N N E
2	27 10,6	10,7	10,8	10,2	10,1	10,3	10,0	O	S O	S S O	N O
3	27 9,0	9,0	9,3	9,0	9,2	10,1	10,8	N E	N E	E N E	N E
4	27 11,1	11,3	11,7	11,3	11,8	12,0	12,0	N E	E N E	S S E	N
5	27 12,1	12,2	12,1	11,1	11,1	11,3	11,2	N	O	S E	N
6	27 11,1	11,1	10,8	10,7	11,0	10,4	10,8	O	S E	E N E	N N O
7	27 10,8	10,8	10,6	9,8	9,5	9,4	9,2	N E	S E	O	N N O
8	27 8,2	8,0	7,9	7,0	6,1	6,3	6,1	N	N N E	N E	S O
9	27 5,7	5,8	6,2	5,9	6,4	6,7	7,5	S O	S O	S O	S O
10	27 7,8	8,3	8,9	8,5	9,0	9,2	9,5	S O	E N E	E N E	E
11	27 9,4	9,6	9,7	9,2	9,4	9,5	9,6	N E	E S E	E	N N E
12	27 9,6	9,8	10,0	9,5	9,5	9,2	9,4	N E	N E	N	S O
13	27 8,9	8,6	8,8	8,4	8,3	8,3	7,8	S	N E	N N E	N N E
14	27 8,6	8,8	8,9	8,6	8,5	8,1	8,2	E	N N E	E	S S E
15	27 7,0	6,4	6,4	5,5	5,3	5,0	5,2	S E	S E	N E	N N E
16	27 5,2	5,4	5,8	5,4	5,4	5,1	5,0	E	O	O	S O
17	27 4,9	5,3	6,1	6,3	6,3	6,4	6,5	S O	E N E	N N E	E'
18	27 6,8	7,0	6,9	6,9	6,7	6,8	6,9	E N E	N O	O S O	N O
19	27 5,8	5,6	5,8	4,7	4,0	4,0	4,3	O	S O	S O	S O
20	27 4,4	4,8	4,3	5,3	6,5	6,8	7,0	O	S O	S E	O S O
21	27 7,7	8,4	9,2	9,6	10,5	10,9	11,7	O	S E	N E	N E
22	28 0,1	0,6	1,2	1,3	1,4	1,8	2,1	S S O	N N O	N E	E N E
23	27 13,5	13,4	13,2	12,3	12,0	11,5	11,5	E	N E	N N E	N
24	27 11,5	11,9	12,3	12,0	12,4	12,8	13,1	S	S	N	N E
25	28 1,3	2,0	2,5	2,6	2,9	3,7	4,1	N E	E N E	E N E	E N E
26	28 4,0	4,5	4,6	3,8	3,9	4,0	4,1	N	S S O	O S O	O
27	28 4,2	4,5	4,8	4,3	4,2	4,1	4,4	S O	S O	O S O	O S O
28	28 4,0	3,9	4,0	3,3	3,1	3,0	2,7	N O	N O	S S O	S O
29	27 14,0	13,7	13,2	12,6	12,0	11,7	11,6	S O	S O	S O	S O
30	27 11,1	11,0	10,8	10,0	10,6	10,0	10,0	S O	S O	S S E	N E
31	27 9,9	9,9	9,6	8,6	7,9	7,6	6,6	E N E	N N E	S S O	O

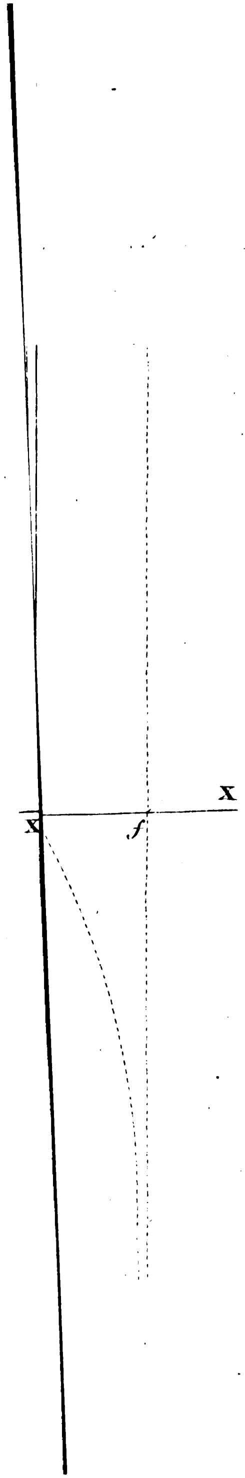
Altezza massima del barometro poll. 28 lin. 4,75
„ minima . . . . „ 27 „ 3,95
„ media . . . . „ 27 „ 9,9097.

DICEMBRE 1840.

