ACCADEMIA NAZIONALE DELLE SCIENZE DETTA DEI XL
HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
INAF - OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI BRERA
PONTIFICIA UNIVERSITÀ GREGORIANA

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume XI/2
Opere Scientifiche
Geodesia

OPERE VARIE DI GEODESIA

a cura di Elio Antonello

Commissione Scientifica Nazionale
Istituita con D.M. 27 Aprile 2006 e successive integrazioni

2021

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Commissione scientifica

Presidente: Elio Antonello (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Vicepresidente: Tommaso Maccacaro (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Segretario Tesoriere: Mario Carpino (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)

Ugo Baldini (Università degli Studi di Padova)
Fabio Bevilacqua (Università degli Studi di Pavia)
Vincenzo Cappelletti (Istituto di Studi Germanici)
Paolo Casini (Università di Roma «La Sapienza»)
Guido Cimino (Università di Roma «La Sapienza»)
Žarko Dadić (Institute of the History and Philosophy of Science, Zagabria)
Alessandra Fiocca (Università degli Studi di Ferrara)
Paolo Freguglia (Università degli Studi dell'Aquila)
Paolo Galluzzi (Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze)
Livia Giacardi (Università degli Studi di Torino)
Giovanni Micheli (Università degli Studi di Milano)
Giovanni Paoloni (Università degli Studi della Tuscia, Viterbo)
Giovanni Pareschi (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera)
Luigi Pepe (Università degli Studi di Ferrara)
Edoardo Proverbio (INAF – Osservatorio Astronomico di Brera; S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia)
Clara Silvia Roero (Università degli Studi di Torino)
Giancarlo Setti (Università degli Studi di Bologna)
Rita Tolomeo (Università di Roma «La Sapienza»)
Maurizio Torrini (Università degli Studi di Napoli «Federico II»)
Pasquale Tucci (Università degli Studi di Milano)

EDIZIONE NAZIONALE
DELLE OPERE E DELLA CORRISPONDENZA
DI RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Volume XI/2
Opere Scientifiche
Geodesia

Opere varie di Geodesia

a cura di Elio Antonello

Enti patrocinatori dell'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich:
- Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
- Accademia Croata di Scienze e Arti
- INAF – Osservatorio Astronomico di Brera
- Pontificia Università Gregoriana

Copyright © 2021 Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Pubblicato nel 2021

Realizzazione: Commissione Scientifica per l'Edizione Nazionale delle Opere e della Corrispondenza di Ruggiero Giuseppe Boscovich

Sede Legale e Operativa: Osservatorio Astronomico di Brera, via Brera 28, 20121 Milano

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge e a norma delle convenzioni internazionali

Indice

1.57 *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Eglise, entrepris par l'ordre et sous les auspices du Pape Benoit XIV, pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat ecclésiastique, par les PP. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, traduit du latin, augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique. Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement*, a Paris, chez N. M. Tilliard, Libraire, Quai des Augustins, à S, Benoit, MDCCLXX 11

1.57

Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Eglise, entrepris par l'ordre et sous les auspices du Pape Benoit XIV, pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat ecclésiastique, par les PP. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, traduit du latin, augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique. Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement, a Paris, chez N. M. Tilliard, Libraire, Quai des Augustins, à S, Benoit, MDCCLXX

1055

S
14
23

La traduction est du Jésuite P. Hugon, qui avait pris le nom de Chatelain.

Corr. d'hon. du B. de Zach VII 4

VOYAGE

ASTRONOMIQUE

ET GEOGRAPHIQUE.

VOYAGE

ASTRONOMIQUE

ET GEOGRAPHIQUE.

VOYAGE

ASTRONOMIQUE ET GEOGRAPHIQUE,

DANS L'ÉTAT DE L'EGLISE,

ENTREPRIS PAR L'ORDRE ET SOUS LES AUSPICES

DU PAPE BENOIT XIV,

POUR mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat eccléſiaſtique,

Par les PP. MAIRE & BOSCOVICH de la Compagnie de Jeſus,

TRADUIT DU LATIN,

AUGMENTÉ de Notes & d'extraits de nouvelles meſures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique.

Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement.

A PARIS,

Chez N. M. TILLIARD, Libraire, Quai des Auguſtins, à S. Benoît.

M. DCC. LXX.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

BIBLIOTHECA MEDIOLANENSIS

AVERTISSEMENT.

LE Livre dont on donne la traduction fut imprimé à *Rome* en 1755, & dédié au Pape *Benoît XIV*, sous les auspices duquel la mesure des dégrés du méridien de *Rome* avoit été entreprise, à la persuasion & sous la protection spéciale du Cardinal *Valenti*, son premier Ministre. C'est l'ouvrage de deux habiles Mathématiciens, déja assez connus dans la république des Lettres.

Presque tout ce qui a été écrit depuis près d'un siecle sur la figure de la Terre, a été écrit en françois. La mesure réitérée de 9 ou 10 dégrés en France, celle de trois dégrés du méridien sous l'équateur, d'un dégré sous le cercle polaire, de deux dégrés au Cap de Bonne Espérance, sont le sujet d'autant d'ouvrages françois; l'ouvrage même espagnol, composé sur cette matiere, a été traduit en françois: celui ci ne devoit point être excepté de la loi commune; il renferme des choses trop intéressantes, & pour le progrès de l'Astronomie, & pour l'honneur de notre nation; & l'on ne sera pas fâché de le voir placé à côté de ceux de MM. *de Maupertuis*, *Clairaut*, *Bouguer*, *de la Condamine*, *Cassini de Thury*, *de la Caille*, & de plusieurs autres Auteurs François qui ont consacré leurs veilles & leurs travaux académiques à la résolution d'une question également nécessaire à la navigation, la Géographie, la Physique & l'Astronomie. D'ailleurs ces sortes d'ouvrages ne peuvent que gagner à être traduits en françois: un grand nombre d'instrumens, & d'additions aux instrumens d'Astronomie, ont des noms en françois, & ne se peuvent rendre en latin

que par des expreſſions équivoques, ou des périphraſes; ce qui n'a pas donné peu de peine au P. *Boſcovich*, comme il le témoigne lui-même au commencement du quatrieme Livre, où il donne la deſcription des inſtrumens qui ont ſervi à ſa meſure. De plus, l'expérience prouve que, quoiqu'on entende bien le latin; quand on n'eſt pas dans une habitude continuelle de le lire, les inverſions de la langue latine fatiguent l'attention; ce qui doit arriver ſur-tout dans les ouvrages de Mathématique qui demandent déja par eux-mêmes une attention ſuivie. Enfin ce qui rend cette traduction plus néceſſaire, c'eſt que la plupart des exemplaires de l'original ſont renfermés à *Rome* dans la Calchographie ou Imprimerie papale; qu'ils ne ſe débitent que là; qu'on n'en a envoyé à aucun Libraire étranger, & qu'il n'y en a qu'un petit nombre en France, où ils devroient être le plus répandus.

L'ouvrage eſt diviſé en cinq Livres: le premier, le quatrieme & le cinquieme ſont du P. *Boſcovich*; les deux autres du P. *Maire*. Le premier contient la relation de ce qu'on a fait pour découvrir la figure de la Terre, & l'hiſtoire de ce voyage en particulier hiſtoire, plus variée que ne ſembloit le promettre un ſi court trajet dans le pays du monde le plus connu. Le ſecond donne avec une élégante préciſion la meſure du dégré. Le troiſieme réforme la Carte géographique de l'Etat de l'Egliſe qui étoit fort défectueuſe, & contient des remarques très utiles. Ce Livre eſt preſque l'unique Traité que nous ayons d'Aſtronomie pratique: on y trouvera pluſieurs choſes d'une invention nouvelle, pour la perfection des inſtrumens d'Aſtronomie, entre autres un

excellent micrometre, ou instrument de vérification, dont l'usage ne peut devenir trop tôt universel. Le cinquieme traite de la figure de la Terre, déduite de l'équilibre & de la mesure des dégrés. Il faut avoir lu ce Livre pour en sentir tout le mérite : on n'y emploie que la plus simple Géométrie pour résoudre quantité de problêmes qu'on n'avoit cru jusqu'à présent accessibles qu'aux nouvelles méthodes.

Un grand nombre d'Académiciens de l'Académie royale des Sciences sont nommés & cités dans cet ouvrage : on y voit rassemblées, comme sous un point de vue, leurs plus subtiles recherches. C'est un honneur pour cette Compagnie de voir des Souverains Pontifes travailler sur son plan à la perfection de l'Astronomie & de la Géographie.

On a ajouté quelques Notes pour plus grand éclaircissement du texte. Les dernieres Notes du cinquieme Livre contiennent les mesures de dégrés nouvellement faites dans l'Autriche, la Moravie, la Stirie, la Hongrie, le Piémont & l'Amérique septentrionale ; la comparaison de ces dégrés avec ceux dont on avoit déja la mesure ; & le résultat de cette comparaison pour l'ellipticité, la densité, la grandeur & la figure de la Terre, tel que le P. *Boscovich* l'a tiré lui-même.

On propose de plus la Table suivante, calculée sur les rapports marqués au Livre IV, n°. 373, du palme, & du pas romain à la toise & au pied de *Paris*.

TABLE

POUR réduire les pas & les palmes romains en toises & pieds de Paris.

pas	toises	pieds	pouces	lignes	palmes	toises	pieds	pouces	lignes
1	0	4	7	0.2222	1	0	0	8	3.0333
2	1	3	2	0.444	2	0	1	4	6.0666
3	2	1	9	0.666	3	0	2	0	9.0999
4	3	0	4	0.888	4	0	2	9	0.1333
5	3	4	11	1.111	5	0	3	5	3.1666
6	4	3	6	1.333	6	0	4	1	6.1999
7	5	2	1	1.555	7	0	4	9	9.2333
8	6	0	8	1.777	8	0	5	6	0.2666
9	6	5	3	1.999	9	1	0	2	3.2999
10	7	3	10	2.222	10	1	0	10	6.3333
20	15	1	8	4.444	20	2	1	9	0.6666
30	22	5	6	6.666	30	3	2	7	6.999
40	30	3	4	8.888	40	4	3	6	1.333
50	38	1	2	11.11	50	5	4	4	7.666
60	45	5	1	1.332	60	6	5	3	1.999
70	53	2	11	3.554	70	8	0	1	8.333
80	61	0	9	5.776	80	9	1	0	2.666
90	68	4	7	7.998	90	10	1	10	8.999
100	76	2	4	2.222	100	11	2	9	3.333
200	152	4	8	4.444	200	22	5	6	6.666
300	229	1	0	6.666	300	34	2	3	9.999
400	305	3	4	8.888	400	45	5	1	1.332
500	381	5	8	11.	500	57	1	10	4.666
600	458	2	1	1.332	600	68	4	7	7.999
700	534	4	5	3.444	700	80	1	4	11.333
800	610	6	9	5.776	800	91	4	2	2.666
900	687	3	1	7.998	900	103	0	11	5.999
1000	763	5	5	10.	1000	114	3	8	9.333

cette table suppose la toise de 0,7639 + 435
au lieu de $\frac{2971}{3888}$ = 0,7641462

PRÉFACE

PRÉFACE.

Du P. Boscovich *Editeur, & l'un des deux Auteurs de l'Ouvrage latin.*

AU LECTEUR.

Nous avons terminé, le P. *Maire* & moi, le voyage entrepris par les ordres, sous les auspices, & aux frais de Sa Sainteté le Pape *Benoît* XIV. Je vous propose ici à ce sujet, mon cher Lecteur, un Recueil de divers Opuscules ou Livres, dont les uns sont du P. *Maire*, les autres m'appartiennent: vous y verrez le but, la suite, le résultat de nos opérations, & les avantages qui en reviennent à l'Astronomie, à la Physique & à la Géographie.

Le premier Opuscule est une Introduction historique & physique du voyage littéraire dans l'Etat de l'Eglise: je suis Auteur de ce Livre.

Le second, qui est du P. *Maire*, contient la détermination de la valeur du dégré, déduite de nos communes observations, & qu'il s'est donné la peine de calculer lui-même.

Le troisieme, qui est encore du P. *Maire*, traite de la réformation de la Carte géographique. L'Auteur a lui-même dessiné avec beaucoup de soin & d'exactitude la nouvelle Carte, sur les observations que nous avons faites ensemble.

Le quatrieme, dont je suis l'Auteur, traite de la description & de l'usage des instrumens qui nous ont servi dans ce voyage.

Le cinquieme, qui m'appartient également, contient la détermination de la figure de la Terre par l'équilibre & la mesure des dégrés.

Dans le premier Livre je me ſuis efforcé de me mettre à la portée de toute ſorte de Lecteurs, de ceux même qui ont peu de connoiſſance de la Géométrie & du calcul, ou qui ne ſe ſentent pas de goût pour cette ſcience. Je m'y étudie ſur-tout à bien faire connoître l'idée d'une telle entrepriſe ; & je rappelle à ce ſujet le ſouvenir des efforts redoublés qu'on a faits dans preſque tous les âges du monde pour découvrir la figure de la Terre, qui faiſoit le premier objet de nos recherches.

Pour cela je donne dans le premier article une notice abrégée de ce qui s'eſt fait avant nous en ce genre : mais je me contente pour l'ordinaire d'effleurer la matiere ; car il faudroit un gros volume pour la traiter à fond. Je propoſe enſuite mes réflexions ſur ce travail, & les motifs qui ont déterminé à faire cette opération en Italie, & à nous confier le ſoin de l'entrepriſe. Le ſecond article eſt une relation de notre voyage : on y parle des lieux que nous avons choiſis pour nos ſtations, & même de la forme des inſtrumens, de la maniere d'obſerver, & de l'uſage des obſervations, autant que cela ſe peut faire ſans le ſecours des figures. Pour varier, on mêle quelques remarques de phyſique au récit de nos travaux, & des dangers que nous avons courus plus d'une fois de perdre la vie.

Les deux Livres ſuivans ont été écrits par le P. *Maire* avec une briéveté & une préciſion qui ſera fort du goût des Aſtronomes déja inſtruits par l'uſage & les réflexions, & qui poſſedent à fond ces matieres. L'Auteur y rapporte toutes les obſervations néceſſaires pour réſoudre la queſtion, avec le réſultat de ſes calculs. J'ai fait moi-même pluſieurs de ces calculs, qui ſe ſont trouvés parfaitement conformes aux ſiens : mais ſon exactitude en ce point, & ſa conſtance à ſoutenir un travail ſi rebutant, me ſont ſi connues, que je m'en fie plus

à lui qu'à moi-même. Le Lecteur curieux y trouvera beaucoup de choſes tendantes à la perfection de la Géographie.

L'Auteur touche dans le ſecond Livre, mais d'une maniere très ſuccinte, quelques points concernant les motifs & l'hiſtoire de notre voyage; ce qui fait que je les ai traités plus au long dans le premier Livre. Il touche auſſi, mais avec le même laconiſme, ce qui regarde la forme des inſtrumens, & la maniere de les vérifier: ce qui m'a pareillement engagé à traiter cette matiere à fond dans le quatrieme Livre, où je donne la figure gravée de nos inſtrumens, & où j'entre dans beaucoup de détails d'Aſtronomie-pratique, & d'autant plus volontiers, que les inſtrumens que j'ai fait conſtruire ont beaucoup de choſes nouvelles, dont je juge que la deſcription faite avec ſoin ne doit être ni inutile, ni déſagréable aux Aſtronomes.

Dans le troiſieme Livre, le même Auteur parle de la réformation de la Carte géographique: il rend compte des obſervations que nous avons faites à ce ſujet, de celles que nous avons été obligés d'emprunter, des ſources où nous avons puiſé, & du dégré de confiance que mérite chaque obſervation en particulier. Pour aſſurer aux nôtres celle qui leur eſt due, le P. *Maire* commence par expoſer en détail les obſtacles que nous avons eu à ſurmonter, les erreurs auxquelles nous avons pu être expoſés, & ce qu'il y auroit à ajouter à notre travail, pour avoir une Carte topographique dans toute l'exactitude poſſible; d'où quelques perſonnes, peu verſées dans ces matieres, jugeront peut-être que la Carte que nous publions eſt très imparfaite, & que ce que nous avons fait en ce point ſe réduit à très peu de choſe. Mais ſi on fait attention à la liſte des villes & autres lieux principaux, placée à la fin de ce Livre, avec leurs longitudes & latitudes, dans leſquelles nous ne croyons pas qu'il ſe trouve une ſeule erreur d'une

minute; on verra que nous avons fait tout ce qu'il falloit pour atteindre à notre but, à ſavoir la correction de la Carte géographique. Si de plus on jette les yeux, tant ſur cette Carte même que nous propoſons, & qui étoit trop grande pour pouvoir être inſérée dans ce volume (1), que ſur la petite Préface qu'on y a ajoutée, & fait graver en même tems (2), & qu'on liſe avec ſoin cet Opuſcule du P. *Maire*, on verra encore en combien de points nous avons perfectionné la topographie même de l'Etat de l'Egliſe.

A l'égard de la liſte dont on vient de parler, nous avons ſuivi l'uſage, qui eſt de commencer à compter les longitudes depuis l'iſle de *Fer:* mais nos obſervations ne nous ont donné immédiatement que les différences de longitudes des divers lieux à celle du dôme de *Saint Pierre* de *Rome*. Quant aux latitudes, nous les avons déduites des obſervations aſtronomiques, que nous avons faites avec notre grand ſecteur, ſoit à *Rome*, ſoit à *Rimini*. Il eſt à obſerver que quoique dans une même ville la longitude & la latitude changent de pluſieurs ſecondes, quelquefois même de plus d'une minute, d'un quartier à l'autre; nous avons marqué en minutes & ſecondes la longitude & la latitude du lieu de la ville, où nous avons immédiatement obſervé; & ce lieu étoit toujours un des plus élevés, très ſouvent la plus haute tour de la ville, & ordinairement vers le point du milieu.

---

(1) Pour pouvoir l'inſérer dans la traduction, on a réduit l'échelle à un tiers, en n'omettant que quelques villages.

(2) Cette Préface eſt un abrégé de ce qu'on verra dans l'ouvrage même ſur l'incertitude de la poſition de quelques lieux; incertitude ſur laquelle on peut ſe raſſurer depuis que M. le Baron *de Saint Odil*, Envoyé de Toſcane à *Rome*, & qui a parcouru tout l'Etat de l'Egliſe, a déclaré avoir vu chaque lieu dans la poſition où il eſt marqué ſur la Carte.

Le quatrieme Livre donne la deſcription & l'uſage des inſtrumens qui ont ſervi à notre meſure. J'entre à ce ſujet dans un détail qui pourra paroître long & ennuyeux à ceux qui ſont au fait de toutes ces choſes; mais il ne ſera pas inutile à ceux qui s'adonnent à la pratique de l'Aſtronomie, & qui ſe plaignent de ne trouver cette pratique décrite nulle part. J'eſpere que ceux même qui ſont exercés dans l'art d'obſerver, y trouveront quelque choſe de nouveau qu'ils ne déſaprouveront pas. Le chapitre premier traite de ce qui a rapport aux obſervations aſtronomiques, & à la détermination de l'amplitude de l'arc céleſte, compris entre les deux termes extrêmes de nos meſures: le ſecond, de ce qui concerne les meſures géodéſiques, tant pour la réſolution du polygone formé par nos triangles, que pour la réformation de la Carte; & le troiſieme, de ce qui a rapport à la meſure actuelle des baſes. On donne au commencement de chaque chapitre une deſcription exacte des inſtrumens, nommément du ſecteur, du quart de cercle, des perches ou regles qui ont ſervi à la meſure des baſes, des ſuppôts ou trépieds, & de tout ce qui concerne la conſtruction & rectification de ces inſtrumens, le tout expliqué par des figures. Enſuite on traite de l'uſage de ces mêmes inſtrumens, de la maniere de les pointer, de les caler, de les diſpoſer: on évalue les erreurs que l'on peut commettre; on propoſe des théorèmes généraux pour connoître ces erreurs, & les corriger au beſoin: enfin on applique toute cette théorie à nos obſervations, à l'égard deſquelles je détermine exactement les limites des erreurs poſſibles. Le but de toutes ces opérations eſt la meſure de deux dégrés du méridien pris entre *Rome* & *Rimini*.

Comme cette meſure même étoit le premier objet de notre voyage, & qu'elle ſert à déterminer la figure & la grandeur de la Terre, j'ai ajouté un cinquieme Livre qui traite de cette figure, & où j'ai voulu éprouver la force de la Géométrie;

car j'y donne par la ſeule Géométrie la ſolution de pluſieurs problêmes, qui ont rapport à ce ſujet, & dans leſquels il ſembleroit qu'on ne pût abſolument ſe paſſer du calcul.

Ce Livre eſt diviſé en deux chapitres: dans le premier on cherche la figure de la Terre par l'équilibre des fluides; dans le ſecond, par la meſure des dégrés. A l'égard du premier, on détermine par la ſeule Géométrie la figure d'un ſolide engendré par la révolution d'une courbe autour de ſon axe, premierement dans l'hypotheſe d'une gravité quelconque donnée relativement aux diſtances, & dirigée à un centre unique; ſecondement dans l'hypotheſe de la gravité newtonienne, tant pour l'hypotheſe d'homogénéité, que pour celle d'un noyau ſphérique, d'une denſité égale à égales diſtances du centre, & variable ſuivant la différence des diſtances. On a ajouté pluſieurs remarques ſur l'hétérogénéité, & le tiſſu irrégulier des parties de la Terre, ſur-tout proche la ſuperficie. Dès l'année 1738, j'en inſinuai déja quelque choſe dans pluſieurs Diſſertations: j'en traite ici plus au long, parceque je crois ces remarques très utiles pour les recherches qui font l'objet du préſent ouvrage. A la fin de ce chapitre on compare les obſervations faites juſqu'à ce jour ſur la longueur des pendules iſochrones, & l'on cherche par diverſes combinaiſons la figure qui en réſulte.

Le ſecond chapitre contient la ſolution des problêmes où il eſt queſtion de trouver la figure de la Terre par la meſure des dégrés. A l'égard des problêmes qui concernent l'ellipſoïde, & dans leſquels étant donnés deux dégrés, ſoit de cercles paralleles à l'équateur, ſoit du méridien, ou un du méridien & un d'un parallele, on demande l'ellipticité; j'en donne deux ſolutions, dont la derniere, qui eſt beaucoup plus ſimple & plus facile que l'autre, ne s'eſt préſentée à moi qu'après que tout le reſte a été imprimé: on la trouvera à la fin du Livre. Après avoir épuiſé les combinaiſons de tous les

dégrés, dont nous avons jusqu'ici la mesure, & après beaucoup de remarques sur l'irrégularité de la courbe de l'équilibre, j'expose mon opinion sur le tout. Je pense donc qu'il est très probable que la Terre est applatie vers ses pôles, mais qu'on n'a point encore découvert la quantité de cet applatissement, & que la recherche qu'on en fait, loin d'être finie, est à peine commencée. Du reste j'emploie par-tout la méthode géométrique; & la seule fois que je fais usage du calcul intégral, & même du plus simple, ce n'est que pour servir de confirmation à un résultat tiré par la simple Géométrie. Quant au calcul ordinaire, je n'emploie presque jamais que les transformations les plus connues des formules qu'on trouve à l'aide de la Géométrie par l'addition, la soustraction, la multiplication, & la division des termes simples. J'espere que ce Livre sera bien reçu des Physiciens & des Géometres (1).

Il y a une mépriſe, Liv. V, n°. 246; j'y assure que M. l'Abbé *de la Caille* s'est servi, pour observer la gravité au Cap de *Bonne Espérance*, du même pendule qui a servi à M. *de la Condamine*, tant dans ses observations d'Amérique, que dans celles qu'il a faites avec moi à *Rome*: on me l'avoit dit aussi. J'ai appris depuis que c'étoit seulement un pendule semblable, & tellement fait, qu'il devenoit isochrone. Mais cela ne peut nuire à nos calculs, puisque je n'y ai point employé les observations faites avec ce pendule, lesquelles ne m'étoient point encore suffisamment connues, comme je l'insinue là-même.

---

(1) On supprime ici la recommandation de l'Auteur au sujet des fautes d'impression, parcequ'on s'est donné le soin de les corriger dans la traduction. Le P. *Boscovich* n'ayant pu veiller par lui-même à l'impression de son Livre, il y a beaucoup de fautes d'impression; plusieurs même qui ne sont point marquées dans l'*errata*; on en verra un ou deux exemples dans les notes.

Si l'on retire quelque avantage de notre travail, on se souviendra que c'est le fruit du zele de M. le Cardinal *Valenti* pour le progrès des sciences, comme de la sagesse & de la munificence du Souverain Pontife *Benoît* XIV. L'un par ses conseils en a été le promoteur: l'autre l'a honoré de sa protection & de ses libéralités.

TABLE DES DIVISIONS.

LIVRE I.

RELATION historique & physique du voyage littéraire dans l'Etat de l'Eglise.

CHAP. I. *Projet du voyage: but qu'on s'y est proposé*, pag. 1.

CHAP. II. *Détail du voyage: fruit qu'on en a retiré*, . . 37.

LIVRE II.

Mesure d'un dégré du méridien entre Rome & Rimini, *depuis le quarante-deuxieme dégré & demi jusqu'au quarante-troisieme & demi*, ... 122.

LIVRE III.

Détail des opérations concernant la correction de la Carte géographique des Etats du Pape, ... 161.

LIVRE IV.

Description & usage des instrumens, ... 181.

CHAP. I. *Du secteur*, ... 182.

CHAP. II. *Du quart de cercle*, ... 262.

CHAP. III. *Des instrumens propres à la mesure de la base*, 340.

LIVRE V.

Description de la figure de la Terre par les loix de l'équilibre & par la mesure des dégrés, ... 364.

CHAP. I. *Figure de la Terre provenante de l'équilibre*, 366.

CHAP. II. *Figure de la Terre déduite de la mesure des dégrés*, 470

VOYAGE

CARTE
DE L'ÉTAT DE L'EGLISE

Avertissement.

Celle Carte a été copiée sur celle des PP. Maire et Boscovich en réduisant l'Echelle à un tiers. La Carte originale a été dessinée par le P. Christophe Maire d'après ses propres observations et celles du P. Roger Boscovich l'un et l'autre Jésuites pendant le cours de leur voyage astronomique, entrepris en 1750. par ordre et sous les auspices de Benoit XIV. et sous la protection du Cardinal Valenti son principal Ministre; pour la mesure du méridien depuis Rome jusqu'à Rimini.

Les auteurs n'ont pas prétendu donner une carte Topographique; elle eut exigé un grand nombre d'observateurs et plusieurs années de travail. Mais les Villes, les Bourgs et les lieux principaux ont été déterminés géométriquement dans celle ci, et ceux qui n'ont pu l'être que par des moyens moins surs ont été distingués par un petit ○. La partie la plus éxacte de la Carte est celle qui comprend le Latium, le Patrimoine de S.t Pierre, la Sabine et la Marche d'Ancône. En général la Carte a plus de précision que le P. Boscovich lui même n'eut osé s'en flater puisque M. Le Baron d'Ogd'il ministre de Toscane à Rome, lequel a une connoissance particuliere de l'État eclesiastique assure que dans ses divers voyages il n'a remarqué aucune erreur sensible dans la position des lieux qu'il a parcourus.

La Longitude a été comptée à l'ordinaire de l'Isle de Fer, et d'Occident en Orient. La direction du méridien a été prise avec la plus grande éxactitude. Le Dégré moyen du méridien entre Rome et Rimini a été trouvé par les observations de 56979. Toises.

ETAT DE VENISE

MODENOIS

GOLFE DE VENISE

TOSCANE

ROYAUME DE NAPLES

MER MEDITERRANE

ROMAGNE

BOLONOIS

PATRIMOINE

CAMPAGNE DE ROME

MARCHE D'ANCONE

DUCHE D'URBIN

LEGATION DE FERRARE

GOUV.T DE CITTA DI CASTELLO

TERIT.E D'ORVIETE

STATO DI S.M DI LORETE

STATO DI S.M DI CAMERINO

TERRE DE LABOUR

ABRUZZE

Ferrare, Comacchio, Ravenne, Imola, Faenza, Forli, Cervia, Cesene, Rimini, Pesaro, Fano, Urbin, Fossombrone, Ancone, Simigaglia, Macerata, Recanati, Lorete, Osimo, Iesi, Camerino, Fabriano, Gubbio, Cortona, Perouse, Arezzo, Sarsina, Sienne, Montepulciano, Acquapendente, Orviete, Bolsena, Montefiascone, Viterbe, Toscanella, Civita Castellana, Nepi, Sutri, Corneto, Civita Vecchia, Orbitello, Rome, Albe, Segni, Anagni, Ferentino, Frosinone, Sora, Arpino, Isola, Veroli, Alatri, Piperno, Sezze, Terracine, Marais Pontins, Ponte Corvo, Rieti, Spolete, Foligno, Terni, Narni, Amelie, Leonessa, Norcie, Ascoli, Fermo, Tolentino, Macerata, Loreto, Recanati, Iesi, Osimo, Ancone, Senigaglia, Pesaro, Rimini, Cesene, Forli, Imola, Faenza, Ravenne, Ferrare, Comacchio, Bologne, Modene, Reggio, Parme, Plaisance, Mantoue, Boscolungo, Pietra Mala, Castiglione de Gatti, Borgo S. Sepolcro, Città di Castello, Cortona, Monte Pulciano, Acquapendente, Orbitello, Porto Ercole, Civita Vecchia, Corneto, Toscanella, Montefiascone, Bolsena, Orviete, Perouse, Cagli, Urbin, Fossombrone, Pesaro, Fano, Simigaglia, Ancone, Lorete, Recanati, Macerata, Tolentino, Fermo, Ascoli, Norcie, Spolete, Foligno, Terni, Narni, Amelie, Leonessa, Rieti, Civita Castellana, Nepi, Sutri, Viterbe, Toscanella, Orbitello, Rome, Albe, Segni, Anagni, Ferentino, Frosinone, Sora, Arpino, Isola, Veroli, Alatri, Piperno, Sezze, Terracine, Marais Pontins, Ponte Corvo, Rieti, Spolete, Foligno, Terni, Narni, Amelie, Leonessa, Norcie, Ascoli, Fermo, Tolentino, Macerata, Loreto, Recanati, Iesi, Osimo, Ancone, Senigaglia, Pesaro, Rimini, Cesene, Forli, Imola, Faenza, Ravenne, Ferrare, Comacchio, Bologne, Modene, Reggio, Parme, Plaisance, Mantoue, Boscolungo, Pietra Mala, Castiglione de Gatti, Borgo S. Sepolcro, Città di Castello, Cortona, Monte Pulciano, Acquapendente, Orbitello, Porto Ercole, Civita Vecchia, Corneto, Toscanella, Montefiascone, Bolsena, Orviete, Perouse, Cagli, Urbin, Fossombrone, Pesaro, Fano, Simigaglia, Ancone, Lorete, Recanati, Macerata, Tolentino, Fermo, Ascoli, Norcie, Spolete, Foligno, Terni, Narni, Amelie, Leonessa, Rieti, Civita Castellana, Nepi, Sutri, Viterbe, Toscanella, Orbitello, Rome, Albe, Segni, Anagni, Ferentino, Frosinone, Sora, Arpino, Isola, Veroli, Alatri, Piperno, Sezze, Terracine, Marais Pontins, Ponte Corvo

ECHELLES

Milles d'Italie de Soixante au Dégré.

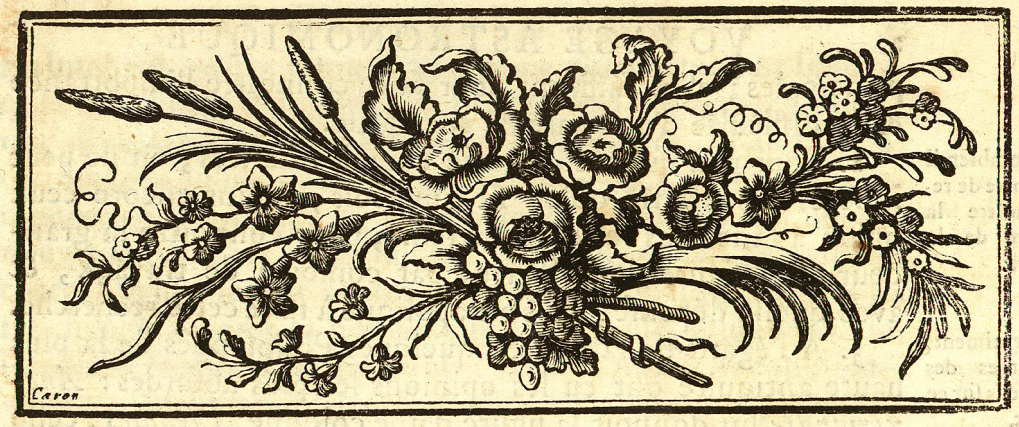
0 5 10 15 20 25 30

Lieue communes de France de 25. au Dégré

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Lieue de 20. au Dégré

1 2 3 4 5 10.L.



VOYAGE
ASTRONOMIQUE ET GÉOGRAPHIQUE
DANS L'ÉTAT DE L'ÉGLISE.

LIVRE PREMIER.

Relation hiſtorique & phyſique du Voyage.

CHAPITRE PREMIER.

Projet de ce Voyage : but qu'on s'y eſt propoſé.

Deux objets du Voyage. La meſure du dégré, & la Carte du Pays.

1. NOTRE VOYAGE avoit deux objets ; le premier, de déterminer la grandeur & la figure de la Terre ; le ſecond, de rectifier la Carte géographique des Etats du Pape. Je m'attacherai davantage au premier, comme au principal : mais pour en donner une juſte idée, il faut reprendre la choſe de plus haut, & commencer par un récit abrégé des tentatives qu'on a faites juſqu'ici pour déterminer la grandeur & la figure de la Terre. Je n'en rappellerai que les

principales ; elles ſuffiront pour faire connoître l'importance & la difficulté d'une pareille entrepriſe.

Combien il importe de reconnoître la figure de la Terre.

2. Pour peu qu'on ſoit initié dans les Lettres, on ne peut ignorer les efforts qu'on fit autrefois, moins encore ceux qu'on a faits dans ces derniers tems, pour connoître la grandeur & la figure de la Terre ; par combien de travaux, & avec quelle dépenſe, on s'eſt appliqué à faire cette recherche.

Sentiments abſurdes des Anciens ſur ce point.

3. A l'égard de la figure, quelques Philoſophes de la plus haute antiquité ont eu les opinions les plus abſurdes : *Anaximandre* lui donnoit la figure d'une colonne ; *Cléantes*, celle d'un cône ; *Leucippe*, celle d'une ylindre : *Héraclite* faiſoit de la Terre un hémiſphère concave ; *Démocrite*, un diſque creux ; *Anaximène*, & *Empédocle*, une table unie ; *Xénophane* & *Colophon* lui donnoient un nombre prodigieux de racines pour la fixer. Toutes ces opinions ſont rapportées par *Riccioli* (1), ſavant Jéſuite du ſiecle paſſé, obſervateur exact, Auteur célebre par ſon érudition, & par ſa connoiſſance des inventions & découvertes faites juſqu'à ſon tems.

Deux méthodes pour reconnoître la figure de la Terre.

4. Mais l'abſurdité de ces mêmes opinions a été reconnue par les plus célebres des anciens Philoſophes : ils ſe ſont accordés preſque d'une commune voix à donner à la Terre la forme d'un globe. On a employé deux ſortes de preuves pour lui donner cette figure. La premiere eſt tirée des loix de l'équilibre ; & la ſeconde, des obſervations qui décelent ſa courbure, & la mettent pour ainſi dire ſous les yeux.

Preuves des Anciens pour établir la ſphéricité de la Terre.

5. Des loix de l'équilibre on déduit la ſphéricité des mers, dans l'hypotheſe que les graves ſoient dirigés à un ſeul centre, & que la Terre ſoit immobile : c'eſt de-là qu'*Archimede* entre autres en tire la preuve. Car ſi cette maſſe, compoſée de terre & d'eau, étoit toute fluide, & qu'elle prît la forme d'une ſphere, dont le point du milieu fût le centre de gravité de toutes ſes parties, il eſt clair que toutes les colonnes d'eau qui aboutiroient du centre à la ſurface, peſeroient également ſur le centre, c'eſt-à dire, qu'il y auroit équilibre : d'où il s'enſuit que les parties du globe devroient être immobiles, & la figure conſtamment la même. Suppoſons

(1) Almageſte, liv. 2. chap. 1.

maintenant qu'une bonne partie de ce globe devienne ſolide; cette ſolidité ne changera rien à la poſition des autres parties, qui par-là même ſeront encore en équilibre. Si après cela cette partie ſolide devient plus ou moins denſe, ſuivant un rapport quelconque; ſi on ajoute des montagnes, ou de nouvelles couches à ſa ſurface, pourvu qu'on obſerve de charger également le centre en tout ſens; cette partie ſolide ne changera point ſa premiere poſition; elle ſoutiendra de la même façon la partie fluide; celle-ci n'aura aucun mouvement, & par conſéquent ſa ſurface ſera toujours ſphérique. C'eſt ainſi que des loix de l'équilibre, on déduiſoit la ſphéricité des mers. Et comme les mers ſe communiquent l'une à l'autre, & que les montagnes, eu égard à la groſſeur du globe, n'ont pas une élevation ſenſible (1) au-deſſus de la ſurface des mers; il s'enſuivoit, des ſuppoſitions précédentes, que la maſſe entiere de la Terre étoit ſenſiblement ſphérique.

Obſervations qui prouvent la courbure de la Terre,

6. Des loix de l'équilibre on paſſoit aux obſervations. Pour ſe convaincre de la courbure des mers, il ſuffiſoit de voir arriver un vaiſſeau. Un homme, placé ſur le rivage, découvroit d'abord les voiles qui paroiſſoient ſortir de la mer, le reſte étant encore caché par la courbure; puis il découvroit le corps même du navire. D'un autre côté, ceux qui étoient dans le navire découvroient ſucceſſivement des montagnes, des collines, des tours, des toits de maiſons, des portes, & le rivage enfin. De plus, on remarquoit ſur terre, comme ſur mer, qu'à meſure qu'on avançoit vers le pôle, les étoiles, qui en ſont voiſines, paroiſſoient s'élever de plus en plus ſur l'horizon, & qu'on voyoit ſucceſſivement paſſer ſur ſa tête, ou au zénith, des étoiles toujours plus voiſines du pôle: on remarquoit encore, en avançant vers l'orient, que le Soleil & les autres aſtres ſe levoient plutôt, & ſe couchoient de même.

Mais non ſa ſphéricité.

7. Mais ces raiſonnemens, & ces obſervations groſſieres,

(1) Chimboraço, la plus haute montagne de la Cordeliere des Andes au Pérou, & de toutes les montagnes connues, n'a que 3220 toiſes au-deſſus du niveau de la mer: (*meſure des trois premiers dégrés du méridien. Louvre* 1752, *p.* 56) ce qui ne fait pas la deux millieme partie du demi diametre terreſtre.

prouvoient ſeulement que la Terre étoit courbe, & nullement qu'elle fût une ſphere parfaite, pas même un globe tel quel; & ce n'eſt que depuis environ trois cents ans qu'on a reconnu, par obſervation immédiate, que ſa figure rentre en elle-même d'orient en occident, lorſqu'après la découverte de l'Amérique on a commencé à faire le tour du monde: ce qu'ont fait depuis un grand nombre de voyageurs, en naviguant vers l'occident, & revenant par l'orient.

Les éclipſes de Lune ſemblent la prouver.

8. Un autre phénomene, qui, tout éloigné qu'il eſt de la Terre, lui appartient très particulierement, prouvoit encore plus exactement ſa ſphéricité au moins approchée; c'eſt l'ombre même de la Terre dans les éclipſes de Lune. Perſonne n'ignore que ces éclipſes ne ſont autre choſe que l'entrée de la Lune dans l'ombre de la Terre, ou plutôt de l'atmoſphère qui l'environne. De plus, on conçoit aiſément que l'ombre d'un corps ſphérique, de quelque côté que ſe faſſe ſa projection, doit être de figure circulaire, & d'une courbure égale en tout ſens: ce qui ne convient généralement qu'à la ſphère. Or, on remarquoit dans toutes les éclipſes de Lune, en quelqu'endroit du ciel qu'elles ſe fiſſent, [& il s'en fait de tous côtés, d'orient en occident, & dans un vaſte eſpace entre le nord & le ſud] que l'ombre de la Terre étoit terminée par un cercle dont la courbure étoit ſenſiblement la même: d'où l'on concluoit que l'atmoſphere avoit une figure ſphérique; & parceque l'atmoſphere s'éleve aſſez peu, & preſque également au-deſſus de la Terre, comme on le voit par la durée des crépuſcules, on en concluoit auſſi que la Terre étoit une ſphere.

Mais non une ſphéricité parfaite.

9. Mais c'étoit trop conclure, & ce phénomene ne prouvoit point encore que la figure de la Terre fût abſolument ſphérique. Car le cercle de l'ombre eſt beaucoup plus grand que la Lune; & il ne tombe ſur la Lune qu'une très petite portion de la circonférence de ce cercle: de plus, il n'eſt pas aiſé de diſtinguer l'ombre de la pénombre: d'où il s'enſuit qu'on ne peut exactement déterminer ſa courbure. Ajoutez que l'ombre de la Terre ſe *projectant* en forme de cône, le diametre de cette ombre, à même diſtance de la Lune, eſt plus ou moins grand, ſelon que la Terre eſt plus ou moins

éloignée du Soleil, & que la Lune, ſuivant ſes différentes diſtances de la Terre, traverſe une plus ou moins grande épaiſſeur du cône qui va en ſe rétreciſſant; enſorte que la courbure de l'ombre n'eſt pas toujours égale, même dans la ſuppoſition que la Terre fût exactement ſphérique.

On l'a jugée telle pendant long-tems.

10. Cependant comme cette courbure paroiſſoit ſenſiblement la même; qu'on étoit porté à croire que la nature recherchoit la figure ſphérique, comme la plus parfaite; & qu'enfin la loi de l'équilibre, dont nous avons parlé, aſſuroit à la mer une rondeur uniforme, les Philoſophes ont été fortement perſuadés, & pendant pluſieurs ſiecles, que, ſauf les inégalités des montagnes & des vallées, qu'on peut compter pour rien par comparaiſon à la groſſeur totale du globe (1), la Terre avoit exactement la figure d'une ſphère; & ce n'eſt que depuis environ quatre-vingts ans qu'on a commencé à former quelques doutes là-deſſus, à l'occaſion que nous allons dire.

Une obſervation de M. *Richer* donne lieu d'en douter.

11. M. *Richer* fut envoyé ſur la fin de 1671 en l'Iſle de Cayenne proche l'équateur, par l'Académie royale des Sciences, pour y faire des obſervations aſtronomiques: il avoit porté avec lui une horloge qu'il avoit réglée à *Paris*, & lorſqu'il voulut s'en ſervir pour obſerver, il remarqua qu'elle retardoit chaque jour de deux minutes & demie: ſurpris d'un tel phénomene, qu'il ne croyoit devoir attribuer, ni à aucun changement arrivé dans l'horloge, ni à ſa ſuſpenſion, il ſoupçonna que la gravité étoit moindre vers l'équateur qu'en Europe (2): ce qui devoit rendre plus lentes les oſcillations du pendule, d'où dépend tout le mouvement de la machine, & occaſionner par-là même ce retardement de l'horloge.

12. Afin de s'en mieux convaincre, M. *Richer* obſerva exactement la longueur du pendule ſimple à ſecondes (3),

---

(1) Voyez la note du n°. 5.

(2) Voyez *Hiſt. de l'Acad. des Sciences* par M. de *Mairan*, pour l'année 1742. pag. 88 & 89, & la meſure de M. *Picart*, art. IV.

(3) On nomme *pendule ſimple à ſecondes* un poids mis en mouvement, & ſuſpendu à l'extrémité d'un fil de la longueur requiſe pour que ce poids faſſe des oſcillations qui durent préciſément une ſeconde. On le nomme ſimple, pour le diſtinguer des pendules compoſés de verges de métal, chargées d'un ou de pluſieurs poids.

Inégalité dans la pesanteur, reconnue par celle des pendules isochrones,

& la grava sur la verge du balancier de son horloge, pour pouvoir, à son retour en France, répéter l'observation & comparer les deux mesures. Car il est certain qu'à pesanteur égale, le plus long pendule doit faire des oscillations plus lentes, & le plus court de plus promptes, & qu'à longueur égale, le pendule oscillera plus ou moins vite, selon le plus ou le moins de force de la pesanteur: d'où il s'ensuit que si deux pendules inégaux achevent leurs vibrations dans le même tems, ce qu'on appelle pour cette raison pendules isochrones, le plus long doit être sollicité par une gravité plus grande en raison de sa longueur. L'expérience vérifia la conjecture. M. *Richer*, de retour à *Paris*, trouva tant de différence dans la longueur du pendule, qu'il ne lui resta plus de doute sur l'inégalité de la pesanteur dans les diverses régions de la Terre.

D'abord contestée, puis reconnue par un grand nombre d'observations.

13. Ce phénomene frappa & mit en grande rumeur tout le monde savant (1). Quelques-uns l'attribuerent d'abord à l'inexactitude de l'observation; d'autres à la dilatation des métaux, produite par la chaleur: il y en eut même qui, après avoir fait en différentes contrées de l'Europe des observations du pendule, déclarerent qu'ils avoient trouvé partout une gravité égale: & il n'est pas étonnant qu'ayant observé à de légeres distances, ils n'aient pas apperçu les petites différences qui y répondent: les méthodes dont on se servoit pour lors dans ces sortes d'observations, n'étant pas encore au point de perfection où nous les voyons aujourd'hui. On fit depuis, avec de meilleurs instrumens, des observations beaucoup plus exactes, & dans des lieux fort éloignés les uns des autres; & elles s'accorderent à prouver que la gravité n'est point par-tout la même, mais qu'elle va presque toujours en augmentant de l'équateur au pôle. Je dis presque toujours; car lorsqu'il n'est question que d'un court intervalle, on trouve quelquefois de petites anomalies qui disparoissent à de plus grandes distances: de sorte que

(1) Cependant le fait avoit été prévu à l'Académie des Sciences avant le voyage de M. Richer. Voy. *Mes. de la Terre de M. Picart*, Art. IV, & *Hist. de l'Acad. des Sc.* pour 1742, p. 88 & 89.

ſi l'on prend deux endroits, dont l'un ſoit beaucoup plus loin de l'équateur que l'autre, la gravité ſera toujours moindre dans celui-ci que dans le premier.

14. Cette différence de gravité une fois connue, la preuve qu'on tiroit autrefois de l'équilibre, pour la ſphéricité de la Terre, n'a plus de force; car ſi les graves ſe dirigeoient également de toutes parts à un même centre, & qu'il en réſultât une ſphere, il eſt évident que la gravité ſeroit la même à chaque point de la ſurface: ce qui eſt contredit par l'expérience. A l'égard des obſervations défectueuſes & incertaines des anciens, elles prouvoient uniquement que la Terre étoit courbe, & qu'elle avoit à peu près la figure d'un globe. Il a donc fallu recourir à une nouvelle théorie, & à de nouvelles obſervations, pour déterminer exactement la figure de la Terre.

L'équilibre des mers ne prouve pas la ſphéricité de notre globe.

15. Mais on n'attendit pas que l'opinion d'une gravité inégale fût conſtatée par des obſervations multipliées: à peine M. *Richer* eut-il fait le rapport de ſon expérience, que MM. *Huygens* & *Newton*, l'un par ſon ſeul ſyſtême des forces centrifuges, l'autre en y ajoutant ſa loi de la gravitation générale, conclurent que la gravité devoit toujours aller en augmentant de l'équateur aux pôles; que la Terre devoit être applatie vers les pôles, & renflée ſous l'équateur; & que la figure devoit être celle d'un ſphéroïde applati, ſemblable à celle d'un oignon.

Sentiments d'*Huygens* & de *Newton*.

16. On ſait que tout mouvement circulaire donne au mobile une certaine force, qu'on appelle force centrifuge. M. *Huygens* en a inventé la théorie pour le cercle: *Newton* a appliqué cette théorie à toutes les courbes. Pour ſe convaincre de l'exiſtence de cette force, il ſuffit de faire tourner une pierre dans une fronde: la fronde eſt tendue; & elle ſe rompra même ſi le mouvement eſt fort, & la corde foible. De même ſi l'on jette de l'eau ſur une roue qui ſe meut avec viteſſe, elle la rejette bien loin. De plus, il eſt également démontré, & par la théorie, & par l'expérience, que ſi des cercles inégaux ſont parcourus en tems égaux, la force centrifuge eſt proportionnelle aux diametres des cercles; c'eſt-à-dire, que ſi un diametre eſt double ou triple, la force

Force centrifuge dans le mouvement circulaire,

centrifuge ſera double ou triple. On ſait auſſi que la force centrifuge tend à écarter le mobile du centre du mouvement; comme le fait aſſez entendre ce nom même de *force centrifuge*.

Directement contraire à la gravité ſous l'équateur;

17. Jettons maintenant les yeux ſur un globe qui tourne ſur ſon axe: les parties les plus voiſines des pôles par où paſſe cet axe, parcourent de très petits cercles, tandis que les autres parties en parcourent de plus grands qui augmentent à meſure qu'elles s'éloignent des pôles; tellement que le plus grand de tous eſt celui qui ſe trouve à égale diſtance des deux pôles, & qu'on appelle équateur. C'eſt-là que la force centrifuge doit être la plus grande; & elle diminue par dégrés, à meſure qu'on ſe rapproche des pôles. *Huygens* & *Newton* appliquerent toute cette théorie au mouvement diurne de la Terre, & jugerent que la force centrifuge devoit être la plus grande ſous l'équateur, la plus petite proche les pôles, & nulle ſous les pôles mêmes. Ils remarquerent de plus que ſous l'équateur, la force centrifuge eſt directement oppoſée à celle de la peſanteur, ou qu'elle ſe dirigeoit d'un côté oppoſé à celui du centre de la Terre, qui eſt auſſi le centre de l'équateur; & que dans les autres lieux elle ſe dirige du côté oppoſé au point de l'axe, qui eſt le centre de ce mouvement, ou de ce cercle; & que ce point eſt d'autant plus éloigné du centre de la Terre, que ce cercle eſt lui-même plus éloigné de l'équateur, & plus proche de l'un des pôles: d'où ils conclurent que la gravité étant dirigée ſenſiblement vers le milieu de la Terre, la force centrifuge étoit plus directement oppoſée à la gravité ſous l'équateur que vers les pôles.

D'où il s'enſuit que la gravité eſt inégale en différens lieux, & que la Terre eſt applatie vers les pôles.

18. Ces deux raiſons firent juger que la gravité primitive étoit conſidérablement diminuée ſous l'équateur, & qu'elle l'étoit moins à meſure qu'on approchoit des pôles. D'où s'enſuivoit la différence de la gravité abſolue (1), & l'applatiſſement de la Terre: car ce qui eſt dit ici de la ſurface, peut s'entendre auſſi de toutes les couches ſphériques, cachées dans l'intérieur de la Terre, & qui ont le même centre; enſorte

(1) La gravité abſolue eſt préciſément ce que nous nommons en françois la peſanteur, c'eſt-à-dire, la gravité primitive modifiée par la force centrifuge.

que

que les colonnes du fluide, qui aboutiſſent du centre à la ſurface, péſeront moins ſous l'équateur que ſous les pôles ; & qu'il ne pourra y avoir d'équilibre, à moins que leur défaut de peſanteur ne ſoit compenſé par le renflement des mers à l'équateur. On conſidéroit de plus, que la gravité, telle que nous l'éprouvons à la ſurface de la Terre, devoit être compoſée de cette gravité primitive, qui, dans la ſphere, ſe dirige toute à un ſeul centre, & de la force centrifuge qui ſuit une autre direction : d'où on concluoit que la gravité réſultante devoit pouſſer les mers de côté, & non dans une direction perpendiculaire à la ſurface de la ſphere ; & par une conſéquence ultérieure, qu'il étoit impoſſible de trouver l'équilibre dans une ſurface ſphérique, & que la Terre devoit pour ainſi dire aller en pente de l'équateur au pôle, pour que cette gravité compoſée fût par-tout perpendiculaire à la ſurface de la Terre.

19. *Huygens* enviſageoit la gravité de la même façon que *Galilée*, c'eſt-à-dire, qu'il ſuppoſoit une gravité uniforme & dirigée à un centre unique : mais *Newton*, qui avoit expliqué le ſyſtême du monde, en ſuppoſant que toutes les parties de la matiere s'attirent mutuellement, ſe ſervit encore de cette hypotheſe pour déterminer la figure de la Terre. Selon lui, la gravité n'eſt pas dirigée à un point fixe, qui lui ſerve de centre ; mais elle eſt compoſée de la détermination mutuelle des parties de la matiere, qui tendent à ſe rapprocher les unes des autres : ce qu'il appelle encore attraction mutuelle. Or, la loi de cette attraction eſt telle, que des parties égales, à diſtances égales, tendent également les unes vers les autres : mais que la force de leur tendance change avec la diſtance ; enſorte qu'à de plus grandes diſtances, la gravité diminue en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, pour parler en termes de géométrie ; c'eſt-à-dire, par exemple, que ſi la diſtance eſt double, triple, décuple, la gravité ſera quatre fois, neuf fois, cent fois moindre : car le quarré de deux eſt quatre, celui de trois eſt neuf, & celui de dix eſt cent.

La gravité ſelon Newton.

20. Dans cette hypotheſe de gravité, dès-lors que pour conſerver l'équilibre, la figure ſphérique ſe change en ellip-

D'où s'enſuit une nouvelle inégalité dans la gravité, & un plus grand applatiſſement de la Terre vers les pôles.

tique, ce changement occaſionne une nouvelle différence dans la gravité, & cette différence même doit entrer pour quelque choſe dans la détermination de la figure de la Terre. En effet, une particule de matiere, placée ſucceſſivement en divers points de la ſurface d'un ſphéroïde elliptique, ne regarde point de la même façon les autres parties du ſphéroïde, & n'a à leur égard, ni la même poſition reſpective, ni les mêmes relations de diſtances. De-là il arrive que la gravité, compoſée de toutes ces gravités, n'a point par-tout la même force, ni la même direction; & *Newton* a démontré en particulier, que dans un ſphéroïde homogêne & applati, la gravité eſt plus grande aux pôles qu'à l'équateur: d'où il s'enſuit que dans ſon ſyſtême, la différence de la gravité & l'applatiſſement de la Terre doivent être beaucoup plus conſidérables que dans celui de la gravité uniforme de M. *Huygens*.

Quantité de l'applatiſſement, ſuivant Huygens.

21. L'un & l'autre Auteur a cherché, par la Géométrie & le calcul, la figure qui réſulte de ſon hypotheſe de gravité, & du mouvement diurne de la Terre. *Huygens* n'avoit pas beaucoup de chemin à faire: il a démontré que la gravité étoit moindre de $\frac{1}{289}$ ſous l'équateur que ſous les pôles; que la Terre étoit applatie vers les pôles, & qu'elle s'élevoit ſous l'équateur d'environ 7000 pas géométriques: différence peu ſenſible, eu égard à la grandeur du diametre de la Terre: & il ne s'eſt pas contenté d'avoir trouvé la quantité de cet applatiſſement; il a déterminé toute la courbure.

Quantité de l'applatiſſement dans le ſyſtême de l'attraction newtonienne.

22. *Newton* avoit à réſoudre un problême beaucoup plus difficile: car dans ſon ſyſtême, la peſanteur de chaque partie de la matiere dépend de la figure de la Terre, & cette figure dépend de la peſanteur des parties; de ſorte que la figure & la gravité doivent ſe déterminer réciproquement l'une par l'autre. De plus, connoiſſant même la figure, il n'étoit pas aiſé, à beaucoup près, de déterminer généralement, pour un point quelconque de la maſſe, la force qui réſulte de la gravitation ſur toutes ſes parties. Ainſi la figure a échappé à ſes recherches, & il n'a pu parvenir à la ſolution du problême, qu'en ſuppoſant une figure ovale ou elliptique, qui eſt une des ſections coniques. D'abord il a trouvé une méthode

pour déterminer la gravité au pôle & à l'équateur, dans un ſphéroïde elliptique: de-là, par une méthode de fauſſe poſition, il a trouvé la figure du ſphéroïde, requiſe par les loix de l'équilibre, en tenant compte de la force centrifuge, & de l'attraction de toutes les parties; & il a déterminé le rayon de la Terre, ſous l'équateur, de $\frac{1}{230}$ plus long que ſous le pôle, c'eſt-a-dire, de 17 milles romains; & la gravité plus petite ſous l'équateur que ſous le pôle, de $\frac{1}{230}$ de celle du pôle.

Solution du problême par M. Mac-Laurin.

23. *Newton* en étoit reſté là: M. *Mac-Laurin* eſt parvenu avec une dextérité admirable où *Newton* n'avoit pas atteint. Ce grand homme a donné encore plus d'étendue au problême de *Newton*, & l'a réſolu avec autant de préciſion que de bonheur. Il a trouvé que la figure d'une maſſe fluide & homogêne, dont toutes les parties s'attirent en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & ſont de plus pouſſées vers un centre donné, par une force proportionnelle à la diſtance à ce centre, & par une autre force dirigée du côté oppoſé à un plan donné qui paſſe par le centre même, & proportionnelle aux diſtances à ce plan, eſt celle d'un ſphéroïde elliptique, ayant pour centre ce même centre donné. Il a déterminé exactement dans cette hypotheſe la figure de cette maſſe fluide, ſon élevation ſous l'équateur, ainſi que la différence de la gravité dans les différens points; & il a trouvé les mêmes réſultats que *Newton*. C'eſt par la ſolution de ce beau problême, qu'il eſt parvenu à expliquer de plus ce qui concerne le flux & le reflux de la mer.

Concluſion contraire, tirée de la meſure d'un dégré terreſtre par M. *Caſſini*.

24. Tandis qu'*Huygens* & *Newton* déterminoient par les loix de l'équilibre la figure de la Terre & ſon applatiſſement vers les pôles, quelques obſervations de M. *Caſſini* ſur la meſure du dégré d'un méridien terreſtre, comparées à celles qu'avoit faites avant lui M. *Picart*, ſembloient plutôt faire de la Terre un ſphéroïde allongé vers ſes pôles, & ſemblable à un œuf. Pour détailler ce fait, il faut reprendre les choſes d'un peu plus haut; expliquer en peu de mots ce que c'eſt qu'un dégré du méridien, & les tentatives que les Anciens ont faites, & celles qu'on a faites de nos jours pour en avoir la meſure.

Ce que c'eſt qu'un dégré, & ſa meſure dans le Ciel.

25. Les Géometres diviſent le cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent dégrés; chaque dégré en 60 minutes; chaque minute en 60 ſecondes; chaque ſeconde en 60 tierces; & ainſi de ſuite. Ces dégrés, minutes, ſecondes, &c. meſurent l'angle formé par la rencontre de deux lignes droites. Connoiſſant donc un dégré d'un cercle particulier, on a toute ſa circonférence. De plus, on pourra connoître le nombre de dégrés contenus dans un arc du cercle, fût-il à la plus grande diſtance, comme d'un cercle tracé dans le Ciel, en prenant l'angle que forment à ſon centre deux lignes droites, dirigées aux deux extrémités de cet arc. Par exemple: la Terre, en comparaiſon du Ciel, n'étant qu'un point qu'on peut prendre pour le centre du monde; ſi l'une des lignes eſt dirigée au zénith, l'autre à une étoile, on connoîtra par l'inclinaiſon des lignes, c'eſt-à-dire, par l'angle qu'elles forment, de combien de dégrés cette étoile eſt éloignée du zénith.

Ce que c'eſt qu'un dégré du méridien ſur la Terre.

26. Dans la Terre ſuppoſée ſphérique, on conçoit aiſément ce que c'eſt qu'un dégré d'un grand cercle quelconque de cette ſphere, ou un dégré d'un méridien. On appelle grand cercle dans une ſphere, celui qui la coupe en deux parties égales, & paſſe par ſon centre. Le méridien eſt le cercle qui va directement du Midi au Nord, & paſſe par les deux pôles. La trois cent ſoixantieme partie de la circonférence de ce cercle, eſt ce qu'on appelle un dégré du méridien. Si deux lignes tirées du centre de cette ſphere, ſont dirigées à deux points du Ciel, qui terminent un dégré céleſte, l'arc, intercepté par ces deux lignes ſur la ſurface de la Terre, contiendra un dégré terreſtre. De là vient qu'on tire ordinairement du Ciel, ou de l'obſervation des aſtres, la meſure des dégrés terreſtres.

Meſures d'Eratoſthène, de Poſſidonius & des Arabes.

Auſſi tandis qu'on a cru la Terre ſphérique, les anciens Philoſophes ſe ſont attachés pendant pluſieurs ſiecles à meſurer un dégré d'un grand cercle de la Terre, pour en déduire la circonférence entiere & le diametre. Ils ont employé pour cela diverſes méthodes. *Eratoſthênes*, ayant appris que dans la Ville de *Syene* (en Egypte) on avoit à midi le Soleil à plomb ſur la tête le jour du ſolſtice, de ſorte que ſes rayons

éclairoient le bas des puits les plus profonds; & de plus, qu'on avoit midi à *Syene* au même moment qu'à *Alexandrie*, où il réſidoit pour lors, vu que ces deux Villes étoient ſous le même méridien; il meſura l'ombre que *projectoit* le Soleil à midi, & trouva la diſtance au zénith égale à la cinquantieme partie d'un grand cercle du Ciel, ou de 7 dégrés 12 minutes; il en conclut qu'il y avoit autant de dégrés & de minutes terreſtres entre ces deux Villes, dont l'une avoit le Soleil à ſon zénith, & l'autre répondoit à un point du Ciel, éloigné du Soleil de ce même nombre de dégrés: ſachant d'ailleurs par le rapport des Voyageurs, que ces deux Villes étoient éloignées l'une de l'autre de 5000 ſtades, il en déduiſit, pour le dégré, la valeur d'environ 694 ſtades, ou de 87 milles, le mille étant de 8 ſtades. *Poſſidonius* croyant voir l'Etoile Canopus raſer l'horiſon de Rhodes, tandis qu'à *Alexandrie* elle lui paroiſſoit élevée de 7 dégrés & demi au-deſſus de l'horiſon; ſachant de plus que la diſtance d'*Alexandrie* à Rhodes étoit d'environ 5000 ſtades, il conclut 667 ſtades, ou à peu près 83 milles, pour la meſure du dégré. Les Arabes, ſous le regne, & par ordre de leur Roi *Maiman*, s'étant avancés dans les plaines de *Fingar*, dans la direction du Nord, juſqu'à ce que le pôle fût d'un dégré plus élevé ſur l'horiſon que dans le lieu d'où ils étoient partis, ils trouverent dans le dégré terreſtre, qui répondoit à ce dégré du Ciel, environ 56 de leurs milles. C'eſt ainſi que les Anciens, par diverſes méthodes, dont les unes ſe trouvent décrites imparfaitement, & par d'autres dont la mémoire ne s'eſt pas conſervée, déterminerent le dégré du méridien terreſtre.

Meſures tentées par les modernes.

28. Leurs meſures different beaucoup, ainſi que toutes les autres obſervations aſtronomiques qu'ils nous ont laiſſées: ce qui provient en grande partie de l'imperfection de leurs méthodes & de leurs inſtrumens, comme auſſi de la différence des meſures dont ils ſe ſont ſervis; car les ſtades & les milles n'étoient point par-tout les mêmes, & nous ne connoiſſons pas bien exactement aucune de ces meſures. Ainſi dès qu'on a commencé, dans ces derniers tems, à cultiver avec plus de ſoin l'Aſtronomie, on a pris auſſi, avec plus de pré-

caution, la mesure du dégré : telles sont les mesures de *Norwood* en Angleterre, de *Snellius* en Hollande, de *Fernel* en France, de *Riccioli* en Italie. Mais ces mesures mêmes sont encore trop incertaines, ou plutôt trop peu exactes. L'Astronomie n'étoit point assez perfectionnée : les instrumens, la maniere d'observer, n'avoient pas atteint leur point de perfection.

Mesures de M. Picart & de MM. Cassini pere & fils.

29. Une plus grande précision étoit réservée au siecle de Louis le Grand. M. *Picart*, de l'Académie royale des Sciences, mesura, par ordre de Sa Majesté, un dégré du méridien : ce qu'il fit avec plus de soin, & avec des instrumens plus parfaits, qu'aucun des Astronomes qui l'avoient précédé. M. *Picart* est le premier qui ait appliqué une lunette aux instrumens astronomiques, qui n'étoient jusqu'à lui garnis que de pinules, & l'on ne peut dire combien cette heureuse invention a contribué à l'avancement & à la perfection de l'Astronomie. Le dégré qu'il mesura étoit dans la partie septentrionale de France, (de Paris à Amiens) & il en trouva la longueur de 57060 toises, dont chacune contient six pieds de Paris. Quelques années après, sa méridienne fut prolongée dans la partie méridionale de France, depuis *Paris* jusqu'aux Pyrénées, par Jean Dominique *Cassini*, que le Roi avoit fait venir d'Italie pour lui confier le soin de l'Observatoire nouvellement construit à *Paris*. M. *Cassini* mesura ce nouvel arc du méridien avec toute l'exactitude possible, & il en trouva le moyen dégré de quelques toises plus long que celui de M. *Picart*. Après sa mort, M. Jacques *Cassini* son fils, aujourd'hui vivant (1), répéta la même mesure, & continua la méridienne au Nord de Paris jusqu'au Port de *Dunkerque* : il trouva pareillement que le dégré méridional étoit le plus long.

Conséquences qu'on en tire.

30. Comme ces dégrés avoient été mesurés avec un soin extrême, il ne parut pas à M. *Cassini* qu'on pût rejetter la différence qu'il trouvoit, sur l'inexactitude des observations ; & il en conclut aussi-tôt que puisque tous les dégrés d'une

(1) Cet ouvrage du P. Boscovich a été imprimé en 1755 ; & M. Jacques Cassini, fils de Jean Dominique, n'est mort qu'en 1756. Voyez son Eloge, *Hist. de l'Acad. des Sciences pour l'année* 1756.

ſphere ſont égaux, la figure de la Terre n'étoit point abſolument ſphérique. De plus, il lui ſembla d'abord que l'excès du dégré méridional ſur le ſeptentrional prouvoit que la Terre étoit applatie vers les pôles, & élevée ſous l'équateur, comme le paroiſſoit exiger auſſi le mouvement diurne de la Terre ſur ſon axe : mais en y regardant de plus près, on reconnut bientôt qu'au contraire cette augmentation des dégrés du Nord au Midi, ſuppoſoit la Terre applatie ſous l'équateur, & allongée vers les pôles ; c'eſt-à-dire, d'une figure ſemblable à celle d'un œuf (1).

Différence des dégrés dans une Terre qui n'eſt pas ſphérique.

31. Pour rendre cette conſéquence plus ſenſible, il faut expliquer ce que c'eſt qu'un dégré du méridien dans une Terre qui ne ſoit point ſphérique, & dont le méridien ne ſoit point un cercle exact ; & de quelle maniere on détermine ce dégré. Suppoſons la Terre ſans aucune de ces inégalités qui ſont à ſa ſurface, *& unie comme la mer* (2) : c'eſt la figure qu'elle auroit alors qu'il s'agit de déterminer ; car ces inégalités qui frappent nos yeux, doivent être comptées pour rien. Si donc on diviſe cette Terre en deux, par un plan qui paſſe par les pôles & le centre, la courbe qui termine cette ſection, eſt ce qu'on appelle un méridien terreſtre. Maintenant en quelque endroit de ce méridien qu'un homme ſe trouve placé, il y aura un point du Ciel qui répondra directement ſur ſa tête. S'il avance au Nord, le long de ce méridien, ſa ligne verticale changera de direction, à cauſe de la courbure de la Terre, ſur laquelle nous le ſuppoſons de bout, & il aura ſur la tête un autre point, ou un autre zénith : & s'il a avancé ſuffiſamment, pour que ces deux points ſoient éloignés entre eux de l'intervalle d'un dégré céleſte, on dit qu'il a parcouru un dégré terreſtre. Le

---

(1) M. des Roubais, Ingénieur chargé de poſer les ſignaux, donna dans un Journal de Hollande, la démonſtration, que les dégrés décroiſſans vers le pôle, faiſoient la terre allongée.

(2) Cette ſuppoſition ne change rien à la queſtion de la figure de la Terre : les plus hautes montagnes changent moins la figure de la Terre qu'un grain de pouſſiere ne changeroit la figure d'une boule de ſix pouces de diametre.

dégré du méridien terreſtre eſt donc un arc de ce méridien dont les points extrêmes ont pour zéniths deux points du Ciel, diſtans l'un de l'autre de la valeur d'un dégré, ou des extrémités duquel abaiſſant deux lignes à plomb, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent quelque part au-dedans de la Terre, ce qui ne peut manquer d'arriver à cauſe de ſa courbure, il ſe forme à leur point de concours un angle d'un dégré. Le plus haut point du Ciel, ou le zénith, eſt déſigné par un fil à plomb, chargé d'un poids. Qu'on ſuſpende ce fil à l'extrémité d'une regle, à laquelle eſt adoſſée une lunette, & qu'on dirige cette lunette ſur quelque étoile au moment de ſon paſſage au méridien: ſi la regle ſe trouve pour lors partagée également par le fil, c'eſt une preuve que l'étoile eſt au zénith: mais ſi le fil ſe trouve écarté du milieu de la regle, cette diſtance marquera l'inclinaiſon de la lunette, & la diſtance de l'étoile au zénith. C'eſt par ce moyen qu'on connoît de quelle quantité a changé le zénith, tandis qu'on parcouroit un arc du méridien terreſtre.

Que le dégré eſt plus grand, où la courbure eſt moindre.

32. On voit que ſi la Terre eſt une ſphere & le méridien un cercle, & qu'on parcoure des arcs égaux, le zénith changera toujours de la même quantité: d'où il ſuit que tous les dégrés de tous les méridiens ſeront égaux, & que les lignes perpendiculaires à la ſurface ſe rencontreront au centre. Mais ſi la Terre eſt, ou applatie, ou allongée vers les pôles, le méridien n'a plus une figure circulaire, ni ſa courbure n'eſt plus par-tout la même; & le changement du zénith ſera d'autant plus prompt, la meſure du dégré d'autant plus petite, & le concours des deux perpendiculaires d'autant plus proche de la ſurface de la Terre, que la courbure ſera plus ſenſible.

Que la Terre eſt allongée vers les pôles, ſi la courbure y eſt plus grande.

33. Si donc la Terre a une figure allongée vers les pôles, & ſemblable à celle d'un œuf, il eſt clair que ſa courbure ſera plus grande ſous les pôles & moindre ſous l'équateur; ſi au contraire la Terre eſt applatie, & ſi ſa figure reſſemble à celle d'un oignon, ſa courbure ſera plus grande ſous l'équateur & moindre ſous les pôles, & elle ira toujours en décroiſſant de l'équateur au pôle, dans ce ſecond cas, tandis que les dégrés iront toujours en augmentant; & tout au contraire dans

dans le premier cas où la courbure augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, & qu'on s'approche du pôle, tandis que la longueur des dégrés diminue dans la même proportion; [de sorte que le plus petit est sous le pôle, & le plus grand sous l'équateur]. Donc, puisque les dégrés de France, mesurés par M. *Cassini*, paroissoient aller en diminuant du Midi au Nord, il s'ensuivoit que la Terre étoit allongée & non applatie vers les pôles: ce qui étoit contraire à ce que *Huygens* & *Newton* avoient déduit de leur théorie de l'équilibre.

Disputes entre les Savans.

34. Ceci donna lieu à de grandes disputes parmi les Physiciens. Les uns, sans faire attention aux théories de *Newton* & d'*Huygens*, faisoient valoir les observations de MM. *Cassini* & *Picart*, qui, selon eux, décidoient la question sans appel, & prouvoient inconteſtablement l'allongement de la Terre vers les pôles: d'autres qui faisoient plus de fond sur cette théorie, remarquoient que la longueur de la France étoit une trop petite partie de la circonférence de la Terre, & la différence entre des dégrés si voisins, trop imperceptible pour pouvoir échapper aux erreurs inévitables dans les observations: erreurs qui pouvoient même surpasser la différence dont on cherchoit à s'assurer.

L'Astronomie perfectionnée.

35. Pendant le cours de ces disputes assez vives, on approfondit les théories d'*Huygens* & de *Newton*; on perfectionna les instrumens; l'Astronomie spéculative & pratique firent de grands progrès. A l'égard de la théorie, M. de *Mairan* imagina une loi de gravité, telle, que le sphéroïde allongé, comme l'applati, & une différence plus grande ou plus petite dans la longueur des dégrés, pouvoient se concilier avec une différence quelconque de gravité, sans déranger l'équilibre; & il conclut que ce n'étoit que par des observations exactes qu'on pouvoit déterminer la mesure des dégrés, & la figure du méridien. Pour ce qui concerne l'Astronomie, *Bradley* trouva dans les étoiles deux mouvemens inconnus jusqu'alors, & qui, quoique petits, ne laissent pas d'influer notablement dans la mesure du dégré: car lorsqu'on veut déterminer cette mesure par la position des étoiles fixes, on observe aux deux extrémités de la méridienne la distance

de la fixe au zénith; & comme c'eſt ordinairement le même Obſervateur qui opere dans les deux ſtations, il s'écoule pluſieurs jours, quelquefois même pluſieurs mois d'une obſervation à l'autre. Or, on a découvert pluſieurs mouvemens dans les étoiles: le premier, qui eſt connu de tout le monde, eſt le mouvement diurne qui ſe fait d'orient en occident: s'il étoit unique, les obſervations n'en ſouffriroient pas, pourvu qu'on ſaiſît le moment du paſſage de l'étoile au méridien, qui ſeroit toujours traverſé par l'étoile à même diſtance du pôle & du zénith de l'obſervateur: le ſecond mouvement eſt celui de la préceſſion des équinoxes, par lequel les étoiles s'approchent ou s'éloignent continuellement du zénith d'un lieu quelconque: ce mouvement eſt très lent, & il étoit déja connu des anciens Aſtronomes: les deux derniers ſont beaucoup moindres, & n'ont été découverts que depuis trente ans (1) par *Bradley*: l'un eſt l'effet de l'aberration de la lumiere; l'autre d'une certaine nutation dans l'axe de la Terre: tous les deux font varier continuellement la diſtance d'une étoile au zénith.

Néceſſité de connoître les variations obſervées par M. Bradley aujourd'hui conſtatées.

36. Si ces mouvemens ne ſont pas bien connus de l'obſervateur, enſorte qu'il ne puiſſe déduire de ſa théorie la quantité dont l'étoile s'eſt approchée ou éloignée du zénith pendant le tems qui s'eſt écoulé entre ſes deux obſervations, il eſt clair qu'il ne pourra conclure ſûrement la vraie meſure du dégré. Or, ni M. *Picart*, ni M. *Caſſini* pere & fils, n'ont eu (lors de leur meſure des dégrés) aucune connoiſſance des mouvemens découverts de nos jours par M. *Bradley*; au lieu qu'aujourd'hui, qu'ils ſont parfaitement connus, il ſuffit d'en tenir compte pour trouver le lieu où une étoile, une fois obſervée, doit ſe trouver en quelque tems que ce ſoit; de ſorte que ſi l'on emploie des inſtrumens convenables, on ne ſe trompera jamais de deux ſecondes; ce qui a été ſuffiſamment conſtaté par une infinité d'obſervations, tant de *Bradley* même, que d'un grand nombre d'Aſtronomes célebres qui ont obſervé depuis lui. Ainſi il n'y a plus lieu de craindre que la meſure

(1) En 1725. Voy. *Tranſact. philoſophiques.*

du dégré puiſſe être troublée par aucun mouvement ſecret ou inconnu des étoiles.

Théorie des réfractions, non moins néceſſaire, aujourd'hui connue.

37. Un autre objet du aux nouveaux progrès de l'Aſtronomie, c'eſt la connoiſſance beaucoup plus exacte de ce qu'on appelle les réfractions. Lorſque le rayon de lumiere paſſe d'un milieu raréfié dans un air plus groſſier, comme de l'éther dans l'atmoſphere, il ſe détourne de ſon chemin direct: ce détour, cette inflexion, eſt ce que les Phyſiciens appellent réfraction. Son effet eſt d'élever les aſtres, ou de les faire paroître plus haut qu'ils ne ſont; & cette différence eſt très conſidérable près de l'horizon, où elle ſurpaſſe un demi degré; mais elle décroît inſenſiblement, & d'autant plus, que l'aſtre approche de plus près du zénith. Les anciens Aſtronomes l'ont, ou totalement ignorée, ou peu connue; elle a nui en particulier aux obſervations de *Riccioli*: aujourd'hui on la connoît ſi bien, qu'on n'a lieu d'en appréhender aucune erreur ſenſible, du moins lorſqu'il n'eſt queſtion que d'une petite diſtance au zénith: car alors la différence n'eſt que d'environ une ſeconde par dégré; de ſorte que lorſqu'on n'a beſoin d'obſerver que des étoiles voiſines du zénith, on n'a point d'erreur à craindre de la part de la réfraction.

Inſtrumens d'Aſtronomie perfectionnés

38. Enfin l'on a encore beaucoup perfectionné les inſtrumens d'Aſtronomie: *Graham* ſur-tout, célebre Artiſte Anglois, a donné à ce ſujet des preuves de ſon adreſſe & de ſon induſtrie, tandis que tous les Aſtronomes s'exerçoient à l'envi ſur l'uſage des inſtrumens, ſur les loix de l'optique, ſur l'examen des diviſions, & ſur tout ce qui y a rapport, afin qu'il ne manquât rien de tout ce qui pourroit contribuer à la perfection des obſervations. Finalement l'on convint d'une meſure fixe, qui devoit ſervir de modele à toutes les autres, & prévenir toutes les erreurs qu'auroit pu produire dans la comparaiſon des dégrés l'inégalité des meſures (1).

(1) On fit faire à Paris une regle de fer qu'on ajuſta le mieux qu'il fut poſſible ſur l'étalon conſervé au Châtelet de Paris, d'une toiſe réformée en 1666. (Voyez Traité de M. Picart *de menſuris*, anc. Mém. de l'Acad. Tom. 6). On en fit faire une ſeconde égale à la premiere:

Projet d'un voyage à l'équateur & au cercle polaire.

39. L'Académie royale des Sciences forma dès 1733 (1) le deſſein de déterminer avec beaucoup plus d'exactitude qu'on n'avoit encore fait, la figure de la Terre. Elle expoſa à M. le Comte de *Maurepas*, Secrétaire d'Etat qui avoit le département des Académies, l'importance de cette recherche, & les avantages qui en reviendroient non ſeulement à la Phyſique & à l'Aſtronomie, mais à la Géographie & à la navigation, qui contribuent en tant de manieres aux uſages & aux commodités de la vie : elle repréſenta qu'un navire dont on auroit eſtimé le chemin ſuivant la figure de la Terre qui réſultoit des obſervations de MM. *Caſſini*, pouvoit ſe briſer contre un écueil, dont elle paſſeroit à plus de trente lieues (2) ſi la Terre avoit la figure que lui donnoit *Newton*; que le plus ſûr moyen de décider la queſtion de la ſphéricité, de l'allongement ou de l'applatiſſement de la Terre vers les pôles, étoit de meſurer deux dégrés du méridien aux plus grandes diſtances poſſibles, & par conſéquent de pénétrer, d'une part, le plus avant qu'on pourroit vers le nord, & de ſe tranſporter, de l'autre, ſous l'équateur (3), puiſque ſi la Terre eſt elliptique (4), ces deux dégrés ſuffiſent ſeuls pour déterminer ſa figure & ſa grandeur; qu'enfin une entrepriſe ſi utile ſeroit à la fois plus glorieuſe au Roi & à la Nation, que ne le fut à la Grece la fameuſe expédition des Argonautes, ſi vantée par la fabuleuſe antiquité.

40. Le projet fut goûté : deux Troupes d'Académiciens,

---

l'une reſta en dépôt à l'Académie ; l'autre fut emportée par les Académiciens nommés pour le voyage de l'équateur, & ſervit à toutes leurs meſures. (Voy. *Meſ. des trois premiers dég. du mérid.* Art. XXV.

(1) La premiere propoſition du voyage de l'équateur fut faite verbalement à l'Académie en 1733 par M. de la Condamine ; mais le projet n'en fut agréé par le miniſtere qu'en 1734.

(2) Voyez Préface de la fig. de la Terre & des élémens de Géographie de M. de *Maupertuis*.

(3) Le voyage à l'équateur fut réſolu dès 1734, & les paſſeports demandés à l'Eſpagne : mais ce ne fut qu'après le départ des trois Académiciens pour *Quito*, au mois de Mai 1735, que le projet du cercle polaire fut formé par M. de Maupertuis.

(4) Comme il réſulte de toutes les hypotheſes ſur la peſanteur.

ayant à leur tête MM. *Godin* & de *Maupertuis*, partent, les uns pour l'Amérique, les autres pour la Laponie (1). Ceux-ci ayant trouvé proche de la riviere de *Tornea* (au nord du golfe de Bothnie) un terrein propre à leurs opérations, eurent bientôt fini leur mesure. Ils déterminerent la longueur du dégré du méridien qui coupe le cercle polaire ; & M de *Maupertuis* l'ayant trouvé plus long d'environ 500 toises que celui de M. *Picart* en France, après avoir diminué celui-ci par les corrections nécessaires tant pour l'aberration de la lumiere, la nutation de l'axe de la Terre, en conséquence des découvertes de M. *Bradley*, que pour les réfractions (2), publia en 1737 (à son retour de Laponie) un ouvrage intitulé *Figure de la Terre*, où il prétend en effet que ces deux dégrés suffisent non seulement pour prouver l'applatissement de la Terre vers les pôles, mais pour déterminer sa figure & sa grandeur.

Applatissement de la Terre vers le pôle, annoncé par M. de *Maupertuis*, envoyé au cercle polaire.

41. Mais comme il en résultoit un applatissement beaucoup plus considérable que celui qu'on trouve par la théorie d'*Huygens*, & même par celle de *Newton*, M. *de Maupertuis* (aidé des Académiciens ses compagnons de voyage)

Corrections diverses du dégré mesuré par M. Picart.

(1) La Troupe académique de l'équateur étoit composée de MM. *Godin*, *Bouguer*, & *de la Condamine* : celle du cercle polaire, de MM. *de Maupertuis*, *Clairaut*, *Camus*, & *le Monier*.

(2) Sources d'erreurs, dont les deux premieres étoient inconnues, & la derniere mal connue du tems de M. *Picart*. M. de *Maupertuis* & ses compagnons de voyage, firent une autre correction au dégré de M. *Picart*, en vérifiant en 1739, par de nouvelles observations, l'amplitude de l'arc du méridien, intercepté entres les paralleles de *Paris* & *Amiens*. Voy. *dég. du mérid.* entre Paris & Amiens. *Paris* 1740, in-8°. & *Mém. de l'Acad.* Il restoit encore la mesure géodésique, ou la distance de *Paris* à *Amiens*, déterminée par M. *Picart*, à vérifier ; & sur-tout sa base mesurée par lui sur le terrein de *Villejuisve* à *Juvisi*, laquelle avoit servi de fondement à toutes ses mesures, & qui n'avoit jamais été soupçonnée d'erreurs. MM. Jacques *Cassini* & l'Abbé *de la Caille* reconnurent cependant en 1740 que M. *Picart* avoit supposé cette base trop longue de près d'une toise par mille. Voyez *Méridienne de Paris vérifiée*, impression du Louvre, pag. 37 : ce qui a depuis été vérifié en 1740 par quatre Commissaires de l'Académie. Voyez *Mém. de l'Acad.* 1740, pag. 281.

répéta peu après, (en 1739) avec l'excellent Secteur de *Graham*, qui lui avoit servi en Laponie, les observations *astronomiques* de M. *Picart* en France, en conservant les distances des lieux déterminées par ce Mathématicien; & les nouvelles observations ayant donné la longueur du dégré plus grande, M. *de Maupertuis* trouva la différence entre les dégrés (du méridien, mesurés en France & en Laponie) moindre presque de moitié: ce qui fut cause qu'il diminua beaucoup l'applatissement qu'il avoit d'abord donné à la Terre. Cependant on commença d'avoir quelque scrupule sur les opérations même géodésiques de M. *Picart*, (qui n'avoient pas encore été soupçonnées d'erreur,) & M. *Jacques Cassini*, fils de *Dominique*, s'étant enfin déterminé à les vérifier avec M. l'Abbé *de la Caille*, ils y trouverent une erreur très sensible (de près d'une toise d'excès par mille:) mais par un évenement des plus singuliers, les erreurs astronomiques & géographiques de M. *Picart* s'étoient presque réciproquement compensées; & en tenant compte des unes & des autres, on revenoit à peu près à sa mesure. MM. *Cassini*, *de Thury*, & *de la Caille* parcoururent toute la France avec leurs instrumens, & surtout le terrein traversé par la méridienne de Paris dans toute sa longueur: ils y firent un grand nombre d'observations, & mesurerent chaque dégré avec tant de précautions, qu'on ne peut raisonnablement former aucun doute sur la vraie mesure des dégrés du méridien dans toute l'étendue de la France: & bien que ces dégrés croissent en allant du midi au nord, leur différence est beaucoup moindre qu'on ne la concluroit par la seule théorie.

Mesure du dégré du méridien, voisin de l'équateur.

42. Sur ces entrefaites, M. *Bouguer* & M. *de la Condamine* arrivent d'Amérique (en 1744 & 1745,) après avoir déterminé, par dix ans de travaux & de peines incroyables dans le vallon de *Quito*, la mesure de trois dégrés du méridien les plus voisins de l'équateur. Chacun d'eux a publié séparément ses observations (1). Leurs résultats sur la mesure

(1) Fig. de la Terre, déterminée par les observations de MM. *Bouguer & de la Condamine*, in-4°. Paris 1749. par M. Bouguer. Mesure des trois premiers dégrés du méridien dans l'hémisphere austral par M. de la

du dégré voiſin de l'équateur, s'accordent très bien entre eux, & different peu de celui qu'avoient publié un peu auparavant les deux Mathématiciens (1) envoyés par le Roi d'Eſpagne, pour accompagner les Académiciens François, & qui avoient obſervé conjointement avec M. *Godin*, ſéparément de MM. *Bouguer* & *de la Condamine*. Si les différends qui ſe ſont élevés entre tous ces Obſervateurs, ont été un peu vifs, ils ont du moins ſervi à conſtater avec la derniere évidence leur exactitude ſcrupuleuſe à éviter toute eſpece d'erreur, & leur détermination de la meſure du dégré n'en devient elle-même que plus évidente.

Différences qui réſultent de la comparaiſon des dégrés.

43. Or, leur dégré, conſidérablement moindre que celui du nord, & que celui de France corrigé par les nouvelles obſervations (de 1739 & 1740,) donne à la vérité une nouvelle preuve de l'applatiſſement de la Terre, mais ne s'accorde pas avec la théorie par laquelle, ſuppoſant au méridien une figure elliptique, on en déduit la quantité de cet applatiſſement. Si l'on compare entre eux les dégrés d'Amérique & de Laponie; puis l'un & l'autre ſéparément à celui de France, il en réſulte trois différens rapports de l'axe de la Terre au diametre de l'équateur (2); & cette différence eſt ſi conſidérable, qu'onne peut abſolument l'attribuer, ni à la négligence des Aſtronomes, ni aux défauts des inſtrumens dont ils nous ont donné une deſcription fort exacte. De plus, les obſervations faites très ſoigneuſement par les Académiciens du nord, & par ceux de l'équateur ſur la longueur du pendule à ſecondes, prouvent bien que la gravité eſt plus grande en Laponie qu'à *Paris*, & à *Paris* qu'à *Quito*; mais cette inégalité n'eſt pas abſolument celle qu'avoit trouvée

---

Condamine, Imp. royale 1750, in-4°. Voyez auſſi *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1746.

(1) Dom George Juan, Commandeur de l'Ordre de Malthe, & Dom Antoine de Ulloa, alors Lieutenant de vaiſſeaux de S. M. C., aujourd'hui l'un Chef d'Eſcadre, Commandant des Gardes de la Marine, & Ambaſſadeur à Maroc, l'autre Gouverneur de la Louiſiane.

(2) Voyez tous ces différens rapports dans la *Meſure des trois premiers dégrés du Méridien* de M. *de la Condamine*, pag. 258 & ſuiv. ou *Mém. de l'Acad. roy. des Sciences* pour 1746, pag. 686 & 687.

Newton, ni celle qu'une ellipſe déterminée par tels qu'on voudra de ces dégrés, pris deux à deux, ſemble requérir pour conſerver l'équilibre.

Efforts que l'on fait pour les concilier.

44. Ainſi dans le tems même où l'on croyoit la queſtion décidée par les nouvelles meſures, & que la figure de la Terre & la quantité de ſon applatiſſement paroiſſoient déterminés avec le plus de préciſion, on ſe trouva replongé dans de nouvelles incertitudes. M. *Bouguer* combina les trois dégrés meſurés, l'un en Amérique, l'autre en France, le troiſieme en Laponie; & après les avoir comparés entre eux, & avec un dégré du parallele meſuré en dernier lieu par MM. de l'Académie royale des Sciences (1), il trouva qu'ils pouvoient tous ſe concilier avec une ſorte de régularité dans le méridien, en ſuppoſant que les dégrés du méridien qui croiſſent de l'équateur au pôle, ſelon la loi de la gravité newtonienne, pour une Terre homogêne, en raiſon des quarrés des ſinus de latitude, pour parler le langage des Mathématiciens, augmentaſſent dans la nouvelle figure imaginée par M. *Bouguer*, en raiſon des quarrés-quarrés de ces ſinus. Mais cette figure même ne peut ſe concilier avec les autres dégrés meſurés en France par M. *Caſſini*; d'ailleurs nous n'avons point de théorie qui exige cette courbure plutôt qu'une autre: enfin puiſqu'après avoir meſuré deux dégrés, & les avoir fait convenir avec une ellipſe, déja déduite elle-même d'une théorie qui explique parfaitement tant de phénomenes céleſtes, il s'en eſt trouvé un troiſieme qui ne pouvoit compatir avec cette ellipſe, il y avoit tout lieu de craindre que ſi l'on en meſuroit quelque part un quatrieme, il ne s'accordât pas mieux avec l'hypotheſe de M. *Bouguer*, & ne dérangeât la loi qui concilie les trois autres (2). M. *Clairaut*, aſſocié à M. *de Maupertuis* dans l'expédition du nord, ayant approfondi la théorie de l'équilibre (3), conclut qu'il falloit

(1) Le dégré du parallele entre le 43e. & le 44e. dégré de latitude, meſuré en 1740 par MM. *Caſſini de Thury* & *de la Caille*. Voy. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag. 105 & 106.

(2) C'eſt ce qui eſt arrivé par la meſure d'un dégré en Afrique.

(3) Cet ouvrage de M. *Clairaut* a paru en 1743, in-8°. un ou deux

recourir

recourir à une différence de denſité dans les différentes couches de la Terre, qu'il fait néanmoins varier ſuivant une certaine loi, en approchant du centre. Il a concilié très élégamment cette variation avec la figure de la Terre & la différence de la gravité; & il a cru qu'au moyen de cette loi, qui n'eſt contredite par aucun phénomene, on pouvoit rendre raiſon de la grandeur de certains dégrés, & de la longueur des pendules à différentes latitudes.

Sentiment de l'Auteur ſur l'irrégularité de tiſſure des parties de la Terre.

45. Pour moi, après avoir lu l'ouvrage de M. *de Maupertuis*, qui parut le premier, & réfléchi ſur les méthodes d'obſerver, & ſur tout ce qui a rapport à cette matiere, il me vint une penſée que je n'ai pu depuis m'ôter de l'eſprit, ſavoir, que l'anomalie des dégrés & des pendules iſochrones, venoit en grande partie d'une tiſſure inégale & irréguliere des parties internes de la Terre, telle que ſi cette inégalité avoit lieu proche la ſuperficie, elle dérangeroit la proportion des dégrés; que ſi elle étoit enfoncée plus avant, elle altéreroit la figure même de la Terre; j'entends cette figure qu'elle auroit ſi on retranchoit toutes les inégalités extérieures qui ſont à ſa ſurface. Je propoſai pluſieurs réflexions à ce ſujet, dans une Diſſertation ſur la figure de la Terre, qui parut dès l'an 1738; d'autres en l'année 1741, dans une Diſſertation ſur la différence de la gravité dans les différentes parties de la Terre; d'autres enfin dans une Diſſertation ſur les obſervations aſtronomiques, publiée en 1742; & ſi ma conjecture eſt vraie, il n'y a plus lieu de s'étonner que la différence, tant des dégrés de la Terre que de la gravité, ne ſuive exactement aucune proportion réguliere.

Cauſe de la déviation du fil à plomb dans les obſervations aſtronomiques.

46. Car pour ce qui eſt des inégalités voiſines de la ſurface, repréſentons-nous une Terre homogêne & preſque ſphérique, & mettons à ſa ſurface un autre globe homogêne à cette Terre; le fil à plomb ſera ſollicité, dans le ſyſtême de la gravitation univerſelle, par deux forces, dont l'une dirigera le plomb vers la maſſe de la Terre, l'autre vers ce globe qui eſt à ſa ſurface; & ces forces ſeront en

---

ans avant le retour des Académiciens de l'équateur, ſous le titre de *Théorie de la figure de la Terre*. Paris 1743.

raiſon du demi diametre de la Terre au demi diametre du globe (1). Ainſi cette ſeconde force détournera le fil à plomb de la direction qu'il auroit ſans le globe; & j'ai démontré par un calcul fort ſimple, que cette déviation du fil à plomb ſur un globe voiſin, étoit d'une minute pour un globe d'un mille de rayon, & par conſéquent de 15 ſecondes, ſi le rayon du globe eſt d'un quart de mille, (ou de 250 pas géométriques); & que ſi le globe eſt éloigné, cette aberration n'eſt point ſenſible, & peut être regardée comme nulle.

Grand dérangement dans la meſure des dégrés, cauſé par d'aſſez petits moles.

47. De-là une montagne, au pied de laquelle ſe feroit l'obſervation, & dont l'action ſeroit équivalente à celle d'un globe de 250 pas de rayon, feroit dévier de 15 ſecondes le fil à plomb dont on ſe ſert pour déterminer la diſtance des étoiles au zénith: & ſi une telle déviation ſe faiſoit en ſens contraire aux deux extrémités d'un dégré, l'erreur du dégré ſeroit d'une demi-minute, c'eſt-à-dire, de près de 500 toiſes: différence preſque égale à celle des dégrés meſurés au nord & à l'équateur (2), ou des dégrés juſqu'ici les plus inégaux. Que ſi l'on meſure un arc de pluſieurs dégrés, l'erreur ſe répartit ſur le nombre total, & devient d'autant moindre, qu'il y a plus de dégrés: mais elle eſt toujours bien

---

(1) En effet, ces forces ſont en raiſon directe des maſſes, & en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Soit donc le demi diametre de la Terre $= a$, celui du globe $= 1$; le rapport des maſſes ſera égal à $\frac{a^3}{1}$; & parceque ces globes agiſſent comme ſi toute leur maſſe étoit compénétrée au centre, la raiſon inverſe des quarrés des diſtances ſera $\frac{1}{aa}$. Donc la raiſon compoſée de la directe & de l'inverſe, ſera $\frac{a^3}{aa}$ ou $\frac{a}{1}$ c'eſt-à-dire, celle du demi diametre de la Terre au demi diametre du globe.

(2) Le dégré du méridien, voiſin de l'équateur, étant, ſuivant la meſure des Académiciens, d'environ 56750 toiſes, & celui qui coupe le cercle polaire, de 57438, la différence eſt de 688 toiſes, & ne ſera même que de 672, ſi on retranche 16 toiſes pour l'erreur qu'a cauſé la réfraction négligée par M. de Maupertuis dans cette évaluation du dégré. Voy. *Meſ. des trois premiers dég. du mérid.*

plus que suffisante, pour déranger toute progression réguliere, dans la différence des dégrés.

Qu'il y a & qu'il doit y avoir des inégalités voisines de la surface de la Terre, & capables d'action.

48. Or, on trouve souvent des montagnes plus grosses; & si elles ne cachent point de concavités, telles qu'il y en eut probablement dans *Chimboraço*, cette énorme montagne du Pérou, qui, suivant les observations de MM. *Bouguer* & *de la Condamine*, n'a produit qu'une déviation de 7 secondes (1); si, dis-je, elles sont assez compactes pour égaler la moyenne densité de la Terre, elles produiront des erreurs encore plus considérables. Mais ce que fait une montagne placée sur la surface de la Terre, une différence de densité dans les parties qui sont au-dessous de la surface, d'un côté ou d'autre, peut également le produire; de même qu'une grande cavité souterraine qui se trouveroit voisine du lieu de l'observation. Il est vrai que ces erreurs diminuent dans le cas où la densité seroit plus grande vers le centre qu'à la surface; mais elles augmentent aussi dans le cas où la densité seroit plus petite, & beaucoup plus encore si la Terre ressembloit plus à une croute, ou à une coque vuide, qu'à un globe solide.

La réponse de M. de Maupertuis à cette objection, est insuffisante.

49. Maintenant, puisqu'il y a tant d'inégalités sur la surface de la Terre, & que de si petites différences produisent de si grandes déviations dans le fil à plomb, n'est-il pas naturel de penser qu'il y a de semblables inégalités répandues dans l'intérieur de la Terre, & capables du moins d'occasionner une déviation de quelques secondes? N'est-il pas visible au moins qu'on peut, qu'on doit même les soupçonner à juste titre? M. *de Maupertuis* fait mention dans ses élémens de Géographie, composés en 1740, qu'on lui objecte la déviation causée par les montagnes, (& je sais que ma Dissertation étoit dès-lors entre ses mains,) & il répond qu'on n'a pas coutume de faire des observations astronomiques au pied d'une montagne de cette hauteur, & capable de produire un si grand effet: mais cette réponse ne satisfait point à l'objection tirée tant de l'irrégularité de tissure dans les parties qui

(1) Voyez *Fig. de la Terre* de M. Bouguer.

ſont au-deſſous de la ſurface, que des concavités profondes : circonſtances que je n'avois pas omiſes dans mon objection. Or, il n'en eſt pas de ces inégalités ſouterraines comme de celles des montagnes : un Obſervateur ne les voit point, ne les connoît point ; comment les éviteroit-il ? A l'égard de la conſtitution des parties internes, on pourroit peut-être haſarder quelques conjectures ; mais ſans qu'on puiſſe eſpérer d'en avoir jamais de connoiſſance certaine.

Effet des inégalités intérieures de la Terre.

50. Que ſeroit-ce ſi ce noyau ſolide de la Terre que les mers environnent, avoit dans ſa plus grande profondeur des inégalités plus grandes encore, & tout à fait irrégulieres ? Cette ſeule raiſon ne ſuffiroit-elle pas, ſuivant les loix de l'équilibre, pour que les mers fuſſent alors plus renflées en certains endroits, en d'autres plus applaties ; enſorte que la différence des dégrés ne ſuivît point, ou du moins que de fort loin, une progreſſion réguliere ? Car l'hypotheſe d'où l'on part pour trouver par l'équilibre la figure de la Terre, & qui conſiſte à ſuppoſer que le globe n'étoit d'abord qu'un fluide, & qu'il s'eſt durci en partie, après avoir trouvé l'équilibre ; cette hypotheſe, dis-je, n'eſt appuyée ſur aucune preuve, pas même ſur la plus légere conjecture : & quoique le ſentiment qui ſuppoſe la Terre compacte au point que demande l'équilibre, (ce que des Architectes un peu inſtruits obſervent d'ordinaire dans la conſtruction des voutes,) ne manque pas abſolument de vraiſemblance, s'il eſt queſtion d'une grande différence à l'état que demande l'équilibre ; il n'en a plus aucune, lorſqu'il ne s'agit que d'une petite différence : car dans ces voutes mêmes, les plus habiles Architectes ſe mettent peu en peine d'avoir un équilibre parfait, perſuadés que la cohéſion des parties peut y ſuppléer : c'eſt ainſi que nous voyons pluſieurs maſſes de montagnes & d'iſles ſe ſoutenir ſans apparence d'équilibre par leur propre ſolidité : pourquoi ne pourroit-il pas arriver quelque choſe de ſemblable dans l'intérieur de la Terre, de ſorte que le centre de figure ne concourût point avec celui de la maſſe & de la gravité, autour duquel les parties ſont en équilibre ; ou que la denſité fût fort inégale, à égales diſtances du centre en tout ſens, & qu'il y eût de grandes cavités ſemées ſans ordre ſur toute l'étendue de la maſſe ?

51. M. *de Maupertuis* lui-même, ayant pesé avec plus de soin toutes ces raisons, en sentit sans doute toute la force ; & dans la Lettre qu'il publia quelques années après sur le progrès des sciences, (en 1752) il fait si peu de fond sur sa mesure du dégré, & sur toutes les autres, qu'il assure même qu'il est à craindre que les deux hémispheres, quoiqu'appuyés sur la même base, ne se ressemblent point pour la figure (1) ; & M. *de la Condamine*, après avoir rendu compte de la mesure des dégrés, qu'il a déterminée conjointement avec M. *Bouguer*, traite avec élégance, quoiqu'assez en détail, des effets que peuvent produire ces inégalités & ces irrégularités de tissure (2).

Soupçon de MM. de *Maupertuis* & *de la Condamine* sur cette irrégularité de tissure.

52. L'analogie ou le procédé ordinaire de la nature, peut déja nous faire soupçonner plutôt quelque irrégularité, qu'une loi fixe & constante dans la figure de la Terre. Que d'inégalités dans ses autres productions, dans les feuilles d'arbres, les fruits, les concrétions des mines de sel, les membres des animaux ! Il y en a jusques dans le mouvement des astres ; & celles-ci, pour être moins sensibles, n'en sont pas moins réelles, & n'en ont pas moins donné la torture aux Astronomes, sur-tout quand il a été question de déterminer le cours de la Lune, de Jupiter & de Saturne. Certainement s'il est permis de raisonner ici par analogie, nous conclurons plutôt pour la figure irréguliere, que pour une courbure uniforme. Le préjugé de régularité & de simplicité, est une source d'erreurs, qui n'a que trop souvent infecté la philosophie. On a cru pendant plusieurs siecles, que les astres avoient un mouvement circulaire & uniforme ; que la Terre étoit exactement sphérique, & cent choses de cette espece, au grand préjudice du progrès des sciences ; & ces préjugés sont cause qu'on a si long-temps négligé de faire les observations les plus propres à décider la question.

Preuves d'analogie.

53. Ceci m'a conduit à une autre réflexion. On regardoit autrefois la Terre comme sphérique, & sa courbure étoit

(1) Pag. 73 & 74.

(2) Voy. *Mesure des trois premiers dégrés du méridien*, Imp. royale 1751, Art. 30 & 31.

Doute de l'Auteur, si les paralleles sont exactement circulaires.

censée circulaire en tout sens. Deux mesures actuelles de dégrés du méridien à différentes distances de l'équateur, ont prouvé que les méridiens ne sont pas des cercles, & que la Terre n'a pas, d'un pôle à l'autre, la figure circulaire. Une troisieme mesure ne laisse pas même aux méridiens la figure elliptique que la théorie leur avoit conservée, quelle que soit la cause inconnue jusqu'ici de cette différence; mais on croit encore la courbure circulaire autour du pôle, c'est-à-dire, qu'on prend les paralleles pour des cercles; comme si la Terre, sans être sphérique, étoit à cela près comme faite au tour, & de la figure d'un œuf ou d'un oignon, en un mot, un solide de circonvolution, engendré par la révolution d'un méridien autour de l'axe. C'est pour cela que quoique les dégrés dont on a la mesure, aient été pris sur des méridiens fort différens, & placés à de très grandes distances les uns des autres, néanmoins lorsqu'il est question d'en conclure la figure de la Terre, on les regarde tous comme si c'étoient les dégrés d'un même méridien: on n'a point encore examiné si la courbure ne s'écarteroit pas aussi en ce sens de la circulaire. Il faut, si les paralleles sont des cercles, qu'à égales distances de l'équateur tous les dégrés soient égaux; & au contraire, qu'ils soient inégaux, si les paralleles ne sont pas circulaires. Pourquoi donc ne pas mesurer à peu près par la même latitude, ou sous le même parallele, & à différentes longitudes, deux dégrés du méridien, pour s'assurer s'ils sont réellement égaux? Car les Astronomes savent qu'il est beaucoup plus difficile d'avoir une mesure exacte des dégrés des paralleles que de ceux des méridiens. Celui qui exécuteroit avec succès la mesure de quelque dégré d'un parallele, ne feroit pas seulement une chose nouvelle, mais une chose utile & nécessaire (1).

54. Il y avoit plusieurs années que je m'occupois de ces

(1) Il y a eu deux dégrés de longitude mesurés en Provence en 1740. Voy. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag 99 & suiv. Voy. aussi *Mémoires de l'Acad. royale des Sciences* 1735, pag. 1 & suiv. Voy. enfin la Note pag. 39 du *Journal historique du voyage à l'équateur* par M. de la Condamine, & l'extrait de son *Voyage d'Italie*, Mém. de l'Acad. des Sciences de 1757, pag. 398.

différentes idées, lorſque m'entretenant un jour avec M. le Cardinal *Valenti*, Miniſtre de Sa Sainteté le Pape Benoît XIV, lequel ayant conſervé le goût des Lettres & des Sciences, qu'il a cultivées dans ſa jeuneſſe, aime à ſe délaſſer de ſes importantes occupations par des converſations ſavantes ; je fis tomber le diſcours ſur cette matiere. Sa pénétration lui fit, à la premiere ouverture, ſentir le prix d'une telle recherche : il me demanda s'il y avoit moyen d'exécuter une pareille entrepriſe dans les Etats du Pape : ma réponſe fut que les Etats de S. S. s'étendoient depuis *Rome* vers le nord, au-delà de deux dégrés ; que dans cet intervalle il y avoit des montagnes qui ſe voyoient les unes des autres, des plaines & des plages unies, aiſées à meſurer à la perche, ce qui ſembloit promettre un heureux ſuccès ; que la partie ſeptentrionale de ce trajet étoit ſous le même parallele que la partie méridionale de France, où paſſe le méridien de *Paris*, & à une aſſez grande diſtance vers l'orient, pour qu'on pût comparer utilement le dégré du méridien de Rome à celui du méridien de Paris, par la même latitude.

Projet d'une nouvelle meſure de dégrés en Italie.

55. Son Eminence ayant fait ce rapport à Sa Sainteté, dont on connoît le goût pour toute ſorte de littérature, me chargea par ſon ordre de décrire géométriquement la méridienne de *Rome*, juſqu'à l'extrémité ſeptentrionale de l'Etat eccléſiaſtique, & de déterminer la valeur du dégré du méridien. Nous avions alors à *Rome* le P. Chriſtophe *Maire*, Jéſuite Anglois, excellent Littérateur, mais ſurtout cultivant par goût l'Aſtronomie & la Géographie, & d'ailleurs d'une ſanté capable de ſupporter les fatigues du voyage. Je n'eus pas de peine à obtenir de M. le Cardinal *Valenti* de nous aſſocier le P. Maire & moi pour un ouvrage que deux Obſervateurs peuvent exécuter avec plus de facilité & d'exactitude qu'un ſeul. Le P. *Maire*, de ſon côté, conſentit à tout, & ouvrit un avis important ſur la réformation de la Carte géographique. Il obſerva que puiſqu'il nous falloit tranſporter un grand quart de cercle ſur de hautes montagnes, pour déterminer la direction de la méridienne, & la meſure du dégré par la poſition de nos ſignaux, nous pourrions en même tems relever pluſieurs autres points, & parcourir enſuite avec un petit quart de

Projet pour la réformation de la Carte géographique.

cercle tout l'Etat eccléſiaſtique, déterminer la longitude & la latitude des Villes, & autres lieux principaux, & corriger la Carte qui fourmilloit d'erreurs; qu'il n'y avoit point de particulier qui ne voulût avoir la topographie de ſes terres, & qu'il étoit bien plus important à un Souverain d'avoir une deſcription exacte des Pays ſoumis à ſa domination.

56. L'avis fut adopté ſans délai, & nous reçumes au mois de Juillet 1750 des ordres relatifs à ce double objet du voyage, dont je donne un récit abrégé dans le Chapitre ſuivant. Ce que j'ai dit ſuffit pour faire connoître le projet, l'objet & le double but de notre entrepriſe, que j'expoſe dans le titre même de cet ouvrage; l'un, de déterminer la courbure de la Terre dans les Etats du Pape, en la tirant de la meſure même des dégrés; l'autre, de réformer la Carte géographique. Nous avons meſuré un intervalle d'un peu plus de deux dégrés, d'où nous avons conclu la valeur du dégré moyen, & déterminé la courbure de la ſurface de la Terre pour cette contrée. La détermination de cette courbure ſert à la recherche de la figure totale de la Terre; mais la meſure d'un dégré ne donne la courbure que pour le lieu où s'eſt faite la meſure. Il faut enſuite comparer cette courbure à celle qu'on a trouvée ailleurs, pour en tirer les conſéquences ſur la figure & la grandeur de la Terre.

Le dégré du méridien reconnu plus petit, prouve que les paralleles ne ſont pas circulaires.

57. Or, nous avons trouvé par nos meſures une courbure beaucoup plus forte (1) que celle du dégré méridional de France, meſuré par MM. de l'Académie royale des Sciences, & preſque par la même latitude; car à 43 dégrés de latitude, nous avons trouvé le dégré de 56979 toiſes (2), tandis que MM. *Caſſini de Thury* & *de la Caille* l'ont trouvé de 57048 par 43 dégrés & demi, ce qui ſemble prouver que les paralleles mêmes ne ſont pas exempts d'irrégularités & d'inégalités,

(1) Il y a dans le texte *multò minor*; mais c'eſt évidemment une faute d'impreſſion, puiſque la courbure eſt d'autant plus forte, que le dégré eſt plus petit, voyez n°. 33, & que le dégré d'Italie, de 56979 toiſes, s'eſt trouvé plus petit de près de 80 toiſes que le dégré méridional de France de 57048 toiſes, comme l'Auteur l'expoſe deux lignes plus bas.

(2) Il faut ôter 4 toiſes, ſuivant la Note du n°. 75, Liv. 1.

comme

comme je m'en étois douté dès le commencement Du reſte, quoique notre dégré ſoit beaucoup plus petit que celui que M. *Caſſini* a meſuré dans la partie méridionale de France, il eſt encore de 18 toiſes plus grand qu'il ne devroit être, ſuivant la théorie de M. *Bouguer*, qui donne pour cette latitude 56961 toiſes.

La meſure de M. *de la Caille* en Afrique, donne une plus grande inégalité dans la figure de la Terre :

58. Tandis que nous meſurions un dégré en Italie, M. *de la Caille*, Académicien de *Paris*, qui avoit été envoyé au Cap de *Bonne-Eſpérance* pour faire des obſervations aſtronomiques dans l'hémiſphere auſtral, ayant rencontré un terrein propre à meſurer un dégré par la latitude de 33. d. 18 m. & demie, trouva ce dégré de 57037 toiſes, c'eſt-à-dire, plus grand que le nôtre, au lieu qu'il auroit du être beaucoup plus petit: il ne s'accorde guere mieux avec le dégré méridional de France, auquel il eſt preſque égal ; & il ſurpaſſe de près de 200 toiſes celui que M. *Bouguer* déduit de ſa théorie pour cette latitude. Ainſi il paroît non ſeulement que les paralleles s'écartent de la figure circulaire, mais que ſuivant la conjecture de M. *de Maupertuis*, dans cette Lettre ſur le progrès des ſciences (n°. 51. L. I.), les deux hémiſpheres ne ſe reſſemblent point.

Ce qui ne doit pas faire abandonner cette méthode.

59. Je ne voudrois pas cependant en conclure ce que M. *de Maupertuis* ſemble vouloir faire entendre au même endroit, & ce que la plupart concluront d'une différence beaucoup plus conſidérable, trouvée depuis par M. *de la Caille* ; ſavoir, qu'il faut renoncer à l'eſpérance de pouvoir déterminer la figure de la Terre par la meſure des dégrés, & qu'il vaut mieux avoir recours aux parallaxes de la Lune, propoſées autrefois par M. *Manfredi* à l'Académie royale des Sciences, comme un moyen très propre à ces ſortes de recherches; & que M. *de Maupertuis*, par une méthode auſſi élégante qu'exacte, a appliqué à la détermination de la figure de la Terre (1).