Giorni.	Altezza del termometro R.							Stato del cielo	
	5^h m	8^h m	11^h m	2^h s	5^h s	8^h s	11^h s	da mezzanotte a mezzodì.	da mezzodì a mezzanotte.
	°	°	°	°	°	°	°		
1	– 0,3	– 0,3	+ 2,0	+ 4,3	+ 3,1	+ 2,0	+ 1,7	Sereno,	Sereno.
2	+ 1,9	+ 1,9	3,0	3,6	3,1	3,2	3,0	Ser. nuv.	Nuv. nebb.
3	3,1	3,2	3,8	4,4	4,3	4,1	3,8	Nuv. nebb.	Nuv. piogg.
4	3,5	3,2	3,8	4,9	3,3	2,3	0,9	Nuvolo.	Ser. nuv. neb.
5	0,6	0,6	3,1	3,1	2,2	0,2	0,0	Ser. nuv.	Sereno.
6	– 0,2	+ 0,3	2,2	3,3	1,1	0,2	– 0,3	Sereno,	Sereno.
7	– 1,3	– 1,4	+ 1,1	2,7	0,7	0,6	0,0	Sereno.	Ser. nebb.
8	– 1,6	– 1,2	+ 0,3	2,0	1,1	1,2	1,0	Ser. nuv.	Nuvolo.
9	0,0	+ 0,1	2,5	3,8	2,1	1,4	0,3	Nuv. ser.	Sereno.
10	– 0,8	– 0,8	+ 0,2	4,5	3,6	2,4	1,2	Sereno.	Nuv. nebb.
11	+ 1,3	1,2	2,5	3,3	2,8	2,0	1,4	Nuv. ser.	Ser. nuv. neb.
12	+ 1,2	1,1	1,4	2,1	2,1	1,6	1,6	Nuvolo.	Nuvolo.
13	+ 1,0	1,5	1,9	2,0	1,9	1,7	1,2	Nuvolo.	Nuvolo.
14	+ 1,2	0,5	0,9	1,4	0,6	0,4	0,4	Nuvolo.	Nuvolo.
15	– 0,4	– 0,7	– 0,2	+ 0,3	– 0,2	– 0,2	– 1,4	Nuv. neve.	Nuv. neve.
16	– 0,7	– 1,1	– 0,5	– 0,1	– 0,1	– 0,2	+ 0,2	Nuvolo.	Nuv. neve.
17	– 0,2	– 0,2	+ 0,3	0,5	0,7	0,3	– 0,1	Nuvolo.	Nuv. neve.
18	– 0,1	– 0,1	– 0,4	+ 1,0	– 0,5	0,0	+ 0,6	Neve.	Neve, piogg.
19	+ 1,5	0,5	1,2	1,0	0,9	0,9	0,6	Piogg. nuv.	Nuv. piogg.
20	+ 0,9	0,9	1,8	1,7	1,3	1,1	– 0,1	Piogg. nuv.	Nuv. nebb.
21	– 0,7	– 0,9	– 0,3	+ 0,2	0,5	0,6	1,6	Nuv. nebb.	Nuv. nebb.
22	+ 1,3	1,3	1,1	2,2	2,4	1,7	1,2	Nuv. nebb.	Nuvolo.
23	+ 1,3	0,5	1,3	1,5	0,5	– 0,2	– 0,2	Nuvolo.	Nuv. ser.
24	– 0,8	– 1,1	+ 0,8	1,9	1,0	0,3	– 1,0	Sereno.	Sereno.
25	– 1,8	– 1,5	+ 0,8	1,7	0,6	– 0,2	– 1,6	Sereno.	Sereno.
26	– 3,1	– 3,2	– 0,8	+ 1,0	0,1	– 0,8	– 1,5	Sereno.	Sereno.
27	– 3,2	– 4,3	– 1,9	+ 0,7	– 0,6	– 0,8	– 2,1	Sereno.	Sereno.
28	– 3,5	– 5,0	– 2,3	+ 1,4	– 2,4	– 2,8	– 3,1	Sereno.	Ser. nebb.
29	– 4,0	– 4,9	– 0,2	+ 1,0	– 0,5	– 0,7	– 2,1	Nebb. ser.	Ser. nebb.
30	– 3,6	– 4,3	– 0,8	+ 1,9	– 0,8	– 1,0	– 0,9	Ser. nebb.	Ser. nuv. neb.
31	– 2,0	– 1,8	+ 0,5	+ 1,6	+ 0,7	– 1,4	– 2,0	Ser. nuv.	Sereno.

Altezza massima del termometro + 4°,88 Temp.ª massima + 5°,50
» minima . . . . – 5,00 » minima – 6,00
» media . . . . + 0,4997.
Quantità della pioggia, neve sciolta e nebbia precipitata linee 15,80.


Q
S'
X


X
X
f