60. Cette méthode même dépend preſque entierement des mouvemens de la Lune; & je doute que les mouvemens de

(1) Voyez *Parallaxe de la Lune*, Œuvres de M. de Maupertuis.

Méthode pour déterminer la figure de la Terre par les parallaxes de la Lune.

la Lune puissent être assez exactement connus, soit par la théorie, soit par les observations, pour qu'il n'y ait pas quelques erreurs à craindre dans la méthode, qui seroit d'ailleurs très utile, si l'on pouvoit une fois être bien assuré de toutes les anomalies de la Lune, & répondre de quelques secondes dans une observation.

Qu'il faut mesurer plusieurs dégrés, même voisins les uns des autres;

61. Quant à la mesure des dégrés, on doit bien plutôt s'efforcer d'entretenir l'émulation parmi les Astronomes, & d'exciter la magnificence des Souverains, pour multiplier ces mesures en différens endroits de la Terre: ce qui seroit, à mon avis, très utile pour en déterminer la figure; car puisque les différences produites par les inégalités de tissure & de densité, soit immédiatement au-dessus de sa surface, comme les montagnes & les collines, soit au-dessous de sa superficie, ne suivent point elles-mêmes une progression réguliere; elles feront paroître nécessairement les dégrés en certains endroits trop longs, en d'autres, trop courts. Donc prenant un milieu entre la plupart des dégrés qui se touchent, comme cela se pratique dans toutes les observations astronomiques, les erreurs se corrigeront réciproquement; & comparant ensuite ces dégrés moyens, on s'assure de la courbure en plusieurs lieux éloignés les uns des autres, & par-là même de la configuration de la surface de la Terre dans ces mêmes lieux: ce qui est déja un grand avantage. Si de plus on trouve quelque loi qui représente toutes ces courbures de la surface, on en pourra déduire la constitution des parties intérieures. Ce n'est que par la multiplicité des observations qu'on peut parvenir à perfectionner toute la Physique, particulierement l'Astronomie & la Géographie.

Que l'irrégularité de tissure est presque tout au-dessus de la surface;

62. Or je croirois volontiers, & ce soupçon n'est pas appuyé sur une légere conjecture, que toute l'inégalité & l'irrégularité se trouve, non dans l'intérieur le plus profond, ou fort avant dans la Terre, mais proche de la surface, & qu'elle vient surtout des parties qui s'élevent au-dessus de cette surface même, auprès de laquelle il arrive souvent des changemens considérables. Car on peut démontrer aisément que les inégalités de densité, voisines de la surface, produisent de grandes différences dans la mesure des dégrés, tandis qu'elles

n'en produiſent que de très petites dans la longueur du pendule à ſecondes, dont on ſe ſert pour meſurer la gravité; comme au contraire, que des inégalités, placées à une grande profondeur, leſquelles, pour agir avec la même force, doivent être beaucoup plus conſidérables, dérangent notablement le pendule, & fort peu le dégré. En effet, une montagne, au pied de laquelle ſe feroit l'obſervation, & qui équivaudroit à une ſphere de 250 pas de diametre, ou un quart de mille, produiroit, comme nous l'avons dit, une déviation d'environ 15 ſecondes dans le fil à plomb, & le double de cette déviation entraîneroit une erreur de près de 500 toiſes dans la meſure d'un dégré. Or, cette même montagne attirant obliquement, & toujours avec une force égale le pendule à ſecondes, elle n'apportera dans ſon mouvement, ni par conſéquent dans ſa longueur, aucune différence ſenſible. Mais ſi pareille maſſe étoit placée au-deſſous de la ſuperficie de la Terre, enſorte qu'elle augmentât directement la gravité, elle ne cauſeroit dans le fil à plomb aucune déviation ſenſible; mais elle augmenteroit la longueur du pendule à ſecondes d'environ un quart de ligne: ce qui fait une différence conſidérable. Que ſi la maſſe ſuppoſée étoit enfoncée fort avant dans la Terre, en la ſuppoſant même placée de côté, elle n'attireroit qu'obliquement le fil à plomb, & par-là même ne le feroit que très peu dévier; mais elle ne laiſſeroit pas d'agir avec le reſte de la maſſe terreſtre ſur le pendule à ſecondes qu'elle feroit allonger (1) à proportion qu'elle augmenteroit la force de ſon poids. Cependant, comme nous l'avons déja remarqué, pour le cas d'une grande profondeur, ou d'une grande diſtance, il faut une maſſe beaucoup plus conſidérable pour produire ces deux effets.

Que la meſure des dégrés eſt fort troublée par-là; que celle de la gravité en eſt peu altérée.

63. Maintenant ſi nous comparons entre elles les longueurs obſervées du pendule, nous trouverons qu'elles s'écartent beaucoup moins de la loi qu'elles doivent ſuivre de l'équateur au pôle ſuivant la théorie, que les dégrés dont nous

(1) Pour ſavoir pourquoi on eſt obligé, quand la gravité eſt moindre, de raccourcir le pendule à ſecondes, & de l'allonger quand elle eſt plus grande, il ſuffit de ſe rappeller ce qui a été dit n°. 11 & 12 de ce Ier Liv.

avons la mesure : ce qui semble indiquer que les inégalités, voisines de la surface de la Terre, font dévier de quelques secondes le fil à plomb ; mais qu'elles n'augmentent ni ne diminuent sensiblement la gravité, ou ne l'alterent que suivant une loi constante.

La mesure des dégrés de France & des nôtres, s'accorde avec cette conjecture.

64. C'est ce qu'on peut encore conclure vraisemblablement de la comparaison de notre dégré avec ceux de France. Nos observations astronomiques ont été faites à *Rome* & à *Rimini* ; & outre que l'*Apennin* se trouve entre deux, le sol s'éleve tout à coup : ce qui doit produire une déviation dans le fil à plomb, & augmenter l'amplitude de l'arc céleste, compris entre le zénith de ces deux Villes, & par-là même donner aux dégrés de cet arc un moindre nombre de toises. Les pyrénées peuvent avoir produit en France un effet tout contraire ; car leur position tendoit à diminuer l'amplitude de l'arc observé : ce qui a pu allonger le dégré méridional. D'autres causes de cette nature ont répandu quelques anomalies sur les autres dégrés de France : il ne faudroit cependant pas leur faire, non plus qu'au nôtre, ni à ceux du Pérou & de Laponie, beaucoup de violence, pour les plier à une loi uniforme & réguliere ; il suffiroit de faire un petit changement aux dégrés de France, surtout en diminuant un peu les plus méridionaux, & en augmentant un peu la longueur du nôtre.

Utilité de ces expéditions.

65. Tout ceci ne peut être bien éclairci que par des observations multipliées en diverses contrées de la Terre : ce qui fait voir l'utilité, la nécessité même de ces sortes de mesures pour le progrès de l'Astronomie, de la Géographie, & de toute la Physique (1).

---

(1) Le P. *Boscovich* a supplié l'Impératrice Reine de donner des ordres pour mesurer des dégrés dans la Moravie, l'Autriche & la Stirie, pays remplis de montagnes, & dans les plaines de Hongrie. Il a prié aussi le Roi de Sardaigne d'en faire mesurer un dans le Piémont, où le plat pays se trouve entre l'Apennin & les Alpes, tout au contraire de ce qui se voit dans son propre dégré, où l'Apennin est entre deux plaines. Enfin dans son voyage en Angleterre, il a représenté à la Société Royale l'avantage qu'il y auroit de faire mesurer un dégré en Amérique, avec d'autant plus à raison, que depuis que l'Astronomie est perfectionnée, l'Angleterre n'avoit rien fait pour connoître la figure de la Terre. Toutes

CHAPITRE II.

Relation hiſtorique du Voyage : utilité qu'on en a retirée.

66. CE fut au commencement de Juillet 1750 que nous reçumes des ordres relatifs à notre voyage ; & notre premier ſoin fut dès-lors de préparer les inſtrumens néceſſaires à la meſure du dégré : c'étoit le premier objet de notre commiſſion, & je dois en rendre compte. Quant à la correction de la Carte, elle ne demandoit pas de grands préparatifs ; un petit quart de cercle pouvoit ſuffire, du moment ſurtout qu'avec un inſtrument d'un plus grand rayon, nous aurions déterminé la direction de notre méridienne, & la poſition de nos principales ſtations. Le P. *Maire* avoit un petit quart de cercle d'un pied de rayon, qui pouvoit ſe tranſporter ſans peine d'un lieu à un autre, & qui étoit tellement conſtruit, & déja vérifié par un ſi grand nombre d'obſervations, qu'avec une attention médiocre nous n'avions pas même à craindre une minute d'erreur. Cet inſtrument nous a été d'un grand uſage pour déterminer la poſition des lieux divers qui devoient entrer dans la Carte géographique.

1750. Juillet.

Préparation des inſtrumens pour la meſure des dégrés & la Carte ;

67. La direction de la méridienne & la détermination du dégré demandoient plus d'appareil. L'une & l'autre opération exigeoit des meſures géodéſiques, & des obſervations aſtronomiques d'une grande délicateſſe. A l'égard des meſures géodéſiques, il nous falloit une baſe rectiligne de pluſieurs milles, & actuellement meſurée dans un terrein uni. Pour cela il

La meſure en exige de plus grands.

ces demandes du P. *Boſcovich* ont eu un heureux ſuccès. On voit déja dans le cinquante-huitieme volume des Tranſactions philoſophiques, années 1768, page 327, la meſure du dégré du Piémont, faite par le célebre P. *Beccaria ;* celle du premier dégré du P. *Lieſganig* ; celle du dégré de Penſilvanie, faite par MM. *Maſſon* & *Dixon :* le P. *Lieſganig* meſure actuellement ſon ſecond dégré en Hongrie. Quand on aura le détail des meſures des PP. *Lieſganig* & *Beccaria*, on verra avec la derniere évidence l'action des montagnes ſur le fil à plomb. Le lecteur judicieux ſentira les obligations que l'on a au P. *Boſcovich*, d'avoir ſollicité ces meſures.

eſt néceſſaire d'avoir une meſure fixe, dont le rapport avec les meſures qui ont ſervi dans les autres opérations de cette eſpece, par exemple, avec la toiſe de *Paris*, ſoit ſûrement & exactement connu. De plus, on doit avoir de longues perches ou regles ſolides, exactement rapportées à cette meſure, avec quelques autres uſtenſiles propres à donner aux perches une poſition convenable, ſurtout un niveau, des trépieds ou ſupports, dont nous aurons encore occaſion de parler.

Grand quart de cercle pour les grands triangles. Signaux ſur les montagnes.

68. Il nous falloit encore pour nos meſures géodéſiques un quart de cercle d'un aſſez grand rayon, tel, que nous puſſions répondre, à quelques ſecondes près, de la meſure des angles d'une ſuite ou chaîne de grands triangles, qui doit s'étendre d'une extrémité de la méridienne à l'autre, & à peu près dans la même direction: & pour connoître plus exactement cette direction, il eſt néceſſaire de comparer un des côtés du polygone formé par cette ſuite de triangles, avec le Soleil levant ou couchant. Outre cela, comme on place ordinairement ſes ſtations ſur de hautes montagnes, on doit déterminer auſſi avec une exactitude ſuffiſante, les hauteurs & les abaiſſemens reſpectifs des ſignaux: (autant d'opérations auxquelles un petit quart de cercle ne pourroit ſuffire). Enfin les ſignaux qu'on place dans chaque ſtation, doivent être tels, qu'on puiſſe les appercevoir à une très grande diſtance, & pointer ſur eux des ſtations voiſines, comme étant les points où ſe terminent les triangles.

Obſervations aſtronomiques pour l'arc céleſte compris entre les deux extrémités de la méridienne.

69. Tout ceci eſt néceſſaire pour déterminer avec préciſion la direction de la méridienne, réduire les diſtances des ſignaux à un même niveau, ou à une ſurface parallele à la Terre, & avoir ſur cette ſurface la longueur de l'arc terreſtre du méridien, intercepté par les paralleles des lieux choiſis pour faire les obſervations aſtronomiques, aux deux extrémités de cet arc, & déterminer par ces obſervations l'amplitude de l'arc céleſte correſpondant, ou le nombre de dégrés & de minutes contenu dans l'arc terreſtre: ce qui ſe fait en obſervant de part & d'autre la diſtance d'une étoile au zénith dans le moment de ſon paſſage au méridien; d'où l'on tire, comme nous l'avons déja inſinué, en dégrés & minutes la

distance d'un zénith à l'autre. Car on voit que pour avoir le nombre de toises qui convient à un dégré moyen, il suffit de connoître, d'une part, le nombre de toises contenues dans l'arc terrestre mesuré, & de l'autre, le nombre de dégrés & de minutes que comprend le même arc.

Elles doivent être exactes, à une ou deux secondes près.

70. Or, la détermination de la distance d'une étoile au zénith, est ici une opération si délicate, qu'on doit absolument y éviter jusqu'à l'erreur d'une, ou au plus de deux secondes. Car si l'on ne mesure qu'un dégré, chaque seconde d'erreur en entraîne une de seize toises. Cependant si l'on mesure un arc de plusieurs dégrés, l'erreur se partage, & devient d'autant moindre, que le nombre de dégrés mesurés est plus grand. Mais la nature des lieux, comme dans le cas où nous nous trouvions (bornés par la mer), ne permet pas toujours de mesurer un arc d'un grand nombre de dégrés; & il n'est pas même à propos d'en renfermer un si grand nombre dans la mesure, de crainte qu'une trop grande distance de l'étoile au zénith ne soit une nouvelle source d'erreur par l'incertitude de la réfraction. Ainsi on ne doit rien oublier pour rendre les observations astronomiques les plus exactes qu'il sera possible, & y éviter l'erreur d'une, ou au moins de deux secondes.

Nécessité d'employer un secteur de peu de dégrés & d'un grand rayon.

71. Il est donc évident que dans ces sortes d'opérations, on doit se servir d'un instrument d'un rayon beaucoup plus grand que les quarts de cercle ordinaires, & susceptible d'une bien plus grande précision. Du reste, comme on ne l'emploie communément qu'à mesurer un assez petit arc du méridien, on se contente de tracer sur l'instrument un arc de quelques dégrés; ce qui lui fait donner le nom de secteur. Or, on peut, au lieu d'un arc, n'y tracer qu'une ligne droite, ainsi que je l'ai fait; auquel cas il tient plus de la figure d'une croix, ou d'un triangle isocele, que de celle d'un secteur; cependant comme il est employé au même usage qu'un secteur pour mesurer de petits angles, nous lui en conserverons le nom.

Trois sortes d'instrumens nécessaires.

72. Notre commission pour la mesure du dégré, embrassoit donc trois objets; 1°. la mesure d'une base; 2°. celle d'une suite de triangles formant un polygone; 3°. la distance de l'étoile au zénith à observer aux deux extrémités de la méri-

dienne. Chacune de ces trois opérations exigeoit des instrumens particuliers ; nous devions commencer par nous en pourvoir.

Perches, supports, &c. Nécessité de faire venir une toise de *Paris*.

73. A l'égard de la mesure de la base, il n'étoit pas difficile de trouver ici des perches ou regles, un niveau, des trépieds, & autres choses semblables. Quant à la toise, nous ne pouvions nous dispenser d'en faire venir une de France, n'étant pas possible d'y suppléer par une mesure de six pieds, tirée du pied de *Paris*, nommé vulgairement pied-de-Roi, gravé sur les instrumens ordinaires, qui fait la sixieme partie de la toise. En effet, supposons que l'Artiste se fût trompé sur le pied, seulement de la dixieme partie d'une ligne, dont il y en a 12 dans le pouce & 144 dans le pied ; & l'on sait que le commun des Artistes commet des erreurs beaucoup plus considérables ; l'erreur du pied sera $\frac{1}{1440}$ de pied : donc celle du dégré, lequel est environ de 57000 toises, ou 342000 pieds, sera presque de 40 toises ; erreur trop excessive.

Mesure de la toise de *Paris*, demandée à M. *de Mairan* :

74. J'écrivis donc à M. de *Mairan*, illustre membre de l'Académie des Sciences de *Paris*, que cette Compagnie m'avoit elle-même désigné depuis quelques années pour correspondant, en m'accordant ce même titre ; & après lui avoir fait part des ordres que j'avois reçus de Sa Sainteté, je le priai de faire construire par un habile ouvrier une regle de fer sur laquelle fût gravée exactement une toise, & de me l'envoyer pour la mesure de ma base. M. le Cardinal *Valenti* qui n'oublioit rien pour faire réussir notre expédition, & à qui tout le succès en est dû, écrivit en même temps à M. le Nonce à *Paris*, pour lui recommander de prendre soin de cette affaire, d'où dépendoit la certitude de notre mesure, & de faire transporter la toise à *Rome* le plus promptement qu'il se pourroit, dès qu'il l'auroit reçue des mains de M. *de Mairan*.

Précautions prises pour l'avoir exacte, & pour le transport.

75. Personne ne s'est plus étudié que M. de *Mairan* à fixer la vraie longueur de la toise : il avoit fait construire pour son usage une regle de fer, ajustée sur le même étalon que les deux qui ont servi aux Académiciens du Nord & du Pérou, les unes & les autres de la façon du sieur *Langlois*, fameux Artiste, qui conserve chez lui l'étalon de ces trois regles, dont un autre étalon étoit déposé chez M. de Mairan. Ce Savant

eut

eut la bonté de m'en envoyer à *Rome* une de la même main, & étalonnée sur le même modele: elle étoit également gravée sur une regle de fer, avec des divisions en pieds, pouces, lignes & parties de lignes, exprimées par des transversales. Et afin qu'il ne me restât aucun doute sur la justesse de cette regle, M. *de Mairan* m'écrivit avec sa politesse & son exactitude ordinaire, qu'il l'avoit soigneusement comparée à la sienne, en se servant pour cela d'une loupe, & qu'il l'avoit réduite à une parfaite égalité (1).

On se sert en attendant d'une mesure de 9 palmes romains.

76. Elle partit de *Paris* d'assez bonne heure; mais comme elle venoit par mer, sur un bâtiment qui s'arrêta dans plusieurs ports, elle ne nous parvint à *Rome* que plusieurs mois après, & le tems pressoit de mesurer la base: d'ailleurs nous craignîmes, en la portant avec nous, de l'exposer aux accidens du voyage, & à l'humidité de l'air. Ainsi d'un commun consentement nous préparâmes une autre regle de fer, sur laquelle nous gravâmes deux points très fins, à l'intervalle de neuf palmes romains, pris sur l'étalon public, gravé sur la pierre, & conservé au Capitole, mais dont les divisions très grossierement gravées, ne donnent pas la longueur du palme avec assez de précision. Nous nous réservions de comparer dans la suite cette mesure à la toise de six pieds de *Paris*, pour connoître plus exactement le rapport du pied de roi au

(1) La toise de M. *de Mairan*, sur laquelle il a fixé celle des RR. PP. *Maire* & *Boscovich*, est plus petite de $\frac{8}{75}$ de ligne que celle qui a servi à mesurer le dégré du Pérou. Ainsi il faut ôter 7 toises du dégré d'Italie pour le comparer à celui qui a été mesuré sous l'équateur: de même il faut ôter 4 toises pour le comparer à celui du Nord, parceque la toise du Nord est plus petite de $\frac{1}{20}$ de ligne que celle du Pérou. (*Exposition du calcul astronomique par M.* de Lalande, p. 198. *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1754, p. 178.) On ôtera aussi 4 toises pour le comparer à celui de France, mesuré par M. *Cassini*, puisque la toise dont M. *Cassini* s'est servi dans la méridienne vérifiée en 1740, ne différoit pas sensiblement de la toise du Nord employée à cette vérification; la mesure de l'ancienne base de M. *Picart*, de *Villejuifve* à *Juvisi*, vérifiée par les Commissaires de l'Académie en 1756 avec la toise du Nord, s'étant trouvée de 5748 toises 7 pouces $\frac{1}{2}$, la même à un demi pied près que l'avoient trouvée M. *Cassini* pere, & M. l'Abbé *de la Caille* en 1740. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag. 36. *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1754, pag. 182.

$\frac{8}{75.6.19.12} \times 56979 = 7$

$\frac{8}{75.6.19.12} = \frac{1}{8100}$

palme romain. Nous savions déja que neuf palmes devoient faire un peu plus de six pieds, ou d'une toise; mais quelle que fût sa longueur, fût-elle même arbitraire, elle pouvoit également nous servir, pourvu que nous eussions un moyen certain de connoître assez exactement son rapport à la toise. Or, nous avons trouvé ce rapport par deux méthodes, que j'expliquerai en détail dans le quatrieme Livre: nous avons répété plusieurs fois cet examen toujours avec un succès égal, & un accord parfait, sans qu'il nous puisse rester aucun risque d'erreur qui influe d'une maniere sensible sur la mesure du dégré.

Perches tirées d'un vieux mât de navire.

77. Voilà pour ce qui concerne la mesure originale, à laquelle nous avons rapporté toutes nos mesures. Quant aux trois perches qui devoient contenir chacune trois de ces mesures, ou 27 palmes romains, je les ai tirées, tant à *Rome* qu'à *Rimini* (car nous avons mesuré deux bases sur le terrein, une dans le voisinage de chacune de ces deux Villes, comme je l'ai insinué dans le Chapitre premier), de deux vieilles pieces de bois qui avoient long-tems servi de mât de navire: précaution nécessaire pour qu'elles fussent moins exposées à changer de longueur par les variations de la température de l'air. Je ne dis rien ici, ni des supports à trois pieds, sur lesquels nous posions ces perches en mesurant nos bases, ni des lames de métal que nous y avons ajoutées, ni des moyens que nous avons employés pour mettre les perches de niveau, ni de la méthode dont nous nous sommes servis pour les comparer plusieurs fois le jour à notre regle de fer, & pour connoître leur allongement, leur raccourcissement, & la petite courbure qu'y produisoient l'humidité ou les alternatives de température de l'air: tout cela se trouve expliqué dans le quatrieme Livre, où je donne plus en détail la description & l'usage des instrumens.

Du secteur & du grand quart de cercle. Eloge de M. Wood Anglois,

78. Nous avions plus d'inquiétude au sujet du secteur & du grand quart de cercle, ne trouvant point à *Rome* d'ouvrier assez habile pour y travailler. Le célebre Artiste Dominique *Lusverg* n'étoit plus; & il a été plus aisé d'hériter de ses biens que de son industrie. Personne n'eût été plus propre à nous consoler de sa perte, que M. *Wood*, Gentilhomme

Anglois, mon ami particulier, attaché à M. le Cardinal *Valenti*, & dont la mort prématurée vient de répandre le deuil dans toute la Ville; homme d'un esprit supérieur, dont le talent, l'adresse incroyable dans la construction des machines de tout genre & les plus compliquées, qu'il travailloit, qu'il finissoit de ses propres mains, l'égaloient aux plus habiles Maîtres de l'Europe : notre amitié me mettoit en droit de lui demander ces instrumens, & il n'auroit pu les refuser à M. le Cardinal; mais je le voyois occupé de soins plus importans; divers ouvrages commencés depuis long-tems, & qui ne pouvoient plus s'interrompre, épuisoient toute son attention.

Remplacé par M. Rufo de Vérone.

79. Nous avions de plus à *Rome*, & nous y possédons encore M. *Rufo* Prêtre, natif de *Vérone*, habile dans les ouvrages d'optique, lunettes, télescopes, microscopes, & autres instrumens de Physique expérimentale, qu'il s'entend également à construire & à réparer. On lui avoit confié depuis peu le cabinet de méchanique du grand College *Romain* pour le mettre en ordre & l'augmenter de nouvelles machines; mais il n'avoit jamais travaillé de quart de cercle; il n'avoit jamais vu de secteur.

Dirigé par le Pere Maire & l'Auteur.

80. Cependant comme son talent & son adresse nous étoient connus; que nous pouvions d'ailleurs le visiter fréquemment, & conduire l'ouvrage de l'œil; qu'enfin il étoit le seul à qui on pût s'adresser, nous nous en rapportâmes à lui, & avec d'autant plus de raison, que je voulois faire construire un secteur d'une nouvelle invention, & à l'égard duquel tout Artiste devoit être novice : j'en donne une description fort détaillée dans le quatrieme Livre, ainsi que du quart de cercle dont le P. *Maire* a rendu la lunette fixe double (1) : ce qui nous a été d'un grand secours, comme nous le verrons là même, surtout pour la vérification nécessaire dans le cas où l'on observe des hauteurs verticales, & pour faire cette vérification sans retourner l'instrument. M. *Rufo* a imaginé lui-même fort à propos plusieurs moyens pour faciliter l'usage du micrometre, & pour donner aisément au quart de cercle une position oblique

(1) Voyez Liv. IV, n°. 179.

en tout ſens ; & après en avoir communiqué avec nous, il a également réuſſi dans l'exécution. J'y ai fait ajouter une piece qui me paroît fort propre à vérifier les diviſions du limbe, & qui, je crois, pourra être dans la ſuite d'un grand uſage aux Obſervateurs. Mais je renvoie tout ceci au quatrieme Livre, où nous aurons lieu d'en traiter plus au long & plus à ſa place. Au reſte, les ſoins de M. *Rufo* ont ſi bien réuſſi, que rien n'a manqué aux deux inſtrumens pour donner aux obſervations la plus grande exactitude : le ſeul micrometre de la lunette fixe du quart de cercle, n'ayant pas été à l'épreuve des accidens du voyage, s'eſt dérangé en chemin ; & faute d'ouvriers en état d'y faire les réparations néceſſaires, il n'a pu nous ſervir qu'à une partie des uſages auxquels il étoit deſtiné : nous avons ſuppléé aux autres, de la maniere que je dirai dans le quatrieme Livre.

Projet des opérations dans le cours de l'année.

81. Etant donc convenu de tout avec notre Artiſte, je comptois qu'il ne lui falloit que deux mois pour le quart de cercle, autant pour le ſecteur, & qu'ainſi nous aurions dans peu tout ce qui étoit néceſſaire pour la meſure du dégré. Dans cette ſuppoſition, nous devions avant l'hyver choiſir toutes nos ſtations, meſurer tous nos angles, & conduire la ſuite de nos triangles juſqu'à *Rimini*, où devoit aboutir la méridienne de *Rome* prolongée au nord, ſuivant les réſultats de M. *Manfredi*, tirés des obſervations géodéſiques de M. *Bianchini*, de diverſes conjectures, & de quelques obſervations aſtronomiques. De plus, nous devions choiſir aux environs de *Rimini* un terrein propre à une baſe, & la meſurer en attendant l'arrivée de notre ſecteur. Le ſecteur venu, nous devions faire à *Rimini* nos premieres obſervations aſtronomiques, retourner inceſſamment à *Rome* pour faire les correſpondantes, avec le moindre intervalle poſſible, à l'autre extrémité de la meridienne, y choiſir & y meſurer une baſe de vérification pour conſtater la meſure du dégré. Ainſi je me flattois qu'au bout de quelques mois nous verrions la fin de nos opérations.

Retardemens ſurvenus.

82. Mais il y eut bien à rabattre de mes eſpérances. Notre Artiſte, occupé d'autres ſoins, nous fit attendre plus d'un an entier notre quart de cercle : la conſtruction du ſecteur fut la

matiere de nouveaux délais de plusieurs mois : ce qui ayant plusieurs fois dérangé tout le système de nos voyages, & toute la suite de nos observations, nous a tenus deux ans & quelques mois en campagne. L'unique fruit que nous ayons retiré de ses lenteurs, a été de faire, en attendant, quelques excursions pour corriger la Carte, pour reconnoître la position des montagnes, & choisir à loisir toutes nos stations avant que de procéder à la mesure des angles : choix que nous avons fait beaucoup plus commodément que nous n'eussions pu le faire dans le cours même de nos opérations.

Choix des stations.

83. Nous partîmes donc de *Rome* le premier Octobre avec notre petit quart de cercle, pour reconnoître le terrein, suivant à peu près la direction de la méridienne; & étant entrés dans la Province de Sabine, nous arrivâmes à *Palombara*, petite Ville appartenant à la maison *Borgheſe*, située au pied d'une haute montagne nommée *Gennaro*, que nous avions vue de *Rome*, & qui dès-lors nous avoit paru fort propre à établir un poste (1). Sa cime, terminée en pointe, pouvoit être apperçue de très loin, & fournir un point fixe, sans qu'il fût presque besoin d'autre signal. Le côté de la montagne qui regarde *Rome*, s'éleve presqu'à pic au-dessus d'une vaste plaine qui se continue au sud-oueſt au-delà de *Rome* jusqu'à la mer. La vue s'étend fort loin, d'un côté, dans la Toscane, de l'autre, dans le Royaume de Naples, dont une croupe de l'*Apennin* cache pourtant la partie la plus voisine.

1750. Octobre. Départ de *Rome*.

84. Nous escaladons cette montagne le P. *Maire* & moi, accompagnés d'un homme de mérite, & d'un bon ami, M. *Tosio*; car pourquoi tairois-je le nom de ceux qui par pure amitié ont bien voulu nous accorder l'hospitalité, se donner la peine de nous suivre jusqu'au sommet des plus hautes montagnes, & joindre à nos observations un témoignage respectable (2) ? Nous vîmes dès-lors que nous pouvions passer le

Station du mont *Gennaro*.

(1) L'auteur remarque ici que bien qu'il écrive en latin, il se servira le plus souvent des noms vulgaires des lieux, surtout quand les noms latins seront inconnus ou fort douteux ; l'érudition nécessaire pour une plus ample recherche de ces noms, étant étrangere à cet ouvrage.

(2) Nous omettons ici & ailleurs quelques détails étrangers à l'objet

mont *Soracte*, quoique d'ailleurs fort propre aux obſervations, parceque nous découvrions plus loin une montagne qui occupe tout le terrein entre *Soriano* & *Viterbe*, & dont l'une des pointes conſerve encore ſon ancien nom de *Cimini*. Cette montagne nous parut propre à terminer notre premier triangle, appuyé vers le ſud au dome de la Baſilique de Saint Pierre de *Rome*. Nous jugeâmes auſſi qu'il ſeroit facile de trouver vers le nord, aux environs de *Terni*, une troiſieme montagne, d'où l'on pût découvrir la pointe de *Cimini*, de *Soriano*, & le mont *Gennaro*, & qui pût terminer notre ſecond triangle.

Conſtruction des ſignaux.

85. Nous convînmes en même tems de prendre pour ſignaux des eſpeces de cabanes fort élevées, que nous ferions conſtruire avec des branches d'arbres ſur les hauteurs: précaution néceſſaire à l'égard des montagnes, dont le ſommet a une certaine étendue, & ne préſente aucun point fixe ſur lequel on puiſſe pointer, & qui ne laiſſoit pas d'être fort utile dans celle où nous étions pour lors, quoique ſa cime fût couverte d'un amas de pierres qui a la forme d'une pyramide. Nous donnâmes la préférence à cette eſpece de ſignaux, parceque la plupart de nos montagnes, & même les plus arides, étoient preſque couvertes de bois juſqu'au ſommet. Ces baraques étoient tantôt quarrées, tantôt circulaires, ſuivant la diſpoſition du lieu. Nous commençions par faire planter une enceinte de longues branches, enfoncées de pluſieurs palmes dans la terre, & inclinées l'une vers l'autre par le haut; elles étoient traverſées par d'autres branches qu'on y attachoit avec des cordes & des clous, & qui les retenoient dans cette poſition: cela fait, on revêtoit le tout de feuillage. Le diametre de l'édifice étoit d'environ 20 palmes (1): il y avoit ordinairement quelque choſe de plus en hauteur; de ſorte que de loin on l'auroit pris pour une tour.

86. Nous avons éprouvé que ces ſortes de cabanes, placées au ſommet des montagnes, ſe diſtinguent aiſément de loin, même avec de petites lunettes, lorſqu'elles ſe *projectent*, non

---

du voyage, dans leſquels la reconnoiſſance engage l'Auteur, d'autant plus que la plupart des noms omis ſeroient inconnus aux lecteurs François.

(1) Près de 14 pieds.

sur d'autres montagnes, mais sur le ciel même; car la montagne paroît alors terminée par une ligne qui n'est interrompue que par une tache noire, formée par la cabane : cette tache s'éleve un peu au-dessus de la ligne, & se fait d'abord remarquer; jusques-là, que quoique nous ayons eu quelquefois des triangles dont l'un des côtés étoit de 50 milles, nous ne laissions pas, avec les petites lunettes de notre quart de cercle, & par un tems peu serein, d'appercevoir très distinctement tous nos signaux. Mais s'il y avoit derriere le signal une montagne plus élevée que le signal même, ce qui nous est arrivé deux fois seulement, & dans une même station, on ne le découvroit qu'avec beaucoup de peine; encore falloit-il que le ciel fût bien pur : le meilleur tems pour cela est celui où le Soleil éclaire les vapeurs qui sont entre ces deux montagnes; ce qui fait comme une espece de nuée lumineuse, sur laquelle le signal se *projecte* par une tache noirâtre qui le décele. Mais si le signal étoit encore plus bas, on ne pourroit absolument le distinguer à une si grande distance; & il faudroit en ce cas raccourcir les triangles & couvrir les signaux de linceuls, ou d'autres choses semblables, tirant plutôt sur le blanc que sur le noir. J'ai cru que cet avis pourroit être utile à ceux qui voudroient entreprendre un ouvrage semblable au nôtre, pour les diriger dans le choix de leurs stations, & ne pas les exposer au danger de perdre leur tems en vaines tentatives.

Ils doivent être sur le sommet des montagnes pour être apperçus de loin.

87. Revenus à *Rome*, nous prîmes la route de *Soriano*, petite Ville riche & peuplée, appartenant à la maison *Albani*. Notre premier soin, en arrivant, fut de nous transporter sur la montagne voisine; nous reconnûmes que son sommet & ses flancs étoient entierement couverts d'arbres de haute futaie. Ainsi on ne jugea pas à propos d'y placer un signal : il eût fallu abattre trop de bois pour parvenir à le rendre visible. Nous préférâmes de chercher à mi-côte quelque endroit découvert, & nous le trouvâmes au-dessus du Bourg de *Caprarola*, proche une petite maison placée sur une hauteur, d'où la vue s'étendoit au loin, & d'où l'on découvroit, d'une part, le dome de *Saint Pierre*, de l'autre, le *Gennaro*, & au nord sur la rive gauche du Tibre, entre *Todi* & *Amélie*, une

Station du mont *Soriano*.

montagne vis-à-vis de *Terni*, où il y avoit plusieurs pointes qui paroissoient propres à terminer notre troisieme triangle. Nous apperçûmes encore du côté de *Terni* une autre montagne à deux pointes, qui, avec la précédente & celle de *Gennaro*, sembloit pouvoir former un nouveau triangle.

Voyage à Terni, à Todi, à Pérouse.

88. Ayant donc passé le Tibre, nous allâmes d'abord à *Amélie*, puis à *Terni*. Nous montâmes sur la montagne voisine, à laquelle les habitans du lieu donnent le nom de *Turremaggiore* (grande Tour). Son sommet est couvert des décombres d'une grande Forteresse, d'où nous découvrions les stations précédentes. Ainsi après avoir marqué le lieu où devoit être posé le signal, nous nous transportâmes sur la montagne qui est entre *Todi* & *Amélie*. Au sommet de celle-ci nous trouvâmes un grand arbre isolé, visible de fort loin, qui nous parut pouvoir tenir lieu de signal. De-là nous descendîmes à *Todi* pour nous rendre à *Pérouse*, située près du *Tesio*, ou *Tetio*, haute & large montagne, & qui nous parut dès-lors très propre à continuer nos triangles.

La superstition attribue le mauvais tems aux Auteurs de la mesure.

89. Le mois d'Octobre étoit avancé: le temps changea tout à coup: il tomba une si grande quantité de pluie & de grêle, les vents furent si impétueux, les orages si fréquens, que le bruit se répandit en plus d'un endroit parmi les gens de la campagne, qu'on avoit apperçu sur les montagnes voisines des hommes qui faisoient creuser la terre & abattre les arbres, sous prétexte de construire des cabanes, mais en effet pour découvrir des trésors confiés, disoient-ils, à la garde des mauvais Génies; que c'étoit là la cause du mauvais tems, & que toutes les campagnes alloient être ravagées. De pareils bruits se répandirent aussi en plusieurs autres lieux, après que nous en fûmes partis, & devinrent quelquefois funestes à nos signaux. Celui que nous avions posé sur la montagne de *Terni*, tomba deux jours après, non sans aide, puisque les matériaux en furent dispersés. Rétabli par nos soins, il disparut une seconde fois. L'avidité des paysans & des Pâtres fut un nouveau motif de déclarer la guerre à nos signaux (1): pour en avoir les

(1) On croiroit lire ici la relation de M. *de la Condamine*. Voyez son

clous,

clous, ils coupoient quelquefois les branches, & renverſoient furtivement tout l'édifice. L'autorité publique put à peine arrêter cette licence; elle n'y réuſſit que par les plus ſéveres menaces: les Lettres-patentes qui nous avoient été expédiées par ordre de Sa Sainteté, enjoignoient à tous les Gouverneurs de favoriſer le plus qu'il ſe pourroit notre entrepriſe; & ces Lettres, ſecondées du pouvoir des Magiſtrats, ne furent pas une précaution inutile pour notre propre ſûreté.

Station ſur le mont *Teſio*.

90. Mais dès que nous fûmes arrivés ſur la montagne de *Pérouſe*, nous reconnûmes que nous n'aurions beſoin ni de celle de *Terni*, ni de l'arbre que nous avions déſigné pour ſignal ſur celle d'*Amélie*, & que les payſans, malgré toutes les défenſes, avoient abattu depuis notre départ; car nous découvrions aſſez diſtinctement par un tems clair, le mont *Soriano*, quoiqu'éloigné de 50 milles; & du côté de *Spolete*, à une médiocre diſtance, une haute montagne qui ſembloit même ſe terminer en pointe, & dont la ſituation étoit ſi avantageuſe, qu'il n'y avoit pas lieu de craindre qu'on ne pût delà appercevoir la pointe de *Cimini*, du *Soriano*, & le *Gennaro*, voiſin de *Palombara*, & qu'ainſi cette montagne ne pût ſervir de point d'appui pour terminer le troiſieme triangle, comme celle de *Pérouſe*, où nous étions, pour terminer le quatrieme. Par ce moyen on diminuoit conſidérablement le nombre de triangles; & il n'en devoit coûter pour cela que de faire un abattis de quelques arbres, ou ſeulement d'élaguer ſur le *Soriano* les plus hautes branches, pour laiſſer appercevoir le nouveau ſignal qu'on y placeroit. Toutes les montagnes intermédiaires nous devenoient inutiles; car malgré la grandeur de ce triangle, aucun de ſes angles ne ſembloit devoir être trop petit. Il y avoit encore tout lieu de préſumer qu'il ſe trouveroit aux environs de *Nocéra* quelque pointe de la chaîne de l'*Apennin*, d'où l'on pourroit découvrir les montagnes de *Pérouſe* & de *Spolete*, & former avec elles un cinquieme triangle.

Journal hiſtorique du voyage à l'équateur, pages 51 & 52. Croiroit-on trouver tant de reſſemblance entre les payſans de l'*Apennin* & les Indiens des montagnes de *Quito*?

R. BIBLIOTHECA MEDIOLANENSIS

91. Ainſi après avoir fait poſer un ſignal ſur notre montagne, nous partîmes de *Pérouſe* pour aller à *Aſſiſe*, & delà à *Nocéra*. Nous nous trouvions au pied d'une montagne fort eſcarpée & très haute, que les habitans nomment particulierement *Apennino*, ou *Pennino*, & nous choisîmes ſa pointe la plus élevée, d'où les mêmes habitans, & tous les gens de la campagne nous aſſuroient que la vue s'étendoit fort au loin ſur la Marche d'Ancone & le Golfe de *Veniſe* d'une part, de l'autre ſur les montagnes de *Pérouſe* & de *Spolete*, & juſques ſur celles qui ſont plus voiſines de *Rome*. Nous nous mîmes en chemin pour aller reconnoître ce poſte avec quelques payſans dont nous avions beſoin pour la conſtruction du ſignal (car à meſure que nous choiſiſſions nos ſtations, nous y faiſions tout de ſuite placer des ſignaux pour mieux diſtinguer de loin le poſte choiſi), lorſque tout à coup le ſommet de la montagne ſe couvrit d'un nuage épais, le vent & l'orage le rendirent inacceſſible, même à nos payſans, & nous fûmes obligés de revenir ſans avoir rien fait. Comme le tems devenoit de jour en jour plus mauvais, & que cette montagne, ſituée au milieu de l'*Apennin*, alloit dans peu ſe couvrir de neige, nous nous contentâmes de marquer aux ouvriers le lieu où ils devoient placer le ſignal, & que nous avions reconnu de *Nocéra* même, & la forme qu'ils devoient lui donner; puis revenant ſur nos pas, nous prîmes par *Foligno* la route de *Spolete* pour reconnoître plus ſûrement la montagne que nous avions apperçue de *Pérouſe*, dans la penſée que ſi nous pouvions y établir un poſte, comme il y avoit tout lieu de l'eſpérer, nous aurions avant l'hyver plus de la moitié de notre ſuite de triangles arrêtée, avec des ſignaux poſés dans chaque ſtation.

Station ſur le mont *Pennino.*

92. Arrivés à *Spolete*, nous apprîmes de M. *Ancajani*, qui joint à l'éclat de la naiſſance les charmes de la politeſſe, que la montagne que nous cherchions ne pouvoit être que le *Fionchi* proche le village d'*Ancajano*, terre qui lui appartenoit, & qui a donné ſon nom à ſa famille. Je ne puis exprimer les obligations que nous avons à ce Seigneur: nous n'avions pas l'honneur d'être connus de lui; ſa politeſſe, ſon amour pour les Sciences y ſuppléa: il voulut lui-même nous

Station ſur le mont *Fionchi.*

ſervir de guide juſqu'au ſommet de *Fionchi* (1), par un chemin auſſi difficile que long, l'eſpace de pluſieurs milles. J'eus beau lui repréſenter l'incommodité de la ſaiſon, la longueur & la difficulté du chemin; il ne voulut rien écouter. Au premier jour ſerein nous montâmes de compagnie ſur la montagne, dont la poſition nous parut favorable, car on découvroit de-là le *Gennaro*, le *Soriano*, avec les montagnes de *Pérouſe* & de *Nocéra*. Il nous aida à déterminer avec le petit quart de cercle la poſition de ces montagnes, & de pluſieurs autres lieux: ce que nous avons pratiqué dans toutes les occaſions qui ſe ſont préſentées, tant dans cette excurſion que dans toutes celles qui l'ont ſuivie, montant tantôt ſur les tours & les clochers des villes & des villages où nous paſſions; tantôt au ſommet des montagnes. Nous établîmes notre ſignal ſur la pointe la plus haute d'une longue croupe très aiguë; & M. *Ancajani* le fit faire ſi ſolide, que malgré la violence des vents & des pluies d'hiver, il a ſubſiſté en ſon entier pendant pluſieurs années.

Deſcente dangereuſe de cette montagne par le mauvais tems

93. Toute la matinée fut très belle: l'après-midi, comme je le craignois, ne lui reſſembla pas; nous eûmes de la neige au ſommet, de la grêle dans la premiere deſcente, enſuite une pluie abondante juſqu'à la nuit. Je pris les devants à pied, trouvant moins de danger & plus de facilité à deſcendre à pied qu'à cheval: je fus long-tems arrêté par un torrent à l'entrée de la nuit. Je pris enfin mon parti, & mes compagnons de voyage ne me rejoignirent que lorſque je l'eus paſſé, ayant de l'eau juſqu'à la ceinture. Tout cela n'empêcha pas notre Hôte de nous accompagner ſur la même montagne les deux années ſuivantes, quand il nous y fallut retourner avec le grand quart de cercle, mais dans des circonſtances plus favorables & ſuivies d'un heureux ſuccès.

Danger de mort en allant d'*Aſſiſe* à *Nocera*.

94. J'ai rappellé cet accident pour faire voir qu'il y a ſur nos montagnes même bien des incommodités à eſſuyer, & bien des riſques à courir, & que notre commiſſion, pour avoir été exécutée au cœur de l'Italie, n'en étoit ni moins difficile,

(1) On retranche ici un plus long détail des attentions du Seigneur du lieu.

ni moins pénible. Si je voulois raconter tout ce qu'il nous en a couté de peines & de travaux, & les dangers même prochains de mort auxquels nous avons été exposés plus d'une fois, ayant souvent à marcher sur le bord des précipices, par des sentiers étroits & difficiles à reconnoître, dans des tems pluvieux, & dans la saison la plus incommode; il y auroit de quoi remplir un volume. Laissant à part tous les autres évenemens de ce genre, je ne me rappelle encore qu'en tremblant le jour où nous allâmes d'*Assise* à *Nocéra*. Nous prîmes par les montagnes, où le chemin est trois fois plus court que par la grande route de *Foligno*: notre guide fut saisi à mi-chemin d'un mal qui lui prit subitement, & qui l'obligea de s'arrêter dans une chaumine: il nous conseilla de continuer notre route, en nous assurant que le chemin étoit facile, & que nous ne pouvions nous tromper. Nous poursuivîmes donc; mais au bout de quelque tems nous trouvâmes deux chemins au lieu d'un: celui que nous prîmes dégénéra bientôt en un sentier bordé d'un précipice, & pratiqué sur le bord escarpé d'une montagne coupée presqu'à pic sur un torrent qui en baigne le pied. Le sentier étoit si étroit, que nous ne pouvions ni descendre de cheval, ni tourner bride; & il étoit en quelques endroits tellement gâté par les pluies, que nos chevaux même n'avançoient qu'en tremblant. Nous marchâmes long-tems entre la crainte & l'espérance, dans une inquiétude & une agitation difficiles à peindre. Enfin nous arrivâmes au sommet, où nous trouvâmes un homme que la Providence y avoit conduit, & qui, gagné par l'appas d'une bonne récompense, nous fit faire un long circuit par des chemins creux & escarpés, pour nous conduire à un autre torrent, qu'il fallut passer & repasser cent & cent fois, à travers des roches & des gués dangereux, & pour nous remettre dans le grand chemin, à plusieurs milles de *Nocéra*, où nous n'arrivâmes qu'à nuit close. Je ne me permettrai que rarement de pareils récits: ils ont trop peu de rapport au but de notre voyage, & ce n'est point là ce que nous y allions chercher.

1750. Novembre. 95. Le tems devenoit de jour en jour plus mauvais, & les pluies si abondantes, que pendant le cours de cet hyver le *Tibre* sortit deux fois de son lit, & inonda *Rome*. Nous rentrâmes

dans cette ville le 12 Novembre pour presser la construction du secteur & du grand quart de cercle. J'écrivis à quelques amis qui étoient sur les lieux, de nous choisir encore quelques stations jusqu'à *Rimini*, & d'y faire placer des signaux : je leur en prescrivois la forme, & leur indiquois la disposition convenable des montagnes. Nous profitâmes des lumieres qu'ils nous communiquerent à ce sujet ; & étant allés l'automne suivante jusqu'à *Rimini* pour reconnoître par nous-mêmes la situation des lieux, nous ajoutâmes à nos premieres stations deux montagnes & une colline, savoir le *Catria* au voisinage de *Cantiano*, le mont *Carpegna* qui donne son nom à une illustre famille romaine, & au pied duquel le Cardinal Carpegna, le dernier de cette maison, a fait bâtir un palais qui peut le disputer aux plus beaux de Rome ; enfin le petit mont *Luro*, voisin de la mer adriatique, & sur le sommet duquel nous trouvâmes un seul clocher qui peut être reconnu & distingué de fort loin, tous les autres bâtimens étant tombés en ruine.

Le tems devient mauvais de plus en plus.

Choix de trois autres stations.

96. Le *Catria* forme avec le *Pennino* près *Nocéra*, & le *Tésio*, voisin de *Pérouse*, notre cinquieme triangle. Le polygone qui les renferme tous, paroît un peu incliné en cet endroit, parcequ'il y a quatre triangles appuyés sur le *Tésio*, au lieu qu'il n'en aboutit que trois à chacune des autres stations. Le sixieme triangle est appuyé sur le mont *Carpegna*, le *Pennino*, & le *Catria* ; le septieme sur le mont *Luro*, le *Catria* & le *Carpegna* ; & le huitieme sur le *Carpegna*, le *Luro*, & l'extrémité de la base mesurée sur la plage de *Rimini*. Ainsi nous avions entre *Rome* & *Rimini* sept stations intermédiaires, & huit triangles. Nous aurons encore occasion de parler de ce même polygone, & des bases, dans le détail des opérations de l'année suivante 1751.

Le dôme de Saint Pierre de Rome, lié à la mer adriatique au moyen de sept stations & de huit triangles.

97. Nous restâmes six jours à *Rome*, pendant lesquels nous nous occupâmes de divers détails concernant les instrumens ; & à la premiere apparence de beau tems nous nous remîmes en campagne pour lever la Carte du pays renfermé entre le grand chemin qui conduit de *Rome* à *Florence*, la Méditerranée, le *Tibre*, & la frontiere de Toscane : ce qui faisoit partie du second objet de notre commission. Nous avions

Reconnoissance du terrein entre la mer & le grand chemin de Toscane, pour la correction de la Carte.

réſervé cette courſe pour l'hyver, qui eſt aſſez doux dans les plaines voiſines de la côte, au lieu que l'air y eſt fort mal ſain pendant l'Eté. Après avoir ſuivi pendant quelque tems la grande route, nous détournâmes ſur la gauche vers *Sutri*, ville ancienne, mais peu habitée. De-là nous fîmes quelques excurſions, & bon nombre d'obſervations, malgré les pluies qui recommencerent alors, & qui, cette année ſur-tout, ne nous firent point de grace. De tous les poſtes où nous avons obſervé, le plus avantageux pour les obſervations géographiques, eſt une montagne conique, d'où la vue s'étend fort loin ſur toute la plaine de la campagne de *Rome*, & ſur une bonne partie de la côte; on l'appelle *Rocca Romana:* elle eſt peu éloignée de *Sutri*, & domine l'ancien lac *Sabatin*, qui a pris le nom de lac *Bracciano* d'un Bourg voiſin. Nous n'y avions pas encore fini nos obſervations, lorſque la pluie nous ſurprit: elle nous déroba d'abord la vue de l'horizon: bientôt après elle nous obligea de quitter la partie: mais le principal étoit fait. Nous continuâmes à avancer ſur la gauche du côté de *Viterbe* juſqu'à *Toſcanella*, ville ancienne, autrefois fort peuplée, qui portoit le nom de *Tuſcania;* mais aujourd'hui le mauvais air en rend le ſéjour inſupportable pendant les chaleurs: elle n'eſt plus reconnoiſſable; & toute la contrée voiſine juſqu'à la mer, eſt ſi changée, que de près de cinquante, tant bourgs que villages fort peuplés, qui compoſoient ſon territoire, & dont nous avons vu les plans dans la Maiſon de ville, il en reſte à peine quatre ou cinq d'habités; encore n'y a-t-il que fort peu de monde.

Obſervations à Montéfiaſcone, Acquapendente, Vétérano, &c.

98. De *Toſcanella* nous allâmes à *Montefiaſcone*, autrefois *Mont-faliſque*, ville renommée pour ſes vins: elle eſt ſur le grand chemin qui conduit de *Rome* en Toſcane: le dôme de l'Egliſe principale ſe voit des montagnes les plus éloignées: il nous a été d'un grand ſecours pour déterminer pluſieurs poſitions. Nous obſervâmes dans un lieu découvert, où il y avoit autrefois une fortereſſe, à peu de diſtance du dôme. Le Ciel étoit ſerein; mais la terre étoit couverte de neige: ce qui ne nous empêcha pourtant pas de relever quantité de points, & de déterminer la poſition du lieu où ſe faiſoit l'obſervation, & ſa diſtance au dôme, où nous viſions des autres lieux:

opération néceſſaire en pareil cas, & que nous n'avons jamais négligée dans l'occaſion. Nous éprouvâmes cependant alors une ſorte d'incommodité à laquelle nous avons été ſouvent expoſés ailleurs : les lieux maritimes qui ſe trouvoient dans la même direction que le Soleil, ſe déroboient à notre vue : ils étoient comme enſevelis dans une eſpece de nuage qui les couvroit pour ainſi dire de ſon ombre : ce qui arrive par-tout en hyver à l'égard des objets ſitués au midi ; & en toute ſaiſon à l'égard des objets ſitués le matin au levant, & le ſoir au couchant. Nous continuâmes notre marche, vers le nord, juſqu'à *Acqua-pendente*, autrefois *Aquula*, en ſuivant la grande route : c'eſt, de ce côté, la derniere Ville des Etats du Pape, ſur les confins de la Toſcane : elle eſt comme au fond d'un entonoir formé par les montagnes ; ainſi il n'eſt pas aiſé d'en fixer la poſition : opération délicate, qui ne fut terminée que dans un ſecond voyage par la poſition de quelques lieux à droite & à gauche de la grande route de *Rome*. Le lendemain nous revînmes un peu ſur nos pas, & nous prîmes enſuite à droite pour aller par *Valentano* & *Canino* du côté de la mer. 1750. Décembre.

99. Nous fîmes une ſtation à *Montalte*, autrefois *Graviſci*, petite Ville réduite aujourd'hui preſqu'à rien : elle eſt environ à une lieue de la mer, & ſur les confins de la Toſcane. Nos obſervations commencées le ſoir à notre arrivée, furent terminées le lendemain de grand matin. Nous nous remîmes en route, & nous cotoyâmes la mer juſqu'à *Corneto*, dont l'air eſt très mal ſain, & qui eſt ſemée d'une ſi prodigieuſe quantité de tours, qu'elle reſſemble de loin à une forêt de cyprès. On conçoit que ces tours ſont ſujettes à autant de parallaxes qu'elles ont d'aſpects différens ; qu'ainſi on courroit riſque de prendre l'une pour l'autre, & que par conſéquent aucune ne peut ſervir de ſignal. Nous montâmes ſur la très haute tour de la maiſon *Fani*, où nous obſervâmes juſqu'à midi. Nous pourſuivîmes juſqu'à *Civita-Vecchia*, port de mer célebre par ſes foires, où nous n'arrivâmes que de nuit. Il y avoit cette nuit là même, qui fut celle du 12 au 13 Décembre, une éclipſe de Lune que nous ſouhaitions d'obſerver ; mais nous ne pûmes arriver à tems pour faire les

Retour à Rome par Civita-vecchia & Bracciano.

préparatifs nécessaires, que d'ailleurs les nuages dont le Ciel fut couvert toute la nuit, eussent rendu inutiles. Nous nous bornâmes donc à nos opérations géographiques; & après quelques courses aux environs, nous quittâmes la mer pour les montagnes. Nous passâmes à *Tolfa*, anciennement le marché de *Claudius;* puis à *Bracciano*, dont il a déja été parlé, & nous revînmes le 19 Décembre à *Rome*.

Observations faites dans ce voyage. Recherche des Cartes dans le pays.

100. Je n'ai fait mention dans ce récit que des villes, des principaux bourgs, & de quelques autres lieux plus propres aux observations géographiques; j'en userai de même dans la suite. Cependant nous n'avons omis aucune occasion d'observer; & dans tous les bourgs & villages de notre passage, nous montions d'abord au lieu le plus éminent, qui étoit ordinairement le clocher, de-là nous relevions tous les objets qui se présentoient à notre vue. Nous nous servions pour cela d'un petit quart de cercle, ou d'autres especes d'instrumens aisés à manier, & de diverses méthodes qui sont d'usage à de petites distances, & dont je pourrai dire un mot dans le quatrieme Livre. Sa Sainteté nous avoit fait remettre des ordres aux Magistrats des Provinces, ainsi qu'aux Evêques, & nous nous servions du crédit qu'ils nous procuroient pour faire la recherche de toutes les Cartes particulieres, & autres documens concernant la position des lieux, & surtout le cours des rivieres. Rarement avons-nous trouvé quelque chose d'exact en ce genre; & l'on peut dire en général, que dans tout l'Etat ecclésiastique, rien de plus négligé que la Géographie.

Obstacles de la part de deux Curés de villages.

101. Ces lettres revêtues de toute l'autorité pontificale, n'ont pas empêché que nous n'ayons eu bien des contradictions à essuyer, non seulement de la part des rustres & des montagnards, mais quelquefois même, quoique beaucoup plus rarement, dans des villages, & de la part de personnes qui avoient eu de l'éducation. Près du lac *Bolséna*, sur le grand chemin de *Rome*, est un petit village nommé *San Lorenzo*, où l'on change de chevaux de poste: comme ce lieu se trouvoit sur notre passage, nous priâmes le Curé de nous faire ouvrir le clocher de son Eglise pour y observer: il fit tant de résistance, qu'à peine il se rendit à la vue des ordres du Souverain, & à nos menaces de porter plaintes contre lui. On

lui

lui avoit fait croire, comme nous l'apprîmes bientôt de ſes paroiſſiens, qu'il y avoit dans ce clocher un tréſor anciennement caché, & que quelques jours auparavant il étoit venu des voyageurs pour le chercher. Nous fûmes traités ailleurs encore plus durement par un autre Curé. Nous nous étions préſentés de la maniere la plus reſpectueuſe, & il n'y répondit que par des bruſqueries réitérées : il n'eut égard ni à nos Lettres, ni au témoignage d'un illuſtre ami qui m'avoit connu à *Rome*, & qui ayant appris notre arrivée, vint nous offrir un hoſpice dans une belle maiſon que le lieu n'annonçoit pas, & où il nous dédommagea amplement de tous les rebuts que nous venions d'eſſuyer. Le Curé prit le parti de ſe retirer, tant pour ſe délivrer de nos inſtances, que pour ne pas s'expoſer au chagrin de nous voir monter malgré lui dans ſon clocher par l'autorité de quelqu'autre, comme il arriva en effet : il ſortit du village pour n'y rentrer qu'après notre départ ; & il ne reconnut ſon erreur qu'après avoir été appellé à *Rome* pour y être réprimandé : tant on étoit prévenu de je ne ſais quelles idées ſuperſtitieuſes au ſujet de notre voyage.

102. Nous demeurâmes un mois à *Rome*, où les pluies, qui ne diſcontinuoient point, ſembloient vouloir nous arrêter. Sur la fin de janvier 1751, nous fûmes envoyés à l'embouchure du Tibre : un mois auparavant ce fleuve avoit ébranlé toutes les digues qu'on lui oppoſe en cet endroit pour augmenter ſa viteſſe, écarter le ſable apporté par la mer, & donner entrée aux navires. Nous nous y portâmes avec zele, tant pour remédier à un déſordre qui interrompoit le commerce, que pour lever la carte des environs & celle de la côte, en déterminant la poſition des tours qui la bordent. A peine fûmes-nous arrivés, que les pluies recommençant, le Tibre ſe déborda derechef, inonda toutes les campagnes voiſines, & qu'on vit une ſeconde fois les bateaux aller & venir dans les carrefours de *Rome* (1). Nous étions à deux

1751. Janvier.

Déborde-ment du *Ti-bre.*

(1) Le P. Boſcovich a décrit en fort beaux vers cette inondation dans ſon Poëme des éclipſes ; nous n'en citerons que quelques morceaux.

Ipſe pater Tibris, hinc pluvia, nivibuſque ſolutis
Turgidus, Hetruſcis retro inde repulſus ab undis,

milles de *Porto*, dans un lieu où il n'y a presque d'autre bâtiment qu'une maison basse & étroite de la Chambre apostolique, & une tour autrefois construite au bord de la mer pour défendre l'entrée de la riviere, que les sables, accumulés avec le tems, ont peu à peu éloignée du rivage. Du reste, on ne voit en ce pauvre lieu que quelques cabanes de pêcheurs, quelques chaumieres où demeurent environ trois cents tant pêcheurs que matelots & manœuvres employés par le ministere public à garder le passage & à réparer les digues.

103. Une fois que le Tibre fut sorti de son lit, il s'accrut au point d'investir toutes les chaumieres & toutes les cabanes du hameau: notre logis n'en fut pas exempt: bientôt le dégré fut inondé, & l'eau gagnoit l'étage supérieur: quelques-uns même commençoient à craindre que nous ne fussions submergés: ce qui, vu le voisinage & le niveau de la mer, ne paroissoit possible que dans le cas où la maison fût renversée par le choc des eaux (1). La faim nous menaçoit d'un danger plus pressant. Nous passâmes dans cette triste situation huit jours entiers, pendant lesquels les vivres ne nous auroient pas manqués si nous eussions été seuls; mais il falloit en faire part à cette foule de malheureux qui n'avoient d'autre ressource. Nous dépêchâmes une barque à *Porto* pour en tirer du secours: elle eut bien de la peine à surmonter le courant de la

Danger provenant du défaut de vivres.

Ventorumque furore gravi percussus, ab imo
Jam toties indignatus caput extulit alveo,
Et vastos latè campos vallesque profundas
Obruit: ipsa etiam magnæ per compita Romæ
Erupit, sine lege furens, miserosque Quirites
Terruit obsessos mediis circum undique tectis,
De Solis ac Lunæ defectibus. Londini 1760, page 195.

(1) Me quoque namque illâ obsessum regione repentè
Exiguo inclusit tecto; jamque ima tenebat
Limina, perque gradus assurgens ardua visus
Velle minax tabulata domus conscendere; meque
Et socios tumidis rabidus demergere in undis: *ibid.*

riviere à travers la campagne inondée ; & à ſon arrivée elle ne trouva point de vivres. *Porto* eſt une ville ruinée, où l'on compte à peine vingt habitans : l'unique boulanger qui fournit aux villages voiſins de l'embouchure du Tibre, pour ſe dérober aux pourſuites de ſes créanciers, s'étoit ſauvé peu de jours auparavant, ſans laiſſer ni bled ni farine. C'étoit un ſpectacle lamentable & qui arrachoit les larmes, que l'aſpect de tant d'infortunés qui du haut de leurs maſures & des mâts de leurs barques, la pâleur ſur le front & tremblans d'effroi, imploroient du ſecours & demandoient du pain (1).

On ſauve la vie à un Religieux & à un jeune homme de qualité.

104. Le premier jour de l'inondation, comme je ſpéculois cette nouvelle mer, j'apperçus à l'aide de ma lunette un Pere Minime avec un jeune homme à la diſtance d'environ un mille : ils étoient ſortis de *Porto* pour regagner leur bateau : l'eau les avoit gagnés au milieu de brouſſailles épaiſſes : ils tendoient les mains, ils appelloient du ſecours, & perſonne ne pouvoit, ni les voir, ni les entendre. Nous dépêchons à l'inſtant même une barque avec des gens intelligens ; nous les recueillons dans notre logis où ils demeurerent avec nous pendant la huitaine. Ce jeune homme étoit un Gentilhomme Suiſſe que ſa mere envoyoit au royaume de *Naples* près de quelques parens qu'il avoit au ſervice du Roi des deux Siciles : les voleurs ne lui avoient rien laiſſé, & il ſe voyoit hors d'état de pourſuivre ſa route : je le fis conduire à *Rome*, & delà à *Naples* à ſa deſtination.

On dépêche à Rome, d'où l'on envoie des proviſions.

105. Comme le mal alloit en augmentant, & que le Tibre paroiſſoit s'enfler chaque jour de plus en plus, nous penſâmes ſérieuſement à envoyer un exprès à *Rome* à travers ces campagnes ſubmergées ; car pour le Tibre, il étoit trop rapide

(1) Quæ facies rerum fuit illa ; è culmine ſummo
Hinc pueri, & miſeræ matres, ac ruſtica turba,
Una omnis, nautæ è male tutis navibus inde,
Cum macie obducti vultus & voce trementi
Frugem inclamarent, frugem vicina ſonarent
Littora, & affuſi fluctus, atque improbus imo
Inſultans frugem Tibris reſonaret ab alveo. *ibid.*

pour pouvoir être remonté. La commiſſion étoit périlleuſe, & nous eûmes peine à trouver quelqu'un qui en voulût courir les riſques. Notre meſſager s'étant mis dans un canot avec deux rameurs, ils n'eurent pas trop de tout un jour pour atteindre, au bout de cinq milles, le pied des montagnes les plus voiſines, d'où notre exprès ſe rendit promptement à *Rome:* mais on y avoit déja penſé à nous, aux ſoldats gardes-côtes, & à tous nos compagnons d'infortune. Les Magiſtrats qui n'ignoroient pas le danger où nous nous trouvions, nous avoient envoyé par le Tibre un fort bâtiment, & d'abondantes proviſions: elles ne pouvoient arriver plus à propos pour des gens réduits à la derniere extrémité. Bientôt après l'inondation ceſſa, & le Tibre rentra dans ſon lit (1).

Dommages cauſés par l'inondation:

106. Pendant ces jours de calamité, les larges digues élevées de part & d'autre de l'embouchure du Tibre, avec leurs encaiſſemens, & qui dans la premiere inondation avoient été ſimplement endommagées, furent renverſées ſous nos yeux. Le courant en entraîna une partie dans la mer, après les avoir briſées; le reſte fut ébranlé, renverſé & mis hors d'état de pouvoir ſervir. Peu s'en fallut qu'on ne vît périr en une ſeule nuit tous les bâtimens de charge qui étoient à l'embouchure du fleuve. Un des plus conſidérables, battu par les vagues, avoit déja commencé à arracher les pieux de la digue auxquels il étoit amarré, & à peine on y put remédier au milieu des ténébres (2).

---

(1) Ergo per undantes hinc campos fluctibus, atque hinc,
Arboreas inter frondes, & ceſpite multo
Denſa loca, exiguam bino cum remige contra
Ire ratem libuit, colleſque exponere ad altos.
. . . . . .
Attamen interea, tanti haud ignara pericli,
Subſidium jam Roma vigil ſummiſerat. *ibid.*

(2) Quin etiam adverſum quà ſe devolvit in æquor,
Aggeribuſque amplis, valloque coercitus ora
Stringitur, & vaſto delatas æquore merces
Excipit, ac dominam dorſo tranſmittit in Urbem,

On travaille à les réparer.

107. J'eus le loisir d'examiner attentivement la situation des lieux, l'état des digues, & le dommage qui se présentoit à ma vue; & à mon retour à *Rome* je remis aux Magistrats un mémoire où je proposois mes vues sur les causes de cette inondation, & sur les moyens qu'on pouvoit employer pour empêcher que de tels débordemens ne fissent une autre fois de pareils ravages. Du reste je ne pense pas qu'on doive attribuer l'inondation à l'embouchure du fleuve, ni qu'on puisse entierement la prévenir. Le P. Maire joignit à ma dissertation une carte de l'isle du Tibre, exactement dessinée. Dès que le fleuve fut rentré dans son lit, nous revînmes à *Rome*, d'où nous repartîmes bientôt avec des experts pour examiner sur les lieux ce qu'il y avoit à faire. Ce second voyage ne fut pas long; mais il fallut près de deux ans & un grand nombre d'ouvriers pour réparer les désordres de l'inondation.

Choix d'une base sur la voie Appienne.

108. A notre retour nous pensâmes à mesurer une base dans le voisinage de *Rome;* & le terrein qui nous parut plus propre, fut le long de la voie Appienne, qui conduit de *Rome* à *Albe*. Cette base faisoit face au mont *Gennaro*, avec lequel elle pouvoit former un triangle convenable. Ce chemin est depuis long-tems abandonné, & l'ancien pavé entierement rompu: la plupart des débris en ont été enlevés depuis environ vingt ans pour paver les rues de *Rome*; de sorte qu'il n'y reste plus en quelques endroits que les plus grandes pierres qui bordoient autrefois la chaussée: on y a déja labouré & semé en plusieurs endroits. A droite & à gauche du chemin

---

Fræna furens morsu disrupit, & impete primo
Dissolvit compagem, ac dura repagula fregit;
Inde trabes fundo evulsas dijecit, apertos
Perque maris campos, vicinaque littora sparsit.
Vidi ego cum tenues per rimas insinuaret
Spumanti sese fluctu, cum cornibus altis
Obnixus primos aditus sibi quæreret; inde
Dimotis victor trabibus jam corpore toto
Irrueret, vulsamque inferret in æquora molem. *ibid.*

Tout cet endroit mérite d'être lu dans l'ouvrage même.

ſont deux longues files de tombeaux antiques, qui ne préſentent plus aujourd'hui qu'un triſte amas de ruines & de maſures; mais qui n'ont pas laiſſé, ainſi que les pierres latérales, de nous être fort utiles: car le chemin eſt tiré au cordeau depuis *Rome* juſqu'à *Albe:* il s'éleve un peu proche l'Egliſe Saint Sébaſtien, où l'on voit le tombeau de *Métella*; c'eſt un grand mauſolée de pierre de forme circulaire, avec une ancienne inſcription qui s'eſt bien conſervée, & qui eſt connue de tous les antiquaires. De-là on retrouve une partie de l'ancien pavé, ſur lequel, ayant avancé quelques pas, on découvre dans la direction du milieu du chemin, entre les deux files de tombeaux, une grande tour antique proche la porte d'*Albe:* ce qui prouve que la route eſt parfaitement alignée.

Extrémités de la baſe.

109. Nous fixâmes une des extrémités de notre baſe au tombeau de *Métella*, je veux dire au point du chemin qui répond perpendiculairement au milieu de l'inſcription; & l'autre extrémité au-deſſous de *Frattochie*, à trois milles d'*Albe*, & à l'endroit où le chemin eſt interrompu par un clos d'arbres fruitiers appartenant à la maiſon *Colonne*, & répondant à une de leurs maiſons de campagne, placée de l'autre côté du chemin. Nous marquâmes ce terme de notre baſe par un gros quartier de pierre, que nous enterrâmes ſur une éminence, un peu en-deçà du mur de l'enclos; & pour mieux reconnoître l'endroit, nous plaçâmes à l'entour divers reperes. C'étoit un avantage pour nous que ce chemin ne fût point fréquenté; nous n'avions point à craindre que notre meſure fût troublée par les paſſans; mais peu s'en fallut un jour ſurtout que cette ſolitude même ne nous devînt funeſte. J'allois, accompagné d'un ſeul homme, au lieu où nous avions interrompu l'ouvrage du jour précédent, lorſque je me vis aſſailli par huit gros chiens qui étoient ſortis d'une cabane voiſine, appartenante à des bergers. Nous montâmes ſur une hauteur, & à coups de pierres nous tâchâmes de les écarter. Il y en eut un de bleſſé, & les bergers qui étoient accourus de loin, rappellerent les autres. Nous commençâmes les premiers jours d'avril la meſure de cette baſe: les pluies qui ne diſcontinuerent point, nous obligerent deux fois de l'interrompre, & nous ne pûmes la terminer qu'aſſez avant dans le mois de mai.

1751. Avril.

110. Voici quels étoient les inſtrumens qui nous ont ſervi dans cette meſure : nous avions trois perches équarrées, de 27 palmes chacune, marquées à un bout des chiffres 1, 2, 3, ſuivant l'ordre où elles devoient être placées. Chaque intervalle de 9 palmes étoit diſtingué par les lames de cuivre, marquées d'un petit point : ainſi il y avoit quatre lames ſur chaque regle, ſavoir, deux aux extrémités, & deux vers le milieu, qui diviſoient la perche en trois meſures égales. Outre une regle de fer, où nous avions gravé deux petits points à la diſtance de 9 palmes, nous en avions une autre de la même longueur, armée de deux pointes, l'une fixe, l'autre mobile qu'on arrêtoit au moyen d'une vis à telle ouverture qu'on vouloit; c'eſt ce qu'on appelle communément compas fidele, à cauſe que ſes pointes ſont paralleles entre elles, & fortement attachées au corps de l'inſtrument : (cet inſtrument ſe nomme en françois compas à verge). Nous nous en ſervions pluſieurs fois le jour pour prendre ſur la premiere regle l'intervalle de 9 palmes, & le tranſporter ſur les lames de cuivre des perches, afin de connoître les changemens qui y avoient été produits par les variations dans la température de l'air. On trouvera décrit dans le quatrieme livre le moyen dont nous nous ſervions pour reconnoître, par des tranſverſales gravées ſur de petites lames, juſqu'aux plus légeres différences d'allongement ou de raccourciſſement de ces mêmes intervalles.

Inſtrumens néceſſaires pour la meſure de la baſe.

111. Les trois perches portoient ſur ſix planchettes ou tables, poſées horizontalement ſur une regle verticale, ſoutenue de trois pieds, avec une vis qui ſervoit à élever plus ou moins, & arrêter la regle à volonté. Des coins de bois aſſez larges, mais fort minces, placés ſous les têtes des perches, leur donnoient le dégré d'élevation convenable. Les autres inſtrumens conſiſtoient en un fil à plomb, un niveau ordinaire, compoſé d'un tube rempli de liqueur avec une bulle d'air, & un thermometre de *Réaumur*. Nous avions pris auſſi quatre aides, & un domeſtique à nos ordres. Nous procédions à la meſure de la maniere qui ſuit.

Suite du même ſujet.

112. On poſoit d'abord les perches horizontalement ſur les tables à trois pieds, & dans la direction de la baſe, ſavoir, la premiere ſur deux tables, la ſeconde ſur la 2e. & 3e. table,

Ordre obſervé dans la meſure de la baſe.

& la troiſieme, ſur la 3e. & 4e. table: cela fait, on venoit reprendre la premiere perche pour la porter ſur la 4e. & la 5e. table, & ainſi de ſuite. Parmi nos aides, nous avions un maçon, homme adroit & intelligent, à qui nous avions donné le ſoin de placer les tables les unes après les autres, dans l'alignement des premieres, & à une juſte diſtance: il meſuroit cette diſtance avec un cordeau, dont un domeſtique, ou l'un de nous, tenoit l'autre bout ſur le milieu de la table précédente. Il devoit encore avoir ſoin que la table fût placée horizontalement: pour cela, il commençoit par la tenir lui-même dans cette poſition; & ſi le terrein étoit inégal, le domeſtique mettoit des pierres ou des coins ſous les deux pieds qui ſe trouvoient alors élevés de terre. Enfin il élevoit cette table à la hauteur des autres, en viſant à la vue ſimple, & l'arrêtoit avec la vis dans cette poſition.

Tranſport des perches;

113. En même tems deux autres apportoient la nouvelle perche qu'ils tenoient chacun par un bout, & ils la plaçoient ſur les deux dernieres tables, & on avoit la plus grande attention à empêcher que le bout de la perche ſuivante ne heurtât contre la perche précédente, ou de cauſer le moindre mouvement dans la table. On ne devoit pas même faire toucher les têtes des perches, mais ſeulement les rapprocher de fort près. Enſuite, avec deux coins placés en ſens contraire, on achevoit de les mettre de niveau; & de peur qu'on ne fut obligé pour cela de toucher à la perche précédente, la table devoit être plutôt inclinée vers la partie antérieure que vers la poſtérieure de la baſe.

Moyen de les aligner;

114. Pour placer la nouvelle piece dans la direction de la baſe, un de nous viſoit par les perches ou regles à la porte d'*Albe*, & indiquoit de la main le côté où devoit être portée la ſeconde tête de la derniere perche: les tombeaux ſeuls auroient pu ſuffire pour diriger le coup d'œil. S'il arrivoit qu'un nuage, ou quelque hauteur, ce qui étoit rare, nous dérobât la vue de la porte d'*Albe*, nous marquions l'alignement avec des jallons plantés au milieu du chemin, dont les bords étoient trop bien marqués pour qu'on pût ſe méprendre ſur le point du milieu. Celui qui avoit diſpoſé la table étoit encore chargé d'aligner la perche; & tandis qu'il en portoit la tête

à

à droite ou à gauche, un ſecond aide la ſoulevoit par l'autre bout, de crainte que ce mouvement ne dérangeât la premiere table.

115. Le niveau d'eau poſé ſur la perche, indiquoit à celui qui avoit ſoin de diſpoſer la table, à quel point il devoit l'élever pour trouver le niveau; & tandis qu'il la mettoit à ſon point, ceux qui avoient apporté la perche, la ſoulevoient tant ſoit peu, tant pour lui faciliter cette opération, que pour prévenir tout dérangement dans la premiere table. Quelquefois auſſi on mettoit les deux coins ſous l'autre bout pour l'élever un peu, & corriger l'inclinaiſon de la table. Dès que nos aides furent un peu au fait de cette manipulation, tout s'exécutoit en peu de tems, & de façon à nous contenter. Nous portions les précautions juſqu'au ſcrupule, quoique la ſolidité des tables pût nous raſſurer ſur le danger de cauſer le moindre mouvement dans les premieres perches. Une fois ſeulement tout notre appareil fut renverſé par un coup de vent; ce qui nous obligea de revenir à l'endroit où le matin nous avions repris notre meſure. Moyen de les mettre de niveau;

116. La perche placée, comme les têtes ne joignoient point, nous prenions avec un compas l'intervalle des points gravés ſur les lames, & nous les tranſportions ſur l'échelle de *Tycho*. Cette valeur connue s'écrivoit ſur le régiſtre, où nous avions préparé des tables à quatre colonnes, dont la premiere contenoit le nombre des meſures, compoſées chacune de trois perches, la ſeconde l'intervalle entre la premiere perche de cette meſure & la derniere de la précédente, la troiſieme & la quatrieme les deux autres intervalles des perches; & au haut des colonnes étoit écrit *premier*, *ſecond*, *troiſieme* intervalle: ce qui prévenoit toute erreur ſur le nombre des meſures. Car à chaque fois qu'on tranſportoit une perche, il falloit écrire un nouveau nombre à la place qui lui étoit préparée; ainſi à moins d'en omettre trois de ſuite, on n'auroit pu ſe rencontrer avec les numéro gravés ſur les têtes des perches pour les diſtinguer. Par exemple, lorſqu'il eſt queſtion de la troiſieme perche, il faudroit, ſi l'on avoit omis un nombre, écrire l'intervalle qu'il laiſſe dans la colonne qui a pour titre *ſecond intervalle*. Le P. Maire avoit préparé des tables d'une grande Maniere de marquer leur intervalle.

propreté, & il y écrivoit tous les nombres avec une ſcrupuleuſe attention. Le plus ſouvent nous répétions la meſure des intervalles, quoique nous les euſſions déja évalués ſéparément, en les portant ſur l'échelle, pour comparer enſuite nos réſultats.

Tranſport des tables & autres inſtrumens. Uſage du thermometre.

117. Le quatrieme aide n'avoit d'autre emploi que de tranſporter les tables, & l'étui contenant la regle de fer, le compas à verge, & le thermometre. Cette caiſſe repoſoit à l'ombre, & nous conſultions de tems en tems le thermometre, pour connoître au juſte, par le dégré de chaleur, la variation de l'intervalle de 9 palmes gravé ſur la regle de fer. Nous ne crûmes pas devoir négliger cet examen, quoique eu égard à la température du climat, & moyennant la précaution de n'expoſer jamais la regle au Soleil, nous ne trouvaſſions dans un même jour que de légeres différences. Le dégré moyen de chaleur, au tems de notre meſure, s'eſt trouvé le dix-ſeptieme au-deſſus du terme de la glace, déſigné par le nombre 1000.

Meſures à prendre dans un terrein inégal;

118. Nous n'avions d'autres meſures à prendre tant que le terrein étoit à peu près de niveau; mais dès que ces inégalités nous obligeoient d'élever ou d'abaiſſer conſidérablement nos tables, pour lors le dernier bout de la perche précédente, au lieu d'appuyer ſur le milieu de la table, la débordoit; de même le premier bout de la perche ſuivante débordoit une autre table, qu'on élevoit ou abaiſſoit plus ou moins, ſuivant que le terrein l'exigeoit, pour donner à d'autres perches une poſition horizontale: enſuite au moyen d'un fil à plomb, nous faiſions répondre ces deux bouts l'un à l'autre, ou bien nous prenions avec un compas la diſtance de la perche la plus baſſe au fil à plomb. Rarement avons-nous été obligés d'en venir là; car outre que le terrein étoit aſſez égal, nos tables pouvoient au beſoin s'élever ou s'abaiſſer d'une quantité ſuffiſante: mais nous avions toujours préparé ſix tables, deux pour chaque perche, pour le cas où une pente plus roide nous auroit obligés d'appliquer pluſieurs fois de ſuite le fil à plomb. Les ſix tables n'ont ſervi enſemble qu'une ſeule fois, ſavoir à la fin de notre baſe, que nous jugeâmes à propos de terminer ſur une éminence, pour pouvoir de-là découvrir l'autre extrémité, comme auſſi le mont *Génarro*, premiere ſtation, qui

1751. Mai.

devoit former avec la baſe notre premier triangle, fondement de toutes nos operations.

119. Lorſqu'à l'entrée de la nuit, ou aux approches d'un orage, nous interrompions la meſure, nous marquions l'endroit où nous en étions, en faiſant tomber le fil à plomb de l'extrémité de la derniere perche dans un creux, où nous enterrions une tuile marquée en travers d'une ligne répondant à l'extrémité du poids: nous rempliſſions ce creux; & lorſque nous venions enſuite reprendre notre tâche, nous découvrions la tuile, & nous remettions la perche & le fil à plomb dans la ſituation de la veille; ou bien nous nous contentions de placer une ſeconde perche, dont au moyen d'un fil à plomb, nous faiſions répondre la tête perpendiculairement à la ligne gravée ſur la tuile. Dans l'interruption, & la repriſe de la meſure;

120 Par cette maniere de meſurer, nous étions diſpenſés de nous traîner ſur le ſol, comme MM. *Bouguer* & *de la Condamine*, quand ils meſurerent leur baſe; & nous n'avions pas ſujet de craindre aucun dérangement dans les perches: nous meſurions aiſément ſept à huit cents toiſes par jour; enſorte que huit à neuf jours auroient pu ſuffire pour achever notre meſure, ſi le mauvais tems & la force des pluies n'euſſent ſouvent interrompu notre ouvrage, & ne nous euſſent même obligés par deux fois de revenir à *Rome*, pour ne pas perdre notre tems dans cette ſolitude, & n'y pas retenir des ouvriers oiſifs. Notre meſure nous occupa douze jours, & nous la terminâmes le 8 de mai. Nous n'avons pas jugé à propos de remeſurer cette baſe, parcequ'elle ne devoit ſervir qu'à vérifier nos meſures conclues, & que nous avions déja déſigné pour notre baſe principale le rivage de *Rimini*, comme beaucoup plus égal & plus facile à meſurer deux fois que la voie Appienne. La baſe de vérification s'eſt trouvée, après toutes les réductions, de 53562 $\frac{1}{2}$ palmes, qui réduites à la toiſe de Paris, font à très peu près 6139 $\frac{1}{2}$ toiſes entre les termes précédemment déſignés: car nous trouvâmes notre meſure de 9 palmes romains égale à 891 $\frac{30}{100}$ lignes, dont la toiſe de Paris contient 864; enſorte que cette meſure eſt à la toiſe comme 89130 à 86400, ou comme 2971 à 2880. Tems employé à cette meſure.

121. Cependant la congrégation générale, pour l'élection

Le P. Maire député pour l'élection du Général.

d'un nouveau Général de notre Compagnie, indiquée pour le 21 juin, approchoit; & le P. Maire devoit s'y trouver ce jour-là même, ayant été choisi pour la seconde fois par sa province d'Angleterre en qualité de l'un de ses députés électeurs. Par cette raison, & parceque notre quart de cercle n'étoit pas encore achevé, nous ne pouvions profiter pour la mesure de nos triangles de la saison de l'Eté, qui y est la plus propre, le ciel étant presque toujours serein, & la chaleur moins grande sur le sommet des montagnes; cette mesure, pour être faite exactement, requérant le concours de deux Observateurs. Nous mîmes le peu de tems qui nous restoit, à parcourir cette partie du vieux Latium qu'on appelle aujourd'hui *Province maritime*, ou campagne de *Rome*, bornée, à l'oueſt par le Tibre & la terre de Sabine, au nord par l'Apennin, à l'est par le royaume de *Naples*, & au sud par la mer de Toscane, pour déterminer la situation des lieux, & corriger la carte du pays.

1751. Mai.

Voyage dans la campagne de *Rome*.

122. Nous partîmes donc de *Rome* le 17 mai avec notre petit quart de cercle. Nous commençâmes nos observations à *Castel-Gandolphe* dans le palais pontifical, d'où l'on découvre toute la côte maritime; puis à *Albe* & à *Vélétri*. Arrivés à l'ancien *Antium*, aujourd'hui *Anzo*, nous y logeâmes chez S. E. M. le Cardinal *Corsini* qui y étoit pour lors avec toute sa famille; & nous les eûmes tous pour témoins de nos observations, tant dans le palais du Cardinal, que dans la maison de campagne des *Costaguti*, qui est sur une hauteur. Delà parcourant la côte, nous allâmes au mont *Circello* & à *Terracine*; d'où reprenant la grande route, nous passâmes à *Piperno* & à *Sezze*; de *Sezze* nous fîmes une petite excursion qui nous conduisit à *Sermonete* & à *Norma*: tous ces lieux nous fournirent autant de stations, hors que nous ne pûmes monter au sommet de *Circello*, le ciel & la montagne étant entierement couverts de nuages. Après avoir attendu inutilement pendant plusieurs jours dans la tour de *Paula* au pied de ce mont, que le sommet se découvrît, nous allâmes observer du côté opposé dans un lieu élevé, nommé *San Felice*: & ayant enfin perdu toute espérance d'aborder le sommet de *Circello*, nous abandonnâmes la partie; mais j'y envoyai la

même année un jeune homme qui entend la Géométrie pratique, & qui étoit alors occupé à arpenter un terrein voisin: il découvrit de ce même point le mont *Vésuve*, qu'il reconnut à sa fumée, & le lia avec *Anzo*, & plusieurs autres lieux de la campagne de *Rome*.

Voyage de *Norma* à *Sora*;

123. De *Norma* nous revînmes sur nos pas, & ayant monté à un village fort élevé, & très bien situé pour les observations géographiques, que les habitans nomment *Rocca secca de Massimi*; nous nous rendîmes par une gorge de montagnes qui séparent la campagne de *Rome* de la Province maritime à *Frusinone*, & de-là à *Posi* & à *Céprano*, bourg situé sur la frontiere du royaume de *Naples*, par le chemin qui conduit de *Rome* au mont *Cassin*; d'où nous allâmes au mont *Arsene* & à la ville de *Sora*: ces deux endroits sont dans le royaume de *Naples*, mais sur la frontiere, & de-là on découvre une partie des Etats du Pape: c'en étoit assez pour nous engager à y aller; d'autant plus que nous y avons un college de la Province romaine, où il nous convenoit d'aller passer le saint jour de la Pentecôte. Nous y fussions en effet arrivés à tems, si la pluie & la grêle, dont la terre fut presque en un instant toute couverte, ne nous eussent retenus dans une misérable étable.

De *Sora* à *Sublaque*;

124. Nous passâmes deux jours à *Sora*; & nos observations finies, nous rentrâmes dans l'Etat ecclésiastique, & nous allâmes par *San Giovanni* & *Bauco*, à *Véroli* & à *Alatri*, & de-là à *Fumone*, qui domine toute la campagne de *Rome*, & où l'on pouvoit faire un grand nombre d'observations. Ensuite tournant à droite, nous nous engageâmes dans les montagnes jusqu'à *Trévi*, ville autrefois considérable sous le nom de *Tréba*; elle est située dans une vallée étroite près du *Tévéron*, environ 4000 pas au-dessous de sa source, & du bourg de *Félétino*; les montagnes qui l'entourent de toutes parts, rendent sa position très difficile à déterminer: nous nous en tirâmes de notre mieux. Nous suivîmes ensuite à travers des montagnes escarpées le cours du *Tévéron* jusqu'à *Sublaque*, célebre par le monastere & la grote de *Saint Benoît*. De-là nous grimpâmes à *Civitella*, poste avantageux, mais où nous ne pûmes observer que le lendemain, tant à cause des pluies, aussi extraordinaires dans le mois de juin qu'opiniâtres à nous pour-

ſuivre dans le cours de nos obſervations, que par le refus groſſier que nous fit le Curé du lieu de nous ouvrir ſon clocher : c'eſt l'aventure dont j'ai parlé plus haut au n°. 101.

De *Civitella* à *Guadagnolo.*

125. De *Civitella* nous deſcendîmes à *Paliano*, célebre forteresſe appartenante à la maiſon *Colonne*, & dont le faîte nous fournit un poſte auſſi avantageux que commode. Nous paſſâmes à *Anagnie*, ville célebre & opulente ; d'où laiſſant entre *Anagnie* & *Fruſinone*, *Férentino*, dont nous avions déja déterminé & vérifié la poſition, nous traverſâmes la vallée de la campagne de *Rome*, & nous arrivâmes à *Segni* ſituée à mi-côte, où les pluies continuelles nous retinrent deux jours. Le troiſieme, nos obſervations finies par un vent de nord très piquant, qui nous fit trembler de froid au milieu de l'Eté, nous arrivâmes avant midi à *Valmontone*, qui, ſelon quelques-uns, eſt le vieux *Labicum :* nous y fîmes une ſtation, dans le magnifique palais de la maiſon *Pamfili*, Seigneurs du lieu ; enſuite, par la plus grande chaleur du jour, nous nous rendîmes à *Preneſte*, aujourd'hui *Paleſtrina ;* d'où après une ſtation de quelques heures qui nous réuſſit à ſouhait, nous montâmes à un village ſitué ſur la montagne voiſine, à l'endroit même où étoit autrefois la ville de *Preneſte :* ſon clocher eſt dans une poſition admirable ; on y découvre de tout côté l'horizon à perte de vue : nous y paſſâmes le reſte du jour, &

1751. Juin.

à nuit fermée nous deſcendîmes par des chemins ſcabreux & très incommodes, à un bourg ſitué au pied du *Guadagnolo*, haute montagne, au ſommet de laquelle eſt un village du même nom : *Poli* eſt le nom du bourg ; il appartient à l'illuſtre maiſon *de Conti*, & touche à leur magnifique maiſon de campagne de *Catena.* Après quelques heures de repos, dont nous avions grand beſoin, nous montâmes à la pointe du jour au ſommet de la montagne, d'où la vue s'étend plus au loin encore que du *Génarro*, qui n'en eſt éloigné que de quelques milles : nous découvrions la vallée de *Sublaque*, toute la campagne de *Rome*, & plus loin une partie du royaume de *Naples ;* & la vue s'étendoit au-delà de *Rome* juſqu'à la mer, & au-delà de *Cimini*, l'une des pointes de *Soriano*, juſqu'en Toſcane.

126. Nous établîmes notre ſtation ſur le ſommet de *Gua-*

dagnolo près d'un puits, & enſuite ſur le revers de la montagne, proche la célebre chapelle de Notre-Dame de *Mentorella* ſur une roche eſcarpée, où, ſuivant la tradition du lieu, *Saint Euſtache* vit un cerf portant une croix au milieu de ſon bois, & où l'on a bâti une chapelle ſous le nom du Saint, pour conſerver la mémoire de cette apparition. Il nous fallut remonter au ſommet pour retourner à *Poli*, d'où nous étions partis le matin. Le jour ſuivant nous traverſâmes une large vallée, & nous arrivâmes ſur les montagnes de *Fraſcati*, anciennement *Tuſculum*. Le village de *Rocca priora* étoit à une aſſez grande hauteur pour mériter notre attention : nous y paſſâmes la nuit, & nous y commençâmes le lendemain une de nos journées des plus fatigantes. Après y avoir obſervé, nous traverſâmes une vallée au pied de l'*Algide*, aujourd'hui *Rocca del Papa :* nous montâmes au ſommet de la montagne de *Velétri*, où les Allemands étoient campés dans la derniere guerre, mais d'où ils furent bientôt chaſſés par les armées combinées d'Eſpagne & de Naples, qui occuperent long-tems ce poſte. Nous y obſervâmes trois heures de ſuite, & dans la plus grande chaleur du jour, la ſtation étant d'ailleurs des plus favorables. De-là nous deſcendîmes à *Cinthien*, aujourd'hui *Genſano*, petite ville peuplée & d'un agréable ſéjour, appartenante à la maiſon *Céſarini*. Nous allâmes obſerver ſur la colline voiſine, au pied d'une tour à demi écroulée ; & le jour commençant à baiſſer, nous fîmes un grand tour par *Aricie* ou *Riccia*, *Caſtel-Gandolfe* & *Marino*, dont les *Colonnes* ſont Seigneurs, & nous arrivâmes aſſez avant dans la nuit à *Fraſcati* dans la maiſon de campagne du college romain, d'où le lendemain 13 de juin nous revînmes à *Rome*, après avoir levé en moins d'un mois la carte de toute une grande Province.

Retour à *Rome* par *Fraſcati*.

127. La montagne d'*Albe* étoit encore des plus propres à notre deſſein, car elle ſe voit de très loin & de tout côté ; mais outre que le P. *Maire* y avoit déja obſervé avant notre voyage, il nous étoit aiſé d'y retourner, comme nous l'avons fait les années ſuivantes, de *Fraſcati* où nous allons communément paſſer les féries d'automne. Nous ne jugeâmes donc pas néceſſaire de nous y arrêter pour cette fois ; mais je ne crois pas

On paſſe la montagne d'*Albe* ; & pourquoi.

devoir passer sous silence une aventure, où nous courûmes le plus grand risque de la vie, quoique nous en ayons couru un assez grand nombre, & ce récit ne sera pas inutile à ceux qui auront à voyager sur les bords de la mer.

Grand risque de la vie à l'embouchure d'un lac.

128. Nous allions en chaise d'*Anzo* à *Circello*, en suivant la côte, & nous rencontrâmes sur notre passage l'embouchure du lac *Fogliano*, qui fait partie des marais pontins. Jamais chaise n'avoit passé en cet endroit; mais on nous avoit assuré qu'il n'y avoit rien à craindre, au moins en Eté; que nous pouvions en toute sûreté faire conduire notre voiture le long du rivage, jusqu'à *Circello*, & que nous trouverions un chemin également sûr & commode. Nous arrivons à l'embouchure: le garde de la tour *Paula*, située au pied de *Circello*, y avoit passé à cheval deux heures auparavant: notre voiturier pousse ses chevaux dans l'eau à l'endroit même où il voyoit encore imprimés les pas du cheval qui nous précédoit, regardant cet endroit comme le plus sûr. Heureusement pour nous le garde n'étoit pas loin; il s'étoit arrêté à l'autre bord pour prendre du repos, & dans le moment même il remontoit à cheval pour finir sa route. Dès qu'il nous eut apperçus, il se mit à crier de toutes ses forces, & à nous faire signe de la main d'arrêter, de tourner à droite par la mer, & loin de l'embouchure. Sur cet avis nous fîmes un grand détour; & dès que nous fûmes arrivés auprès de lui, il dit qu'il ne pouvoit s'empêcher de reconnoître & d'admirer la Providence, de ce qu'elle avoit daigné se servir de lui pour nous garantir d'un si grand péril dans ce lieu solitaire; que connoissant ce passage, il n'y étoit entré qu'avec précaution pour sonder le gué; que les eaux du lac enflées par les pluies des jours précédens, avoient fait un creux à l'embouchure de plus de deux fois la hauteur d'un homme; que si nos chevaux y fussent entrés, ils eussent infailliblement entraîné la chaise dans le gouffre; lequel venant ensuite à se recouvrir de sable, on n'auroit peut-être jamais pu savoir ce que nous fussions devenus. On est souvent exposé à des dangers de cette espece aux embouchures des lacs & des petites rivieres; & il est incomparablement plus sûr de faire un grand détour, soit à cheval, soit en voiture, en avançant dans le lit de la mer dont le fond

est

eſt plus ſolide, que de paſſer à l'embouchure même.

Séjour de deux mois à *Rome*.

129. Nous fûmes arrêtés deux mois à *Rome*, pendant leſquels le P. *Maire* aſſiſta à la congrégation générale, & je m'occupai de mon côté à preſſer la conſtruction du quart de cercle qui avançoit très lentement en notre abſence, & ſurtout à mettre en bon état les deux lunettes & leurs micrometres. Notre inſtrument ne nous fut remis qu'au commencement d'août, & peu après nous le fîmes tranſporter à l'obſervatoire que M. le Cardinal *Valenti* a fait conſtruire ſur le rempart même de *Rome:* là nous prîmes pluſieurs angles, tant pour connoître par le tour de l'horizon l'erreur de la diviſion de l'inſtrument au point de 90 dégrés, que pour vérifier toutes les différentes parties de la diviſion en les appliquant ſucceſſivement à la meſure des mêmes intervalles. Mais cette méthode expoſe encore à des erreurs de pluſieurs ſecondes; & comme elle ne réuſſiſſoit pas à notre gré, & que nous voulions d'ailleurs profiter du tems pour parcourir nos ſtations, nous renvoyâmes l'examen des diviſions après la meſure de tous nos angles. Nous fîmes encore à *Rimini* quelques tentatives, qui ne nous réuſſirent pas mieux; juſqu'à ce qu'enfin revenus à *Rome* après toutes nos courſes finies, j'imaginai une ſorte d'inſtrument de vérification fort commode, que nous fîmes conſtruire, & qui nous a beaucoup ſervi. J'en donne la deſcription au quatrieme livre.

Ordres concernant les ſignaux.

130. Cependant j'avois obtenu un ordre pour faire abattre les arbres au ſommet de *Soriano*, à l'exception d'un ſeul qui devoit ſervir de ſignal. Cet abattis ne pouvoit être préjudiciable aux habitans du lieu, dont chacun avoit la liberté de faire du bois à diſcrétion. On n'avoit pas encore ſuffiſamment nettoyé la place, ſurtout du côté qui regarde *Spolete;* & au lieu d'un arbre, on en avoit laiſſé trois aſſez voiſins, dont deux vus de *Rome* ſe projectoient l'un ſur l'autre, en telle ſorte que ces deux arbres & le troiſieme ſembloient de loin n'être que des branches écartées d'un ſeul: ce qui n'ayant été remarqué que lorſque nous nous tranſportâmes à cette ſtation, jetta cette premiere année beaucoup de confuſion dans nos premieres meſures. J'avois encore écrit pour faire placer des ſignaux ſur le mont *Catria* & le *Carpegna*, & pour réparer

ceux des autres montagnes : moyennant ces précautions, j'eſpérois que la meſure des angles de notre ſuite de triangles depuis *Rome* juſqu'à *Rimini*, ne nous méneroit pas plus loin que la fin de l'automne.

Signaux placés aux extrémités de la baſe.

131. Pour procéder à cette meſure, nous commençâmes par faire placer des ſignaux aux extrémités de la baſe de *Rome*, qui puſſent être apperçus du ſommet du mont *Genarro* à plus de 24 milles de diſtance : & comme vûs d'un lieu élevé, ils ne pouvoient manquer de ſe projecter ſur le terrein, il falloit de nouvelles précautions pour les rendre viſibles. Nous fîmes donc dreſſer trois ſolives, formant un angle droit, dont l'un des côtés ſuivoit la direction de la baſe, l'autre la coupoit perpendiculairement. On lia leurs extrémités ſupérieures par des traverſes, & l'on revêtit deux faces du priſme depuis le milieu juſqu'au haut d'une toile de chanvre enduite de chaux. Nous en fîmes d'abord placer un ſur le tombeau même de *Métella*, & proche les creneaux qui ſont au-deſſus de l'épitaphe, avec un plancher ſur lequel nous puſſions trouver place pour nous & pour notre grand quart de cercle, & d'où la vue pût s'étendre juſqu'à l'extrémité de la baſe, & vers le mont *Genarro* : l'autre ſignal fut placé ſur une éminence proche l'extrémité orientale de la baſe. Le même jour nous allâmes prendre les angles au premier ſignal ; & peu s'en fallut que notre quart de cercle, pour la premiere fois qu'il nous ſervoit, ne fût mis en pieces, & que nous ne périſſions nous-mêmes avec tous les ouvriers qui avoient conſtruit notre échaffaud.

Grand danger de mort.

132. Tout l'édifice portoit ſur deux poutres horizontales, dont l'une avoit été autrefois ſciée preſque entierement & en travers ; mais le trait de la ſcie étoit tellement couvert de pouſſiere, qu'il n'étoit pas poſſible de l'appercevoir. Nous étions ſur le plancher avec des maçons qui à force de bras y montoient notre grand quart de cercle : dès que la poutre eut ſenti le poids de l'inſtrument, elle commença à fléchir, & ſe rompit enfin tout à fait : une partie du plancher s'écroule, le reſte demeure incliné : le P *Maire* embraſſa une poutre verticale, dont la ſolidité le mit hors de danger : ma poſition étoit plus critique ; & ſentant le plancher ſe dérober ſous mes

pieds, je ſautai ſur un rebord ſaillant du mur, & m'attachai des deux bras à l'un des creneaux : les ouvriers ſauterent chacun de leur côté ſur des roches, & d'aſſez haut pour qu'il y eût quelqu'un de bleſſé. Si notre édifice eût été conſtruit de l'autre côté du tombeau, où le mur eſt fort élevé, c'étoit fait de nous : & ſans rien changer à notre poſition, ſi le quart de cercle eût déja été tranſporté ſur le milieu de notre plancher, il étoit perdu ſans remede.

Maniere de prendre les angles.

133. Revenus de notre frayeur, nous donnâmes des ordres pour rétablir le plancher, & nous renvoyâmes les obſervations à un autre jour : un ſeul nous ſuffit pour prendre nos angles aux deux extrémités de la baſe. Voici la méthode que nous avons ſuivie alors, & depuis, dans le cours de toutes nos ſtations. Le quart de cercle placé à peu près horizontalement, nous pointions les deux lunettes ſur les ſignaux, & nous viſions en même tems chacun de nous à un ſignal, de crainte que dans l'intervalle il n'y eût quelque mouvement dans la machine : le quart de cercle reſtant dans cette poſition, nous changions de lunette ; c'eſt-à-dire que celui qui venoit d'obſerver par la lunette fixe, paſſoit à la lunette mobile : dès que nous étions aſſurés que les ſignaux répondoient au centre des fils, nous eſtimions l'un après l'autre l'angle indiqué par la lunette mobile ; en quoi nous différions rarement de 4 ou 5 ſecondes, & alors même nous recommençions cet examen. J'expliquerai dans le quatrieme livre de quelle maniere nous eſtimions les fractions des diviſions tracées ſur le limbe. Nous avions ſoin à chaque opération de vérifier la poſition de la lunette fixe à l'égard du point zéro, en dirigeant les deux lunettes au même point. L'angle meſuré, nous marquions exactement la diſtance & la poſition du centre de l'inſtrument, par rapport au centre du ſignal : cette attention étoit abſolument néceſſaire pour faire à l'angle obſervé une petite correction qu'exige la réduction au centre. Cette correction eſt très aiſée à pratiquer ; j'en pourrai dire un mot dans le quatrieme livre.

Obſervations des hauteurs & déprеſſions.

134. Après avoir pris les angles horizontaux, nous ôtions l'alidade & la lunette mobile ; nous placions verticalement le quart de cercle, & nous y appliquions le fil à plomb, pour

vérifier, au moyen de la double lunette fixe, la position de l'instrument, (ce dont je renvoie le détail au quatrieme livre), & mesurer ensuite les hauteurs ou dépressions des signaux. Pour cela l'un de nous visoit au signal, tandis que l'autre examinoit le point du limbe auquel répondoit le fil à plomb. Nous plongions le poids dans l'eau, pour en arrêter le mouvement ; & s'il y avoit du vent, nous couvrions d'un garde-filet le fil à plomb.

Observations au dôme de *St Pierre* & sur le mont *Genarro*.

135. Les opérations finies aux deux extrémités de la base, nour fîmes transporter notre quart de cercle au-dessus du dôme de Saint Pierre : opération fort laborieuse, l'instrument, son pied, & la caisse, que pour prévenir tout accident nous avions rendue fort solide, pesant près de 300 livres. Nous fîmes nos observations le 21 d'août ; mais sans avoir pu découvrir le sommet de *Soriano* qu'à travers un nuage. Le lendemain nous partîmes pour *Palombara* & le *Genarro*, où les nuages nous déroberent d'abord la vue de l'horizon : nous ne pûmes observer que le lendemain, encore eûmes-nous beaucoup de peine à découvrir le signal de *Frattochie*, le Soleil étant déja assez bas. Ce fut là que nous commençâmes à appercevoir trois arbres sur le *Soriano*, sans savoir lequel étoit le véritable signal. Nous revînmes à *Rome*, & nous en repartîmes sur le champ pour *Soriano*, où nous vîmes qu'en effet on avoit laissé trois arbres au lieu d'un, & de plus, qu'on n'en avoit pas assez abattu aux environs.

Observations sur un arbre à *Soriano*.

136. Le plus grand inconvénient étoit qu'une croupe de la montagne, quoique plus basse, en se prolongeant vers *Spolete*, couvroit la vue de ce côté là. Le meilleur parti à prendre eût été sans doute de faire abattre aussi-tôt tous les arbres qui étoient dans cette direction ; mais les habitans du lieu l'auroient vu avec peine, & ils nous assurerent qu'on pouvoit établir solidement un échaffaud sur les grosses branches d'un arbre, y transporter le quart de cercle, & découvrir de-là fort loin. Nous eûmes égard à leurs représentations : mais à peine le quart de cercle fut-il établi sur l'arbre, que le moindre vent faisoit trembrer tout l'édifice & rendoit toute observation impraticable. Cet arbre étoit un des trois qu'on avoit laissés pour signal : nous le dépouillâmes de toutes ses feuilles, après quoi

nous n'éprouvâmes plus qu'un mouvement presque imperceptible. Nous n'avions plus besoin que d'un jour serein ; mais pour le trouver il nous fallut monter au moins dix fois sur la montagne, qui étoit à une heure & demie de chemin du bourg de même nom : ce qui nous retint en ce lieu l'espace de quinze jours.

Voyage à *Spolete.*

137. Après avoir entierement dépouillé cet arbre même de ses menues branches, nous fîmes couper un des arbres qu'on avoit laissés pour signal, de sorte qu'il n'en restoit plus qu'un entier couvert de feuilles, qui ne pouvoit causer d'équivoque. Nous sortîmes de *Soriano* en suivant la même route que l'année précédente pour aller à *Amélie :* & sans passer cette fois par *Terni*, nous nous rendîmes à *Spolete* par un chemin détourné avec notre petit quart de cercle, pour lever la carte de cette contrée : ce que nous avons toujours pratiqué dans la suite en allant d'une station à l'autre. Nous profitions aussi de tout le tems qui nous restoit dans nos stations pour déterminer avec le grand quart de cercle la position des villes & autres lieux principaux, quand ils n'étoient pas dérobés à notre vue par l'opposition du Soleil, ni par l'interposition des nuages.

Stations du *Fionchi* & du *Pennino.*

138. Nous fûmes plus heureux sur le mont *Fionchi :* dès le premier jour l'horizon fut net, & nous découvrîmes très distinctement les montagnes de *Palombara*, de *Soriano*, de *Pérouse* & de *Nocéra*. De-là nous prîmes la grande route de *Rome*, & nous nous rendîmes par *Foligno* à *Nocéra*, dont le *Pennino* n'est éloigné que de cinq milles ; mais le chemin est si rude, que nos chevaux eurent bien de la peine à le faire en cinq heures, encore ne pûmes-nous retirer aucun fruit de ce premier voyage : le ciel étoit couvert de grands & de petits nuages qui nous cachoient la plupart de nos signaux. Après avoir attendu quelque tems inutilement, nous confiâmes notre quart de cercle à des bergers, qui le mirent dans leur cabane sur la montagne, & nous revînmes à *Nocéra* sans avoir rien fait.

Mission donnée.

139. Nous étions trop mal payés de nos peines pour nous exposer à un second voyage aussi long & aussi inutile que le premier. Ainsi nous nous établîmes dans une maison de paysan à *Mosciano*, petit village située sur le penchant de la montagne à deux ou trois heures de chemin du sommet, & célebre

par les eaux très salutaires de *Nocéra ;* encore fallut-il y rester neuf jours entiers : nous fûmes d'abord contrariés par les nuages qui rendirent les trois premiers voyages inutiles : les pluies survinrent ensuite, & parurent vouloir nous retenir plus longtems dans le village ; ce qui nous fit naître la pensée d'y donner une mission. Après avoir demandé les pouvoirs à M. l'Evêque de *Nocéra*, qui avoit eu la bonté de nous recevoir chez lui dans cette ville, nous nous mîmes à instruire, à prêcher & à confesser, ne croyant pouvoir mieux remplir que par des fonctions de zele le vuide de nos occupations géométriques.

Observations sur le *Pennino.*

140. Enfin après une forte pluie, le vent de nord s'éleva le 21 septembre, & nous montâmes incontinent sur le *Pennino.* Les nuages en couvrirent encore le sommet jusqu'après midi : ils se dissiperent enfin, & nous commençâmes à appercevoir les montagnes de *Pérouse* & de *Spolete ;* celle de *Catria* se découvrit un peu plus tard ; la bise ayant augmenté sur le soir, la fit sortir des nuages, & nous achevâmes de prendre nos angles à l'entrée de la nuit. Je démontai les instrumens, & les remis en caisse par un froid si piquant, que j'en eus la main engourdie au point de ne pouvoir la fermer de plusieurs mois.

Tremblemens de terre. Chute dangereuse.

141. Un soir pendant notre séjour à *Mosciano*, la nuit étant assez avancée, nous sentîmes un violent tremblement de terre, dont notre chaumine fut rudement ébranlée : un autre avoit renversé peu de tems auparavant dans le même canton la petite ville de *Gualdo*, & plusieurs villages : j'écrivois alors à M. le Cardinal *Valenti* à qui je rendois compte deux fois la semaine de nos opérations. Mais le P. *Maire* courut ces jours-là même un danger bien plus grand, dont la Providence le sauva. Dans l'un des voyages que nous fîmes au sommet de la montagne, notre guide s'avisa pour couper court, de nous mener par un sentier presque perpendiculaire : je sentis le danger, & ayant assez de forces pour monter à pied, je descendis de cheval : le P. *Maire* plus âgé garda sa monture ; mais la sangle de son cheval s'étant cassée tout à coup, le Pere glissa au même instant avec la selle sur la croupe du cheval, & tomba à la renverse entre des pointes de rochers. Tous mes sens se glacerent de frayeur : jamais la protection de Dieu n'a

paru sur nous d'une maniere plus visible: le P. *Maire* ne s'étoit point blessé: il se releve de lui-même; & la sangle attachée de nouveau, & plus étroitement serrée, il remonte à cheval, & arrive sain & sauf au sommet de la montagne.

Observations sur le mont *Tésio*.

142. Le lendemain nous revînmes à *Nocéra*, & prenant le grand chemin de *Rome*, nous passâmes à *Foligno* pour aller à *Pérouse*. Dès le jour suivant nous montâmes avec le grand quart de cercle sur le *Tésio*, & le ciel étant serein, nous fîmes sans difficulté plusieurs observations; mais nous ne pûmes découvrir la montagne de *Carpegne*: elle devoit se reconnoître à un signal qu'on m'avoit promis pour le jour même, & dont nous n'apperçûmes pas le moindre vestige avec nos lunettes, & aucun de nos guides ni de nos aides ne connoissoit de vue cette montagne. Nous découvrîmes seulement celle de *Sainte Marie*, & sur celle-ci une tour qui nous parut pouvoir former un nouveau triangle avec le *Catria* & quelqu'autre montagne. Ainsi après avoir déterminé sa position, nous revînmes à *Pérouse*. Le même jour je reçois une lettre de l'ami qui s'étoit chargé de poser le signal: il m'apprenoit que nous ne pouvions absolument nous passer du mont de *Carpegne*; mais qu'il avoit été empêché d'y poser le signal par des soldats toscans, qui depuis quelques années avoient pris possession au nom de l'Empereur du bourg de *Carpegne*, du village de *Scavolino*, & d'une grande partie de la montagne; qu'on étoit en contestation sur les limites des deux états aux environs du lieu où il falloit placer le signal; que les soldats n'avoient pas permis qu'on mît la main à l'œuvre; qu'il avoit eu beau leur représenter qu'il s'agissoit d'une opération géométrique & non militaire; & qu'on désespéroit de pouvoir leur faire entendre raison.

Des troupes empêchent de poser un signal.

Mesures prises pour écarter cet obstacle.

143. Cette nouvelle me surprit & m'affligea: c'étoit la premiere fois que j'entendois parler de poser un signal sur un terrein en litige: si j'en eusse eu le moindre soupçon, rien n'eût été plus facile que de prévenir cet obstacle; au lieu que dans la circonstance il falloit écrire plusieurs lettres; en attendant les réponses, l'hyver qui s'avançoit à grands pas, devoit bientôt interrompre le cours de nos opérations. Après avoir délibéré sur les moyens les plus prompts de lever cet

obſtacle, nous crûmes devoir examiner en attendant ſi nous ne pourrions abſolument nous paſſer du mont de *Carpegne :* pour cela nous fîmes tranſporter le quart de cercle à *Citta di Caſtello*, & de-là nous montâmes au ſommet de l'Apennin, d'où nous deſcendîmes à *San Angélo in vado*, & à *Urbanie*, deux villes ſituées dans l'étroite vallée du *Métaro*. Après avoir examiné la ſituation des lieux, nous reconnûmes qu'en effet le mont de *Carpegne* nous étoit néceſſaire, vu qu'on découvre de-là toute la côte de *Rimini*, & qu'il pouvoit terminer deux beaux triangles, l'un appuyé ſur le *Catria* & le *Téſio*, l'autre ſur le mont *Luro*. En conſéquence nous écrivîmes à *Citta di Caſtello* d'envoyer notre quart de cercle à *Cantiano* ſitué au pied du *Catria*. En attendant nous allons à *Foſſombrone*, à *Fano* & à *Peſaro*, & nous levons la carte de toute cette contrée avec le petit quart de cercle. Nous fûmes reçus à *Peſaro* par Mgr. François *Stoppani*, pour lors Evêque & Préſident d'*Urbin*, aujourd'hui Cardinal & Légat de cette Province, à qui M. le Cardinal *Valenti* nous avoit recommandé, & envers lequel les témoignages les plus expreſſifs de notre reconnoiſſance ne peuvent nous acquitter.

Voyage à *Rimini*.

144. Nous fîmes part à ce Prélat des meſures que nous avions priſes ; & en attendant que les difficultés s'applaniſſent, nous allâmes chercher ſur le rivage de *Rimini* un terrein meſurable à la perche, pour nous ſervir de baſe. Il s'en étoit déja préſenté un près de *Fano*, qui au défaut d'autre, auroit pu ſervir à cet uſage. Nous devions encore chercher un lieu propre à faire nos obſervations aſtronomiques à l'extrémité de notre méridienne, & employer le reſte du tems à faire quelques excurſions, pour la correction de la carte géographique, juſqu'à ce qu'il nous fût permis de conſtruire une cabane ſur le mont *Carpegne* pour nous ſervir de ſignal. Nous partîmes donc de *Peſaro* pour *Rimini* ; mais au lieu de ſuivre la route qui borde la côte, nous détournâmes à gauche pour aller reconnoître le mont *Luro :* nous le trouvâmes tel qu'on nous l'avoit dépeint, c'eſt-à-dire, très propre à placer un ſignal ; car nous découvrions de-là le mont *Catria*, celui de *Carpegne*, & tout le rivage de la mer à quinze milles de diſtance juſqu'à *Rimini*, où nous arrivâmes le 7 d'Octobre.

1751. Octobre.

145.

Voyage à *San Marino.*

145. C'étoit peu de voir ſuſpendre le cours de nos opérations: pour ſurcroît de malheur, il arriva par la négligence des couriers, ou par je ne ſais quelle fatalité, que les lettres que M. le Cardinal *Valenti* m'adreſſoit à *Rimini*, avec des ordres d'où dépendoit toute la ſuite de notre voyage, & d'autres lettres que nous devions remettre nous-mêmes ſur les lieux, ſe perdirent toutes, ſi bien qu'on ne put jamais ſavoir ce qu'elles étoient devenues. Pendant que nous attendions la réponſe à nos lettres, nous reconnûmes une plage qui s'étend de *Rimini* vers *Peſaro*, très propre à meſurer ſur le terrein, & à nous ſervir de baſe. Nous allâmes auſſi à *Saint Marin*, petite ville, mais fort célebre par ſon indépendance, & la liberté qu'elle conſerve depuis pluſieurs ſiecles: elle eſt ſituée ſur une montagne qui ſe termine en trois pointes fort élevées, & garnies de tours, d'où la vue s'étend d'un côté ſur la Marche d'Ancone, de l'autre ſur les frontieres les plus reculées de l'Etat de l'Egliſe, & au-delà de *Commachio;* mais ſous un ciel pluvieux & chargé de nuages, nous ne pûmes alors relever que les objets les plus voiſins, dont nous fixâmes la poſition.

Obſervatoire établi à *Rimini.*

Eloge de M. *Garampi*;

146. Nous trouvâmes un lieu fort propre aux obſervations aſtronomiques dans la maiſon de M. le Comte *Garampi* de *Rimini.* Les termes me manquent pour exprimer toutes les obligations que nous avons à ce Seigneur. M. *Garampi* cultiva dès ſon enfance l'étude de l'Aſtronomie, juſques-là que le célebre *Euſtache Manfredi*, dont il fut diſciple à *Boulogne*, en parle comme d'un compagnon de ſes travaux. Nous obſervâmes enſemble à *Rome* en 1736 dans ce college romain le paſſage de Mercure ſur le Soleil, & liés dès-lors d'une étroite amitié, nous avons depuis ce tems-là entrenu un commerce de lettres. De retour en ſa patrie, il fit de ſa maiſon le palais d'Uranie; il y traça une méridienne, & fit proviſion d'inſtrumens d'aſtronomie, qui lui ont ſervi à faire pluſieurs obſervations, ſurtout d'éclipſes. Il ne ſe borne pas à l'étude des Mathématiques; & à l'exemple de M. Joſ. *Garampi* ſon frere, Chanoine de Saint Pierre de *Rome*, garde des archives du Vatican, connu dans la république des lettres par pluſieurs ouvrages ſur les antiquités, remplis d'érudition, M. *Garampi* y joint l'étude des médailles & la connoiſſance des anciens manuſcrits.

Les services qu'il rend.

147. Comme il vit que nous n'avions dans notre college de *Rimini* aucun endroit propre à obſerver les étoiles voiſines du zénith, il nous conduiſit chez lui, nous offrit ſes inſtrumens, & en particulier une pendule à ſecondes, que nous n'euſſions pu trouver ailleurs, & qui nous diſpenſa d'en faire venir une de *Rome :* non content de cela, il voulut aſſiſter à preſque toutes nos obſervations, à toutes ſortes d'heures, à *Rimini* & à *Penna di Billi*, petite ville, chef lieu de la province, & ſituée ſur le mont *Férétrano*, où il nous reçut dans ſa maiſon avec magnificence : il nous ſuivit depuis ſur le mont de *Carpegne*, quand les difficultés furent levées ; il fit lui-même pour nous un bon nombre d'obſervations géographiques, qu'il nous envoya à *Rome :* il détermina en particulier la poſition de *Sarcina*, ville ſituée au milieu des montagnes ; c'eſt la ſeule ville de l'Etat de l'Egliſe dont nous ayons omis de fixer la ſituation par nos propres obſervations, n'ayant pas moins de confiance en celles de M. le Comte *Garampi* qu'aux nôtres.

148. Cette tâche finie, nous retournâmes à *Peſaro*, où nous logeâmes d'abord chez M. l'Evêque, puis chez M. *Olivieri*, l'ornement de l'Académie de cette ville, à qui nous avons eu toutes ſortes d'obligations cette année & la ſuivante : il nous conduiſit à ſa maiſon de campagne de *Novilara* pour y travailler à la correction de la carte, & à ſa terre de *Granarolo* à deux milles du mont *Luro :* il voulut être témoin des obſervations que nous fîmes avec le grand quart de cercle ſur cette montagne même.

Signal poſé ſur le mont de *Carpegne*.

149. Au retour de toutes nos courſes aux environs de *Peſaro*, je reçus enfin le 27 octobre la nouvelle que toutes les difficultés étoient levées ; que nous pouvions en toute ſûreté faire conſtruire une cabane pour nous ſervir de ſignal ſur le mont de *Carpegne*, & y aller prendre nos angles. Nous partîmes dès le lendemain de *Peſaro*, & nous prîmes notre route par *Saint Marin* pour aller à *Penna*, & de-là à *Scavolino* ; d'où, tout étant concilié, le Commandant même des troupes toſcanes nous accompagna ſur le ſommet de la montagne. Nous y déſignâmes la place de la cabane & la forme qu'on devoit lui donner. Nous étions partis de grand matin par un très beau tems ; nous avions trouvé le chemin eſcarpé, & en partie

couvert de glace : à peine fûmes-nous au ſommet, qu'il s'éleva tout à coup de la mer un amas de nuages blancs, dont notre montagne fut bientôt inveſtie. Tandis que nous deſcendions au bourg de *Carpegne*, & notre eſcorte à *Scavolino*, un tourbillon de neige ſorti du ſein de la nue, & pouſſé par un vent impétueux, nous enveloppa de toutes parts, & nous laiſſa à peine aſſez de jour pour nous conduire. Cependant nous pourſuivîmes notre route ſans accident, & le nuage étant diſſipé, nous arrivâmes le même jour à *San Angelo in vado* à l'entrée de la nuit. Le lendemain nous paſſâmes en diligence à *Acqualagna*, & à *Cagli*, ville entourée de montagnes qui rendent ſa poſition difficile à déterminer : nous la déterminâmes de notre mieux, & nous arrivâmes encore de jour à *Cantiano*.

Tentative inutile. Nouvel ordre de marche.

150. Notre quart de cercle nous y avoit devancé. Le jour ſuivant à la pointe du jour nous montâmes ſur le *Catria* : le tems étoit aſſez beau à notre départ ; mais nous n'étions pas encore à mi-côte, que tout le ciel ſe couvrit de nuages, & ne nous annonça plus que des orages & des tempêtes : le ſommet de la montagne y étoit déja plongé, & les vents mugiſſoient avec fureur. Nous attendîmes pluſieurs heures auprès du feu, pour voir ſi le vent diſſiperoit l'orage : il fallut revenir à notre gîte, & nous vîmes le lendemain matin notre ſignal & le ſommet de la montagne couverts de neige : en même tems tout le monde nous avertiſſoit que ces montagnes étoient impraticables dans cette ſaiſon ; que les payſans même des environs & les pâtres n'oſoient en approcher : ce qui nous fit perdre l'eſpérance de pouvoir finir cette année la meſure de nos angles. Nous prîmes le parti de retourner à *Rimini* pour meſurer notre baſe, & de prendre notre route par *Urbin* pour placer cette ville & les lieux circonvoiſins ſur notre carte. Nous devions enſuite faire une excurſion géographique dans la Romagne, le Bolonois & le Ferrarois, en attendant notre ſecteur, qu'on nous avoit promis pour ce tems-là. Le ſecteur arrivé, nous nous propoſions de faire au commencement du printems nos obſervations aſtronomiques de *Rimini* ; &, pendant qu'on tranſportteoit l'inſtrument à *Rome*, où nous devions en faire de ſemblables, de prendre en paſſant les angles qui nous manquoient.

1751. Novembre.

Préparatifs pour la mesure de la base.

151. Arrivés à *Rimini* le 5 novembre, nous donnâmes d'abord nos soins à faire préparer les instrumens nécessaires à la mesure de la base; j'entends les perches avec leurs lames de métal, & les trépieds; car pour la regle de fer, le thermometre & le compas à verge, nous les avions déja fait venir de *Rome*. A notre départ de *Cantiano*, nous avions particulierement recommandé au Commandant du lieu de nous envoyer sans délai notre quart de cercle sur un cheval, non sur un chariot, de crainte que quelque piece de l'instrument, quoique renfermé dans une bonne caisse, ne fût dérangée par les cahots de la voiture: précaution que nous avons toujours prise; & au défaut de cheval, nous faisions porter le quart de cercle à bras sur le sommet des montagnes. Notre dessein étoit, tandis qu'on prépareroit les ustensiles nécessaires pour la mesure de la base, de vérifier les divisions du quart de cercle; mais il se fit attendre jusqu'à la fin du mois: d'un autre côté on ne procédoit qu'avec une extrême lenteur à préparer nos perches, & autres petits instrumens: toute l'autorité des Magistrats, jointe à la promesse d'une ample récompense, purent à peine nous les procurer pour la fin de novembre.

Mesure de la base de *Rimini*.

Décembre.

152. Nous choisîmes pour notre base le rivage de la mer, depuis l'embouchure de l'*Ausa* près de *Rimini*, en tirant vers *Pesaro*, l'espace d'environ huit milles. Nous employâmes treize jours à faire cette mesure & à la répéter, non compris trois jours pendant lesquels les pluies nous obligerent de l'interrompre. Pendant tout ce tems, la température de l'air fut sensiblement la même; le moyen dégré de chaleur étoit le cinquieme au-dessus du terme de la glace: mais nous eûmes presque toujours un brouillard si épais, que sans la précaution que nous prîmes dès le premier jour de marquer l'alignement de la base par des jallons plantés fort près les uns des autres, nous n'eussions pu avancer en ligne droite: ainsi chaque fois que le brouillard s'éclaircissoit suffisamment les jours suivans pour laisser appercevoir les termes extrêmes de la base, nous continuions la même manœuvre.

Forme de la base; sa longueur.

153. Comme le rivage n'est point en ligne droite, & qu'en s'écartant de la plage les sables accumulés par les vents forment des dunes & des creux, nous ne pûmes mesurer notre

baſe en ligne droite : elle étoit compoſée de deux lignes, qui faiſoient comme les côtés d'un triangle rectiligne, dans lequel, connoiſſant ces deux côtés par leur meſure actuelle, avec un angle quelconque, il n'étoit pas difficile de déterminer le troiſieme côté, ou la baſe rectiligne, & cela ſans aucune erreur ſenſible, eût-on commis dans l'angle une erreur d'une demi-minute : ce qui ne pouvoit arriver dans le cas préſent où nous nous ſommes ſervis du grand quart de cercle. Or l'angle formé par l'un des côtés connus avec la baſe rectiligne, s'eſt trouvé de 9 dégrés, 7 minutes, 45 ſecondes ; d'où la baſe rectiligne a été conclue de 52674. 3 palmes romains, ou de 6037. 62 toiſes.

154. Cette baſe fut meſurée de la même maniere que celle de *Rome* ; mais comme le brouillard de *Rimini* faiſoit impreſſion ſur les perches, & les courboit tant ſoit peu, nous ne nous contentions pas de vérifier pluſieurs fois le jour avec le compas à verge la longueur de nos perches, & de la comparer avec la regle de fer ; nous examinions de plus cette courbure même, au moyen d'un fil tendu, & de la maniere que j'expoſerai au quatrieme livre. Cette courbure n'a pas produit dans la baſe une différence de ſix pouces. Nous n'en avons point tenu compte dans la premiere baſe, parceque la différence étoit trop petite ; mais eût-elle été auſſi grande qu'à *Rimini*, elle eût à peine produit une erreur de quatre pieds ſur la meſure du dégré ; & en prenant un milieu entre les deux baſes, l'erreur n'eût pas monté au-delà de deux pieds.

Examen de la courbure des perches.

155. Nous eûmes trois obſtacles à ſurmonter dans la meſure de la baſe de *Rimini*, ſavoir le paſſage de l'*Amarano*, de petits eſpaces de mer à traverſer quand la mer faiſoit un coude, & quelques monceaux de ſable & inégalités de terrein. L'*Amarano* eſt un torrent qui, à ſon embouchure, a un lit fort étroit, & un fond ſolide ; au lieu qu'à l'endroit où nous devions le paſſer, le lit étoit large, & le terrein mouvant : nous déterminâmes cet intervalle par un triangle, en meſurant avec nos perches le long du bord un intervalle à peu près égal, & en prenant les angles avec une exactitude qui ne permet pas de ſoupçonner dans ce trajet une erreur d'un demi-pouce. La marée (aſſez ſenſible dans le golfe de

Obſtacles à ſurmonter.

Veniſe) empiétoit quelquefois ſur notre baſe, dans les endroits où le rivage ſe courbe en rentrant dans les terres: pour lors nos aides déja exercés par pluſieurs jours de meſure, entroient dans l'eau juſqu'à mi-jambes, & meſuroient ſous nos yeux: ils nous apportoient à diverſes repriſes la meſure de l'intervalle des perches, avec un compas; & la conformité de leurs meſures nous répondoit de leur juſteſſe. Nous rencontrâmes à quelque diſtance de la mer de grands monceaux de ſables, & des creux, dans un aſſez long eſpace: nous avions préparé deux nouvelles tables beaucoup plus hautes, pour les creux les plus profonds; & nous faiſions ébouler le ſable des dunes, juſqu'à ce que les perches portant ſur le ſable même, ſe trouvaſſent de niveau.

1751. Décembre.

Effet de l'humidité ſur les perches.

156. Il eſt encore digne de remarque, qu'en comparant les perches à la regle de fer, nous trouvions quelquefois que la même perche s'étoit allongée d'un côté & raccourcie de l'autre: ce qu'on ne peut attribuer qu'à l'irrégularité de tiſſure des filamens, l'humidité produiſant dans les uns un ſimple raccourciſſement, tandis que ce raccourciſſement même faiſoit peut-être éviter certains nœuds à d'autres filamens, qui par-là même ſe lâchoient. Quelle qu'en ſoit la cauſe, le fait eſt certain.

Accord parfait entre les deux meſures.

157. J'obſerverai enfin qu'ayant remeſuré les deux côtés de notre baſe en revenant ſur nos pas, nous n'avons trouvé entre la premiere & la ſeconde meſure qu'une différence de deux pouces: ce qui ne paroît nullement un effet du haſard; mais celui de nos attentions & de nos ſoins en opérant: on peut en juger par l'expoſé que j'ai fait des précautions que nous avons priſes: mais nous en avons une preuve encore plus ſenſible; c'eſt qu'en remeſurant nous trouvions rarement plus d'un pouce de différence dans la diſtance des pierres & des briques que nous avions enterrées pour marquer le terme de chaque journée; juſqu'à ce qu'ayant parcouru la moitié de la baſe, nous ne trouvâmes plus de bornes: elles avoient été écartées dans l'intervalle par les vagues pendant une tempête violente.

Extrémités de la baſe marquées.

158. Aux deux extrémités de la baſe, comme auſſi dans le point où elle faiſoit un coude, nous avions enfoncé de force, & profondément dans le ſable de gros pilotis, ſur les têtes deſquels, après les avoir applanies, nous avions tracé deux

lignes profondes qui se croisoient, & dont l'intersection répondoit exactement aux termes extrêmes de nos deux lignes: nous les avions ensuite couverts de sable, & placé à l'entour quelques reperes, pour les retrouver plus aisément quand nous viendrions prendre nos angles.

159. Tandis que nous mesurions cette base, on nous écrivit de *Rome* qu'on ne pouvoit nous envoyer notre secteur, ni même le finir que nous ne fussions présens: ce qui nous obligea pour la seconde fois de changer l'ordre de notre marche, & de revenir à *Rome* vers la fin de décembre. Nous prîmes la grande route par *Pesaro*, *Fano*, *Sinigaglia*, *Ancone*, *Lorete*, *Recanati*, *Tolentin*, *Foligno*, *Spolete*, *Terni*, *Narni* & *Civita-Castellana*, autrefois *Fescennin*; & dans tous ces lieux, comme dans toutes les autres villes de notre passage, nous ne manquâmes aucune occasion de travailler à la réformation de la carte; mais ces occasions ont été ici plus rares à cause de la saison. Retour à *Rome*. 1752. Janvier. Février.

160. Le secteur ne nous fut remis que vers la fin de février, & nous le plaçâmes dans le cabinet de *Kirker* au college romain: nous y avons une belle méridienne tracée sur un pavé de pierre, & une excellente pendule à secondes: le pavé porte sur une bonne voute, & le plafond est immédiatement au-dessous du toit, de sorte qu'il ne s'agissoit plus que de faire une petite ouverture au toit & au plafond, pour observer commodément les étoiles voisines du zénith. Observatoire de Rome.

161. On donnera en détail au quatrieme livre (n°. 3 & suiv.) la description du secteur, & l'explication de ses divers usages. Il suffit de remarquer ici que nous avons toujours eu grand soin de donner à notre secteur une situation verticale, en faisant raser le limbe au fil à plomb, & de placer le secteur exactement dans le plan du méridien. L'axe de la lunette étoit fixe dans notre secteur: il n'y avoit point de fil mobile dans la lunette (1); mais nous avions une lame mobile, placée sur le limbe; on la faisoit avancer au moyen d'un micrometre, jusqu'à ce que le point le plus voisin de la division répondît au fil à plomb, pour pouvoir estimer la distance du fil à Description du secteur.

(1) On pointoit la lunette sur l'étoile, en inclinant le secteur de la quantité nécessaire par le moyen d'une vis. Voyez liv. IV. n°. 14 & suiv.

plomb au milieu du limbe, & la valeur de l'angle. Nous avions eu ſoin de rendre l'axe de la lunette à peu près parallele au plan de l'inſtrument, & le ſecteur étoit tellement conſtruit, qu'on pouvoit aiſément approcher ou éloigner le centre de l'objectif du plan du ſecteur, juſqu'à ce qu'on eût atteint le paralléliſme : mais nous ne nous ſommes nullement mis en peine de parvenir à un paralléliſme rigoureux ; car en retournant alternativement le ſecteur, on connoît d'abord de combien l'axe eſt écarté du plan de l'inſtrument ; & il n'eſt beſoin pour cela ni de prendre des hauteurs correſpondantes, ni même de régler la pendule, pourvu que ſon mouvement ſoit uniforme : or cette déviation connue, il eſt aiſé de corriger, au beſoin, l'erreur qui en réſulte ; je dis au beſoin, car par exemple en Italie, à moins que la déviation ne ſoit conſidérable, l'erreur n'eſt plus ſenſible.

Paralléliſme de la lunette au plan de l'inſtrument.

162. Cette méthode conſiſte à obſerver trois jours de ſuite la même étoile, le limbe tourné le premier jour à l'orient, le ſecond à l'occident, le troiſieme encore à l'orient, en conſervant le limbe dans le plan du méridien. De la maniere que notre ſecteur étoit fait, il ne falloit qu'un moment pour le retourner & le placer dans cette direction. Cela ſuppoſé, ſi la lunette eſt parallele, il s'écoulera autant de tems de la premiere obſervation à la ſeconde, que de la ſeconde à la troiſieme : & ces intervalles ſeront inégaux, ſi la lunette n'eſt point parallele. Car ſi à raiſon de l'inclinaiſon de l'axe, l'étoile arrive le premier jour au centre des fils avant que d'atteindre au méridien, elle arrivera le lendemain d'autant plus tard au centre des fils, & cette différence de tems ſera double de celui qui répond à l'inclinaiſon de l'axe : mais parceque le troiſieme jour elle reparoîtra d'autant plutôt qu'elle a retardé la veille, la différence de ce ſecond intervalle de tems ſera encore double de l'erreur ; ainſi la ſomme des différences des deux intervalles ſera quadruple : ce qui donne cette analogie : l'eſpace du tems marqué par la pendule, écoulé de la premiere à la troiſieme obſervation, eſt à la quatrieme partie de la différence de ces intervalles, comme deux cercles entiers à un quatrieme terme, lequel ſera le nombre des minutes & ſecondes du parallele de l'étoile fixe, qui répondent à l'inclinaiſon de l'axe.

On

On réduira ce nombre de minutes & ſecondes en arc de grand cercle par la méthode ordinaire, & l'on aura cette inclinaiſon même, qu'on corrigera ſi on le juge à propos; car lorſqu'elle eſt petite, on peut n'en tenir compte dans notre latitude; & obſervât-on même près du pôle, il eſt incomparablement plus facile & plus court de corriger l'erreur qui en réſulte, que de s'obſtiner à courir ſcrupuleuſement après le parallélisme, au riſque d'y perdre un tems conſidérable. La différence des deux intervalles, dans l'une des poſitions de notre ſecteur, s'eſt trouvée de 32 ſecondes; d'où réſulte une inclinaiſon de 8 ſecondes, répondante à deux minutes du parallele de l'étoile fixe: inclinaiſon légere, & qui diminua conſidérablement encore lorſqu'on eut changé la poſition de l'objectif.

Maniere d'obſerver les étoiles voiſines du zénith.

163. Nous avons obſervé pendant un intervalle de plus de quinze jours trois étoiles, ſavoir α du ſigne, μ de la grande ourſe, & β de la conſtellation d'*auriga*; & voici le procédé que nous ſuivions: le ſecteur tellement diſpoſé que l'étoile dût paſſer dans la lunette, l'un de nous deux attendoit le moment du paſſage, & dès qu'il la voyoit paroître, il tournoit une vis, qui faiſoit incliner le ſecteur plus ou moins, juſqu'à ce qu'il eût amené l'étoile ſur le fil horizontal, & perpendiculaire au méridien; & il attendoit le moment où elle atteignît le fil qui croiſoit le premier dans le plan même du méridien, en remarquant l'heure de la pendule au moment de ce paſſage. L'autre prenoit enſuite ſa place, & voyoit ſuivre à l'étoile le fil horizontal, qu'elle débordoit de nuit, & qui la couvroit entierement pendant le jour. On examinoit enſuite le point du limbe auquel répondoit le fil à plomb, en avançant, au moyen d'une vis, la lame mobile juſqu'à ce qu'une de ſes diviſions répondît au fil: nous faiſions cet examen l'un après l'autre, & à pluſieurs repriſes, & nous ne différions jamais de plus de deux ou trois parties de micrometre, dont il en faut trois pour une ſeconde. Souvent auſſi nous retournions le ſecteur d'un jour à l'autre; & c'étoit pour nous, comme je l'ai dit, l'affaire d'un moment.

1752. Mars.

Départ de Rome.

164. Les obſervations aſtronomiques terminées à l'extrémité auſtrale de la méridienne, nous partîmes de *Rome* avec notre ſecteur, pour en aller faire de ſemblables à *Rimini*, &

laiſſer le moindre intervalle poſſible entre les obſervations. Nous prîmes, pour aller à *Rimini*, la même route par laquelle nous en étions revenus l'année précédente ; & nous profitâmes de la belle ſaiſon pour déterminer la poſition des points que nous n'avions pu obſerver au cœur de l'hyver dans notre premier voyage, & il nous en manquoit preſque à chaque ſtation : tout nous réuſſit à ſouhait, le tems ayant preſque toujours été extrêmement favorable.

Avril. Obſervations aſtronomiques à *Rimini*.

165. Arrivés à *Rimini*, nous fîmes dans la maiſon de M. le Comte *Garampi* tous les préparatifs néceſſaires aux obſervations aſtronomiques, en attendant notre ſecteur. L'inſtrument étoit renfermé dans une forte caiſſe, dont le fond étoit de planches épaiſſes & fort unies. Nous traçâmes une méridienne dans un lieu commode ſous le toit ; nous y plaçâmes la pendule, puis le ſecteur qui ſe trouva tout monté le 15 d'avril, & nous commençâmes à obſerver. Les nuages & les brouillards vinrent nous contrarier : ce qui fit que nos premieres obſervations s'accordoient peu ; de plus elles furent interrompues par un accident qui dérangea le ſecteur. Mais depuis les derniers jours d'avril juſqu'au 15 de mai, il y eut un aſſez bon nombre de jours ſereins : ils furent entremêlés d'autres jours, où la pluie & le mauvais tems ne nous laiſſoient appercevoir qu'une ſeule de nos étoiles, ou nous les cachoient toutes. Les obſervations que nous fîmes de β d'*auriga* furent en trop petit nombre, à cauſe de la proximité du Soleil, & trop peu ſûres pour qu'on puiſſe y compter ; mais l'accord de toutes les autres ne nous laiſſe aucun doute ſur la détermination de l'amplitude de l'arc. Pluſieurs amis du maître de la maiſon, & lui ſurtout, furent témoins de nos opérations, & partagerent nos travaux.

Mai.

Examen des diviſions. Courſes géographiques.

166. Ces obſervations finies, nous employâmes quelques jours à l'examen des diviſions du ſecteur ; mais de retour à *Rome*, nous reprîmes & achevâmes cet examen avec plus de ſoin, & par diverſes méthodes. J'avois imaginé avant de quitter *Rimini*, un inſtrument commode pour la vérification des diviſions du quart de cercle ; mais je n'y pus trouver d'ouvrier en état de l'exécuter avec aſſez de préciſion. Après quelques tentatives, nous remîmes à faire cet examen à *Rome* même

avec plus de loisir. Nous fîmes aussi plusieurs courses géographiques, entre autres sur une colline très agréable, nommée *Corvignano*, couverte de maisons de plaisance de la noblesse du pays, & dans une petite ville riche & peuplée, appellée *Saint Arcange:* & pour ne rien laisser en arriere dans ce canton avant que d'achever de prendre nos angles, nous employâmes le reste du mois de mai & celui de juin à parcourir la Romagne, le Ferrarois & le Bolonois, remettant au commencement de juillet les voyages qui nous restoient à faire sur les montagnes.

Voyage à *Cesene;*

167. Nous partîmes de *Rimini* le 27 de mai, & nous arrivâmes à *Cesene*, où M. le Marquis *Michel Ange Romagnoli*, mon ami particulier, nous fit une magnifique réception. Il étoit venu au-devant de nous l'espace de plusieurs milles; ce qu'il fit encore depuis: il nous mena visiter un célebre monastere de Bénédictins au voisinage de cette ville; il y assista à un grand nombre d'observations, & à notre retour il voulut nous reconduire jusqu'à *Rimini*. Nous fûmes retenus à *Cesene* par une pluie qui dura vingt-quatre heures sans interruption.

A Ravennes & Comachio;

168. De-là nous passâmes à *Cervia la neuve*, ville si petite, qu'elle ne mérite pas le nom de ville: le voisinage des salines a fait abandonner l'ancienne: l'air est très mauvais dans la nouvelle. De *Cervia* nous allâmes à *Ravennes* qui conserve encore beaucoup de monumens de son ancienne magnificence. Nous y fûmes reçus par le R. P. *Maure Sartio* de l'ordre des Camaldules, dont il est aujourd'hui Abbé à *Rome*, connu par un grand nombre d'ouvrages, qui nous conduisit au célebre monastere de *Classé*; & par M. *François Cinnano*, jeune gentilhomme, grand amateur, qui nous accompagna sur des montagnes d'un accès également difficile & dangereux. De *Ravennes* nous nous rendîmes à *Comachio*, où nous séjournâmes plusieurs jours, mais avec moins de fruit que nous ne l'avions espéré. La situation de cette ville est telle, que dans un tems serein on découvre toutes les montagnes du Bolonois & de la Romagne, jusqu'aux forts de la ville *St Marin*. Les nuages nous déroberent en partie les avantages du poste, n'ayant vu ces objets éloignés qu'une seule fois, & pendant quelques momens.

A Ferrare ; 169. De *Comachio* nous allâmes à *Ferrare*, où nous reſtâmes huit jours. Nous fîmes des obſervations à pluſieurs repriſes ſur une haute tour de l'Egliſe principale avec le P. *Sivieri* Jéſuite, l'homme d'Italie qui poſſede le mieux la topographie du pays, & la ſcience de conduire les eaux. Comme le tems étoit toujours embrumé, les objets les plus éloignés ſe refuſoient à notre vue : le P. *Sivieri* y ſuppléa. Il avoit une collection abondante d'anciennes obſervations, ſur leſquelles il nous deſſina une carte comprenant le Ferrarois, le Bolonois d'en-deçà les monts, & les environs de *Ravennes*. Cette carte qu'il dédia au Pape Benoît XIV, & qu'il préſenta l'année derniere au Cardinal *Valenti*, nous a été d'un grand uſage : les lumieres que nous en avons tirées ont conſidérablement abregé notre travail.

A Boulogne. 170. Nous prîmes un peu à gauche pour faire quelques obſervations, en allant de *Ferrare* à *Boulogne*, où nous en fîmes pluſieurs, ſoit dans la fameuſe tour *Aſinelli*, ſoit dans notre maiſon de campagne de *Barbiano :* le ciel étoit cependant toujours fort embrumé. Nous nous trouvâmes dans cette ville au milieu d'une troupe de ſavans ; je ne nommerai que ceux dont j'avois déja l'honneur d'être connu, & qui en cette occaſion n'oublierent rien pour reſſerrer les nœuds de notre ancienne amitié. M. *François Zanotti*, Secrétaire de l'Inſtitut de *Boulogne*, dont j'ai l'honneur d'être membre depuis quelques années, nous en fit voir à loiſir toutes les riches collections, en particulier le cabinet d'hiſtoire naturelle. M. *Euſtache Zanotti* nous mit à portée d'examiner les inſtrumens aſtronomiques venus de *Londres*, & nous conduiſit à l'obſervatoire, où nous obſervâmes avec lui le ſolſtice. Le P. *Riccati* Jéſuite nous accompagna à la maiſon de campagne du college, d'où nous allâmes faire des obſervations ſur une haute montagne. Il nous mena enſuite en la compagnie de M. *Gabriel Manfredi*, voir le nouveau canal de *Boulogne*, dit *Benedettino*, où nous paſſâmes quelques jours ; & un bras du vieux *Pô*, ſur la droite, dans lequel ſe décharge le canal : nous parcourûmes au même tems toutes les campagnes voiſines, par ordre de M. le Cardinal *Doria*, alors Légat à *Boulogne*, qui nous ayant déja reçus à notre arrivée en cette ville, voulut

encore nous loger, & se transporta le dernier jour au lieu même où nous observions. Les bontés que Son Eminence m'a témoignées en particulier à *Boulogne*, & dont elle continue à m'honorer à *Rome*, & les obligations que je lui ai, ne me laissent point de termes pour exprimer ma reconnoissance & mon dévouement. 1752. Juin. Juillet.

171. Nous demeurâmes vingt jours tant à *Boulogne* que dans ce voyage qui nous fournit aussi quantité de relevemens. Nous nous étions proposé de faire une course dans les montagnes du Bolonois: c'étoit la partie de cette Province qui en avoit le plus besoin, tout le plat pays ayant déja été reconnu par les plus habiles Géometres de *Boulogne*, qui en avoient publié une carte à grands points: mais comme cette partie même ne renfermoit aucune ville ou bourg un peu considérable; qu'elle étoit déja décrite dans une nouvelle carte du Modenois; & qu'enfin nous étions pressés d'aller achever notre mesure trigonométrique, pour ne pas nous exposer une seconde fois aux brouillards, aux nuages & aux neiges, en laissant passer un tems favorable, nous jugeâmes à propos de revenir par la grande route de *Rome*, en nous arrêtant pour observer dans les villes & les gros bourgs qui s'y touchent de près, & en négligeant le pays montueux & les lieux peu habités, dont nous pouvions tirer la position des meilleures cartes. Nous montâmes donc par *Faenza*, *Imola* & *Forli* à *Bertinoro*, petite ville située dans un lieu élevé, d'où nous relevâmes quantité de points par un assez beau tems; car la vue s'étend de-là fort loin. Nous revînmes à *Cesene*, & ensuite à *Rimini*, où nous arrivâmes le 11 juillet (1). Retour à *Rimini* par *Bertinoro*.

172. Notre premier soin à notre arrivée fut de faire les préparatifs pour prendre la mesure de notre suite de triangles. J'avois déja écrit pour faire rétablir les signaux tombés ou ébranlés pendant l'hyver; & j'avois pris des précautions pour empêcher que les garnisons de *Scavolino* & de *Carpegne* venant à être relevées, on ne nous suscitât quelque nouvelle Préparatifs pour la mesure trigonométrique.

(1) Il y a dans le texte *le* 11 *mai*; c'est une faute d'impression. Voyez n°. 165.

difficulté. Nous découvrions le mont *Luro* de notre observatoire de *Rimini ;* nous commençâmes par observer le giſement de cette montagne, en meſurant l'angle qu'elle formoit avec le Soleil levant, pour en conclure la poſition de toute notre chaîne de triangles par rapport à la ligne méridienne. Cette obſervation fut faite le 21 juillet, mais dans un lieu fort incommode ; & indépendamment de ce qu'elle exigea pluſieurs réductions, je compte beaucoup plus ſur celle que nous avons faite depuis à loiſir dans le college romain avec ma pendule dont j'étois ſûr : car pour une opération de cette eſpece, le mouvement de l'horloge ne ſauroit être trop égal. Nous allâmes enſuite placer des ſignaux aux extrémités de notre baſe de *Rimini*, où j'ai dit que nous avions enterré de grands pilotis. Celui de l'*Auſa* ne ſe fit pas long-tems chercher ; il étoit tout près de l'embouchure : mais la violence des vents ayant applani pluſieurs monticules de ſable, nous fûmes pluſieurs heures ſans rencontrer le ſecond, quoique de pluſieurs reperes éloignés nous euſſions fait tracer des ſillons à trois pieds de diſtance du pieu : nous commencions à perdre l'eſpérance, lorſqu'un de nos ouvriers le trouva par hazard enfoui à une grande profondeur. Auſſi-tôt nous plaçâmes aux deux extrémités des ſignaux tout ſemblables à ceux de la baſe de *Rome*.

Phénomene ſingulier d'optique.

173. Les ſignaux poſés, nous y allâmes prendre nos angles : ce qui fut fait en très peu de tems à l'embouchure de l'*Auſa* ; mais nous fûmes arrêtés à l'autre extrémité par un phénomene très ſingulier. La diſtance des ſignaux n'étoit que de huit milles, & pour les rendre plus faciles à appercevoir, ils étoient élevés de plus de 20 palmes au-deſſus du ſol. Du premier ſignal nous avions très bien diſtingué le ſecond au point du jour : arrivés à celui-ci peu après midi, nous eûmes beau pointer la lunette ſur le premier, dont le lieu nous étoit parfaitement connu, car il répondoit à l'endroit du port de *Rimini* le plus proche du Lazaret ; nous ne pûmes le découvrir, quoiqu'il ne pût être caché par la courbure de la mer, dont la hauteur, dans un eſpace de huit milles, n'approche pas de 20 palmes nous ne découvrions que le toit de l'hôpital ; encore nous parut-il extrêmement rétreci : il en étoit de même des voiles des navires qui étoient dans le port, & dont pluſieurs

les avoient déployées; toutes nous parurent défigurées. Frappé de la nouveauté de ce ſpectacle, je dreſſai une échelle contre le ſignal, & ayant monté quelques échelons, je pointai la lunette, & je découvris la toile qui enveloppoit le ſignal de l'*Auſa;* mais ce n'étoit point par dégrés qu'elle s'élevoit de toute ſa largeur au-deſſus des eaux; je la découvris d'abord preſque entiere, premierement comme à travers un nuage tranſparent, enſuite beaucoup plus diſtinctement, mais ſi étroite, qu'elle ne faiſoit preſque qu'une ligne: à meſure que je montois elle paroiſſoit s'élargir, & reprenoit, ainſi que les maiſons & les voiles des navires, ſa forme naturelle. Nous ne nous laſſions point le P. *Maire* & moi de contempler ce phénomene, en nous élevant plus ou moins ſur l'échelle, & en hauſſant & baiſſant alternativement la tête: mais l'après midi s'avançant, il fallut ſonger à prendre nos angles; & pour nous mettre à portée de voir le ſignal éloigné, nous profitâmes d'un chariot qui ſe trouva fort à propos: nous le plaçâmes à l'endroit où nous voulions obſerver; nous y établîmes le quart de cercle; & y étant montés, nous découvrîmes très diſtinctement notre ſignal, & nous terminâmes toutes nos obſervations.

Autre phénomene ſemblable.

174. Tandis que nous venions de l'autre extrémité de la baſe, il s'étoit levé un vent de midi dont la mer étoit un peu agitée; & j'ai ſouvent remarqué, tant ſur le golfe de *Veniſe* que ſur la mer de Toſcane, que les vents de ſud & de ſud-eſt y donnoient occaſion à un phénomene qui paroît être du même genre que le précédent: les pointes des caps ou des iſles vues du bord de la mer, ou d'un endroit éloigné, tel que le rayon viſuel raſe la ſurface des flots, paroiſſent en l'air, comme ſuſpendus au-deſſus des eaux. Mais dès qu'on regarde d'un endroit plus élevé par un rayon plus oblique, le phénomene diſparoît, & on les voit dans leur état naturel. Les rayons qui partent de l'objet, & qui paſſent un peu au-deſſus de la ſurface d'une mer agitée, ſont détournés de côté, je ne ſais par quelle cauſe, de ſorte qu'ils reſſerrent l'image de l'objet, juſqu'à le rendre inviſible, à moins qu'il ne ſoit très grand, & la reſſerrent d'autant plus, qu'ils ſont plus près de la ſurface des eaux. Cela étant, on doit perdre abſolument de vue la pointe la plus haute d'un cap, tandis que ſes autres parties

1752. Juillet.

élevées doivent paroître rentrer les unes dans les autres, & être d'autant plus reſſerrées, qu'elles ſont plus hautes; enſorte qu'on ne voie plus que comme une pointe ſuſpendue au milieu des airs. Mais c'eſt ici un point fort difficile à expliquer, du moins à ce qu'il me paroît pour le préſent, & qui demanderoit une plus longue diſcuſſion, & un plus grand nombre d'expériences phyſiques, que je n'ai pu répéter dans un voyage fait à la hâte. Mais ſi j'ai occaſion dans la ſuite de paſſer quelque tems ſur une côte maritime, d'où l'on découvre ſur la mer quelques rochers & quelques promontoires, je reprendrai la matiere, & je l'examinerai plus à loiſir.

Autre phénomene d'optique.

175. En attendant, voici une autre remarque d'optique qui a rapport aux réfractions. Du lieu le plus élevé de notre college de *Rimini*, nous regardions avec la lunette une tour ſituée dans le port de *Peſaro*, & ſouvent elle nous paroiſſoit aſſez élevée au-deſſus de la mer: d'autres fois, quoique le ciel fût très ſerein, & l'horizon très net, & qu'il régnât un vent de nord, nous n'en découvrions pas le moindre veſtige: ce qui ne peut venir que de l'inégalité qui ſe trouve dans les réfractions horizontales. Au reſte, le phénomene dont j'ai parlé plus haut, n'a pu vicier les angles par leſquels nous avons lié cette baſe à notre chaîne de triangles, puiſque notre quart de cercle étoit placé à une hauteur d'où nous découvrions parfaitement le ſignal. Enfin nous prîmes alors aux deux extrémités de la baſe, & les deux jours ſuivans à *Rimini*, tous les angles qui étoient néceſſaires pour lier notre obſervatoire de *Rimini* à notre ſuite de triangles, ou au ſignal ſitué à l'embouchure de l'*Auſa*.

Obſervations ſur le mont *Luro*.

176. La meſure de ces angles terminée, nous partîmes de *Rimini* le 25 de juillet pour n'y plus revenir, & nous arrivâmes à *Granarola* chez M. *Annibal Olivieri*, dont nous avons parlé plus haut, & qui nous y attendoit. Le lendemain nous montâmes enſemble ſur le mont *Luro* avec notre grand quart de cercle, & nous y prîmes tous nos angles au pied d'un clocher. Nous n'oubliâmes pas ſurtout de lier au ſignal de l'*Auſa* la fenêtre de la maiſon de M. *Garampi*, d'où nous avions obſervé le lever du Soleil; & de crainte de nous y méprendre, nous avions fait ſuſpendre à cette fenêtre un drap blanc. Tandis

que

que nous faisions ces observations, il y eut un tremblement de terre assez considérable, qui renversa plusieurs édifices aux environs du mont *Nerone:* mais entierement occupés de notre ouvrage, nous ne nous en apperçûmes point.

Voyage à *Penna* par *St Marin.*

177. De retour à *Granarola*, nous passâmes trois jours chez M. *Olivieri*, pendant lesquels nous fîmes plusieurs excursions dans le voisinage pour la réformation de la carte. Ayant ensuite envoyé notre grand quart de cercle en un lieu voisin du mont de *Carpegne*, nous prîmes notre route par *St Marin*, où nous fîmes pour la troisieme fois, & par un beau tems, un grand nombre d'observations géographiques, & nous nous rendîmes à *Penna*. Aux environs de *St Marin* nous avons eu l'honneur de rendre nos devoirs à Mgr *Bonajuti*, Evêque de *Montfeltro*, qui, l'année précédente, nous avoit reçus chez lui à *Penna:* par un excès d'attentions, il voulut se charger du soin de faire transporter le quart de cercle au sommet du mont de *Carpegne*, & de nous faire préparer un hospice au pied de cette montagne: il s'y trouva lui-même au jour marqué, & monta deux fois avec nous sur la montagne, où il assista à toutes nos observations: de-là il nous conduisit à *Macerata*, petite ville aux extrémités de son diocese, & qu'il ne faut pas confondre avec une autre ville de même nom dans la Marche d'Ancone. On sent mieux que je ne pourrois l'exprimer, les obligations que nous avons à cet illustre Prélat.

Phénomene suprenant.

178. En allant de *St Marin* à *Penna*, nous passâmes à *San Leo*, où l'on voit un fort ou citadelle d'une situation admirable, à la cime d'un rocher escarpé: elle étoit autrefois aux Ducs d'*Urbin*, & fait aujourd'hui partie de l'Etat de l'Eglise. Il y a long-tems que cette ville dispute à *Penna* la primatie & le siege de l'épiscopat; mais c'est presque toujours en cette derniere ville que les Evêques résident aujourd'hui. Nous eûmes l'honneur de diner chez M. le Commandant de la citadelle, de l'ancienne famille *Semproni* d'*Urbin*, de qui nous apprîmes un fait qui mérite attention. Assez près de la citadelle est une petite maison de paysans, située dans un fond; des vieillards très dignes de foi, racontent que dans leur enfance l'ombre d'un des angles du fort atteignoit à midi, dans l'un des solstices, le seuil de la porte de cette maison, & qu'avec le tems

elle s'en étoit écartée peu à peu, jusques-là que l'ombre d'un autre angle, fort éloigné du premier, parvenoit presqu'au même point, dans le même tems de l'année: ce qui ne peut être arrivé que par un changement de position, ou dans le sol de la maison, ou dans la roche sur laquelle est bâtie la citadelle. Ce n'est pas le seul fait de ce genre dont nous ayons eu connoissance; il y en a des exemples en plus d'un endroit: souvent des personnes nous ont assuré qu'on découvre aujourd'hui, & d'un assez grand espace de terrein, d'autres lieux qui, de leur vivant, ou du vivant de leurs peres, étoient couverts par une colline, quoiqu'il y ait sur cette colline des édifices: ce qui fait voir que le phénomene ne doit point s'attribuer à un éboulement des terres causé par le labourage & par les pluies. La terre s'éleve en certains endroits; en d'autres elle s'affaisse peu à peu: c'est un fait connu, que l'on a vu quelquefois naître tout à coup des montagnes dans des plaines, & des isles sur la mer; des couches de pierre ayant été soulevées par des feux souterreins: tant le lieu de notre séjour ressemble à notre vie! dans l'un comme dans l'autre, rien de fixe ni de permanent.

1752. Août.

Observations sur le mont *Carpegne*. Notre route jusqu'à *Cantiano*.

179. Après avoir fait nos observations dans cette ville, nous allâmes à *Penna*, puis à *Scavolino*, & au sommet du mont de *Carpegue*, où notre hôte obligeant, M. *Garampi*, qui nous y suivit le lendemain avec M. l'Evêque, assista deux fois à nos observations; car elles ne purent être terminées le premier jour. De-là prenant la route de notre station du mont *Catria*, nous passâmes par *Macerata* pour aller à *Urbanea*; mais comme nous eûmes occasion en chemin de faire un grand nombre d'observations, nous fûmes surpris par la nuit, & nous n'arrivâmes qu'à grande peine à une chapelle célebre en ce canton, sous le nom de *Crucifix de Bataille*, & desservie par des Prêtres séculiers chez qui nous passâmes la nuit. Le lendemain de grand matin nous nous rendîmas à *Urbanea*. Après y avoir observé, j'eus encore assez de jour pour faire une excursion à *San Angelo in vado*, qui n'en est pas fort éloigné. Le jour suivant nous arrivâmes par *Cagli* à *Cantiano*, même chemin qui nous y avoit déja conduits l'année précédente.

180. Nous montâmes le lendemain au sommet du *Catria*:

le ciel étoit beau & ſerein, & nous ne pouvions deſirer un tems plus favorable : mais nous eûmes beau chercher avec la lunette le ſignal de *Pennino*, ſitué près *Nocera*, nos recherches n'aboutirent qu'à nous convaincre qu'il n'y en avoit point, quoique j'euſſe écrit deux fois un mois auparavant au Maire de *Nocera* pour le faire rétablir. Il fallut donc s'en revenir ſans avoir pu finir cette tâche, & dépêcher ſur le champ un nouvel exprès au Maire pour le faire ſouvenir de ſa promeſſe. Nous n'en fûmes pas quittes pour attendre ; le tems changea, & le rétabliſſement du ſignal ne nous rendit pas les beaux jours que nous avions perdus. Enfin ce ſignal réparé, nous remontâmes ſur la montagne ; nous y achevâmes de prendre nos angles, non ſans beaucoup de peine ; après quoi nous y fûmes aſſaillis d'une pluie qui nous accompagna encore à notre retour.

Station du mont *Catria*.

181. Nous partîmes de *Cantiano* le 12 d'août pour *Perouſe*. Nous vîmes en paſſant les fameuſes tables de *Gubio*. Nous fixâmes la poſition de ce lieu du haut d'une montagne voiſine. De *Perouſe* nous nous rendimes à *Antignolla*, village du domaine des *Oddi*, ſitué au pied du *Teſio :* nous y étions invités par les Seigneurs du lieu, qui y attendoient leur parent M. le Cardinal *Oddi*, Evêque de *Viterbe*, lequel y devoit venir paſſer les vacances d'automne. Il avoit déja plu en abondance pendant pluſieurs jours : nous profitâmes d'un tems équivoque pour monter au ſommet de la montagne, où le quart de cercle, par une pente roide & difficile, ne put arriver auſſi-tôt que nous. En attendant nous obſervions avec le petit quart de cercle, lorſque tout à coup le ciel ſe couvrit de nuages ; le tonnerre & les éclairs furent bientôt ſuivis d'une pluie affreuſe qui dura pluſieurs heures : nous les paſſâmes dans une cabane où nous ne pouvions nous tenir de bout. La pluie étant devenue moins forte, nous montions à cheval pour nous en retourner, lorſque nous nous apperçûmes d'un accident qui, ſans les précautions que nous avions priſes, eût anéanti dans un moment tout le fruit de nos travaux paſſés.

Voyage à *Perouſe* & ſur le mont *Téſio*.

182. Nous avions un cahier contenant un recueil de toutes nos obſervations faites pendant deux ans, dans leſquelles nous avions déja corrigé toutes les erreurs provenantes de la diviſion

Recueil d'obſervations perdu.

du petit quart de cercle: nous le conſervions précieuſement, ſans jamais le porter ſur les montagnes: malheureuſement nous l'avions pris ce jour-là avec nous pour comparer nos nouvelles obſervations à celles de l'année précédente: il échappa ſans doute dans le trouble où nous mit le commencement de l'orage. Dès qu'on s'en fut apperçu, je me mis à parcourir malgré la pluie tout le ſommet de la montagne avec beaucoup de ſoin, mais inutilement. Le lendemain j'y menai une troupe de payſans pris à gages: je les rangeai par ordre, comme pour faire une battue, & nous reconnûmes ſurtout les endroits où le cahier avoit été ouvert: mais quoique le ſommet de la montagne ne ſoit couvert que d'une herbe fort courte, nous ne pûmes rien trouver. Les gardes que nous y envoyâmes enſuite de *Perouſe*, avec une autre eſcorte de payſans, ne furent pas plus heureux, malgré l'appas d'une grande récompenſe promiſe. Nous ne le cherchions avec tant de ſoin que pour n'être pas obligés de remettre en ordre, & de réduire de nouveau nos obſervations: ce qui devoit couter beaucoup de travail: mais ce ſoin même que nous prenions fit juger de la perte que nous avions faite, & le bruit s'en répandit au loin: quelques-uns même crurent & publierent partout, que nos obſervations étoient perdues ſans reſſource.

Cette perte eſt réparée.

183. Mais le mal n'étoit pas ſans remede: j'avois toutes les obſervations qui concernoient la meſure du dégré, tant dans les tablettes où elles avoient été écrites au tems même de l'obſervation, que dans une copie où elles avoient été miſes en ordre, parfaitement conforme en ce point à l'autre cahier, tiré de la même ſource. A l'égard des obſervations géographiques, qui étoient en bien plus grand nombre, je les conſervois avec ſoin dans ces mêmes tablettes, où elles avoient été d'abord écrites, & d'où on les avoit tranſportées dans le cahier perdu: j'avois avec moi celles du voyage que nous faiſions alors; les autres étoient reſtées à *Rome*: le P. *Maire* les avoit auſſi pour la plupart dans ſon porte-feuille; & la perte ſe réduiſit preſqu'uniquement à un très petit nombre d'obſervations de peu de conſéquence, auxquelles nous ſuppléâmes par d'autres obſervations de diverſes perſonnes, plus encore par celles que nous fîmes nous-mêmes. Je ſuis entré dans ce détail pour qu'on

ne s'imaginât pas que nous eussions eu assez peu de précaution pour confier à un recueil portatif unique le travail de plusieurs années, au risque de nous voir obligés de tout recommencer. Du reste nous terminâmes un autre jour, & par un tems plus favorable, cette laborieuse station; & dès que nous fûmes de retour à *Perouse*, on transcrivit de nouveau tout ce qui avoit rapport à la mesure du dégré: les autres observations furent aussi en peu de tems réduites & mises en ordre dans un nouveau journal.

184. On nous avoit écrit de *Nocera* que le signal de *Penino* avoit été rétabli préciſément à la même place, où il avoit été construit l'année précédente. Pour nous assurer de ce fait, nous ne jugeâmes pas nécessaire de retourner à *Nocera:* par les dernieres observations du mont *Tesio*, nous venions de voir ce signal dans la même position; & il étoit aisé de nous en assurer davantage par une seconde direction, en répétant l'observation sur le *Fionchi*. Ce fut surtout par cette raison que nous nous déterminâmes à retourner à *Spolete*. Nous observâmes sur la route en divers lieux, surtout à *Spello* & à *Foligno:* & nous ne fûmes pas moins heureux sur le *Fionchi*, où nos observations se trouverent conformes à celles de l'année précédente. De-là nous envoyâmes notre quart de cercle à *Soriano*, bien résolus de n'y plus observer sur les arbres, mais sur un terrein solide; pour cela, de faire abattre tous les arbres qui nous déroberoient la vue de nos signaux, & de garder pour signal celui des trois qu'on avoit laissé sur pied. Nous fîmes encore plusieurs courses dans la vallée de *Spolete*, & sur les collines voisines pour la correction de la carte, accompagnés de MM. *Antoine Ancajani*, & *J. B. Pianciani*, mon illustre ami; après quoi nous allâmes de *Spolete* à *Soriano* par le même chemin que nous avions suivi l'année précédente en allant de *Soriano* à *Spolete*.

Station sur le *Fionchi*.

185. Arrivés au sommet de la montagne, nous fîmes un abattis comme pour ouvrir une grande route du côté qui regarde la montagne de *Spolete:* nous reconnûmes alors que le signal de *Fionchi* se projectoit sur d'autres montagnes, ainsi que le dôme de *St Pierre* sur le sol; & il nous fallut monter plusieurs fois sur le sommet du *Soriano*, avant que de les pouvoir

Septembre.

Station sur le *Soriano*.

découvrir distinctement, d'autant plus que nous étions déja au mois de septembre, tems où l'on fait des feux dans toute la campagne de *Rome* pour brûler le chaume & les mauvaises herbes, & que les fumées obscurcissent toute l'atmosphere. Enfin la bise s'étant levée le 14 septembre, nous terminâmes nos observations; & le lendemain nous arrivâmes à *Ronciglione*, & de-là par le grand chemin à *Rome*, d'où nous étions partis six mois auparavant.

Retour à *Rome*.

Répétition de quelques observations.

186. Il nous restoit à répéter les observations que les trois arbres du *Soriano* avoient rendues douteuses l'année précédente, particulierement sur le *Genarro*, & dans lesquelles on ne pouvoit plus être exposé à aucune mépriſe depuis qu'on n'avoit laissé qu'un seul arbre pour signal. Nous avions ensuite à parcourir la terre de *Sabine*, le territoire de *Norcia*, & les montagnes voisines, pour descendre de-là dans la Marche d'*Ancone*. Nous devions y ajouter la carte du petit pays qui est entre *Perouse* & la grande route de *Rome* à *Florence*, & qui se trouve sur la frontiere de Toscane. Mais comme nous avions eu peine à découvrir du *Genarro* le signal de *Frattochie*, qui terminoit la base de *Rome*, ce qui rendoit cette observation fort incertaine; nous commençâmes par faire placer aux deux extrémités de la base les mêmes signaux que l'année précédente, & nous répétâmes de part & d'autre les observations pour les rendre plus sûres.

Voyage dans la terre de *Sabine*.

187. Cela fait, nous allâmes pour la troisieme fois à *Palombara*; & après avoir répété par un beau tems nos observations sur le *Genarro*, nous renvoyâmes le grand quart de cercle à *Rome*, & nous commençâmes à parcourir la terre de *Sabine*. Un de nos premiers postes fut le mont *Pennecchia*, voisin du *Genarro*, d'où nous passâmes à *Monte Flavio*, c'est un village de la maison *Borgheſe*, situé sur une hauteur; puis à *Scandriglia*, à *Fara* qui domine les environs de *Farfa*, & qui est situé sur une haute colline, & de là nous passâmes à *Poggio Mirteto*, l'une des principales villes de cette province. Après avoir observé dans tous ces lieux, & les autres de notre passage, nous dirigeâmes notre route à travers les montagnes pour aller à *Rieti*. Nous nous arrêtâmes plusieurs heures à mi-côte dans un hermitage abandonné: c'étoit un lieu des plus

propres aux obſervations à raiſon de ſa hauteur. Nous demeurâmes deux jours à *Rieti*, pendant leſquels nous fîmes quelques excurſions dans le voiſinage: après quoi nous entrâmes dans une délicieuſe vallée, pour aller voir les caſcades du *Velino*, où cette riviere, après avoir coulé tranquillement le long du vallon, ſe précipite de fort haut dans le *Nar*, à trois milles ou environ de *Terni*. De-là nous paſſâmes à un bourg nommé *Pie di Lugo*, ſitué au bout de la vallée de *Rieti*, & ſur le bord d'un lac très profond, auquel il donne ſon nom. Nous montâmes enſuite au village de *Morro*, d'où nous nous engageâmes dans des montagnes infeſtées par les ours, & arrivâmes de nuit à *Leoneſſa* ſur les frontieres du royaume de *Naples*. Le lendemain nous revînmes à *Monte Leone* dans l'Etat de l'Egliſe.

Suite. Affreuſe ſituation de *Viſſo*.

188. Nous deſtinâmes cette journée à viſiter le ſommet d'une montagne voiſine, d'où la vue s'étend dans les vallées de l'Apennin, & dans tout le pays en-deçà de ce mont: ce projet nous réuſſit heureuſement, & nous obſervâmes juſqu'à la nuit. Le jour ſuivant nous allâmes à *Coſcia* & à *Norcia*, qui ont été plus d'une fois renverſées par des tremblemens de terre. De *Norcia* nous fîmes pluſieurs excurſions, & particulierement ſur une haute montagne, d'où nous déterminâmes la poſition de la ville, & nous parcourûmes enſuite tout ſon territoire. Au ſortir de-là nous paſſâmes par pluſieurs petites villes & villages, du nombre deſquels eſt le *Preci*, dont les habitans ſont renommés pour quelques opérations chirurgicales, & en particulier pour celle de la taille; & nous arrivâmes à *Viſſo*, ville opulente, mais dont la ſituation affreuſe l'eſt encore moins que le chemin qui y conduit. Cette ville eſt comme au fond d'un entonnoir: la montagne qui l'entoure de toutes parts, eſt ſillonnée en zigzag de cinq ravines très étroites, & auſſi profondes que la montagne eſt haute: ce ſont comme autant de rayons dont la ville eſt le centre, & qui la font reſſembler à une étoile d'une monſtrueuſe groſſeur; les trois premiers ſervent de lit à autant de rivieres qui ne tariſſent jamais; le quatrieme à un torrent: ces quatre courans ſe réuniſſent dans le vallon reſſerré où eſt bâtie la ville, & de-là coule le *Nar* par le cinquieme rayon: le lit de cette

riviere eſt étroit; ſes bords ſont un rocher taillé à pic; quelquefois même ils ſe rapprochent par le haut; & ſous l'un de ces côtés inclinés eſt un chemin taillé en partie dans le roc, où l'on ne peut entrer ſans être ſaiſi d'horreur. Il ne faut pas demander s'il y a de la vue dans cette ville: de quelque côté qu'on ſe tourne, on ne voit qu'une montagne eſcarpée; car pour les cinq rayons anguleux dont je viens de parler, on les perd bientôt de vue dans la deſcente; & en élevant la tête on ne découvre que la partie du ciel, voiſine du zénith.

Tentative inutile ſur une très haute montagne.

189. Ce n'étoit pas le lieu de faire des obſervations géographiques; il fallut pour cela recourir aux montagnes voiſines: celles qu'on nomme *des Sibilles* n'étoient qu'à quelques milles de *Viſſo*: elles forment une chaîne élevée, ſur laquelle pluſieurs pointes s'élevent encore davantage, & qui domine le pays de la Marche d'*Ancone*: le *Mont-rond* qui fait partie de cette chaîne, eſt un peu moins élevé que les pointes; on ne laiſſe pas de découvrir de-là l'Etat de l'Egliſe, preſque dans toute ſon étendue, juſqu'aux confins de la Toſcane, & ſur la droite toute la Marche d'*Ancone*. Nous mîmes au moins ſix heures à monter, quoiqu'à cheval, par un chemin fort incommode; & nous avions un ciel extrêmement pur, ſans le moindre ſouffle d'air: arrivés au ſommet, nous tirons le petit quart de cercle de ſon étui, & nous meſurons des yeux *Camerine*, les villes d'alentour, & celles de la Marche d'*Ancome*: nous étions prêts à relever tous ces points, lorſque nous nous trouvâmes tout à coup plongés dans un brouillard qui occupoit tout le ſommet de la montagne, & qui ſe convertit bientôt en une nuée noire. Jamais accident pareil ne m'a mortifié ſi ſenſiblement: un poſte ſi avantageux, & qui nous avoit tant couté à franchir, nous étoit enlevé au moment même où nous croyons en profiter. Nous eûmes aſſez de conſtance, ou pour mieux dire d'obſtination, pour reſter trois heures au milieu de cette nue, expoſés à un vent impétueux; le Soleil qui dardoit ſes rayons un peu au-deſſous de nous, & qui éclairoit les flancs de la montagne, nous donnoit quelque lueur d'eſpérance; mais la nue encore plus opiniâtre la fit enfin évanouir: cependant le jour baiſſoit, & il fallut ſonger à la retraite. A peine étions nous deſcendus un

peu

peu au-dessous du sommet de la montagne, que le Soleil reparut, & nous découvrit, tant que la vue pouvoit s'étendre, tout le pays situé à l'occident, mais en pure perte, ne pouvant plus le lier avec les objets de l'orient & du nord.

On est contraint de lui en substituer une autre.

190. Comme la nuit approchoit & que nous espérions de pouvoir monter le lendemain au sommet de la montagne, nous nous détournâmes un peu de notre route pour aller à l'église de Notre-Dame de *Macereto*, à laquelle on a beaucoup de dévotion dans le pays. Les Prêtres qui desservent cette église nous firent grand accueil; leur maison est ample & commode; nous y passâmes la nuit. Dès qu'il fut jour, le sommet de toutes ces montagnes parut tout couvert de neige, & enveloppé d'épais nuages: ce qui nous obligea de renoncer à notre projet, & de retourner à *Visso*, d'où nous montâmes le lendemain avec beaucoup de peine sur une assez haute montagne qui est du côté opposé. Nous avions pris avec nous un homme du pays pour nous indiquer les lieux voisins; & n'ayant pu lui trouver à tems un cheval, je lui cédai le mien: je montai à pied pendant trois heures, & j'arrivai au sommet trempé de sueur, dans le même état qu'un homme qui sort du bain. Ce n'étoit pas là mon coup d'essai: un jour que nous devions monter sur le *Genarro*, ma mule de louage s'étoit échappée pendant la nuit: en attendant qu'elle se retrouvât, je me mis en chemin avant le point du jour pour arriver au sommet vers le lever du Soleil: j'en ai usé de même en plusieurs autres rencontres; & je puis me rendre le témoignage de n'avoir jamais laissé échapper une occasion favorable d'observer, dans la vue de m'épargner quelque incommodité.

Haute vallée. Hyver de *Castelluccio*.

191. De-là nous déterminâmes de notre mieux la position de *Visso*; d'où nous partîmes le lendemain de grand matin. Nous entrâmes dans une large vallée qui ressemble à une plaine, & dont le sol est plus élevé que le sommet de plusieurs montagnes. Le tems étoit serein; mais nous avions à notre gauche les montagnes de la Sibille, sur lesquelles il tomboit de la neige, que les vents, malgré la distance, portoient jusqu'à nous. Nous allions à *Arquata*, ville autrefois riche & peuplée, en prenant notre route par un petit village qu'on nomme le *Castelluccio*, dont la plupart des habitans

1752. Octobre.

paſſent l'hyver à la maniere des Lapons, comme on nous en aſſura dans l'endroit même. Pendant cette ſaiſon, les hommes en état de voyager conduiſent à *Rome* des chevaux chargés de charbon, préparé dans les forêts voiſines; ils vivent de ce commerce; tandis que les vieillards, femmes & enfans reſtent enſevelis dans leurs maiſons ſous la neige pendant pluſieurs jours, & quelquefois des mois entiers, ſans pouvoir mettre le pied dehors, & ſans autre boiſſon que de l'eau de neige fondue au feu : pour cela ils amaſſent une grande quantité de bois pendant l'automne, & font proviſion de farine pour tout l'hyver.

Danger dans une gorge de montagne.

192. Au bout de la vallée dont je viens de parler, nous tombâmes dans une gorge fort étroite, par laquelle on deſcend de la montagne de la Sibille dans la Marche d'*Ancone* : la petiteſſe du détroit augmentoit la force du vent, au point que les nuages portés par le vent contre le flanc de la montagne, s'élevoient en ſe briſant comme des vagues, & ſembloient jetter de l'écume; enſorte que nos chevaux avoient beaucoup de peine à avancer. On nous apprit que ce paſſage eſt ſouvent impraticable, & qu'il eſt arrivé plus d'une fois que des voyageurs, enlevés avec leurs chevaux par un vent impétueux, ont été jettés fort loin, & écraſés contre les rochers. Arrivés au côté oppoſé de la montagne, nous découvrîmes une grande partie de Marche d'*Ancone*, & la petite ville même d'*Arquata* reſſerrée ſur les bords du *Tronto*, & dans un fond extrêmement bas: car la côte, qui s'éleve peu à peu, & comme par dégrés, de la vallée du *Tibre* à celles de *Terni*, de *Rieti*, de *Norcia*, & à celle de *Viſſo* dont nous venons de parler, finit tout d'un coup en ce lieu, où elle eſt coupée preſque verticalement ſur la rive du *Tronto*. De ce point de vue *Arquata* offre le même aſpect qu'une petite place vue de la fenêtre d'un étage très élevé. Le ſpectacle du ciel couvert de nuages noirs, qui s'étendoient juſqu'à la mer, inſpiroit de l'horreur. La nuit étoit fermée quand nous tombâmes dans la ville: je dis que nous tombâmes, car la pente étoit ſi rapide, que nos chevaux, en roidiſſant les jambes, gliſſoient par leur propre poids, comme ſur un plan incliné. Alors nous fûmes accueillis d'une pluie horrible; &, ce que je n'avois vu nulle part, elle tomba

pendant trois jours & trois nuits ſans interruption; de ſorte que les terres furent toutes détrempées dans tout ce canton, & dans la province d'*Aſcoli*, & qu'en partant d'*Arquata*, nous fûmes obligés pendant les deux premiers jours de notre marche de prendre de grands détours pour éviter les embarras du chemin, cauſés par l'éboulement des terres qui le bordoient, & les boues encore fraîches dont on avoit fait de grands monceaux d'eſpace en eſpace.

Voyage dans la Marche d'*Ancone*. Obſervations de phyſique.

193. Le vent de nord s'éleva ſubitement le quatrieme jour, & nettoya tout l'horizon: nous vîmes alors la montagne entierement couverte de neige; ainſi après avoir fixé la poſition de ce lieu, nous ſuivîmes le cours du *Tronto*, à travers quantité de villages & de bourgs, juſqu'à l'endroit où les chemins n'étoient plus praticables. La riviere étoit extraordinairement enflée, & il y avoit long-tems que ſon pont étoit tombé en ruine. Nous couchâmes à trois milles d'*Aſcoli*, ne pouvant ni avancer, ni paſſer la riviere. Le lendemain nous quittâmes le grand chemin, qui de-là juſqu'à la ville eſt aſſez large, & même, en d'autres tems, commode pour les voitures; mais qui rompu alors, n'étoit pas même bon pour des gens de pied. Nous prîmes des chemins de traverſe, par les montagnes, & nous ne pûmes arriver à *Aſcoli* que ſur le midi. L'après dinée nous allâmes obſerver à la citadelle, & le lendemain ſur le mont *Poleſio*, qui tire ſon nom d'un bourg adjacent, & d'où l'on découvre preſque toute la Marche d'*Ancone:* le tems étoit beau, & nous le mîmes à profit en faiſant un très grand nombre d'obſervations. J'examinai en montant, & enſuite ſur le ſommet, la ſtructure de cette montagne, qui, bien que fort éloignée de la mer, étant adoſſée à l'Apennin, eſt toute compoſée de cailloux ronds & plats, polis par le frottement, que l'on nomme *galets*, tels qu'on en trouve au bord de la mer, & dans les lits des rivieres. Ces pierres étoient fort inégales pour la groſſeur, & elles formoient différentes couches paralleles à la ſurface de la montagne: de ſorte que je n'ai aucun doute que des feux ſouterreins n'aient fait ſortir cette montagne de la mer, ou plutôt du lit de quelque riviere, car je n'y trouvai point de coquillages; & je crois que telle eſt l'origine de pluſieurs montagnes & de pluſieurs iſles.

Structure des montagnes.

194. Je remarquerai à cette occaſion, qu'en obſervant les montagnes, partout je les ai trouvées d'une ſtructure admirable : ce qui n'eſt jamais plus ſenſible que dans les endroits où elles ſont traverſées & minées de longue main par le cours des rivieres. J'ai vu au-deſſous de *Magliano*, ville conſidérable de la terre de Sabine, un banc continu, formé d'un amas prodigieux d'écailles d'huitres : mais c'eſt la ſeule fois que j'aie trouvé des corps marins, ou autres indices de mer, dans un lieu éminent fort éloigné des côtes. La plupart des montagnes ſont compoſées de couches de pierres, entre leſquelles il y a ſouvent des couches de terre de différente épaiſſeur, & à intervalles inégaux. Ces couches ſuivent en pluſieurs endroits la courbure de la montagne ; mais ſouvent auſſi elles s'élevent, & ſont plus ou moins inclinées ſur ſa ſurface : ce qui indique que le reſte de la couche, dont elles faiſoient partie, s'eſt écroulé par quelque accident. Souvent encore on voit deux couches appuyées l'une contre l'autre par une de leurs extrémités, comme les deux faces d'un coin : elles ſemblent s'être prêté un mutuel ſecours dans leur chute. On trouve quelquefois des montagnes compoſées de rochers auſſi différens pour la figure que pour la groſſeur, & où l'on ne découvre aucune régularité dans la direction des couches. Dans la vallée de *Sublaque*, ſur la route de *Tivoli*, on voit à gauche quantité de groſſes pointes de montagne, de figure conique, les unes couchées au pied des autres, en telle ſorte qu'il eſt aiſé de voir de quel côté elles ſont tombées. C'eſt ce qu'on reconnoît ſurtout au-deſſous de la chapelle de *Mentorella*, & de maniere à ne laiſſer aucun doute. J'ai remarqué ſur le mont *Soriano*, ce que je n'ai vu nulle part ailleurs, qu'il ne s'y trouve aucune couche réguliere, aucun banc de roche : ce n'eſt qu'un amas confus de groſſes pierres ſaillantes, irrégulierement arrondies, dont la plupart ont dix à douze pieds de diametre : les habitants de *Soriano* en font voir une qui eſt tellement en équilibre, qu'en montant deſſus on l'ébranle par le moindre mouvement du corps, & on lui communique une ſorte de tremblement. Tout cela me porteroit à croire que le lac voiſin, déſigné par ces mots de Virgile, *& cimini cum monte lacus*, étoit autrefois un volcan,

dans le sein duquel ces masses de pierre se sont arrondies par de longs frottemens; qu'elles ont ensuite été lancées au dehors, dans le tems des explosions, & se sont accumulées en cet endroit. Quoi qu'il en soit, plus je considérois la surface de notre globle, plus je découvrois de vestiges d'un bouleversement immense, & comme un amas de ruines, au lieu de sa tissure primordiale. Je reprends la suite de nos opérations.

Voyage à *Montalte* & autres lieux.

195. Nous descendîmes de l'autre côté de la montagne, & nous arrivâmes sur le soir à *Montalte*, patrie de Sixte V, où l'on voit encore plusieurs édifices commencés, par lesquels ce grand Pape s'efforçoit de faire une ville d'un petit bourg: mais une mort prématurée l'ayant enlevé, la ville est aujourd'hui presque déserte, & le Commandant & l'Evêque n'ont à peu près pour toute compagnie que des paysans. Nous y fîmes nos observations le lendemain matin, après lesquelles nous nous rendîmes à travers plusieurs petites villes & bourgs à *Cupra Montana*, aujourd'hui *Ripa Transone*, où nous fûmes accueillis gracieusement par M *Recchi*, Evêque de cette ville, personnage célebre par son érudition en tout genre, ci-devant Prépose à la bibliotheque impériale, ainsi nommée à cause qu'elle a été fondée par le Cardinal *Impériali*: il nous procura une carte de la Marche d'*Ancone*, non encore publiée, & dessinée autrefois par un habitant de cette ville: elle est plus exacte qu'aucune des cartes gravées que nous ayons pu voir, quoique nos observations nous aient fait connoître qu'elle avoit besoin de plusieurs corrections. Le jour suivant nous côtoyâmes de loin le golfe de *Venise*: nous arrivâmes le soir à la petite ville de *Monte Robiano*, & le lendemain à *Fermo*, où il y a beaucoup d'ancienne noblesse, une Académie publique, & un riche archevêché. Nous y fîmes aussi-tôt, ainsi que dans tous les lieux de notre passage, nos observations géographiques; & le jour suivant nous passâmes par *San Elpidio* & *Civita nuova*, deux villes opulentes & peuplées, dont la derniere est du domaine de la maison *Cesarini*. Nous arrivâmes sur le soir près de *Monte Santo* à la maison de campagne des *Bonacorsi*, où toute la famille se trouvoit alors rassemblée; maison dont la beauté & la magnificence répondent à l'opulence des maîtres: on y voit quantité de

ſtatues de marbre, d'allées & de berceaux de charmilles, de jets d'eau, de fontaines, dont les unes ſont à découvert & coulent continuellement, & d'autres ſemblent être placées en embuſcade pour tendre des pieges aux ſpectateurs curieux. Après avoir ſatisfait pendant quelque tems notre curioſité, nous nous retirâmes à notre college de *Monte Santo*, où nous n'arrivâmes qu'à nuit cloſe.

Voyage à *Lorette*, *Oſimo*, &c.

196. Le lendemain matin nous montâmes ſur une haute tour, d'où nous découvrîmes la montagne de *St Marin* près de *Rimini*. Le tems étoit très beau, & pendant tout notre voyage dans la Marche d'*Ancone* il n'a point ceſſé de nous être favorable. Ces obſervations finies, nous arrivâmes à *Lorette* & de là à la montagne d'*Ancone*, où, après avoir paſſé la nuit dans le monaſtere des Camaldules, nous montâmes à la pointe du jour au ſommet, où nous relevâmes quantité de points, & des plus importans. Nous découvrions la chaîne de l'Apennin, particulierement le *Catria* avec ſon ſignal. Quant à la montagne de *Nocera*, dont le ſignal trop négligemment conſtruit, étoit tombé peu après pour la troiſieme fois, nous ne pûmes le reconnoître: mais au point du jour nous découvrions très diſtinctement, même à la vue ſimple, les montagnes d'au-delà du golfe. Nous deſcendîmes & nous arrivâmes avant midi à *Oſimo*, où, tandis que nous obſervions dans un clocher, nous entendîmes la groſſe artillerie de la citadelle d'*Ancone*, à l'arrivée de M. Jean *Lambertini*, petit neveu de Sa Sainteté, jeune Prince de la plus grande eſpérance, qui ſe rendoit à *Rome* pour la premiere fois. La fumée du canon nous donna lieu de déterminer la poſition de cette citadelle, dont une montagne interpoſée nous déroboit la vue. Nous arrivâmes le même jour, quoique très tard, à *Macerata*, où nous avions déja obſervé deux fois à loiſir: nous en partîmes le lendemain à la premiere pointe du jour, & nous arrivâmes par *Tolentino* à *San Gineſio* ſur une hauteur, ville autrefois très célebre, aujourd'hui preſque déſerte. Après y avoir pris nos relevemens, le ſoir à notre arrivée, & le lendemain matin, nous rebrouſſâmes chemin, & nous revînmes par *Tolentin* à *Montemelone*, village placé ſur une éminence, où, ayant été retenus de force par M. le

Marquis *Ricci*, qui avec sa famille & quelques amis, y étoit venu prendre l'air de la campagne, nous observâmes à loisir ce jour-là & le jour suivant. De-là nous nous rendîmes avant la nuit dans une ville beaucoup plus peuplée, appellée *Montecchio :* le poste étoit des plus avantageux ; nous profitâmes du peu de jour qui nous restoit pour y observer ; & bien nous en prit, car dès le lendemain il recommença à pleuvoir à verse ; & il plut si long-tems, que nous n'eussions pu faire aucune observation en ce lieu.

Projet de séparation.

197. Cest-là le terme des voyages que j'ai faits avec le P. *Maire :* il étoit tems d'aller reprendre ma classe de mathématique, pour laquelle on avoit été obligé de me donner successivement deux Suppléans, les deux années précédentes : le P. *Maire* étoit plus libre. Il fut donc résolu qu'après un petit détour, pour fixer la position de *San Severino*, qui nous étoit absolument inconnue, j'irois prende la grande route pour m'en retourner à *Rome* par le plus court chemin, tandis que le P. Maire parcourroit le reste de la Marche d'*Ancone*, le long des montagnes, & passeroit ensuite l'*Apennin* pour revenir à *Rome* par cette petite contrée, voisine de la Toscane, dont nous n'avions encore pu lever la carte. Nous étions alors au 2 de novembre, & nous espérions que l'ouvrage pourroit être terminé dans le courant du mois.

1752. Novembre.

Retour de l'Auteur à *Rome.*

198. Notre espérance fut encore trompée par une suite constante de mauvais tems, à laquelle il n'y avoit eu aucun lieu de s'attendre. La pluie me reconduisit de *Montecchio* à *San Severino*, où je profitai de quelques momens favorables pour observer de dessus une hauteur : je m'étois à peine remis en route par des chemins de montagnes, qu'il recommença à pleuvoir, & il plut à verse jusqu'à la nuit. Je n'étois pas à un mille de *Camerino*, & je ne pus le découvrir : enveloppé de brouillards épais, je voyois à peine à 20 pas. Comme j'étois déja tout percé, je crus que je ne risquois plus rien de continuer ma route, & j'arrivai enfin par un chemin peu connu, & fort mauvais, surtout dans la saison où nous étions alors, sur la grande route, près de *Seravalle*, bourg connu de tous les voyageurs ; d'où je me rendis promptement à *Rome* pour y reprendre mes fonctions interrompues.

199. Le P. *Maire*, ſouvent contrarié par le mauvais tems, employa tout le mois de novembre & les premiers jours de décembre à exécuter une partie de ce qu'il avoit projetté; & n'eſpérant plus de pouvoir finir, il renvoya le reſte à une ſaiſon plus commode. Je joins ici la relation qu'il a donnée lui-même de ſon travail.

Le P. *Maire* continue les obſervations géographiques.

» 200. J'arrivai (c'eſt le P. *Maire* qui parle) de *Montecchio* » à *Cingoli*, & je logeai chez M. *Raffaeli*, qui étoit pour » lors à ſa maiſon de campagne de *Staffolo*, où il me fit auſſi » l'honneur de m'inviter. Après deux jours paſſés à *Cingoli*, » preſqu'en pure perte, je revins à *Staffolo*, où le tems s'étant » remis au beau, j'eus lieu d'être ſatisfait de mes obſervations. » De-là je me rendis à *Fabriano*, où je prolongeai mon ſé- » jour juſqu'à ce que le tems, qui étoit fort variable, m'eût » permis de déterminer la poſition de cette ville, & celle de » *Mantelica*. Enſuite je ſuivis le cours de l'*Eſino* juſqu'à *Jeſi*, » par un chemin qui ne le cede en rien aux plus belles routes » de *Rome*: un brouillard épais ne me laiſſa qu'un moment » pour obſerver. Le lendemain matin j'allai à *Monte Rado*, » métairie du college germanique. L'obſervation fut encore » très courte à *Corinaldo*, par la même raiſon, & le tems fut » ſi obſcur pendant ſix jours, qu'il me fut impoſſible de rien » faire: enfin le ſeptieme jour j'allai relever quelques points » à *Mondolfo*; & comme la ſaiſon étoit avancée, car nous » touchions déja à la fin de novembre, je laiſſai *Mondavio*, » où j'avois d'abord projetté de faire une ſtation, & j'allai » droit à *Pergola*. Je déterminai un jour la poſition de *Saſſo* » *Ferrato*, un autre jour celle de *Fenigli*, château ruiné ſur » une hauteur: de celle-ci dépendoit la poſition même de » *Pergola*. De-là je me rendis à *Foſſombrone*, puis à *Mon-* » *talte* qui n'en eſt éloignée que de trois milles: j'y relevai un » grand nombre de points, qu'un vent impétueux & un froid » piquant me firent acheter chérement. J'allai enſuite au » commencement de décembre à *Cantiano*, où je fus retenu » deux jours par une neige abondante qui m'avoit déja ac- » compagné pendant tout ce voyage; & ce ne fut pas ſans » péril que j'arrivai le troiſieme jour à *Gualdo*, d'où je revins » en droiture à *Rome*.

1752. Décembre.

» 201.

» 201. Il reſtoit à fixer la poſition de pluſieurs villes, entre 1753.
» autres de *Todi*, *Orviette*, *Citta della Pieve*, & *Camerino*. Mai.
» Ainſi au mois de mai de l'année ſuivante 1753, je me rendis Nouvelle excurſion pour finir les obſervations.
» à *Fiano*, & après en avoir déterminé la ſituation, j'attendis
» une occaſion pour monter ſur le mont *Soracte*, aujourd'hui
» *Sant Oreſte :* elle ſe préſenta deux jours après, & tandis
» que j'y étois à obſerver, il s'éleva un orage qui m'obligea
» à paſſer la nuit dans une maiſon de Bernardins, bâtie ſur
» cette montagne. Le lendemain, après avoir terminé cette
» ſtation, je revins à *Fiano*, d'où je paſſai à *Viterbe* & de-
» là à *Orviette*. Après avoir déterminé la poſition de cette
» ville, qui, bien que ſituée ſur une roche, eſt preſque ca-
» chée dans un fond, je me propoſai de faire deux excurſions,
» l'une à *Bagnarea* & ſur les bords du Tibre; l'autre en ſui-
» vant preſque le cours du *Paglia*, à *Acquapendente*, juſqu'à
» *Proceno ;* d'où je revins par *Bolſena* à *Orviette*. J'avois re-
» mis à en faire une troiſieme ſur le mont *Peglia* en reve-
» nant à *Todi :* ce qui n'a point été effectué. D'*Orviette* je
» me rendis à *Citta della Pieve*, & de-là ſur le mont *Cetona*,
» où un brouillard m'enleva preſque tout le fruit de mon tra-
» vail. Je ne fus pas plus heureux au mont *Pratolenze*, d'où
» je ne pus relever que deux ou trois points voiſins, par l'i-
» gnorance du prétendu Pratique du pays, qui s'étoit fait
» fort de me les indiquer tous, & qui ne put m'en nommer
» davantage. Ces obſervations faites, je paſſai par *Perouſe* &
» je m'avançai juſqu'à *Citta di Caſtello*, & à *Apecchio* pour
» monter de-là ſur le *Nerone*, & en placer les environs ſur
» la carte. Nous étions alors au mois de juin. Parvenu au Juin.
» ſommet de la montagne par un chemin très rude, je me trou-
» vai tout à coup inveſti d'un brouillard épais: bientôt il fut
» ſuivi d'une forte pluie: je la ſupportai pendant trois heures,
» après leſquelles, voyant qu'elle ne ceſſoit point, je n'eus
» d'autre parti à prendre que de m'en retourner à *Apecchio*. Le
» lendemain le tems ne ſe rétabliſſant point, je revins à *Citta*
» *di Caſtello*, enſuite à *Perouſe*. Ma ſanté ſe trouvoit alors un
» peu altérée: ce qui fit que je ne montai point ſur le *Peglia*,
» ſuivant mon premier projet, & que j'allai en droiture à *Todi*.
» Je relevai quelques points aux environs de cette ville, en

» laissant ceux qui étoient au-delà du *Tibre*, étant pressé de » me rendre à *Camerino:* j'y fus gracieusement accueilli par » M. le Marquis *Bandini*, & j'y restai quelques jours pour » lever avec lui la carte des environs. Enfin comme il restoit » encore quelques points à déterminer dans la terre de *Sabine*, » je passai par *Terni* & *Rieti*, d'où je revins à Rome» Ici finit la relation du P. *Maire*.

1752. Novembre. Observations astronomiques.

202. Pendant le premier voyage du P. *Maire*, je montai le secteur qu'on avoit rapporté de *Rimini* à *Rome*; & les pluies ayant un peu relâché sur la fin de novembre, je commençai à répéter les observations de nos deux étoiles, pour confirmer de plus en plus celles de l'année précédente; & le P. *Maire* arrivant sur ces entrefaites, les continua avec moi. Un grand nombre d'observations parfaitement d'accord entre elles, & réduites à la même époque, nous donna à peine une seconde de différence pour le lieu de l'une de nos étoiles, comparé à celui de l'année précédente, & deux secondes pour celui de l'autre étoile; ce qui confirme admirablement la théorie de l'aberration annuelle de la lumiere, découverte par M. *Bradley:* car dans l'intervalle du tems écoulé entre les premieres & les dernieres observations, l'une de nos étoiles devoit se rapprocher, l'autre s'éloigner considérablement du pôle; & il fut prouvé par nos observations qu'il en étoit arrivé ainsi. Nous nous en sommes tenus aux observations de l'année précédente, parcequ'ayant été faites à un moindre intervalle de tems, elles sont moins sujettes aux erreurs qu'on peut commettre dans la réduction des variations apparentes des étoiles fixes: mais si nous nous servions des dernieres, ou que nous prissions un milieu, à peine trouveroit-on aucune différence dans la mesure du dégré.

1753. Juin. Observations au dôme de St Pierre. Position du polygone.

203. Pendant l'Eté de 1753, le P. *Maire* étant de retour de son second voyage, comme nous pouvions désormais disposer de notre tems, nous choisîmes un des plus beaux jours pour monter avec le grand quart de cercle sur le dôme de *St Pierre*, & lier ce dôme au mausolée de *Metella* & à la montagne de *Soriano*. Nous prîmes les angles nécessaires, & de plus l'angle formé par deux lignes tirées du dôme aux extrémités de la plate-forme du college romain, qui a près de

500 palmes (1) de longueur, & que nous mesurâmes depuis à la toise, en prenant ensuite à ses deux extrémités les angles que cette base forme avec le dôme; ce qui nous a donné moyen de lier à la suite de nos grands triangles le dôme, la plate-forme, & le lieu de nos observations astronomiques. Il ne restoit plus que l'observation par laquelle nous devions déterminer la position des côtés de nos triangles, par rapport à la méridienne, d'une façon plus sûre & plus commode que nous ne l'avions pu faire à *Rimini*: c'est ce que nous exécutâmes à *Rome* au mois de septembre de cette année 1753, en mesurant l'angle que formoit l'arbre de *Soriano*, que nous découvrions de notre plate-forme entre deux grands palais, avec le Soleil couchant qui se trouvoit alors dans une position favorable: & nous répétâmes cette observation jusqu'à trois fois, toujours avec un parfait accord. Nous avions déja fait quelques tentatives pour mesurer l'angle entre le sommet du *Genarro* qu'on découvre aussi de la plate forme, & le Soleil levant; mais outre qu'il n'y avoit plus de signal sur le *Genarro*, le sommet de cette montagne ne forme qu'un angle de quelques dégrés avec le Soleil levant, au solstice d'Eté; & pendant tout le reste de l'année le Soleil se leve derriere le mont *Quirinal*: ainsi le plan du quart de cercle étoit tellement incliné, que nous ne pouvions commodément pointer à la fois les deux lunettes au Soleil levant, & au sommet du *Genarro*. Enfin l'angle étant fort aigu, la plus petite différence de réfraction (dans la hauteur du Soleil) en auroit produit une fort considérable dans la réduction de cet angle à l'horizon. Toutes ces raisons nous obligerent à préférer l'angle entre le Soleil couchant & l'arbre de *Soriano*, qui subsiste encore, & qui subsistera, comme je l'espere, bien des années.

Septembre.

204. Toutes nos observations terminées, nous employâmes beaucoup de tems à vérifier les divisions du secteur & du quart de cercle, par diverses méthodes que j'expliquerai au quatrieme livre, jusqu'à ce que l'accord de plusieurs tentatives ne nous laissât plus aucun doute sur les corrections que nous devions faire: & après que toutes les observations eurent

Grandeur du dégré.

(1) Ou 57 toises 2 pieds.

été corrigées & réduites par de longs calculs, également pénibles & rebutans, nous pûmes enfin déterminer avec certitude la mesure du dégré. L'intervalle compris entre les paralleles qui passent par nos observatoires de *Rome* & de *Rimini*, c'est-à-dire par le milieu de la salle du Musæum du college romain, & l'endroit de la maison de M. *Garampi* où nous nous étions établis à *Rimini*; cet intervalle, dis-je, calculé sur la base de *Rimini*, est de 161253.6 pas, ou de 123221.3 toises. Or par les premieres observations faites à *Rome* de l'étoile α du cigne, nous avons trouvé l'amplitude de l'arc intercepté de 2 d. 9′ 46″ $\frac{1}{10}$; par les premieres de μ de la grande ourse 2 d. 9′ 47″.4; par les dernieres de α du cigne 2 d. 9′ 48″.8; de μ de l'ourse 2 d. 9′ 46″: le milieu entre les premieres, est 2 d. 9′ 46″.7; entre les dernieres 2 d. 9′ 47″.4; entre toutes les observations 2 d. 9′ 47″: l'accord ne pouvoit être plus grand. Prenant donc un milieu entre toutes les observations, le dégré moyen se trouve de 56966.3 toises. Mais parceque la base de *Rome* est plus grande d'environ un pas par la mesure actuelle que par le calcul; parceque le dernier côté de nos triangles, réduit à l'horizon, a été trouvé d'environ trois toises plus long par une méthode différente de celle par laquelle la suite entiere y a été réduite; enfin parceque les premieres observations de *Rome* sont les plus sûres, ayant précédé de très peu celles de *Rimini*, & que celles de α du cigne sont plus sûres que celles de μ de l'ourse; nous avons ajouté au dégré près de 13 toises: ce qui le fait monter à 56979 toises pour une latitude de 42 d. 59 min., ou environ 43 d.

Ce dégré comparé à celui de France.

205. Par-là nous avons rempli le premier objet de notre mission, qui étoit de déterminer exactement la longueur d'un dégré du méridien dans l'Etat de l'église: dégré qu'il faut ensuite comparer avec ceux que les Académiciens de *Paris* ont mesurés en divers lieux de la terre, comme je l'ai fait à la fin du Chapitre I, & comme je le ferai encore dans le cinquieme livre, surtout avec celui de M. *Cassini*, mesuré en France par la latitude de 43 d. $\frac{1}{2}$, qui est de 57048 toises, c'est-à-dire de 69 toises plus grand que le nôtre (1), malgré

(1) Voyez la note du n°. 75.

l'addition que nous y avons faite de 13 toiſes, qui étoit tout ce que nous pouvions y ajouter, au lieu que n'étant plus éloigné que le nôtre de l'équateur que d'un demi-dégré, il n'auroit dû être que de 8 toiſes plus long.

Cauſe de leur différence.

206. Ce n'eſt pas là l'unique fruit que nous ayons retiré de notre travail; car il s'enſuit en premier lieu, que tous les méridiens ne ſe reſſemblent point, c'eſt-à-dire qu'à égale diſtance de l'équateur, leur courbure eſt inégale, & que cette inégalité même, pour une différence de dix dégrés ſeulement en longitude, qui ſe trouve entre les méridiens de *Paris* & de *Rome*, eſt aſſez conſidérable: c'eſt un fait dont on n'avoit point encore de preuve avant notre meſure. De plus, comme il eſt très probable que cette différence de courbure a été produite par l'action de l'Apennin ſur le fil à plomb du ſecteur, comme auſſi par celle de tout le ſol de l'Italie qui va en s'élevant depuis la mer juſqu'aux montagnes, & par une action ſemblable, mais en ſens contraire, des monts pyrénées ſur le fil à plomb du ſecteur de M. *Caſſini*, action qui change la direction des graves, & la poſition de la ſurface de l'équilibre; il s'enſuit en ſecond lieu que notre meſure confirme de nouveau la théorie de *Newton* ſur la gravitation mutuelle des corps terreſtres.

Hauteur du pôle à *Rome*.

207. Ajoutons que nous avons déterminé à *Rome* la hauteur du pôle avec plus de préciſion & de certitude qu'on ne l'avoit encore fait, par la comparaiſon de nos obſervations, ſurtout de celles de β d'*auriga*, avec celles de la même étoile faites à *Paris*. Nous avons trouvé pour la hauteur du pôle dans le muſæum du college romain 41 d. 53 min. 55 ſec., & aux thermes de Dioclétien, 41 d. 54 min. 10 ſec., c'eſt-à-dire 17 ſec. de moins que n'avoit trouvé M. *Bianchini*.

Théorie de *Bradley* confirmée.

208. Ajoutons encore que nos obſervations confirment admirablement la théorie de l'aberration de la lumiere: car elles font connoître, à une ou deux ſecondes près, la quantité dont une de nos étoiles s'eſt approchée, l'autre éloignée du pôle, depuis le mois de mars 1751 juſqu'au mois de décembre 1752; & cette quantité étoit aſſez conſidérable: de ſorte qu'en appliquant aux premieres & aux dernieres obſervations la correction qui réſulte de cette théorie, & en prenant un milieu,

on ne trouvera pour l'amplitude de l'arc céleſte, déterminé par ces obſervations, qu'une différence d'une fraction de ſeconde ; & les deux étoiles donneront encore les mêmes réſultats ; au lieu que ſi on négligeoit cette réduction, une étoile donneroit 20 ſecondes de plus que l'autre pour l'amplitude de l'arc. Mais cette théorie même étoit déja prouvée par tant d'autres obſervations, qu'elle n'avoit pas beſoin de cette nouvelle confirmation.

Inſtrumens perfectionnés.

209. Ajoutons enfin qu'à l'occaſion de cette meſure, on a imaginé quelque choſe de nouveau pour la conſtruction & la rectification des inſtrumens: c'eſt ce que j'expliquerai dans le quatrieme livre; & j'eſpere que ce morceau ne déplaira pas aux Aſtronomes, & ſera de quelque utilité.

Correction de la carte.

210. Je paſſe ſous ſilence pluſieurs autres avantages que nous avons retirés de la meſure du dégré, premier objet de notre voyage. A l'égard du ſecond, on a une nouvelle carte des Etats du Pape, beaucoup plus correcte que toutes celles qui ont paru juſqu'à ce jour. Le P. Maire en parlera plus au long dans le troiſieme livre, & donnera en même tems une table des longitudes & latitudes de toutes les villes & autres lieux principaux, dans leſquelles il n'y a pas à craindre qu'il s'y trouve une minute d'erreur. Cette table eſt le principal fruit que nous ayons retiré de cette partie comme acceſſoire de notre entrepriſe: nous étions chargés uniquement de rectifier la carte géographique de l'Etat de l'égliſe, non de faire une carte topographique de chaque Province, où l'on pût reconnoître toutes les ſinuoſités des chemins & du cours des rivieres, ou des torrens; la poſition exacte de toutes les montagnes, & des petits bourgs cachés au fond des vallées, & juſqu'aux plans des villes: détails qui ſont du reſſort des Arpenteurs, & qui exigeroient un travail de pluſieurs années. C'eſt ce qu'ont fait les villes de *Perouſe*, de *Boulogne* & de *Camerine*, qui n'ont épargné ni tems, ni ſoins, ni dépenſe pour faire la topographie de leur pays. Si leur exemple étoit ſuivi, on pourroit tirer de ces cartes particulieres des Provinces, ou des territoires de chaque ville, les détails qui manquent encore à notre carte, en rempliſſant les intervalles de ce grand nombre de points dont nous avons fixé la poſition avec la plus grande

exactitude par des instrumens d'un plus long rayon, & corriger même ces détails intermédiaires par nos propres observations : car la méthode dont se sert le commun des Arpenteurs, peut bien suffire pour donner une description exacte d'un petit terrein ; leur science pour l'ordinaire ne va pas plus loin ; & dès qu'il est question de tout un pays, les erreurs s'accumulent & deviennent trop sensibles pour qu'on puisse les négliger : mais pourvu que les Arpenteurs nous tracent des plans particuliers, à leur maniere, on pourra toujours s'en servir pour remplir les vuides de la carte générale, & en former une collection assez exacte de cartes topographiques.

Même sujet.

211. En attendant, pour donner à la carte que nous publions avec cet ouvrage, toute l'exactitude dont elle étoit susceptible, & suppléer de notre mieux aux observations que nous n'avons pas faites nous-mêmes, nous avons comparé soigneusement tout ce que nous avons pu rassembler de plans & de cartes particulieres, comme le P. *Maire* l'exposera dans le troisieme livre. De plus, pendant ces deux dernieres années que le P. *Maire* a consacrées à d'immenses calculs, ainsi qu'à la construction & au dessein de la carte, nous avons écrit de tous côtés, pour avoir des observations aisées à faire, dans certains endroits que nous avons désignés, propres à fixer, par les points que nous avions déterminés, la position des lieux circonvoisins. Il suffit pour cela de porter dans un lieu élevé un ais, qu'on nomme *planchette*, sur laquelle on étend une feuille de papier : on pose cette planchette à peu près de niveau : on y applique ensuite une regle, le long de laquelle on vise successivement aux villages d'alentour, comme on viseroit avec un fusil : ces différentes positions de la regle sont marquées par autant de lignes qui partent toutes d'un même point, & sur chacune desquelles on écrit le nom & la distance estimée du village, dont cette ligne désigne la position. S'il y a quelque village qu'on ne puisse découvrir de ce lieu, il suffit, pourvu qu'il soit proche, de diriger la regle par estime à peu près vers cet endroit. En comparant entre elles plusieurs observations de cette espece, on en tire la position des lieux qu'on marque sur la carte générale sans aucune erreur sensible ; car il n'arrivera guere que l'erreur puisse aller à un mille, & l'on

voit bien qu'un mille n'occupe guere d'eſpace ſur la carte d'une Province, même à grand point.

Ce qui manque encore à ſa perfection.

212. Nous avons reçu de divers lieux un grand nombre d'obſervations; mais il y a d'autres endroits, comme la petite ville de *Caſcia* entourée de montagnes, & les villages des environs, dont nous n'avons rien pu tirer, quoique j'aie écrit à pluſieurs perſonnes, particulierement au Maire de cette ville: la choſe du monde la plus ſimple & la plus facile leur paroiſſoit hériſſée de difficultés. Nous n'avons pas été mieux ſervis en pluſieurs endroits de la Romagne & du Bolonois, ſitués dans les montagnes, & dans le Duché d'*Urbin* qui en eſt tout couvert. Mais à l'égard de ce Duché, nous en aurons bientôt une topographie exacte, graces aux ſoins & à la libéralité de M. le Cardinal *Stoppani*, Légat d'*Urbin*, qui appelle actuellement auprès de lui le P. *Maire* pour la lever ſur les lieux (1). La poſition de *Cagli* ſera déterminée en même tems avec plus de préciſion que nous n'avons encore pu le faire, cette ville étant enſevelie dans les montagnes, quoique les obſervations que nous avons faites aux environs, & la proximité de *Cantiano*, dont la diſtance à *Cagli* eſt aſſez connue, nous donnent lieu de croire que nous n'avons commis à cet égard aucune erreur tant ſoit peu ſenſible.

Erreurs des anciennes cartes.

213. Un autre avantage conſidérable que nous avons retiré de cette ſeconde partie de notre travail, a été de corriger les erreurs des anciennes cartes: celles même du célebre & ſavant *Bianchini* n'en ſont pas exemptes; ſes inſtrumens n'étoient pas d'un auſſi grand rayon que les nôtres, & il n'avoit pas, comme nous, des ſignaux ſur les montagnes. Il a du moins le mérite d'avoir fait une premiere correction au méridien de *Rome*, qui en avoit grand beſoin; car ſur les anciennes cartes, ce méridien, prolongé ſeulement juſqu'au golfe de *Veniſe*, s'écarte déja de la vraie direction de plus de 60 milles à l'orient; & c'eſt ſur les obſervations de M. *Bianchini* que M. *Euſtache Manfredi* rendit cette direction très approchante de la véritable, dans la carte qu'il a publiée

(1) En effet, le P. *Maire* a donné en 1757 une nouvelle carte de la légation d'*Urbin*.

avec

avec une collection posthume de ces mêmes observations. Si on se donne la peine de lire attentivement les notes que M. *Manfredi* a ajoutées sur les observations de M. *Bianchini*, on nous trouvera excusables de nous être quelquefois écartés du sentiment de ce grand homme.

214. Je ne dois pas oublier d'avertir que malgré le soin que nous avons pris de désigner tous les villages par leur vrai nom, nous ne pouvons nous répondre d'y avoir toujours réussi. Dès le commencement de notre expédition, M. le Cardinal *Valenti* fit écrire en italien à tous les Evêques, au nom de Sa Sainteté, d'envoyer à *Rome* une liste exacte de tous les lieux de leur diocese: les uns ont envoyé ces noms en italien, d'autres en latin; mais par la négligence de ceux à qui ils en avoient confié le soin, nous avons trouvé plusieurs de ces noms défigurés, & tels que les prononce le vulgaire. La même chose nous est arrivée; car lorsque dans les villes de notre passage nous nous informions des noms des villages voisins, on leur en donnoit de différens, & diversement corrompus. Il ne peut donc se faire qu'il ne se trouve dans notre carte quelques fautes de cette nature; mais je ne puis croire qu'il y en ait beaucoup; & je me flatte que pourvu qu'on puisse reconnoître sur la carte les divers lieux, & leur véritable position, on excusera volontiers quelques défauts d'orthographe dans les noms.

Erreurs à craindre sur les noms des lieux.

215. A l'égard de l'ancienne géographie, nous n'avons pas cru devoir nous y attacher: car les ruines des anciens édifices sont pour la plupart couvertes de bois, & tellement répandues sur le sol, qu'il n'est pas aisé de les découvrir du haut d'une tour ou d'une montagne, & d'en fixer la position. Une pareille entreprise, au lieu d'un voyage aussi rapide que le nôtre, exigeroit plusieurs années de travail, de longues recherches, & une étude profonde des anciens Auteurs.

De la géographie ancienne.

Fin du Livre I.

LIVRE SECOND.

Mesure d'un dégré du Méridien entre Rome & Rimini, depuis le XLII dégré & demi jusqu'au XLIII & demi.

INTRODUCTION.

Sentimens divers sur la mesure du dégré;

1. AVANT l'usage des télescopes & des lunettes d'approche, qui ne furent inventés que dans le dernier siecle, tous les Astronomes, tant anciens que modernes, s'étoient servis à peu près des mêmes instrumens: il est étonnant qu'avec cela ils se soient si peu accordés sur la mesure du dégré. Au tems d'*Aristote* ils lui donnoient 1111 stades; *Eratosthènes* le réduisit à 700, *Possidonius* à 666, & *Ptolomée* à 650 (1). Le sentiment de *Ptolomée* fut suivi, quelques siecles après, par les Arabes; ceux-ci assignerent au dégré terrestre la valeur d'environ 57000 de leurs pas: ce qui ne paroît pas s'éloigner beaucoup de 650 stades. Mais comme la valeur des pas & des stades nous est peu connue, & qu'elle a pu être fort différente, suivant les tems & les lieux, il n'est pas hors de vraisemblance qu'on ne pût rapprocher beaucoup des sentimens qui semblent d'abord si différens. Il est même à présumer que si les anciens Géometres ne nous ont rien laissé de précis sur cette matiere, c'est moins pour avoir pensé diversement, que pour n'avoir point assigné de mesure fixe.

(1) Voyez *Mém. de l'Acad.* 1702, pag. 19.

Causes de cette diversité ;

2. Je ne prétends pas donner à entendre par-là que tous les anciens se soient parfaitement rencontrés dans leurs opinions : on ne peut s'empêcher d'y reconnoître quelque différence, quoiqu'elle ne soit pas si grande à beaucoup près, que les nombres ci-dessus semblent d'abord l'indiquer ; & cette diversité d'opinions peut venir non seulement de la différence de leurs instrumens, mais bien plus encore de celle de leurs méthodes. *Riccioli*, cet observateur si exact, commit au siecle passé une erreur considérable dans la détermination du dégré, pour avoir cru faussement que la méthode dont il se servoit n'étoit point sujette aux erreurs de la réfraction. Avec combien plus de fondement pourrons-nous imputer les mêmes erreurs à d'anciens Géometres, qui n'avoient pas même l'idée de réfraction ? C'est en particulier le cas où se trouve *Eratosthènes*, comme on en peut juger par ses écrits : il a fait le dégré trop grand, pour avoir négligé la réfraction, qui affectoit sa méthode, & la rendoit peu sûre. Car toute l'exactitude possible ne sert de rien, dès qu'on péche par le défaut de méthode, en omettant un principe capable de la rectifier, & qui en fait un des premiers élémens.

Comment on les a détruites en grande partie.

3. Quoi qu'il en soit, car on peut dire beaucoup de choses pour & contre sur cet article, ce qu'il y a de certain, c'est que les tentatives qui ont précédé immédiatement l'invention des lunettes, ou du moins leur application aux instrumens de géométrie, tentatives dans lesquelles on a employé des mesures géodésiques parfaitement connues, & nullement viciées par les réfractions, n'ont pas donné à beaucoup près les mêmes différences. Car *Fernel* & *Norvood*, le premier en France, le second en Angleterre, ont fort approché de la juste valeur du dégré ; & *Snellius* hollandois, qui a vécu entre l'un & l'autre, s'en seroit peut-être moins écarté, si, comme l'a remarqué M. *Muschenbroeck*, il n'avoit été trompé par la ressemblance de deux tours vues de loin : erreur bien excusable, même dans un Géometre. Concluons que si avant la mesure de M. *Picart*, il n'y a rien eu de certain touchant la grandeur de notre globe, cela vient en partie de ce qu'on a employé des mesures trop incertaines, en partie de ce qu'on ne connoissoit pas assez les réfractions ; puisqu'il n'est pas douteux

qu'en renonçant même à faire usage des lunettes, pourvu qu'on réduisît à l'horizon les angles d'un polygone, dont le premier angle fût opposé à une base exactement connue par une mesure actuelle, on pourroit à peine se tromper de trois cents pas, jamais de quatre cents, sur la mesure du dégré.

Difficulté de déterminer la figure de la Terre;

4. Mais on avoit besoin d'une mesure bien plus précise pour éclaircir le doute que quelques expériences du pendule avoient fait naître sur la figure de la terre; & il est arrivé heureusement que dans le tems même qu'on commençoit à agiter cette question, on s'est trouvé avoir en main des instrumens propres à la résoudre. Ce n'étoit pas tout néanmoins; les loix de la réfraction n'étoient point encore assez exactement connues, & l'on n'avoit pas d'ailleurs le moindre soupçon sur l'aberration annuelle des étoiles fixes; deux articles dont l'omission eût exposé à de grandes erreurs. A l'égard du premier, du moment qu'on a trouvé le secret d'appliquer des lunettes au quart de cercle, il est aisé de déterminer les loix de la réfraction. Le second étoit d'une toute autre difficulté: on découvroit bien, au moyen de la lunette, quelques mouvemens apparens dans les étoiles fixes; mais ces mouvemens mêmes étoient si différens entre eux, & si prodigieusement variés d'une étoile à l'autre, que le problême paroissoit insoluble. Cependant il n'étoit pas possible, avant qu'on l'eût résolu, de trouver la différence de latitude de deux lieux, à moins que deux observateurs, placés dans ces lieux différens, n'observassent en même tems la même étoile (1). Il n'est donc pas surprenant que les premieres tentatives n'aient abouti qu'à déterminer d'une maniere fort approchée la mesure du dégré, & qu'elles n'aient que très peu, ou plutôt qu'elles n'aient point servi à faire connoître l'augmentation ou la diminution des dégrés, d'où dépend la détermination de la figure de la Terre.

Sa solution.

5. Afin donc qu'il ne manquât aucun des préparatifs né-

(1) Et c'est aussi ce qu'ont fait au Pérou MM. de la *Condamine* & *Bouguer*, voyez *Fig. de la Terre & Mes. des 3. dég. du Méridien* 1749 & 1750, & ce qui prouve que la solution de ce problême n'étoit point nécessaire à la mesure du dégré, quoiqu'on ne puisse disconvenir qu'elle ne lui soit utile, pour les raisons qu'on verra au Liv. IV, n°. 156.

ceſſaires, il falloit commencer par réſoudre cet important problême, & aſſigner la cauſe de ces mouvemens annuels des fixes, ſi différens les uns des autres, & en apparence ſi bizarres. L'ingénieux *Bradley* en vint heureuſement à bout: ce fameux Aſtronome avoit fait, avec un excellent inſtrument, un très grand nombre d'obſervations, qui furent pour lui la matiere des méditations les plus profondes: à force de réfléchir, il découvrit enfin que ce phénomene, qui depuis ſi long-tems mettoit à la torture l'eſprit de tous les Mathématiciens, étoit une ſuite naturelle de la propagation de la lumiere. Ce ſeul mot diſſipe toute l'obſcurité répandue ſur le problême: c'eſt comme le fil qui dirige nos pas dans les détours de ce labyrinthe. On peut aujourd'hui prédire avec certitude, & pour quelque tems que ce ſoit, le point du ciel où doit paroître une étoile. On a fait depuis quantité d'obſervations, qui toutes confirment cette heureuſe découverte; & l'on n'a jamais vu plus de conformité entre les obſervations & la théorie. Pour revenir à la meſure du dégré, deux compagnies d'Académiciens envoyés par S. M. T. C. au Pérou & en Laponie, ont déterminé avec des fatigues incroyables, mais avec une entiere préciſion, l'inégalité des dégrés du méridien. Il ſuit des obſervations qu'ils ont faites à l'équateur, au cercle polaire, & en France même, que ces dégrés vont toujours en augmentant de l'équateur au pôle. Mais tous les méridiens ſe reſſemblent-ils? ou, ce qui revient au même, la Terre a-t-elle une égale courbure à égales diſtances de l'équateur? C'eſt ce qu'on n'avoit point encore examiné; & Sa Sainteté le Pape Benoît XIV a voulu que, puiſqu'on avoit enfin toutes les connoiſſances préalablement requiſes pour cet examen, on en fît la premiere épreuve dans ſes Etats. Ce deſſein, digne d'un Pontife amateur des Lettres & des beaux Arts, lui avoit été ſuggéré par ſon Miniſtre M. le Cardinal *Valenti*, dont il ſeroit inutile de vanter le zele pour les ſciences, déja ſi connu de tous les Savans. Mais de quelle maniere a-t-on procédé à cet examen? C'eſt ce qui va faire la matiere des articles ſuivans.

ARTICLE PREMIER.

Deſcription des Inſtrumens.

Un ſecteur & un quart de cercle ſont les principaux inſtrumens qui nous aient ſervi dans notre meſure. Le quart de cercle avoit trois pieds (romains) de rayon (1); le ſecteur en avoit neuf, avec un limbe de la longueur d'un pied. Je vais donner une courte deſcription de ces inſtrumens.

Du quart de cercle.

1. Notre quart de cercle n'a point été conſtruit par un Artiſte de profeſſion : (les Artiſtes ſont peu communs à *Rome ;*) mais par M. *Ruffo*, Prêtre de *Verone*, abſolument neuf à manier des inſtrumens d'aſtronomie, mais d'une dextérité admirable dans tous les ouvrages de méchanique. Le point principal étoit de planer le limbe, & de le poſer dans le plan de la platine du centre : il y réuſſit au mieux : il ne fut pas moins exact dans la diviſion du limbe; car après un examen de pluſieurs jours, nous trouvâmes qu'il ne manquoit à notre quart de cercle que 22 ſec. pour parfaire les 90 d.; les autres erreurs alloient rarement à 30 ſec., jamais à une minute. Ce n'étoit pas mal réuſſir pour un coup d'eſſai. Les minutes étoient marquées de dix en dix, ſur le bord du limbe; & on avoit achevé la diviſion à l'ordinaire par des tranſverſales, & des cercles concentriques. Ces cercles concentriques, au nombre de onze, n'étoient point placés à égale diſtance les uns des autres; mais leur diſtance alloit en diminuant proportionnellement vers le centre, & cette diſtance étoit aſſez grande pour que dans l'eſtimation des angles il nous ſoit à peine arrivé de différer l'un de l'autre de cinq ſecondes.

De ſon pied.

2. A l'égard du pied du quart de cercle, de la facilité que nous avions à le mouvoir en tout ſens, de l'alidade, & de la lunette mobile; comme cela ſe trouve à peu près dans tous les quarts de cercle, il ſeroit inutile de nous y arrêter. Quant à la lunette fixe, je me contente de remarquer qu'on y avoit

(1) Le pied romain eſt au pied de Paris ou pied de Roi, comme 2971 à 3240, ou de 11 pouces 0,0444 lignes du pied de Paris.

mis deux objectifs, un à chaque extrémité ; au moyen de quoi il suffisoit de transporter l'oculaire d'une extrémité du tube à l'autre, pour découvrir deux objets diamétralement opposés : il arrivoit de-là, qu'ayant ajusté le fil mobile du micrometre sur le fil fixe placé à l'autre extrémité du tube, ce qui se faisoit sans peine en retournant l'instrument, nous pouvions vérifier le quart de cercle de la même maniere que s'il y avoit eu de simples pinnules. Car les fils ainsi disposés, on pointe sur le même objet, en visant tantôt par le limbe, tantôt par le centre : on remarque les points du limbe auxquels répond le fil à plomb, dans ces deux situations de l'instrument ; & le point de milieu est le commencement de la graduation, ou le premier point de la division. Par-là on reconnoît l'erreur du quart de cercle, ou sa différence à 90 dégrés : mais pour cela même on ne s'étoit pas contenté de diviser l'instrument en 90 dégrés ; on en avoit encore marqué quelques-uns de part & d'autre, jusqu'aux extrémités du limbe.

Du secteur.

3. Je viens au secteur, qui, comme je l'ai dit, avoit neuf pieds (romains) de rayon. Il étoit composé d'un rayon de fer terminé par une lame de même métal, perpendiculaire au rayon, sur laquelle on avoit appliqué une petite lame de laiton bien polie, & dont le plan passoit exactement par le centre. Cette lame de laiton étoit partagée par le milieu, dans toute sa longueur, pour recevoir une autre lame, que nous faisions mouvoir au moyen d'une vis, & dont la longueur, qui auroit du être d'un pied, (nous trouvâmes qu'il s'en manquoit un peu plus d'une deux-millieme partie du tout) étoit divisée en 72 parties égales. Ainsi lorsqu'il étoit question d'estimer un angle, nous tournions la vis jusqu'à ce que le fil à plomb répondît à l'un des points de la division, & nous comptions en même tems le nombre de tours & de parties du micrometre. Le micrometre étoit composé à l'ordinaire d'un cercle & d'un index, & le cercle étoit divisé en 180 parties égales. On voit que ces parties du micrometre répondoient à des parties égales de la tangente du secteur, non de sa circonférence ; or il en falloit $171\frac{1}{2}$ pour faire une minute au point de contact : ainsi il en falloit presque trois pour une seconde. Une lunette de même longueur que le rayon, étoit adossée au secteur, & nous

l'avions rendue à peu près parallele au plan de l'inſtrument.

De ſa ſuſpenſion.

4. Le ſecteur étoit ſuſpendu d'une maniere ſi ſolide, qu'il nous eſt arrivé plus d'une fois de le retrouver dans la même poſition où nous l'avions mis quelques heures auparavant, le fil à plomb répondant toujours au même point du limbe : trois vis & deux poids lui avoient acquis cette ſolidité. L'une des vis attachée par un bras à une poutre, & placée dans le plan du méridien, ſoutenoit le ſecteur de côté ; & on la tournoit pour amener l'étoile ſur le fil horizontal. Les deux autres étoient perpendiculaires à ce plan, & on les avançoit ou reculoit plus ou moins pour donner au ſecteur une ſituation verticale, que l'on connoiſſoit en examinant ſi le fil à plomb raſoit le limbe, ſans y appuyer. Les deux poids étoient deſtinés à repouſſer le ſecteur contre ces deux dernieres vis, pour l'aſſujettir & l'empêcher de s'écarter du côté oppoſé. Ces mêmes vis ſervoient à placer le ſecteur dans le plan du méridien ; car pour peu qu'il s'en écartât, on n'avoit qu'à pouſſer ou retirer l'une des deux vis pour lui donner une poſition convenable. Nous avions tracé à cette fin, ſur le pavé de la chambre, une ligne parallele à la méridienne, laquelle repréſentoit la ſection du pavé & du plan du ſecteur, pointé dans le plan du méridien. Il étoit aiſé, en bornoyant le long du limbe, de connoître ſi ſon plan répondoit parfaitement à cette ſection.

ARTICLE II.

Examen des Diviſions.

Comment on auroit pu vérifier le ſecteur ;

5. On ſait qu'un Artiſte, quelqu'habile qu'on le ſuppoſe, ne peut jamais rendre un inſtrument parfait ; quoiqu'avec de l'application & un long uſage, il puiſſe parvenir à n'y commettre que de légeres erreurs. Ce point méritoit d'autant plus d'attention dans le cas préſent, que notre Artiſte, M *Ruſſo*, ne s'étoit jamais exercé dans ces ſortes d'ouvrages. Ainſi il falloit corriger toutes les erreurs de la diviſion, tant du ſecteur que du quart de cercle. Par rapport au ſecteur, il eut ſuffit, pour notre meſure, de prendre les parties aliquotes du rayon, qui répondoient de plus près aux diſtances de nos étoiles

étoiles au zénith, & de les transporter sur le limbe, de part & d'autre de son point de milieu. C'est la méthode que MM. *Bouguer* & de la *Condamine* avoient déja employée à l'équateur. Par exemple à *Rome* l'étoile α du cygne, au moment de son passage par le méridien, est éloignée du zénith d'environ deux dégrés & demi : il falloit donc transporter, à droite & à gauche du milieu du limbe, la vingt-troisieme partie du rayon, égale à la tangente de 2 d. 29 min. 23 sec., ou environ : rien n'eût été ensuite plus aisé que de prendre en parties de micrometre la différence de cet intervalle à la vraie distance de l'étoile. Mais la méthode, dont nous nous sommes servis, revient au même, comme on va le voir.

Comment on l'a vérifié ;

6. Nous avons tracé sur un verre deux paralleles, à la distance d'une partie aliquote du rayon, telle que le cas présent sembloit la requérir. Ces lignes étoient si déliées, qu'on ne les pouvoit bien appercevoir qu'avec une loupe. Le verre ainsi préparé, nous l'avons collé avec de la cire sur le limbe, en prenant bien garde que les lignes ne coupassent pas obliquement la tangente ; ce qui eût un peu augmenté leur distance (1). Cela fait, nous tournions la vis pour avoir, en parties de micrometre, la différence de la distance de ces lignes à la partie aliquote, & à la distance observée. Par ce moyen nous connoissions la distance observée, sans avoir sujet de craindre qu'il s'y fût glissé aucune erreur sensible : car le côté du verre qui étoit marqué de deux lignes, touchoit immédiatement la lame mobile ; ce qui prévenoit tout danger de parallaxe : d'ailleurs nous pouvions estimer à peu de chose près les points du limbe auxquels répondoient ces lignes, & il n'étoit pas à présumer que nous pussions nous y tromper de deux parties de micrometre, dont il en faut presque trois pour faire une seconde.

Avec quelle exactitude ;

7. A l'égard de la partie aliquote, il n'est point nécessaire de la déterminer avec tant de précision, pourvu qu'on tienne compte de la différence, laquelle étant répartie sur 23, ou plus, qui exprime le nombre de fois que cette partie est

(1) L'Auteur entend ici, par la distance des paralleles, l'intervalle de la tangente, intercepté par les paralleles.

contenue dans le rayon, ne peut jamais produire une erreur sensible. Supposons par exemple que la partie aliquote, étant portée 23 fois sur le rayon, y laisse un reste égal à $\frac{1}{500}$ du tout, & qu'il en résulte une erreur d'une seconde sur toute la longueur; il est évident qu'après la répartition faite, l'erreur de la partie aliquote ne sera que de $\frac{1}{23}$ de seconde.

Avec quel succès.

8 Nous avons dit que la tangente étoit divisée en 72 parties, qui faisoient autant d'intervalles de deux lignes, ou environ; les différences que nous y avons trouvées, par la méthode précédente, étoient de quatre ou cinq secondes, quelquefois de six; il s'en est même trouvé une de onze secondes. Les divisions de la droite étoient plus justes que celles de la gauche: celles-ci étoient trop courtes, à compter du premier point de la division, si l'on en excepte un ou deux intervalles de deux lignes; mais lorsqu'on joignoit les divisions de la gauche à celles de la droite, elles péchoient tantôt par excès, tantôt par défaut. Nous avons encore examiné séparément chaque intervalle, & nous avons dressé une nouvelle table d'erreurs, laquelle s'est trouvée à très peu près semblable à la premiere. Mais nous nous en fions plus à celle-ci, parceque des erreurs imperceptibles par elles-mêmes, deviennent sensibles dans leur totalité. Car supposons qu'à chaque intervalle il y ait une erreur de $\frac{1}{200}$ d'un tour de vis; &, ce qui n'est pas probable, que toutes les erreurs soient du même côté, il suit que sur 36 intervalles, c'est-à-dire sur la moitié de toute la longueur, on aura une erreur de 11 sec. La conformité de nos tables est une preuve, qu'il ne nous est rien arrivé de semblable, à beaucoup près.

Vérification du quart de cercle.

9. La vérification du quart de cercle n'étoit pas fort différente. On avoit attaché au bord du limbe un petit instrument avec une vis, qui faisoit mouvoir l'alidade: à l'alidade on avoit ajouté un verre marqué d'une ligne qui parcouroit la division, & en faisoit connoître jusqu'aux plus légeres différences, de la même maniere que dans la ligne des tangentes du secteur. Nous commençâmes par vérifier les dégrés de 30 en 30, puis de 10 en 10, de 5 en 5, & 1 à 1. D'abord on avoit fait cet instrument de bois; mais il ne réussit pas: car en répétant les opérations, on ne trouvoit point les mêmes

erreurs. Cet inconvénient ceſſa du moment qu'on lui en eut ſubſtitué un de fer ; & il ne nous reſta plus de doute ſur les erreurs de la diviſion. On voit, ſans que je le diſe, que nous avions encore beſoin ici d'appliquer la loupe, pour appercevoir juſqu'aux plus petites différences. Nous l'avons de plus employée dans nos obſervations, & avec tant de ſuccès, que nous diſtinguions parfaitement juſqu'à un tiers de ſeconde.

Suite.

10. Quant à l'erreur du quart de cercle, ou de l'arc de 90 dégrés, nous l'avons examiné d'abord par le tour de l'horizon, qui nous y a fait découvrir une erreur par excès de près de deux minutes ſur 360 dégrés ; puis par la ſomme des trois angles de chaque triangle réduit, en prenant un milieu, d'où nous avons conclu que l'erreur étoit de 50″ ſur 180 d., & de 25″ ſur 90. De-là on peut corriger le quart de cercle de deux façons : la premiere eſt de répartir d'abord cette erreur ſur chaques diviſions, & d'y appliquer enſuite les corrections particulieres des autres erreurs : la ſeconde, qui eſt celle que nous avons ſuivie, eſt de corriger les erreurs particulieres de chaque dégré, comme ſi le quart de cercle étoit parfait, & de diminuer l'arc qui en réſulte, en raiſon de cet arc à 90 dégrés ; ce qui ſe fait en retranchant 5″ ſur 18 d., & ſur le reſte à proportion. Par exemple, ayant un angle de 40 dégrés, on retranche 10″ pour 36 d., & pour les quatre autres une ſeconde ; ce qui fait 11″ de diminution ſur l'angle obſervé.

ARTICLE III.

Choix des Stations.

Choix des ſtations.

11. Le pays qui eſt entre les deux mers, eſt preſque tout occupé par l'Apennin & les montagnes adjacentes, qui en ſont comme l'acceſſoire ou le diminutif. Ces montagnes ſont ſéparées quelquefois par des plaines d'une raiſonnable grandeur, mais où nous ne pouvions néanmoins établir aucun poſte, pour continuer la chaîne de nos triangles d'une extrémité de la méridienne à l'autre, parceque le pays eſt preſque tout traverſé de chaînes de montagnes, qui nous euſſent dérobé la vue de nos ſignaux. Ainſi toutes nos ſtations, à

l'exception de celles de *Rome* & de *Rimini*, furent établies au ſommet des montagnes, entre ces deux villes, pour former la ſuite de nos triangles. Les montagnes que nous avons choiſies pour cela, après avoir reconnu le terrein, ſont le *Genarro*, le *Soriano*, le *Fionchi*, le *Pennino*, le *Teſio*, le *Catria*, le *Carpegna* & le *Luro*.

De chaque ſtation en particulier. Conſtruction des ſignaux.

12. La premiere eſt ſituée dans la terre de Sabine, près de *Palombara*, dont elle eſt éloignée d'environ deux milles: la ſeconde proche *Soriano* qui lui a donné ſon nom. Tout ce rideau de montagnes, dont le *Soriano* eſt la pointe la plus élevée, portoit anciennement le nom de *Cimini*. La troiſieme eſt à cinq milles de *Spolete*, en-deçà du *Nar* qui baigne le pied de la montagne. La quatrieme eſt à peu près auſſi éloignée de *Nocera* à l'orient. Le *Teſio* eſt dans le territoire de *Perouſe*, & environ à même diſtance de cette ville, du côté du nord. Le *Catria* eſt la cime la plus élevée d'une montagne à deux ſommets, ſituée près de *Cantiano*; la ſeconde cime, preſque auſſi haute, & plus occidentale, s'appelle *Montaigu*. Le *Carpegna* tire ſon nom d'un château, dont il dépend pour la plus grande partie. Il a au couchant *Penna di Billi*, petite ville, telle que ſont ordinairement les villes ſituées dans les montagnes; elle eſt aujourd'hui le ſiege de l'Evêché de *Monfeltro*. Enfin le mont *Luro* eſt à ſept milles aux plus de *Peſaro*: ſon ſommet eſt à peine élevé de 200 pas au-deſſus du niveau de la mer, & par conſéquent beaucoup plus bas que celui des autres montagnes. Une tour antique, placée ſur la cime de celle-ci, nous diſpenſoit d'y mettre un nouveau ſignal; mais il en fallut poſer dans les autres ſtations. Ces ſignaux étoient des cabanes de forme pyramidale, ſoutenues par quatre longues branches plantées à la diſtance de 20 palmes, ou plus, les unes des autres, & inclinées par le haut vers le centre de la baſe. On les lioit enſemble par d'autres branches qu'on attachoit avec des clous, & on revêtoit le tout de feuillage; de ſorte qu'on les eût pris de loin pour des cônes tronqués Il faut néanmoins en excepter le *Soriano*: comme cette montagne étoit toute couverte de bois juſqu'au ſommet, nous ne pûmes nous diſpenſer de faire abattre les arbres qui en couvroient la cime; & nous y en laiſſâmes un pour ſervir de ſignal.

13. Tels ſont les poſtes qui nous ont paru les plus favorables; il nous eût même été difficile de nous en paſſer. Toute autre montagne nous eût donné des angles trop petits. On eût bien pu établir une ſtation entre le *Soriano* & le *Teſio*: mais de toutes les montagnes qui bordent le Tibre, aux environs de *Tenaglia* ou de *Montecchio*, nous n'en avions apperçu qu'une ſeule, laquelle, outre qu'elle étoit trop près de *Soriano*, nous eût donné des angles peu proportionnés. Le mont *Pelia*, dans le territoire d'*Orviete*, étoit mieux ſitué; & il nous eût pu ſervir au beſoin, ſinon à lier nos triangles, du moins à faire des obſervations géographiques: mais divers obſtacles nous empêchoient alors de nous y arrêter, ou même de ſentir tous les avantages de ce poſte. Les autres montagnes, ſur leſquelles nous euſſions pu jetter les yeux, étoient ou trop éloignées de la méridienne, ou couvertes par des montagnes voiſines. Nous eûmes quelque peine à découvrir du *Soriano* le ſignal du *Fionchi*; comme de *Catria* & de *Carpegna*, celui du mont *Luro*. Car le *Luro* étant vu de poſtes plus élevés, ſe *projectoit* ſur une plaine; & le *Fionchi*, quoique plus élevé que le *Soriano*, ſe *projectoit* ſur une montagne un peu plus haute, appellée *Cuſcerno*. Or dès qu'un ſignal ſe *projecte* ſur la terre, il eſt difficile à appercevoir, à moins qu'il ne ſoit actuellement éclairé du Soleil. De même le dôme de *St Pierre*, vu de *Soriano*, ſe *projectoit* ſur la terre, & le plus ſouvent nous n'en appercevions pas le moindre veſtige; tandis que d'autres objets, diverſement ſitués, ſe voyoient très diſtinctement.

Avantage de ces poſtes;

14. Ces montagnes étoient liées d'un côté au dôme de *St. Pierre* de *Rome*, de l'autre à une ſtation établie ſur le bord de la mer, près de *Rimini*, à l'endroit où commençoit la meſure de la baſe; & elles formoient huit triangles principaux, d'où nous devions tirer la meſure d'un dégré du méridien. Il reſte à parler des deux baſes, fondement de toutes nos opérations. Celle de *Rimini* pouvoit ſe comparer immédiatement avec l'un des côtés du triangle adjacent: à l'égard de celle de *Rome*, comme elle étoit diſtante d'environ cinq milles du dôme de *St Pierre*, nous avons eu beſoin d'un triangle auxiliaire, pour connoître la diſtance de ce dôme au ſignal du *Genarro*. Ainſi tout le polygone étoit compoſé de onze trian-

Leur liaiſon avec les deux baſes.

gles, dont huit se rapportoient spécialement à la mesure de la méridienne, & les trois autres à la mesure du premier & du dernier côté, qui servent à mesurer tous les autres. Nous allons donner le détail de ces mesures.

ARTICLE IV.

Mesure des Bases.

Situation des bases;

15. Nous choisîmes, pour notre base de *Rome*, la vieille voie Appienne, qui, à raison de son alignement, nous parut mériter la préférence; mais qui ne laissoit pas d'avoir ses difficultés. Nous nous en fussions tirés, il y a quelques années, à moins de frais. Car depuis quelque tems on lui a substitué un autre chemin sur la gauche, entre la porte *Saint Jean* & celle de *Saint Sébastien*, afin que ceux qui voudroient aller de *Rome* à *Albe*, pussent sortir indifféremment par l'une de ces deux portes: de sorte que la voie Appienne est non seulement abandonnée, mais labourée en quelques endroits, & par conséquent difficile à mesurer à la perche. L'embarras eût été plus grand, s'il nous eût fallu répéter la mesure aux approches de la moisson. Cette base étoit de huit milles. Nous nous contentâmes de la mesurer uue fois; & plutôt que de nous engager dans de nouvelles difficultés, nous résolûmes de chercher ailleurs un terrein plus commode, dont nous pussions répéter la mesure autant de fois que nous jugerions à propos. Nous ne le trouvâmes qu'à l'autre extrémité de la méridienne; & c'étoit précisément la position la plus favorable. Le bord de la mer adriatique étoit le terrein le plus uni; & quoiqu'il y eût un petit coude à faire, nous y pouvions mesurer une autre base de huit milles, avec autant de précision que si nous eussions toujours avancé sur la même ligne. Nous la mesurâmes deux fois en treize jours, au mois de décembre, malgré les brouillards qui ne nous quittoient point; & il n'y eut entre ces deux mesures que deux pouces de différence. La température de l'air, qui, pendant ces treize jours, fut toujours la même, jointe à toutes les précautions que nous avons prises, dispense de recourir au hasard, pour justifier cette conformité. Car le thermometre de M. de *Réaumur* se trouva toujours à peu près au même point: d'ailleurs nous avions soin de véri-

fier, plusieurs fois le jour, la longueur de nos perches; jusqu'à tenir compte de la petite courbure qui y étoit produite par leur propre poids, & du raccourcissement qui en est une suite. Je suis persuadé qu'une troisieme mesure ne se fût pas moins accordée avec les précédentes.

Méthode observée dans leur mesure.

16. Voici de quelle maniere nous nous y prenions pour mesurer: nous avions trois perches ou regles de 27 palmes, marqués des chiffres 1, 2, 3: nous les placions, au moyen d'un niveau d'eau, dans une situation horizontale, & nous les mettions en même tems dans l'alignement de la base, marqué par des jallons plantés de distance en distance. On ne faisoit point toucher les têtes des perches, & on prenoit avec un compas le petit intervalle qui les séparoit, ou plutôt l'intervalle des points gravés sur de petites lames de laiton, placées aux extrémités des perches, d'où nous retranchions ensuite la distance de chaque point à chaque extrémité (1). Par-là nous ne risquions pas de causer du dérangement dans les perches, ni de nous tromper sur le nombre des mesures: car, comme nous prenions trois perches pour une mesure, & que chaque mesure rempliſſoit une ligne dans notre régistre, & qu'enfin nous marquions dans cette ligne même les intervalles des perches chacun en son rang, il n'étoit pas possible qu'il se glissât aucune erreur dans le nombre des mesures (2).

Remede contre l'inégalité du terrein.

17. Lorsque l'inégalité du terrein nous obligeoit d'élever ou d'abaisser les perches, nous suspendions un fil à plomb à l'extrémité de la plus haute, & nous prenions avec un compas la distance de ce fil à l'extrémité de la perche la plus basse. Les perches n'en étoient pas moins dans une position horizontale, parcequ'au moyen de quelques vis, nous élevions ou nous abaissions plus ou moins les gradins ou tables sur lesquelles elles posoient. Ainsi nous n'éprouvions presque pas plus de difficulté que si le terrein eût été parfaitement uni; surtout dans la base de *Rimini*, où l'on se trouvoit rarement dans le cas d'élever ou d'abaisser les perches.

18. Cette base, à cause du coude dont nous avons parlé,

(1) Voyez liv. IV, n°. 339 & 340.
(2) Voyez liv. I, n°. 116.

étoit composée de deux lignes, formant un angle de 170 d. 52′ 15″, comme on peut le voir dans la figure 1 de la premiere planche, où le point A marque le commencement de la base près l'embouchure de l'*Ausa*, AB la premiere ligne, BC la seconde. Nous avons mesuré les angles CAB & ACB, le premier de 4 d., 10′, 45″, le second de 4 d., 57′, 0″; & ayant abaissé la perpendiculaire BD, nous avons diminué AB & BC, en raison du sinus du complément de angles A & C, comparé au rayon (1), pour avoir les segmens AD, DC, qui forment ensemble la base rectiligne AC. Comme la ligne AB est traversée par l'*Amarano*, nous avons déterminé la largeur de cette riviere, qui est de 431 palmes $\frac{2}{3}$, par un triangle presque équilatéral, dont l'un des côtés a été mesuré, ainsi que les angles, avec une exactitude qui ne permet pas d'y soupçonner aucune erreur sensible.

Longueur des bases.

19. Ainsi comme les deux mesures de cette base étoient parfaitement conformes, & que nous ne pouvions former aucun doute sur sa réduction à la base rectiligne AC, nous n'hésitâmes pas de lui donner la préférence sur celle de *Rome*, & de n'employer celle-ci qu'à vérifier la premiere, ou à la corriger au besoin. La premiere ligne AB s'est trouvée de 28645.8 palmes, la seconde BC de 24194 8, d'où l'on tire AD = 28569.6; DC = 24104.7, & leur somme AC = 52674.3, qui, multiplié par $\frac{3}{10}$, donne 7901.14 pas. L'autre base étoit de 8034.37 pas, ou plutôt de 8034.67, en tenant compte d'un demi dégré d'inclinaison de la ligne sur l'horizon (2); c'est-à-dire qu'elle étoit un peu plus longue que celle de *Rimini*.

Réduction des pas romains à la toise.

20. Il reste à réduire les pas en toises, pour pouvoir comparer notre mesure aux autres. Nous avons pris la mesure du palme sur l'étalon du Capitole; mais comme les lignes étoient fort larges, nous n'osons répondre de sa justesse. Le point étoit d'avoir une toise d'une juste longueur; & nous en avons reçu une de *Paris*, de la façon du sieur *Langlois*, & exactement vérifiée par M. de *Mairan*; de sorte qu'il n'y a aucun doute qu'elle ne soit parfaitement conforme à celles qui ont

(1) Voyez liv. IV, n°. 363.
(2) Voyez liv. IV, n°. 366.

servi

ſervi à l'équateur en France, & au cercle polaire (1). Après un mûr examen, nous avons trouvé que notre meſure de neuf palmes étoit à la toiſe, comme 29710 à 28800; d'où il ſuit que le logarithme de ce rapport eſt 0135102, & que le logarithme du rapport de la toiſe au pas romain, ou à 6 palmes $\frac{2}{3}$, eſt 1168236, qui, ſouſtrait du logarithme d'un nombre de pas quelconque, fera connoître le nombre de toiſes qui y répond.

$0,1168236 = \log \frac{9}{6\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{28800}{29710}}$

ARTICLE V.

Suite des triangles du polygone.

21. La ſuite de nos triangles eſt repréſentée dans la figure 2. *L a* eſt la baſe de *Rimini*, laquelle ſe rapproche un peu plus de la mer que la ligne *L I*, qui aboutit au mont *Luro*, quoique ces deux lignes paroiſſent retomber l'une ſur l'autre. Le reſte ſe voit dans la figure. Nos angles obſervés avoient beſoin pour la plupart d'une petite correction, n'ayant pu être pris dans la cabane qui ſervoit de ſignal, mais ſeulement à côté. Cette correction eſt ſuffiſamment expliquée dans d'autres meſures, & ne renferme aucune difficulté particuliere; & comme d'ailleurs elle n'étoit ordinairement que de quelques ſecondes, j'ai cru pouvoir l'omettre dans la table ſuivante, où je me contente de marquer les angles qui réſultent de cette correction. Nous avons encore fait aux angles la correction néceſſaire, pour que les trois angles du même triangle fuſſent égaux à deux droits, afin d'en tirer enſuite la valeur d'un côté.

Correction des triangles. Pl. I. F. 1.

(1) M. de *Mairan*, dans ſon Mémoire ſur la meſure du pendule à ſecondes à Paris, *Mém. de l'Acad. des Sciences pour* 1735, page 157, dit qu'il a fait faire une regle *toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou*, (par MM. Godin, Bouguer & de la Condamine, partis la même année au mois d'avril,) *& dont on a laiſſé le modele à l'Académie*, c'eſt-à-dire toute pareille à la toiſe qui a ſervi à la meſure des dégrés du méridien, voiſins de l'équateur, & des dégrés qui coupent le cercle polaire boréal, car celui-ci fut meſuré par les Académiciens envoyés au Nord avec ce même modele laiſſé à l'Académie, de la toiſe emportée au Pérou. Mais en 1756, lorſque l'Académie fit meſurer de nouveau la diſtance de Villejuifve à Juviſi pour vérifier la meſure de la baſe de M. Picart, la toiſe de M. de Mairan fut trouvée plus courte d'un dixieme de ligne que la toiſe de l'équateur. Voyez la note ſur le n°. 75, liv. I.

TRIANGLES.		Angles observés, réduits au centre.	Les mêmes Angles corrigés.	De-là le côté en pas romains (1).
L'AUSA.	L	78° 48′ 22″	78° 48′ 18″	
Autre extrem. de la base.	a	82 3 10	82 3 6	LH 23862.3
CARPEGNA. . . .	H	19 8 36	19 8 36	
		180 0 8	180 0 0	
L'AUSA.	L	77 19 44	77 19 56	
LURO.	I	66 35 52	66 36 2	IH 25367.7
CARPEGNA. . . .	H	36 3 56	36 4 2	
		179 59 32	180 0 0	
LURO.	I	64 58 37	64 58 31	
CARPEGNA. . . .	H	69 57 6	69 56 59	HG 32465.2
CATRIA.	G	45 4 34	45 4 30	
		180 0 17	180 0 0	
CARPEGNA. . . .	H	37 12 15	37 12 11	
CATRIA.	G	97 6 12	97 6 1	GF 27429.8
TESIO.	F	45 41 53	45 41 48	
		180 0 20	180 0 0	
CATRIA.	G	64 51 52	64 51 54	
TESIO.	F	59 33 25	59 33 30	FE 30104.3
PENNINO.	E	55 34 34	55 34 36	
		179 54 54	180 0 0	
TESIO.	F	45 46 33	45 46 33	
PENNINO.	E	92 38 54	92 38 56	FD 45316.4
FIONCHI.	D	41 34 31	41 34 31	
		179 59 58	180 0 0	
TESIO.	F	30 36 2	38 35 57	
FIONCHI.	D	91 56 32	91 56 21	DC 37200.7
SORIANO.	C	49 27 48	49 27 42	
		180 0 22	180 0 0	
FIONCHI.	D	60 5 30	60 5 30	
SORIANO.	C	70 10 21	70 10 19	CB 42258.3
GENARRO.	B	44 44 12	44 44 11	
		180 0 3	180 0 0	

(1) Voyez au commencement de ce volume la table de réduction des pas romains en toise & pieds de Paris.

TRIANGLES.		Angles observés, réduits au centre.	Les mêmes Angles corrigés.	De-là le côté en pas romains.
SORIANO.	C	32° 13′ 6″	32° 13′ 10″	
GENARRO.	B	68 48 20	68 48 30	BA 22954.3
Dôme de St Pierre. . .	A	78 58 18	78 58 20	
		179 59 44	180 0 0	
GENARRO.	B	32 38 10	32 38 7	
Dôme de St Pierre. . .	A	79 1 10	79 1 3	Bc 24244.8
Extr. or. de la baſe. . .	C	68 20 56	68 20 50	
		180 0 16	180 0 0	
GENARRO.	B	19 17 27	19 17 27	
Extr. occ. de la baſe. .	b	94 24 33	94 24 30	bc 8033.4
Extr. or. de la baſe. . .	c	66 18 6	66 18 3	
		180 0 6	180 0 0	

22. La baſe de *Rome* calculée, ſe trouve d'environ un pas plus courte que par la meſure actuelle ; & comme elle eſt la vingtieme partie de la méridienne, il ſuit que ſi on la prenoit pour fondement du calcul, la méridienne ſe trouveroit au moins de 20 pas plus longue ; & que prenant un milieu, on peut ajouter 10 pas à la méridienne ; ce qui augmentera le dégré de 5 pas. Comparaiſon des baſes.

23. Pour trouver une baſe par l'autre, on n'a beſoin que des nombres marqués dans la table. Car il ſuffit de connoître un côté d'un triangle, pour trouver tel côté qu'on voudra du triangle ſuivant. Nous avons ſuivi la méthode la plus aiſée, qui eſt de réſoudre les triangles avant que de réduire les angles à l'horizon. Cette premiere opération finie, la réduction a lieu, tant pour avoir les diſtances, qui répondent à celles des ſignaux ſur une ſurface réguliere de la terre, que pour connoître le vrai angle d'inclinaiſon des côtés ſur la méridienne. La réduction des angles à l'horizon ſe fait de la maniere qui ſuit. Que la table précédente ſuffit.

24. On imagine deux grands cercles de la ſphere, paſſant par le zénith de l'obſervateur, & par les ſignaux obſervés. Ces cercles coupent l'horizon au-deſſous ou au-deſſus du Moyen de réduire les angles à l'horizon.

ſignal, ſuivant que le ſignal paroît élevé ou abaiſſé au-deſſous de l'horizon. Il eſt évident que l'arc compris de l'horizon eſt la meſure de l'angle réduit que l'on cherche, comme auſſi de l'angle formé par ces deux cercles au zénith. Or connoiſſant la diſtance apparente des ſignaux au zénith, on connoîtra par-là même deux côtés d'un triangle ſphérique, dont le troiſieme côté eſt la meſure de l'angle obſervé. Toute la difficulté ſe réduit donc à trouver l'angle au zénith, dans ce triangle ſphérique, dont on a tous les côtés. C'eſt-là, je penſe, la ſolution la plus ſimple & la plus naturelle qu'on puiſſe donner de ce problême; & comme il y a près de trente ans qu'elle m'eſt venue dans l'eſprit, & que je n'avois pas le moindre doute qu'elle n'eût été connue de tous les anciens, je n'ai pas été peu ſurpris de trouver quelque part (1) qu'on la donnât pour une méthode d'une nouvelle invention. Cependant comme il eſt rare qu'on ait occaſion d'en faire uſage, il ne ſeroit pas étonnant qu'aucun d'eux n'en eût fait mention.

Cas plus ſimple.

25. Si l'un des ſignaux eſt à l'horizon, on n'aura à réſoudre qu'un triangle rectangle ſphérique, dont l'hypothénuſe ſera la meſure de l'angle obſervé, & l'un des côtés la diſtance de l'autre ſignal à l'horizon. Une ſeule analogie ſera connoître l'autre côté, ou l'arc de l'horizon qu'on cherche. Ceci conduit à une ſeconde ſolution générale du problême, laquelle paroît d'abord plus embarraſſée, mais qui dans le vrai peut être d'un grand uſage dans preſque tous les cas particuliers, à cauſe des moyens, qui s'y préſentent pour ainſi dire d'eux-mêmes, d'abréger les calculs.

Autre moyen.

26. Cette ſolution conſiſte à trouver le point C (fig. 3 & 4) qui eſt le point d'interſection de l'horizon avec le grand cercle qui paſſe par les ſignaux A & B. Si les ſignaux ſont l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'horizon, comme dans la fig. 3,

(1) Dans le livre de la figure de la terre de M. Bouguer, pag 131, où il ſuppoſe que cette méthode n'avoit point été employée, quoique les Académiciens, qui avoient été envoyés au cercle polaire, n'euſſent fait uſage que de la trigonométrie ſphérique pour la réduction à l'horizon des angles obſervés dans un plan incliné.

le point d'interſection doit ſe trouver ſur l'arc obſervé AB; s'ils ſont du même côté, comme dans la figure 4, ce point ſe trouvera ſur l'arc prolongé, du côté où il ſe rapproche de l'horizon. Soient les arcs AD, BE perpendiculaires à l'horizon DCE, ou DEC, les ſegmens de l'arc obſervé ſeront, dans l'un & l'autre cas, AC, CB; & l'arc obſervé ſera, dans le premier cas, la ſomme de ces ſegmens, & leur différence dans le ſecond. Ainſi en ſe ſervant du ſigne ∽, pour marquer la différence de deux termes, (il n'importe quel eſt le plus grand) je dis qu'on aura, dans le premier cas, l'analogie ſuivante:

$$\text{Tang.}\frac{AD+BE}{2} : \text{Tang.}\frac{AD\backsim BE}{2} :: \text{Tang.}\frac{AB}{2} : \text{Tang.}\frac{AC\backsim BC}{2}.$$

Et dans le ſecond cas,

$$\text{Tang.}\frac{AD\backsim BE}{2} : \text{Tang.}\frac{AD+BE}{2} :: \text{Tang.}\frac{AB}{2} : \text{Tang.}\frac{AC+BC}{2}.$$

Or connoiſſant la moitié de la ſomme, & la moitié de la différence de AC & BC, on aura ces ſegmens.

27. La démonſtration de cette analogie ſe tire de ce théorême de trigonométrie: les tangentes de la moitié de la ſomme & de la moitié de la différence de deux arcs, ſont en raiſon de la ſomme & de la différence de leurs ſinus: ce qui donne lieu à ce raiſonnement. Démonſtration.

Sin. AD : Sin. BE :: Sin. AC : Sin. BC.

Donc en ajoutant & en ſouſtrayant

Sin. AD + Sin. BE : Sin. AD ∽ Sin. BE :: Sin. AC + Sin. BC : Sin. AC ∽ Sin. BC.

Et ſubſtituant enfin des rapports égaux.

$$\text{Tang.}\frac{AD+BE}{2} : \text{Tang.}\frac{AD\backsim BE}{2} :: \text{Tang.}\frac{AC+BC}{2} : \text{Tang.}\frac{AC\backsim BC}{2}.$$

C. Q. F. D. Or connoiſſant les ſegmens de l'arc oblique, on en déduit les ſegmens de l'horizon qui leur répondent, par ces analogies:

Sin. du compl. de AD : rayon :: Sin. compl. AC : Sin. compl. DC.

Et Sin. compl. BE : rayon :: Sin. compl. BC : Sin. compl. EC.

dans leſquelles le logarithme du ſinus du complément de AD & celui du complément de BE étant d'ordinaire peu inférieurs à celui du rayon, on verra du premier coup d'œil ce qu'il conviendra d'ajouter au ſinus du complément de AC

& BC, pour avoir le ſinus du complément de DC & EC. Ainſi cette méthode n'eſt pas beaucoup plus longue que la précédente, & elle a ſur elle l'avantage de la clarté.

Réduction des angles à l'horizon.

28. Je viens à la réduction des angles à l'horizon, dont nous avons montré plus haut la néceſſité. Je ne dois point diſſimuler ici que les hauteurs & abaiſſemens reſpectifs des objets, d'où dépend cette réduction, n'ont quelquefois pu être obſervés immédiatement. Tantôt des obſervations plus importantes ne nous en laiſſoient pas le tems; tantôt nous étions contrariés par le vent: enfin nous manquions d'un inſtrument, beaucoup plus propre que le quart de cercle, à prendre en fort peu de tems de petites hauteurs ou dépreſſions au-deſſous de l'horizon. Mais comme les erreurs qu'on peut y commettre, fuſſent-elles d'une minute, n'influent que peu, ou point, dans cette réduction, nous avons cru qu'il ſuffiroit de déduire de nos obſervations les hauteurs approchées des montagnes au-deſſus du niveau de la mer; j'entends celles que nous n'avions pu avoir par une obſervation immédiate. Ces obſervations ſont rapportées en détail à la fin de ce livre ſecond. C'eſt ainſi que nous avons réduit les angles à l'horizon, tels qu'on les voit dans la table ſuivante, avec la valeur des côtés oppoſés.

Triangles.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés oppoſés en pas romains.	
Embouchure de l'Ausa	L	78°	47′	22″	aH	23614.0
Autre extrémité de la baſe	a	82	2	40	LH	23841.3
Carpegna M.	H	19	9	38	La	7901.14
Embouchure de l'Ausa	L	77	20	48	IH	25352.2
Mont Luro	I	66	34	20	LH	23841.3
Carpegna M.	H	36	4	52	LI	15302.4
Mont Luro	I	64	59	51	HG	32454.7
Carpegna M.	N	69	56	1	IG	33636.7
Catria M.	G	45	4	8	IH	25352.2
Carpegna M.	H	37	11	41	GF	27417.4
Catria M.	G	97	6	47	HF	45004.5
Tesio M.	F	45	41	32	HG	33454.7

TRIANGLES.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés opposés en pas romains.	
CATRIA M.	G	64°	51′	47″	FE	30090.9
TESIO M.	F	59	33	47	GE	28658.0
PENNINO M.	E	55	34	26	GF	27417.4
TESIO M.	F	45	46	22	ED	32495.2
PENNINO M.	E	92	39	19	FD	45299.0
FIONCHI M.	D	41	34	19	FE	30090.9
TESIO M.	F	38	35	49	DC	37186.1
FIONCHI M.	D	91	56	38	FC	59574.2
SORIANO M.	C	49	27	33	FD	45299.0
FIONCHI M.	D	60	5	37	CB	42243.2
SORIANO M.	C	70	10	19	DB	45843.9
GENARRO M.	B	49	44	4	DC	37186.1
SORIANO M.	C	32	12	14	BA	22935.6
GENARRO M.	B	68	48	35	CA	40124.3
Dôme de St Pierre . . .	A	78	59	11	CB	42243.2

29. Il eſt à remarquer que la diſtance du *Genarro* au dôme de *St Pierre*, réduite à une ſurface réguliere de la terre, eſt ici de près de quatre pas trop petite. Car cette réduction ne doit diminuer que de quinze pas la diſtance de ces ſtations; d'où il ſuit que cette diſtance étant, ſelon la premiere table, de 22954 pas, elle devroit ſe réduire à 22939, non à 22935.6. Mais cette erreur vient moins d'un défaut de réduction, que de l'inégalité de la réfraction, qui de tems en tems éleve les objets beaucoup plus que de coutume. Ainſi quoique dans les cas ordinaires on puiſſe connoître aſſez ſûrement, par la diſtance du lieu obſervé, la quantité de la réfraction, on ne peut jamais s'en aſſurer pleinement que par une obſervation immédiate. Or l'élevation de l'objet augmente la diſtance non réduite. Ainſi il n'eſt pas étonnant qu'en allant d'un triangle à l'autre, on tombe à la fin dans quelque petit mécompte. Cependant pour ne pas donner lieu de croire que par trop de confiance nous ayons raccourci notre dégré, qui eſt déja ſi court, nous ſuppoſerons que cette différence vient en partie d'une erreur de réduction, & nous y aurons égard dans la ſuite.

Correction d'une petite erreur.

ARTICLE VI.

Direction des côtés des triangles par rapport à la méridienne de St Pierre de Rome.

On préfere les observations faites à Rome ; & pourquoi.

30. Pour trouver la position de notre méridienne, nous avons fait six observations, trois à *Rimini*, & autant à *Rome*. Celles de *Rimini*, pour être les premieres en date, n'en sont pas plus sûres: non que nous y ayons négligé aucune précaution; mais à cause de l'incommodité du lieu où elles se faisoient; & que nous ne pouvions changer en un autre, à moins d'y transporter la pendule, & d'y prendre de nouvelles hauteurs correspondantes: ce qui n'étoit guere praticable dans la circonstance. Nous n'hésitons pas de donner la préférence aux observations de *Rome*, & c'est par celles-ci que je commence à entrer dans le détail.

Observations de Rome.

31. Le 14 septembre 1753 nous observâmes, à l'extrémité septentionale de la plate-forme du college romain, le moment où les deux bords du limbe du soleil couchant atteignoient le fil vertical; & nous en conclûmes ce qui suit, pour la distance du centre à l'arbre de *Soriano*.

Dist. du centre du Soleil à *Soriano*.	Même distance réduite à l'horison.
$5^h\ 56'\ 4''$ . . . . $66°\ 18'\ 44''$	$66°\ 18'\ 54''$
$6\ 0\ 20$ . . . . . $65\ 36\ 15$	$65\ 36\ 45$
$6\ 4\ 20$ . . . . . $64\ 55\ 18$	$64\ 55\ 54$

Ce qu'on en conclut.

32. La déclinaison du soleil étant supposée à six heures de $3°\ 11'\ 36''$, il suit qu'il décline de la méridienne des quantités suivantes:

$5^h\ 56'\ 4''$	$91°\ 43'\ 23''$
$6\ 0\ 20$	$92\ 26\ 1$
$6\ 4\ 20$	$93\ 6\ 48$

Donc

Donc la déclinaiſon de l'arbre eſt,

Par la premiere obſervation .	158°	2′	17″
Par la ſeconde	158	2	46
Par la troiſieme	158	2	42
Et prenant un milieu	158	2	35 (1)

33. Cette déclinaiſon, lorſqu'elle eſt orientale, doit être retranchée de 180°; & on l'y ajoutera, ſi elle eſt occidentale, comme dans le cas préſent. La différence dans le premier cas, & la ſomme dans le ſecond, eſt ce que nous appellerons dans la ſuite *angle de poſition ;* de ſorte que angle de poſition ne ſignifie autre choſe que la diſtance horizontale du vrai point du nord à un vertical quelconque, en tournant ſur la droite. Cette expreſſion m'a paru également propre à abréger le diſcours, & à y répandre de la clarté. Par exemple au tems de l'équinoxe, l'angle de poſition du ſoleil eſt à ſon lever de 90°, à midi de 180°, à ſon coucher de 270, & en Eté de 290, lorſque ſa déclinaiſon ſeptentrionale eſt de 20°. Ce que c'eſt qu'angle de poſition.

34. Le lieu où ſe ſont faites ces obſervations, eſt éloigné de 1535 pas du dôme de *Saint Pierre*, plus ſeptentrional de 224 pas, & plus occidental de 1518. Ainſi en tenant compte de cette diſtance, la parallaxe de *Soriano* ſera de 1° 53′ 28″, & la convergence des méridiens de 1′ 7″: leur différence eſt 1° 52′ 21″, qui, ajoutés à l'angle de poſition de *Soriano*, vu de la plate-forme, ſavoir 338° 2′ 35″, donne pour l'angle de poſition de cette montagne vue du dôme de *Saint Pierre*, Angles de poſition des ſtations.

(1) Il n'eſt point fait mention, dans cet ouvrage, d'un angle qui a été obſervé en même tems, & qui eſt néceſſaire pour orienter une nouvelle carte topographique de *Rome*, publiée par M. *J. B. Nolli*, dans laquelle on s'eſt contenté de marquer une bouſſole, ſans avoir égard à la déclinaiſon de l'aiguille aimantée. Cet angle eſt celui que forme le dôme de *St Pierre*, avec l'arbre de *Soriano*, vu de l'extrémité ſeptentrionale de la plate forme du college romain. Il s'eſt trouvé, ſuivant une lettre de la main du P. Maire, qui a été communiquée au traducteur, de 59° 40′ 4″, qui retranché de la déclinaiſon de l'arbre 158° 2′ 35″, laiſſe, pour la déclinaiſon du dôme vu de la plate-forme, 98° 22′ 31″.

339° 54′ 56″. De-là on tire ſans peine les autres angles de poſition, dont voici la liſte.

Du dôme de St Pierre,	le mont Genarro .	58°	54′	7″
Du mont Soriano, . . .	le Téſio	8	4	50
	le Fionchi	57	32	23
	le Genarro	127	42	42
Du Fionchi, ...	le Pennino	11	3	20
	le Genarro	177	26	46
	le Teſio	329	29	1
Du Teſio, ...	le Catria	44	8	52
	le Pennino	103	42	39
	le Carpegna . . .	358	27	30
Du Catria, ...	le Luro	6	19	47
	le Pennino	159	17	5
	le Carpegna . . .	321	15	39
Du Carpegna, ...	embouc. de l'Auſa.	35	14	46
	le Luro	71	19	38
De l'embouc. de l'Auſa,	le Luro	137	53	58

On a égard à la convergence des méridiens.

35. Tels ſeroient, dis-je, les angles de poſition, ſi l'on n'avoit égard à la convergence des méridiens. Mais il arriveroit de-là, comme nous le verrons bientôt, que l'embouchure de l'*Auſa* ſeroit encore de 7 ~~pas~~ $\frac{1}{8}$ plus orientale que le dôme de *Saint Pierre*. Ajoutant donc 5′ 34″ pour la convergence des méridiens dans cette latitude, l'angle de poſition du mont *Luro*, vu de cette embouchure, ſera de 137° 59′ 32″. Voyons maintenant quel doit être cet angle, ſuivant les obſervations de *Rimini*.

Obſervations de Rimini.

36. Le 23 de juillet nous obſervâmes à *Rimini*, le ſoleil levant, dans la maiſon de M. le Comte *Garampi*; & nous trouvâmes les diſtances ſuivantes du centre du ſoleil au ſignal du mont *Luro*:

Tems vrai.	Diſt. obſervées	réd. à l'horizon.
4h 34′ 43″ . . .	74° 19′ 0″ . . .	74° 19′ 3″
4 39 24	73 29 12	73 29 40
4 46 43	72 14 6	72 14 39

La déclinaiſon du ſoleil à 4h 39′ étant de 20° 4′ 0″, on a pour les angles de poſition du centre,

Dans la premiere obſervation, . 61° 2′ 52″
Dans la ſeconde, ... 61 51 46
Dans la troiſieme, ... 63 7 32

Ainſi l'angle de poſition du mont *Luro* eſt,

Par la premiere obſervation, . 135° 21′ 55″
Par la ſeconde, ... 135 21 26
Par la troiſieme, ... 135 22 11
Et prenant un milieu, ... 135 21 51

Cette maiſon eſt éloignée de l'embouchure de l'*Auſa* de 846.8 pas, ſavoir de 835.3 à l'occident, & de 139.1 au midi. De plus, la parallaxe du mont *Luro*, obſervée de cette montagne même, eſt de 2° 35′ 34″, & la convergence des méridiens de 39″. Ainſi ajoutant la ſomme de la parallaxe & de la convergence, on aura pour l'angle de poſition du mont *Luro*, vu de l'embouchure de l'*Auſa*, 137° 58′ 4″; au lieu que ſuivant les obſervations de Rome, il eſt de 137° 59′ 32″, de près d'une minute & demie plus grand. Je crois que la différence eût été moindre, ſi nous avions pu obſerver immédiatement les deux angles de poſition.

37. Soit tracée maintenant la méridienne du dôme de *St Pierre*, ſur laquelle on abaiſſe une perpendiculaire de l'embouchure de l'*Auſa*. La diſtance du dôme à la perpendiculaire, ſera de 161127.9, ou de 161130.9 pas, ſuivant qu'on déduira la direction de la méridienne des obſervations de *Rome*, ou de celles de *Rimini*; & prenant un milieu, elle eſt de 161129.4: d'où il faut ôter 5.7 pas, à cauſe que cette perpendiculaire coupe la méridienne en un point, qui eſt un peu plus ſeptentrional que celui où elle eſt coupée par le parallele de l'*Auſa*; & il reſte pour la diſtance des paralleles de l'embouchure de l'*Auſa* & du dôme de *Saint Pierre* 161123.7 pas. De plus, ſelon les obſervations de *Rome*, l'embouchure de l'*Auſa* eſt au moins de 7139.8 pas plus orientale que le dôme de *Saint Pierre*, & ſelon celles de *Rimini*, de 7070. Le milieu eſt 7105. Comparaiſon des obſervations;

38. En effet, par le n°. 28, le *Soriano* eſt éloigné du dôme de *Saint Pierre* de 40124.3 pas; & ſon angle de poſition, Preuve de ſon réſultat.

par rapport à ce dôme, est de 339° 54′ 56″. Donc il est plus septentrional que le dôme de 37686.5, & plus occidental de 13779.7. On trouvera de même que le *Tesio* est plus septentrional que le *Soriano* de 58983.3 pas, & plus oriental de 8304.0. Donc il est plus septentrional que le dôme de 96669.2, & plus occidental de 5405.7. Pareillement le *Carpegna* se trouve plus septentrional que le *Tesio* de 44988.0, & plus occidental de 1213. Donc il est plus septentrional que le dôme de 141657.2, & plus occidental de 6618.7. Enfin l'embouchure de l'*Ausa* se trouvera plus septentrionale que le *Carpegna* de 19470.7, & de 13758.5 plus orientale. Elle sera donc plus septentrionale que le dôme de 161127.9, & plus orientale de 7139.8. Au lieu de ces nombres, on auroit eu, suivant la remarque du n°. précédent, 161130.9 & 7070.1, si on s'en fût tenu aux observations de *Rimini*, & qu'on se fût contenté de rapprocher la méridienne du côté de *Rimini* de 1′ 28″ (1), sans avoir égard à la convergence des méridiens des montagnes.

Situation des montagnes, Pl. I, F. 2.

39. La table suivante renferme les distances de chaque station au parallele, & au méridien du dôme de *Saint Pierre*, calculées par la méthode du n°. précédent. Voyez la fig. II, pl. 1.

		Dist. au parall.		Dist. au mérid.	
Genarro	Ad	11846.3.	dB	19939.4	or.
Soriano	Ae	37686.5.	eC	13779.7	oc.
Fionchi	Af	57644.8.	fD	17596.5	or.
Pennino	Ag	89536.9.	gE	23827.8	or.
Tesio	Ah	96669.2.	hF	5405.7	oc.
Catria	Ai	116342.3.	iG	13690.8	or.
Carpegna	Al	141657.2.	lH	6618.7	oc.
Luro	Am	149774.1.	mI	17399.1	or.
Embouc. de l'Ausa .	An	161127.9.	nL	7139.8	or.

(1) Il y a dans le texte 29″; c'est une faute d'impression.

ARTICLE VII.

Détermination de la hauteur du pôle à Rome *& à* Rimini *par des observations faites dans ces deux villes.*

40. Nous avions choisi trois étoiles pour déterminer la différence de latitude de ces deux villes, savoir β du cocher, α du cygne, & μ de la grande ourse. La premiere se perdit dans les rayons du soleil, tandis que nous observions à *Rimini*: du moins elle avoit si peu de lumiere, qu'elle étoit totalement couverte par le fil, sans qu'on pût s'assurer du point précis auquel elle répondoit. Elle nous servit du moins à déterminer la latitude de *Rome*. Car comme elle étoit fort près du colure des solstices, son changement de déclinaison se faisoit avec tant de lenteur, qu'on le pouvoit tirer sans risque des observations faites par M. *Cassini*, vers l'an 1740, douze ans auparavant. Ajoutons que c'étoit la seule de nos étoiles qui eût été observée pour lors avec exactitude. Car il n'est pas question de μ de la grande ourse, dans ces observations: & pour α du cygne, on y trouve des différences, qui, quoique petites, ne sont pourtant pas à négliger; outre que si nous voulions réduire ces observations à la même époque, il seroit à craindre que l'inégalité de la précession des équinoxes n'y ajoutât de nouvelles erreurs. Choix des étoiles.

41. Pour tirer, des observations de β du cocher, la hauteur du pôle à *Rome*, il faut prendre la déclinaison de cette étoile au commencement de 1740, & en conclure ce qui suit. Hauteur du pôle à *Rome*.

Déclinaison observée le premier Janv. 1740 .	44°	52′	58″
De-là la déclinaison le 4 Mars 1752	44	53	18
Aberration vers le nord			7
Déclinaison apparente	44	53	25
Dist. au zénith corrigée par diverses observ. .	2	59	30
Hauteur du pôle au college romain	41	53	55

Il faut retrancher de cette hauteur une seconde, pour la nutation de l'axe, à laquelle M. *Cassini* n'a pu avoir égard, & qui fait que l'étoile étoit plus près du pôle au commencement de 1740, que dans les premiers jours de mars 1752.

De-là la hauteur du pôle au dôme de *Saint Pierre* eſt de 41° 54′ 7″, & aux thermes de Dioclétien, de 41° 54′ 10″, de 17″ plus petite que ne l'avoit trouvé M. *Bianchini*; ce qui ne doit point paroître étrange, puiſque outre la difficulté de diſtinguer l'ombre de la pénombre, il ſeroit aiſé, au beſoin, de prouver par de fortes raiſons, qu'avec le gnomon de Clément, on ne peut s'aſſurer, qu'à 15 ou 20 ſecondes près, de la latitude d'un lieu.

Différence de la hauteur du pôle à *Rimini*.

42. Je viens au détail des obſervations par leſquelles nous avons déterminé la différence des latitudes de *Rome* & de *Rimini*, de laquelle dépend ſurtout la meſure du dégré.

Par α du cygne.

Diſtances au zénith de α du cygne, obſervées à Rome.

					corrigées;			réd. au 4 mars.		
1752 Mars	4.	2°	34′	31.″5	2°	30′	17.″5	2°	30′	17.″5
	5.	2	34	31. 5	2	30	17. 5	2	30	17. 6
	6.	2	34	32. 2	2	30	18. 2	2	30	18. 5
	7.	2	34	30. 9	2	30	17. 5	2	30	17. 0
	14.	2	26	3. 0	2	30	17. 0	2	30	16. 7
	15.	2	26	2. 3	2	30	16. 3	2	30	18. 1

Dans les quatre premieres obſervations, le limbe du ſecteur étoit tourné à l'orient, & dans les ſuivantes à l'occident: ce qu'il faudra ſous-entendre dans la ſuite, toutes les fois que les obſervations différeront de quelques minutes: & afin de pouvoir placer de ſuite celles qui ont été faites dans une même ſituation de l'inſtrument, nous n'avons point ſuivi dans les tables l'ordre des jours ni des mois. La correction eſt à peu près par-tout la même, ſavoir d'environ 4′ 14″; ce qui eſt une ſuite de l'accord qui ſe trouve entre les obſervations. Quant à la réduction au 4 mars, nous n'avons eu égard dans ces obſervations, non plus que dans celles de *Rimini*, qu'à l'aberration de la lumiere (1), parceque dans tout cet intervalle

(1) L'Auteur ne parle ici que des mouvemens découverts par M. *Bradley*. Car il eſt évident, par la ſeule inſpection des tables, qu'il a eu auſſi égard à la préceſſion des équinoxes. Voyez L. 4, n°. 163.

de tems, les distances de nos étoiles au pôle étoient presque stationnaires, pour parler en termes d'astronomie, par rapport à la nutation de l'axe.

43. Distances au zénith de μ de la grande ourse, observées à *Rome*. Par μ de la grande ourse.

					corrigées ;			réd. au 4 mars.		
1752 Mars	4.	0°	54′	13.″3	0°	49′	59.″3	0°	49′	59″3
	16.	0	54	16. 5	0	50	2. 5	0	50	07
	7.	0	45	46. 1	0	50	0. 1	0	49	597
	9.	0	45	46. 1	0	50	0. 1	0	49	594
	18.	0	45	48. 5	0	50	2. 5	0	50	04

On voit que la moyenne distance de α du cygne au zénith, le 4 de mars, est de 2° 30′ 17″.9 ; & ajoutant la réfraction, de 2° 30′ 20″.7 : de même que la moyenne distance de μ de la grande ourse est de 49′ 59″.9 ; & ajoutant la réfraction, 50′ 0″.8. Venons maintenant à celles de *Rimini*.

Distances de α du cygne au zénith, observées à *Rimini*.

					corrigées ;			réd. au 4 de mars.		
1752 Mai	6	0°	26′	52.″5	0°	20′	31.″5	0°	20′	33.″7
	7	0	26	53. 2	0	20	32. 2	0	20	34. 3
	13	0	26	53. 3	0	20	32. 2	0	20	33. 5
	14	0	26	52. 9	0	20	31. 9	0	20	33. 1
Avril	30	0	14	11. 9	0	20	32. 9	0	20	35. 7
Mai	5	0	14	11. 9	0	20	32. 9	0	20	35. 2
	12	0	14	11. 2	0	20	32. 2	0	20	33. 6

Distances de μ de la grande ourse au zénith, observées à *Rimini*.

1752 Avril	29	1°	13′	16.″5	1°	19′	37.″5	1°	19′	45.″6
	30	1	13	15. 5	1	19	36. 5	1	19	44. 7
Mai	2	1	13	16. 5	1	19	37. 5	1	19	45. 9
	6	1	13	16. 9	1	19	37. 9	1	19	46. 8
Avril	25	1	25	57. 8	1	19	36. 8	1	19	44. 4
Mai	1	1	25	56. 3	1	19	35. 3	1	19	43. 7
Mai	3	1	25	57. 8	1	19	36. 8	1	19	45. 3

Ainsi l'erreur de l'instrument s'est trouvée ici de 6′ 21″, de

plus de deux minutes plus grande qu'à *Rome*, à cauſe de quelque petit dérangement arrivé dans l'objectif: & comme α du cygne étoit du côté du nord par rapport au zénith, & μ de l'ourſe du côté du ſud, les mouvemens apparens, qui y étoient produits par la préceſſion des équinoxes & l'aberration de la lumiere, ſe faiſoient en ſens contraire: ce qui ſert beaucoup à faire connoître au juſte l'amplitude de l'arc céleſte, par la comparaiſon des obſervations de chaque étoile. Car s'il y avoit eu quelques erreurs dans les obſervations, la comparaiſon les eût dû faire paroître doubles.

Latitude de *Rimini*.

44. Le moyen réſultat de toutes les obſervations de *Rimini*, réduites à la même époque, donne pour la diſtance de α du cygne au zénith 20′ 34″.2; à quoi ajoutant la réfraction, il vient 20′ 34″.6; qui, retranché de la diſtance de *Rome*, également augmentée de la réfraction, ſavoir de 2° 30′ 20″.7, laiſſe pour la différence de la latitude des obſervatoires de *Rome* & de *Rimini* 2° 9′ 46″.1. On doit retrancher la diſtance obſervée à *Rimini* de celle de *Rome*, parceque l'étoile étoit du côté du nord par rapport à l'une & à l'autre ſtation. Au contraire, μ de la grande ourſe s'étant trouvé entre les zéniths de *Rome* & de *Rimini*, on doit ajouter enſemble les diſtances corrigées par la réfraction, ſavoir 50′ 0″.8 & 1° 19′ 46″.6, (car la diſtance moyenne à *Rimini* eſt 1° 19′ 45″.2, à quoi on ajoute pour la réfraction 1″.4), pour avoir 2° 9′ 47″.4, différence de la latitude trouvée par les obſervations de cette étoile. Mais la premiere mérite la préférence à bien des égards, parcequ'il étoit beſoin le plus ſouvent d'éclairer les fils, pour obſerver le paſſage de μ de la grande ourſe au méridien, au lieu que α du cygne n'a jamais eu beſoin de ce ſecours; outre qu'il y a plus d'accord entre les obſervations de α du cygne, qu'entre celles de μ de l'ourſe. Au reſte, la différence ne va guere au-delà d'une ſeconde, & elle ſeroit beaucoup moindre ſi nous rejettions l'obſervation du 6 de mai. Ainſi des obſervations de α du cygne, & de la hauteur du pôle au college romain, qui s'eſt trouvée de 41° 53′ 54″, on déduit pour la hauteur du pôle au milieu de la place *Saint Antoine* de *Rimini*, 44° 3′ 40″.

45. Nous ſavions que, vers la fin de cette année 1752, ces

ces deux étoiles seroient dans des points du ciel fort différens de ceux où nous venions de les trouver ; car l'aberration de la lumiere & la précession des équinoxes concouroient à rapprocher du pôle α du cygne, & à en écarter μ de la grande ourse. Ainsi nous nous proposâmes d'observer, en ce tems-là même, la distance de ces étoiles au zénith, pour avoir une nouvelle preuve de la théorie de M. *Bradley*. C'est dans cette vue qu'au mois de décembre de la même année, nous fîmes à *Rome* les observations suivantes; car je ne m'arrête pas au détail de celles de novembre, qui sont en petit nombre, & qui s'accordent parfaitement avec celles-ci. Autres observations.

Pour α du cygne.

					corrigées ;			réd. au 4 de mars.		
Déc.	1	2°	37′	41.″7	2°	30′	55.″7	2°	30′	20.″0
	7	2	37	41.4	2	30	55.4	2	30	20.9
	10	2	37	40.7	2	30	54.7	2	30	20.8
	12	2	37	40.0	2	30	54.0	2	30	20.5
	18	2	37	37.8	2	30	51.8	2	30	19.7
	24	2	37	37.5	2	30	51.5	2	30	20.9
	8	2	24	9.5	2	30	55.5	2	30	21.2
	11	2	24	8.1	2	30	54.1	2	30	20.4
	19	2	24	6.4	2	30	52.4	2	30	20.5
	22	2	24	5.4	2	30	51.4	2	30	20.3
	26	2	24	4.8	2	30	50.8	2	30	20.7

Pour μ de la grande ourse.

					corrigées ;			réd. au 4 de mars.		
Déc.	1	0	56	23.5	0	49	37.5	0	49	58.7
	5	0	56	23.2	0	49	37.2	0	49	58.9
	9	0	56	22.2	0	49	36.1	0	49	58.3
	13	0	56	22.2	0	49	36.2	0	49	58.6
	4	0	42	50.7	0	49	36.7	0	49	58.3
	8	0	42	50.7	0	49	36.7	0	49	59.1
	10	0	42	49.7	0	49	35.7	0	49	57.9

46. Toute la différence qui se trouve entre ces distances réduites au 4 de mars, & les précédentes, vient de l'inégalité de la précession de l'équinoxe, & autres causes aussi peu Elles confirment l'hypothese de *Bradley*.

conſidérables. Mais puiſqu'elles s'accordent au point, que cette différence même n'eſt qu'une légere partie de l'eſpace dont l'une des étoiles s'eſt éloignée, l'autre rapprochée du pôle ; elles confirment d'une maniere non équivoque l'hypotheſe de M. *Bradley*. Du reſte, il eſt plus sûr de s'en tenir aux premieres obſervations, pour fixer la différence des latitudes, parcequ'elles ſe ſuivent de plus près, & que les étoiles varioient fort peu dans leur mouvement. En effet, la plus grande aberration de la queue du cygne, par rapport à la déclinaiſon, qui étoit ſeptentrionale, n'étoit alors que de 18″ 0‴, le ſoleil étant avancé de 28° 46′ dans le ſigne de la balance, au point diamétralement oppoſé vers le ſud ; & le mouvement annuel qui rapprochoit cette conſtellation du pôle, en ſuppoſant la préceſſion annuelle des équinoxes de 50″, & ſans aucune inégalité, étoit de 12″ 19‴. De même la plus grande aberration de μ de la grande ourſe étoit de 11″ 58‴, & l'étoile étoit preſqu'au ſolſtice, où elle ne devançoit le ſoleil que d'une heure, de ſorte que la plus grande aberration ſeptentrionale tomboit au ſolſtice d'Eté. Cette étoile ne s'écartoit chaque année, dans la même hypotheſe que ci-deſſus, que de 17″ 34‴ du pôle boréal.

ARTICLE VIII.

Valeur du dégré du méridien, déduite de nos meſures geométriques & de nos obſervations aſtronomiques.

Diſtance des paralleles des obſervatoires.

47. La diſtance des paralleles du dôme de *Saint Pierre* & de l'extrémité occidentale de la baſe de *Rimini* à l'embouchure de l'*Auſa*, eſt, ſuivant le n°. 37, de 161123.7 pas. La ſalle du college romain, où nous avions établi notre obſervatoire, étoit ſous le méridien de l'extrémité ſeptentrionale de la plate-forme, d'où elle étoit éloignée de 45 pas au ſud. Donc, par ce qui a été dit n°. 34, cet obſervatoire étoit de 269 pas plus méridional que le parallele du dôme de *Saint Pierre*. D'un autre côté, l'obſervatoire de *Rimini* (n°. 36) étoit pareillement de 139.1 pas plus méridional que l'embouchure de l'*Auſa*. Ajoutons la différence de ces nombres,

ſavoir 129.9 à 161123.7, & nous aurons pour la diſtance des paralleles des obſervatoires 161253.6.

48. Cette diſtance, ſuivant les obſervations de α du cygne, répond à un arc de 2 d. 9′ 46″.1 ; ſuivant celles de μ de la grande ourſe, à un arc de 2 d. 9′ 47″.4. Donc, par la premiere détermination, le dégré eſt de 74557.6 pas ; par la ſeconde de 74545.2 : & réduiſant (n°. 20) les pas romains en toiſes, on aura 56972.9 toiſes, & 56963.4 toiſes. Nous avons déja fait voir qu'on doit compter davantage ſur la premiere détermination : cependant pour donner quelque choſe à la ſeconde, nous ſuppoſerons le dégré, calculé ſur la baſe de *Rimini*, de 56970. Il reſte à voir quelle correction on y doit faire. Amplitude de l'arc.

49. La meſure actuelle de la baſe de *Rome*, a été trouvée (n°. 19) de 8034.67 pas ; & par une ſuite de triangles, dont le premier côté eſt la baſe de *Rimini*, ſa valeur a été conclue de 8033.4. Ainſi ſi l'on commençoit le calcul par la baſe de *Rome*, on trouveroit l'arc du méridien, & par conſéquent le dégré plus long, qu'au n°. précédent, dans la raiſon de ces nombres. Or 8033.4 eſt à 8034.67, comme 56970 à 56979, & prenant un milieu, on aura pour la valeur du dégré, calculé ſur les deux baſes, 56974.5 toiſes : à quoi, par la raiſon expoſée n°. 30, on doit vraiſemblablement ajouter une quantité égale à celle que nous venons de retrancher de la ſeconde détermination ; & par une concluſion finale, le dégré du méridien de *Rome*, depuis le 42me d. $\frac{1}{2}$ juſqu'au 43me $\frac{1}{2}$, ſera de 56979 toiſes. Valeur du dégré,

50. Ce dégré differe beaucoup de celui que M. *Caſſini* le fils a meſuré dans la partie méridionale de France, & à un demi dégré près, ſous le même parallele. Mais M. *Caſſini* fait lui-même peu de fond ſur ſa meſure ; & il n'y a aucune apparence que le dégré méridional de France differe ſi peu de celui de *Paris*. Rien certainement ne prouve mieux l'exactitude de cet Aſtronome, & de ceux qui ont obſervé avec lui, que d'avoir pu, avec le quart de cercle qu'ils ont employé, approcher de ſi près de la vraie diſtance de leurs paralleles : mais il ne paroît pas poſſible, en obſervant la hauteur des étoiles avec un inſtrument d'un ſi petit rayon, d'éviter des erreurs de trois à quatre ſecondes. Je ne m'arrête point ici à relever les avantages Beaucoup plus petit que celui de M. *Caſſini*,

d'un ſecteur qui étoit d'un rayon de moitié plus long; ce qui fait déja un objet conſidérable, & méritoit d'ailleurs, à tous égards, la préférence ſur les meilleurs quarts de cercles.

Dont la meſure paroît douteuſe,

51. Pour revenir à ce que nous diſions, je crois qu'il paſſe pour conſtant que le dégré du méridien en France, pays également éloigné de l'équateur & du pôle, eſt ſujet à de grandes variations ſuivant la diſtance. Car quoique les obſervations faites juſqu'à ce jour ne s'accordent avec aucune hypothèſe déterminée ; néanmoins juſqu'à ce qu'on démontre le contraire, cette hypotheſe doit être cenſée vraie exactement, où à très peu près; &, pour le cas dont il s'agit, ſuffiſamment prouvée par analogie, puiſque la même choſe arrive dans preſque tous les changemens, où la variation n'eſt jamais plus ſenſible qu'au point du milieu. Ainſi j'ai peine à croire que le dégré méridional de France ſoit auſſi approchant des dégrés contigus vers le nord, & auſſi différent du nôtre, que la meſure de M. *Caſſini* ſemble le repréſenter.

A moins qu'elle ne ſoit augmentée par l'action des pyrénées.

52. Mais l'on pourroit peut-être ſuppoſer avec autant de vraiſemblance, que les pyrénées, ſituées à l'extrémité méridionale de la méridienne de M. *Caſſini*, ont un peu attiré le fil à plomb, & par-là même rapproché ſon zénith du pôle, diminué l'amplitude de l'arc, & augmenté la meſure du dégré; & que l'interpoſition de l'Apennin a dû produire, dans nos dégrés d'Italie, un effet tout contraire. Car ſi l'Apennin a attiré le fil à plomb, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, il ſuit qu'il a augmenté la latitude de *Rimini* & diminué celle de *Rome*, & que le nombre de toiſes, qui ſe comptent d'une ville à l'autre, étant réparti ſur un arc d'une plus grande amplitude, le dégré en doit paroître plus petit. On peut du moins le ſuppoſer pour *Rimini*, qui eſt preſqu'au pied des montagnes, quoiqu'elles ne s'élevent pas d'abord à une aſſez grande hauteur, pour pouvoir produire un effet ſenſible : à l'égard de *Rome*, elle eſt trop éloignée de l'Apennin pour qu'on y puiſſe rien ſoupçonner de ſemblable. Quoi qu'il en ſoit, je me contente de propoſer là-deſſus mes conjectures, ſans entrer dans une diſſertation en forme, n'ayant d'autre but pour le préſent que de donner le détail de nos obſervations, & d'en tirer la meſure du dégré.

53. Nous nous ſommes ſervis, pour la réfraction, de la table inſérée dans la meſure de M *Caſſini*. Car, eût-il fallu en retrancher un huitieme du tout, le dégré eût à peine augmenté de plus de deux toiſes. Dès qu'il n'eſt queſtion que d'étoiles peu éloignées du zénith, on peut, en fait de réfraction, ſe ſervir indifféremment de toute ſorte de tables. Car quoique la réfraction varie à mêmes hauteurs, ſelon la différente conſtitution de l'atmoſphere, cette variation n'eſt point ſenſible dans les étoiles voiſines du zénith. De la réfraction.

ARTICLE IX.

Hauteurs des montagnes compriſes dans la ſuite des triangles.

54. La montagne de la Sibille eſt la plus haute de toutes celles de l'Etat de l'Egliſe. Je me ſuis ſervi de méthodes sûres pour en connoître la hauteur: elle s'eſt trouvée de quinze cents pas romains, peut-être un peu plus, au-deſſus du niveau de la mer: mais nous n'avons jamais eu occaſion de nous aſſurer de ſa hauteur préciſe; cette montagne étant fort éloignée des triangles du polygone, & ne nous étant pas même encore connue, dans le tems que nous prenions nos angles. De plus, la meſure des angles horizontaux emportoit preſque tout notre tems, & nous n'avions pas toujours le loiſir de meſurer les hauteurs & dépreſſions reſpectives de nos ſignaux, bien loin de pouvoir examiner les hauteurs des montagnes étrangeres à notre polygone. Montagne de la *Sibille*, la plus haute de l'Etat de l'Egliſe.

55. Le ſignal placé au ſommet de *Carpegna*, vu de l'extrémité occidentale de la baſe de *Rimini*, étoit à 87 d. 53′ du zénith; & cette extrémité vue de ce ſignal à 92 d. 24′ 10″. La ſomme de ces arcs contient 17′ 10″, par-deſſus 180 d., au lieu de 19′ 11″ qu'elle auroit eu à cette diſtance, ſans la réfraction. La réfraction eſt donc au moins de deux minutes; de maniere qu'on peut dire que chacun de ces deux objets eſt élevé d'une minute par la réfraction. Suppoſant donc que leur vraie diſtance au zénith ſoit de 87 d. 54′ 0″, & 92 d. 25′ 11″; il ſuit que la montagne eſt d'environ 940 pas au-deſſus du niveau de la mer. Hauteur du mont *Carpegna*.

Moyen d'évaluer la réfraction.

56. C'eſt une remarque que nous avons ſouvent faite, & qui ne nous eſt point particuliere, ſavoir qu'à moins que la diſtance ne ſoit fort grande, la réfraction des deux objets eſt à peu près égale à la neuvieme partie de l'arc intercepté. Ainſi on peut ſans riſque, après avoir réduit en arc de grand cercle la diſtance de la ſtation aux objets, en retrancher la dix-huitieme partie de chaque hauteur obſervée, & l'ajouter à chaque dépreſſion. L'obſervation ainſi corrigée donne à très peu près la hauteur ou dépreſſion d'un objet, par rapport au lieu d'où il eſt obſervé. On doit prendre garde néanmoins de ne pas faire ces ſortes d'obſervations de grand matin, ou ſur le ſoir, parceque la réfraction étant alors plus conſidérable, il y auroit une plus grande correction à faire à l'angle obſervé. Je dis plus : eût-on trouvé le total de la réfraction des deux objets, comme dans le n°. précédent, on ne pourroit en donner la moitié à chacun, s'il étoit vrai qu'on n'eût obſervé que l'un des deux aux heures que nous venons de dire; puiſqu'on en devroit conclure, par la même raiſon, que celui-ci auroit ſouffert une réfraction plus forte.

Autres hauteurs.

57. A l'égard des autres montagnes, nous avons déja remarqué (n°. 29) que nous n'avions pas toujours eu le loiſir d'obſerver réciproquement leurs hauteurs ou dépreſſions. C'eſt le cas de ſe ſervir de la méthode que nous venons de propoſer, laquelle n'expoſe à aucune erreur de conſéquence, & nous l'avons employée dans l'occaſion. La table ſuivante donne en pas romains & en toiſes les hauteurs, tant obſervées que conclues, de toutes nos montagnes au-deſſus du niveau de la mer.

		Pas.	Toiſes.
Hauteur perpend.	du mont Luro	194	148
	de Carpegna	940	718
	de Catria	1136	868
	de Teſio	626	478
	de Pennino	1057	808
	de Fionchi	907	693
	de Soriano	719	549
	de Genarro	857	654 $\frac{1}{2}$

58. De plus, le dôme de *Saint Pierre*, qui eſt une de nos principales ſtations, eſt de 80 pas au-deſſus du niveau de la mer; l'extrémité occidentale de la baſe de *Rome*, proche le tombeau de *Metella*, appellé aujourd'hui *Tête de bœuf*, de 26 pas; l'extrémité orientale, près de *Fratocchie*, de 93; & autant que nous l'avons pu connoître, par des obſervations faites à la hâte, le mont *S. Vicino* éloigné du *Catria* de 21 milles $\frac{1}{2}$ à l'orient d'*Hiver*, & le mont *Neron*, qui en eſt à près de 12 milles, du côté oppoſé, ont environ un mille de hauteur perpendiculaire. Le mont *Cucco*, proche *Coſtacciarro*, paroît un peu plus élevé; car, autant qu'il peut m'en ſouvenir, nous le vîmes du *Catria* au-deſſous de l'horizon, & ſur la même ligne que le *Pennino*; ainſi on peut lui donner une hauteur moyenne entre celle de *Pennino* & de *Catria*, plus approchante néanmoins de celle de *Catria*, dont il eſt éloigné de 7 milles. Suite.

59. La ſeconde pointe du *Catria*, appellée *Montaigu*, (n°. 12) m'a paru d'environ 10 ou 12 pas plus baſſe que la premiere: car je la voyois à quinze cents pas ou environ de cette premiere pointe, & à peu près à un demi dégré de dépreſſion. Ces montagnes ſont ſans comparaiſon les plus hautes de toute cette contrée d'Italie, quoiqu'elles n'approchent pas de la hauteur du mont de la *Sibille*, & de quelques montagnes de Toſcane & du royaume de *Naples*. Au ſujet de cette chaîne de montagnes qui ſéparent la Campanie de la Province maritime, comme elle étoit fort éloignée de nos triangles, je n'en puis rien dire d'aſſez sûr: on y voit entre autres une montagne à triple ſommet, appellée pour cela *De' tre Porroni*, mais plus proprement *Semprevivo*. Je la croirois volontiers preſque égale au *Catria*, parceque cette montagne, vue du mont *Albano*, paroît beaucoup plus haute que le *Genarro*, quoiqu'elle ſoit à même diſtance. Le mont *Albano* n'a pas plus de 600 pas de hauteur. Hauteurs eſtimées.

60. Mais nous n'étions pas chargés de meſurer la hauteur de toutes les montagnes de l'Etat de l'Egliſe, mais ſeulement les hauteurs ou dépreſſions reſpectives de nos ſignaux, & leur hauteur abſolue au-deſſus du niveau de la mer: par cette raiſon nous n'avons rien dit d'une autre chaîne de montagnes, Hauteurs omiſes.

qui s'étend au nord de *Genarro*, en tirant vers *Rieti*, dans laquelle on trouve plusieurs pointes, sans contredit plus hautes que le *Genarro*; ni de quantité d'autres montagnes, dont, entre autres inconvéniens, le sommet n'étoit marqué par aucun point fixe; ce qui empêchoit également d'en mesurer la distance & la hauteur.

Hauteur & abaissemens respectifs des signaux.

Du dôme de *St Pierre*, .	le Genarro	+1°	45′	15″
	le Soriano	+0	40	20
Du Genarro, ...	Dôme de St Pierre .	—2	1	40
	Soriano	—0	24	45
	Fionchi	—0	11	15
Du Soriano, ...	le Genarro	—0	5	35
	le Fionchi	+0	4	0
Du Fionchi, ...	Soriano	—0	32	25
	Genarro	—0	21	45
	Pennino	+0	4	0
Du Pennino, ...	Fionchi	—0	27	25
	Catria	+0	0	45
	Tesio	—1	0	0
Du Tesio, ...	Pennino	+0	38	30
	Catria	+0	54	5
Du Catria, ...	Tesio	—1	13	50
	Pennino	—0	19	45
	Carpegna	—0	32	40
Du Carpegna, ...	Catria	+0	9	0
	Tesio	—0	40	10
	Luro	—1	50	10
	Embouc. de l'Ausa .	—2	24	10
Du mont Luro, ...	Embouc. de l'Ausa .	—0	45	25
	Carpegna	+1	32	5
	Catria	+1	24	15
De l'embouc. de l'Ausa, .	Luro	+0	38	5
	Carpegna	+2	7	0

Fin du Livre II.

LIVRE

LIVRE TROISIEME.

Détail des opérations concernant la réformation de la Géographie de l'Etat de l'Egliſe.

Méthode pour la réformation de la carte.

1. Les obſervations tant aſtronomiques que géographiques, qui nous ont ſervi à déterminer la diſtance de *Rome* à *Rimini*, nous donnant non ſeulement la différence de la latitude de ces deux villes, mais encore la longitude & la latitude des montagnes intermédiaires, nous avons cru devoir profiter de l'occaſion pour fixer de plus la poſition des autres villes & principaux lieux de l'Etat de l'Egliſe. Car on ne pouvoit imaginer de méridien plus propre à cette fin que celui de *Rome*, qui traverſe cet Etat à peu près par le milieu, & d'où la vue s'étend de part & d'autre juſqu'aux frontieres. En effet, du ſommet de *Catria*, comme de celui de *Carpegna*, nous découvrions la montagne de l'*Aſcenſion*, communément appellée *Poleſio* du nom du village voiſin, & ſituée près d'*Aſcoli*. Du haut des montagnes de l'Apennin la vue s'étend ſur une plaine immenſe, où l'on découvre *Comacchio*, *Ferrare*, & juſqu'aux lieux les plus reculés de cette contrée. Ainſi quoique notre deſſein ne fût aucunement de nous ſervir pour cela du grand quart de cercle, tant à cauſe de la difficulté du tranſport, que parcequ'il faut beaucoup de tems pour obſerver avec un inſtrument d'un long rayon; néanmoins, comme moyennant une ou au plus deux obſervations exactes faites avec cet inſtrument, on pouvoit embraſſer toute la largeur de l'Etat eccléſiaſtique, & dès-lors fixer avec plus de préciſion la poſition des villes compriſes dans cet intervalle;

il n'y avoit pas lieu de craindre qu'avec un petit quart de cercle, nous fussions exposés à aucune erreur considérable dans le détail. Car si nous nous fussions contentés de déterminer la longitude & la latitude des lieux de proche en proche, les erreurs auroient pu s'accumuler, & devenir enfin très sensibles. C'est pourquoi il fallut s'y prendre d'une autre façon, & commencer par fixer la position réciproque des lieux les plus éloignés, pour y rapporter ensuite celle des autres lieux.

Situation du mont de l'Ascension.

2. Suivant cette méthode, nous avons déterminé par deux triangles la position de la montagne de l'*Ascension*, d'où dépendoit celle d'*Ascoli*. Car quoiqu'un seul triangle eût absolument pu y suffire, ses angles eussent été trop peu proportionnés, & eussent exposé à quelques erreurs. Les monts *Luro* & *Catria* nous servirent d'abord à trouver la distance, & l'angle de position du mont *Comero*, qui, formant ensuite avec le *Catria* & le mont de l'*Ascension*, un second triangle, nous fit connoître la vraie situation de cette montagne. Nous en avons usé de même par rapport aux autres montagnes qui bordent la carte, dont quelques-unes se voient d'assez loin: par exemple, cette montagne de Toscane, près de *Cetona*, dont le sommet, terminé en pointe, se voit, par un tems serein, fort distinctement de *Frascati*. Au reste, de ce grand nombre de montagnes, il en est très peu qui finissent en pointe, de maniere qu'elles présentent de tout côté à la vue le même point.

Erreurs des cartes anciennes.

3. Il ne nous étoit pas possible, en si peu de tems, de voir tout par nos yeux, ni de corriger absolument toutes les fautes des cartes géographiques qui ont paru jusqu'ici; & à moins d'associer un grand nombre de personnes à notre travail, nous ne pouvions décrire exactement le cours des torrens & des rivieres, en marquer tous les détours, toutes les sinuosités, & jusqu'aux plus petites inflexions. Nous nous proposâmes donc simplement de faire une carte générale, c'est-à-dire de fixer la longitude & la latitude des villes & des lieux que nous pourrions découvrir de ces mêmes points. Nous nous flattions que ce qui manqueroit de perfection à notre travail pourroit être suppléé par les cartes particulieres de chaque Province, n'étant pas à présumer qu'il se trouvât de grandes

erreurs dans de petites distances. Mais il y eut bien à décompter. Le défaut de ces cartes n'étoit pas seulement, comme nous nous l'étions figuré d'abord, d'être mal orientées; il y en avoit bien d'autres: par exemple, dans la carte de l'Ombrie, *Foligno* & *Nurcie* sont à 11 milles ou environ, de *Spolete*, la premiere à gauche, la seconde sur la droite; *Nocera*, qui est entre ces deux villes, se trouve à peu près dans la vraie direction qui lui convient, mais de dix milles trop proche de *Spolete*: il en est ainsi des autres cartes. On voit que les lieux intermédiaires ne doivent pas être mieux disposés, & ne sont même susceptibles d'aucun arrangement. Mais ce n'est pas là à beaucoup près le seul obstacle que nous eussions à surmonter. Car dans ces cartes il n'est pas rare de trouver des lieux qui devroient être placés entre deux villes, & qui les ont toutes deux du même côté. Je ne finirois point si je voulois rapporter en détail toutes les fautes de cette espece. On ne sera plus surpris de voir trois lieux former sur les cartes un triangle presque équilatéral, au lieu d'être, comme ils devroient, sur la même ligne: c'est ce que nous avons remarqué plus d'une fois. Or il ne pouvoit se faire que ces différentes sources d'erreurs ne répandissent de la confusion sur les distances des lieux adjacens. Ainsi les anciennes cartes ne pouvoient nous être d'aucune ressource pour déterminer la position d'un lieu que nous n'eussions pas vu nous-mêmes.

Difficultés de les corriger.

4. Ce cas n'étoit pourtant pas rare, & plusieurs raisons contribuoient à le rendre fréquent. En premier lieu, le tems que nous avions à passer sur les montagnes, où sont appuyés nos triangles, suffisoit à peine à mesurer les angles relatifs à la méridienne; nous étions même souvent en arriere de ce côté-là: & nous avions encore moins le loisir de faire des observations géographiques, quelque favorables d'ailleurs que fussent ces postes. De plus, pour retirer quelque fruit de ces observations, il nous eût fallu auparavant reconnoître par nous-mêmes tous les lieux des environs (ce que nous avons rarement eu occasion d'exécuter); car l'expérience nous a fait voir qu'on ne peut s'en rapporter là-dessus aux habitans voisins: souvent ils étoient si peu d'accord, qu'il étoit impossible de démêler la vérité, si tant est que quelqu'un l'eût

pour lui; ce qui n'eſt pas même certain: & lorſqu'ils étoient tous du même avis, nous ne pouvions encore nous aſſurer de rien. En effet, je pourrois rapporter un grand nombre d'erreurs en ce genre, & des plus palpables, appuyées ſur le rapport unanime de tous ces gens-là, & qui n'ont été reconnues que lorſqu'après avoir ſupputé de pluſieurs façons les mêmes diſtances, les différences ſenſibles des réſultats ne nous permettoient plus de douter qu'ils ne ſe fuſſent tous mépris.

Autres difficultés.

5. Euſſions-nous eu tout le loiſir d'obſerver à notre aiſe, & des gens aſſez intelligens, ou d'aſſez bonne foi, pour ne pas nous tromper; pluſieurs autres obſtacles venoient à la traverſe: tantôt un petit nuage interpoſé nous déroboit la vue d'une ville ou d'une montagne; tantôt l'ombre des montagnes, de celles mêmes qui n'étoient qu'à une médiocre diſtance, ne laiſſoit pas appercevoir le moindre veſtige des lieux qu'elles couvroient: de-là, pour terminer une ſtation, il eût preſque toujours fallu un jour entier; le matin étant plus propre à découvrir les lieux ſitués à l'occident, & le ſoir ceux qui ſont à l'orient: mais pour l'ordinaire nous n'avions pas le tems de faire de ſi longues ſtations, qui d'ailleurs n'euſſent abouti à rien, ſi, comme il arrive ſouvent, les rayons directs, qui devoient éclairer ces mêmes lieux, euſſent été interceptés par quelque nuage: nouvel obſtacle qui nous a ſouvent obligés d'abandonner une ſtation favorable ſans avoir pu relever tous les objets viſibles.

Moyen inſuffiſant pour les ſurmonter;

6. Le moyen qui nous parut le plus propre à remédier au mal, fut de choiſir, entre les lieux dont nous n'avions pu déterminer la poſition, un nombre de ſtations, où l'on feroit à notre priere une ſorte d'obſervation ſi ſimple, que nous ne comptions pas devoir être arrêtés nulle part, par la difficulté de trouver des gens qui en fuſſent capables. Cette méthode conſiſte à étendre une feuille de papier ſur un plan horizontal, & à y choiſir vers le milieu un point, d'où l'on tire des lignes vers les différens lieux, qu'on découvre de cette ſtation, en marquant ſur chaque ligne le nom du lieu. On devoit, ſuivant nos inſtructions, ſe ſervir d'une regle pour viſer, & prendre garde que la feuille ne changeât de poſition pendant l'opération. Cette maniere de prendre des angles n'approche pas de la préciſion du quart de cercle; mais elle ſuffit

ordinairement à de légeres distances, & ne produit dans la carte aucune erreur sensible. Nous écrivîmes à ce sujet de côté & d'autre une lettre circulaire ; mais nous ne nous fussions jamais imaginé qu'on pût répondre à une même lettre de tant de différentes façons : les uns se figurant du mystere, dans la chose du monde la plus simple, disoient ne connoître, dans tout le canton, aucun homme en état de se charger de la commission : d'autres s'étoient contentés de tirer d'une main tremblante, d'une tache d'encre qui occupoit beaucoup d'espace, des lignes telles quelles, avec les noms de chaque lieu, d'où l'on ne pouvoit conclure autre chose, sinon que tel endroit étoit à droite, & tel autre à gauche : il s'en est trouvé dont les lignes, d'ailleurs assez droites, n'aboutissoient point à un centre commun : nous eussions encore pu en tirer parti, si elles eussent été tirées dans une juste direction ; mais les unes, comme les autres, étoient si mal combinées, que des lieux diamétralement opposés sur le terrein, occupoient à peine, dans la figure, la quatrieme partie de l'horizon. Nous ne pouvions donc absolument rien tirer de ces observations, pour la valeur des angles. Il en est de même de quelques autres figures, où l'on avoit pris la précaution de marquer les quatre points cardinaux : je veux même croire que les lieux intermédiaires étoient à peu près dans la position qui leur convenoit ; mais on avoit donné à ces lieux une telle grandeur, qu'on ne savoit à quel point s'arrêter : car on avoit rapproché du centre, & sans doute pour plus grand éclaircissement, les lieux les plus voisins ; mais il en arrivoit que tel lieu occupoit dans la figure un angle de soixante dégrés, ou plus. Quoi que l'on entreprenne, dès que l'on n'en a pas une idée juste, on court risque de prendre les obstacles pour des moyens.

7. Il y en eut cependant qui nous comprirent, & exécuterent au mieux ce que nous desirions. Nous sommes ravis d'avoir une occasion de leur en témoigner publiquement notre reconnoissance : mais nous devons nous abstenir de les nommer, de crainte de faire tort aux autres, qui n'ont pas eu un moindre desir de nous obliger, quoique leur travail n'ait pas eu le même succès. Il ne pouvoit se faire néanmoins que ces observations nous fussent aussi utiles, que si nous les eussions

Et qui a réussi pourtant de tems à autre,

faites nous-mêmes; non seulement à cause de la différence qu'il y a entre une simple regle & la lunette d'un quart de cercle; mais encore parceque nous ne pouvions pas toujours choisir les meilleurs postes; & que ceux à qui nous avions écrit, ne pouvant savoir assez au juste les relevemens que nous avions plus à cœur, en faisoient beaucoup d'inutiles, & manquoient les plus nécessaires. De-là nous nous trouvions obligés de redemander de nouvelles observations, & répétitions sur répétitions; ce qui nous jettoit dans des longueurs sans fin. Telles opérations ont duré deux mois, qui, dans un jour serein, eussent été pour nous l'ouvrage de quelques heures. Il fallut cependant attendre les réponses, & surseoir le dessein de la carte, à moins d'y laisser de grandes lacunes en des endroits qui ne sont rien moins que déserts. Par ce moyen nous avons eu la position de presque tous les lieux du diocese de *S. Severino*, d'un grand nombre de ceux des diocèses d'*Ancone*, de *Jesi*, & de *Sinigaglia*, & de quelques autres; non compris quelques endroits, de la position desquels nous voulions nous assurer, dans la crainte où nous étions qu'il ne se fût glissé quelque erreur dans nos observations.

Mais qui d'ordinaire a trompé notre attente.

8. Nous n'avons pu avoir aucun éclaircissement sur ce qui concerne la partie septentrionale du territoire d'*Orviete*, où il se trouve cependant des postes fort avantageux, entre autres le mont *Pelia*. Nous n'avons pas mieux réussi au sujet des châteaux situés dans le territoire de *Cascia*, que nous n'avions pu observer par nous-mêmes, la saison étant déja trop avancée, & le tems qui restoit suffisant à peine à parcourir la Marche d'*Ancone*, dont nous avions encore à lever la carte. Nous n'avons pas été beaucoup mieux servis, dans d'autres pays de montagnes, où nous n'eussions pas eu besoin de secours, si le mauvais tems ne nous eût empêché d'observer. Je montai un jour pendant l'Eté sur le mont dit de *Neron*, avec grande espérance d'y prendre quantité de relevemens. Arrivé au sommet, je fus assailli d'une pluie affreuse, accompagnée d'une grande obscurité. La pluie dura plusieurs heures de suite; & peu s'en fallut qu'après m'avoir enlevé l'avantage du poste, elle ne m'ôtât encore la liberté du retour. Les jours suivans, le tems ne se rétablit point; & m'étant survenu une fievre con-

tractée par la fatigue du voyage du mont *Neron*, je fus contraint de renoncer à la partie. Je n'eus pas même le tems de monter sur le *Pelia*, comme je l'avois projetté, parcequ'il me restoit encore à voir quelques villes, dont je devois déterminer la position avant que de retourner à *Rome*, où je ne pouvois me dispenser de revenir avant les chaleurs. Il y a beaucoup d'autres montagnes, où nous sommes montés sans aucun fruit : la pluie, & plus souvent encore un brouillard épais, rendoient toutes nos tentatives inutiles. Je ne puis trop regretter en particulier la perte que nous fîmes sur le *Montrond*, près de *Visso*, d'où nous eussions pu, par un tems plus favorable, lever quantité de points, principalement cette partie de la Marche d'*Ancone*, qui est à la racine des montagnes. Nous pouvons en dire autant de plusieurs autres postes avantageux, surtout des villes de *Ferrare* & de *Comacchio*, où nous passâmes plusieurs jours à lutter contre les brouillards & la brume, & avec si peu de succès, que nous ne pûmes voir un seul instant *Bertinoro*, ni aucune montagne de l'*Apennin*. Heureusement la position de *Comacchio* nous étoit connue d'ailleurs, sans quoi nous serions encore à la chercher.

Difficultés dans les pays de plaines.

9. A propos de *Bertinoro*, on me permettra une remarque qui peut s'appliquer également à tout le pays de *Ferrare* : de vastes plaines, telles que celles de la Romagne, aux environs de *Bertinoro*, ne sont pas toujours les lieux les plus propres aux observations géographiques, à cause des arbres dont elles sont couvertes, & qui cachent les clochers moins élevés des villages, enforte que tout ce que l'on peut faire, est de fixer la longitude & la latitude des principales villes & bourgs : encore faut-il bien se donner de garde de confondre leurs clochers ; ce qui n'est que trop ordinaire, lorsqu'on n'en découvre que la moindre partie par-dessus les arbres. Quoique nous soyons persuadés d'avoir entrevu *Pompose* à travers les arbres, en observant du haut d'une tour de *Ferrare*, nous n'en sommes pas néanmoins aussi assurés, que si toute la campagne eût été découverte, & qu'il nous eût été permis d'y promener librement la vue.

10. Les cartes les plus récentes étoient une autre ressource,

Secours tiré des nouvelles cartes,

pour remplir les vuides de la nôtre, dans les endroits, où nous n'avions que le tems de relever les principaux points. Ces cartes ſont de différente eſpece, ſuivant qu'elles ont été faites par eſtime, ou par les regles d'arpentage, & avec la planchette des Arpenteurs, ou par les regles de trigonométrie. A l'égard des premieres, ſi elles ſont copiées ſur les anciennes, telle que la carte de la terre de *Sabine*, publiée depuis peu, on ne doit pas plus ſe fier aux copies qu'aux originaux: on doit même s'y fier moins, puiſque les changemens qu'on y a voulu faire de tems en tems, augmentent plutôt les erreurs qu'ils ne les diminuent: ainſi ces cartes ne pouvoient nous être d'aucun ſecours. Quant à celles qui ont été faites par une eſtime fondée en raiſon, & où l'on a eu égard au rapport de gens experts; rien n'empêche d'en tirer parti, pourvu qu'on n'y faſſe pas autant de fond que ſur des obſervations géographiques: nous en avons vu une de cette ſorte, faite à la main, comprenant une grande partie de la Marche d'*Ancone* orientale; & une carte particuliere du dioceſe d'*Aſcoli*, publiée au ſiecle paſſé, & que nous croyons avoir été faite de la même façon: nous avons pris dans celle-là la poſition des lieux de la Marche d'*Ancone*, qui ſont au pied des montagnes; ce ſont les ſeuls de cette Province que nous n'ayons pu obſerver; & de celle-ci la ſituation de pluſieurs châteaux du dioceſe d'*Aſcoli*: nous avons mis aux uns & aux autres un petit croiſſant, pour les diſtinguer des lieux dont la poſition eſt plus certaine, quoique ceux-ci ne paroiſſent pas non plus fort éloignés de la véritable.

Dont quelques-unes ſont moins sûres;

111. Je ne ſais ſi l'on pourroit mettre ſur la même ligne cette partie du Bolonois, qui eſt ſituée dans les vallées de l'Apennin. Nous ne pûmes la parcourir, étant preſſés d'aller prendre les angles de notre polygone; & nous n'avions perſonne à qui l'on en pût confier le ſoin. Nous ne crûmes pas avoir rien de mieux à faire que de copier en cet endroit une nouvelle carte du Duché de *Modene*, dans laquelle j'ai corrigé ſur les obſervations faites en divers voyages par ordre de l'Académie royale des Sciences, la latitude de *Loyan*. Cette carte n'eſt pas ſans défaut: nous y en avons nous-mêmes reconnu pluſieurs qui ne ſont point à négliger; mais par rapport à l'article en queſtion,

queſtion, nous avions lieu de croire que les erreurs étoient moins conſidérables. Quoi qu'il en ſoit, nous ne pouvions nous réſoudre à omettre cette contrée dans la carte de l'Etat de l'Egliſe ; non plus que la partie la plus montueuſe de la légation de *Ravenne*, depuis la riviere de *Savio* juſqu'au Bolonois, de crainte de laiſſer de trop grandes lacunes. Nous avons été obligés en ceci de paſſer par-deſſus la regle que nous nous étions preſcrite, & d'ajouter divers lieux dont la poſition nous étoit trop peu connue pour pouvoir aſſurer qu'elle approchât de la véritable. La ville de *Bertinoro*, & les montagnes de *Poggiolo* & *Oriolo*, ſont les ſeuls points que des obſervations faites à la hâte aient pu nous donner ; & ſi l'on en excepte trois ou quatre autres, que nous n'avons pu découvrir que d'une ſeule ſtation, tout le reſte ne s'eſt pas préſenté une ſeule fois à notre vue. Au reſte il ſeroit inutile de leur donner une marque particuliere pour les diſtinguer : il ſuffit d'avertir une fois pour toutes, que ces endroits ont beſoin de réforme (1).

D'autres un peu défectueuſes par la variation de la bouſſole.

12. Outre la carte de la grande plaine du Bolonois, qui a paru depuis peu, nous en avons vu deux autres qui ont été faites, à ce que je crois, avec la planchette, & dont aucune n'a encore été publiée : l'une comprend le pays de *Perouſe*, l'autre celui de *Camerine :* la premiere eſt du même Auteur, que la carte de la plaine du Bolonois ; & quoiqu'elle ſemble faite avec beaucoup de ſoin, elle a, ſi je ne me trompe, le défaut qui ſe gliſſe d'ordinaire dans ces ſortes de cartes, lorſqu'à raiſon de la grandeur du pays, on met beaucoup de tems à les lever : car on ne les oriente qu'avec la bouſſole, ſans avoir égard à la déclinaiſon de l'aiguille aimantée, qui varie ſouvent, & quelquefois aſſez conſidérablement, dans l'eſpace d'un petit nombre d'années : d'où il arrive ſouvent que deux lignes qui devroient être paralleles, ſont inclinées l'une ſur l'autre ; ce qui ne ſe peut faire ſans cauſer du dérangement dans la carte. Et qu'on ne croie pas pouvoir parer à cet inconvénient, au moyen de la planchette ; puiſque, ſans parler du reſte, le changement fréquent du plan de l'horizon met dans la néceſſité de recourir à la bouſſole. Je crois que c'eſt la vraie

(1) Dans la carte réduite, ces cantons ſont déſignés par une gravure plus foible.

cause des petites différences qui se trouvent entre cette carte & celle du cours du *Tibre*, surtout par rapport à la situation des villes de *Todi* & de *Perouse* : cependant nous eussions pu éclaircir davantage ce point, sans les obstacles dont j'ai parlé n°. 8. Nous avons donc pris dans cette carte la plus grande partie du pays de *Perouse* : seulement nous avons un peu rapproché de *Todi* sa partie méridionale, en conservant d'ailleurs, autant qu'il se pouvoit, la même proportion dans les distances réciproques des lieux. Nous ne sommes pas aussi assurés de leur position, que s'il nous avoit été permis de l'observer par nous-mêmes ; mais comme il n'est pas à présumer qu'il se trouve de grandes erreurs dans des lieux situés entre des villes connues, nous avons cru pouvoir nous dispenser d'y mettre un croissant, pour marquer l'incertitude de leur position.

Défaut particulier de la carte du pays de *Camerine*.

13. A l'égard du pays de *Camerine*, la carte que nous en avions représentoit de la même maniere les torrens qui arrosent cette contrée, & les limites des territoires de chaque lieu ; ce qui devoit nécessairement y jetter de la confusion. Nous en avons tiré, du mieux que nous avons pu, le cours de ces torrens : les cartes anciennes ne pouvant, à cet égard, nous être d'aucune ressource ; non plus que pour mettre les châteaux dans la position qui leur convient ; car c'est précisément l'endroit où elles sont plus défectueuses. S'il se trouve ici, ou ailleurs, quelques fautes dans la description des torrens, la nécessité où nous avons été réduits de nous passer de tout autre secours, pourra nous servir d'excuse ; d'autant plus, que nous n'étions pas chargés de les décrire.

Du Ferrarois.

14. Il nous est tombé entre les mains deux cartes du Ferrarois, que nous croirions volontiers avoir été faites avec un soin égal, si elles étoient plus conformes. Elles ne different cependant pas au point de nous laisser dans une incertitude absolue sur la situation des lieux. Nous savions à quoi nous en tenir là-dessus, ayant observé du haut d'une tour de *Ferrare* la plupart des lieux de cette contrée. Il est vrai que pour en déterminer au juste la position, il eût fallu les observer chacun d'une seconde station ; ce que le peu de tems qui nous restoit ne nous a permis de faire, que par rapport à un ou deux points ; encore les arbres, dont la plaine est toute

couverte, rendent-ils l'observation un peu douteuse : mais cette observation même, quoiqu'imparfaite, ajoutée aux cartes que nous avions, suffisoit pour nous rassurer contre le danger d'adopter de grandes erreurs. Le signe qui distingue les lieux dont la position est douteuse, doit ici être plutôt sous-entendu qu'exprimé ; parceque le petit nombre de points, que nous avons pu relever dans cette plage, ne sont pas assez sûrs, & que les autres ne nous paroissent pas extrêmement défectueux.

Cartes construites par la trigonométrie.

15. Quant aux cartes construites par les regles de trigonométrie, nous n'en avons pas beaucoup trouvé. Il y en a une du diocese de *Tivoli*, publiée depuis peu par l'Abbé de *Revillas* ; mais nos propres observations nous mettoient à peu près en état de nous en passer. Cette carte est très bonne vers le milieu : les bords nous ont paru moins exacts, en particulier par rapport à la position des villes de *Sublaque*, de *Monticello* & de *San Angelo*. Le P. *Magnalbi* Jésuite en a fait une des environs de *Fabriano*, qu'il n'a point rendue publique : nous en avons comparé les bords avec la position de *Fabriano* ; & leur justesse nous porte à croire que le reste n'est pas moins exact : nous n'y avons pris que la position de quelques châteaux, & de quelques principaux bourgs, que je n'avois pu découvrir à mon passage, ayant pour objet principal de fixer la longitude & la latitude de *Fabriano*. Nous y avons ajouté le Fort de *Belveder*, tiré des anciennes cartes, qui en cet endroit fourmillent de fautes ; je crois que nous eussions mieux fait de mettre ce lieu au rang de ceux dont nous n'avons point parlé.

On ne donne pas la suite des triangles, & pourquoi.

16. Pour revenir à nos observations géographiques, on souhaiteroit peut-être que nous eussions donné la suite des triangles qui nous ont servis à determiner la position des villes. La chose seroit faite, si ces triangles avoient formé une suite non interrompue. Mais pour la rendre telle, il eût fallu beaucoup d'autres préparatifs, qui eussent emporté bien du tems, sans contribuer en rien à la perfection de l'ouvrage. Je ne parle point de la difficulté que nous avons éprouvée plus d'une fois, en arrivant dans les villes, à reconnoître le point précis que nous avions observé de loin. Souvent deux tours vues de loin

ſe reſſembloient ſi fort, qu'à notre premiere arrivée dans ces lieux, nous ne pouvions reconnoître, qu'après un long examen, à laquelle des deux nous avions pointé. Nous devons épargner à nos lecteurs le détail des tentatives que nous avons faites pour éclaircir nos doutes. De plus (à moins de faire un long circuit,) nous ne pouvions fixer la longitude & la latitude de pluſieurs villes conſidérables, entre autres de *Perouſe* & d'*Orviete*, qu'en obſervant de-là trois objets donnés de poſition, pour en tirer la poſition du lieu même de l'obſervation. A l'égard de *Perouſe*, c'eſt un pur accident qui nous a obligés de recourir à cette méthode: il n'en eſt pas de même d'*Orviete* & de quelques autres villes, où ce fut pour nous une néceſſité, & où par conſéquent nous fûmes obligés d'interrompre la ſuite de nos triangles.

Exemple d'un problême dont les cas ſont fréquens.

17. On trouve dans les tranſactions philoſophiques, n. 69, une ſolution fort ſimple du problême, où, connoiſſant la poſition de trois lieux vus d'un quatrieme, on demande celle du quatrieme. *Collins*, qui en eſt l'auteur, en a fait l'application à ſix cas particuliers. Les plus ordinaires ſont le quatrieme & le cinquieme. Nous avons un exemple de celui-ci dans la détermination de la poſition de *Perouſe*. Soit (fig. 5. pl. 1.) T le mont *Teſio*, N le *Pennino* près de *Nocera*, C la montagne qui eſt proche *Cetona*. Soit encore TN de 30091 pas romains, CN de 57913; & dans le triangle TCN, l'angle en T = 136 d. 27′, en N = 22 d. 34′, en C = 20 d. 59′: tout ceci eſt ſuppoſé connu. Outre cela, du point P, qui eſt la ſtation de *Perouſe*, on a trouvé l'angle CPN = 160 d. 45′, & TPN = 107 d. 48′. Il s'agit de trouver la poſition de *Perouſe*. On imagine un cercle qui paſſe par les points C, P, N, & qui eſt rencontré en A par une ligne tirée par les points TP; & on mene les lignes CA, NA, CP, NP. L'angle CPN ayant été trouvé = 160 d. 45′, il s'enſuit, par la vingt-deuxieme du troiſieme livre d'Euclide, que l'angle CAN = 19 d. 15′, & NCA = APN = 72 d. 12′. De plus, dans le triangle ACN, on connoît, outre les angles, le côté CN = 57913. Donc AN = 167250. Ainſi dans le triangle TNA nous avons les côtés TN, NA, avec l'angle compris TNA, qui eſt la ſomme des angles TNC = 22 d. 34′, &

ANC, ou APC = 88 d. 33′, savoir 111 d. 7′. De-là on trouve l'angle ATN, ou PTN = 59 d. 55′. Enfin dans le triangle TNP, dont on connoît déja tous les angles, & le côté TN, on trouvera TP = 6723 ½ pas; & puisqu'on a l'angle de position de TN = 103 d. 45′, il ne reste plus qu'à y ajouter l'angle ATN ou PTN = 59 d. 55′, pour avoir l'angle de position TP = 163 d. 38′. D'où il est aisé de conclure que la perpendiculaire, tirée de la maison de ville de *Perouse*, où étoit notre station, sur la méridienne du dôme de *St Pierre*, coupe la méridienne à 90217 pas du dôme, & à 3511 de la maison de ville à l'orient.

Précautions à prendre dans ce problême.

18. Nous avons trouvé de la même façon la position d'*Orviete*, dont la distance à la méridienne est de 18355 pas, & du même côté; & cette perpendiculaire est à 61070 du dôme. On doit prendre garde néanmoins que les lieux connus ne soient tellement disposés, qu'un petit changement dans la station ne produise point une différence suffisante & assez sensible dans les angles interceptés par les lieux connus: car en ce cas il est évident qu'une légere erreur dans l'observation, en produiroit une grande dans la position de l'observateur. Or cela peut arriver de deux façons: premierement lorsque les lieux connus sont trop éloignés de la station; en second lieu lorsque deux cercles passant par la station & deux lieux connus, se coupent trop obliquement. C'étoit une nécessité pour nous de nous précautionner contre ces inconvéniens, chaque fois que nous avons été dans l'occasion d'user de la méthode.

Autre moyen de déterminer la position d'un lieu.

19. Cependant il y a eu des villes auxquelles nous n'avons pas même pu appliquer cette méthode, loin d'en pouvoir fixer la position par un simple triangle. De ce nombre est *Nurcie*, qui n'est pas à la vérité siege d'un épiscopat, mais d'une préfecture, & qui, à ce titre, mérite bien le nom de ville. Elle est située dans une plaine étroite, entourée de tous côtés de montagnes assez hautes. Peut-être eût-on pû, au moyen de trois de ces montagnes, déterminer la position de la ville; mais il eût fallu auparavant connoître celle de ces montagnes, & y placer des signaux qui pussent être apperçus de la ville même. De plus, comme le talus est fort

roide, les triangles euſſent eu beſoin d'une correction conſidérable. Nous nous ſommes bornés à une ſeule montagne, dont nous avons déterminé la poſition par la méthode ci-deſſus. Enſuite, par une baſe actuellement meſurée, nous avons calculé la diſtance de la montagne à la ville. A l'égard de la poſition, nous l'avons connue en meſurant de cette montagne même les angles que formoit la ville avec les objets connus.

Villes dont la poſition eſt moins sûre.

20. Il reſte à dire un mot de deux ou trois villes, dont la poſition eſt moins sûre, afin qu'on ſache ce qui nous a empêchés de la déterminer avec plus d'exactitude. La premiere eſt *Ponte-corvo*, ſituée hors des frontieres de l'Etat de l'Egliſe, quoiqu'elle ſoit une ville de ſa dépendance : nous n'eûmes pas le tems de nous y tranſporter, étant obligés de nous trouver à *Rome* à jour préfix ; ce qui étoit peu compatible avec un ſi grand détour : cependant comme nous avons découvert ce lieu à la diſtance de dix milles, & que nous l'avons obſervé par une méthode qui, bien qu'imparfaite, n'eſt pas ſujette à de grandes erreurs, nous ne croyons pas l'avoir beaucoup écartée de ſa vraie poſition. La ſeconde eſt la ville de *Cagli*, au ſujet de laquelle il nous eſt arrivé quelque choſe de ſemblable ; car on découvre du ſommet de *Catria* les environs de cette ville, & j'en ai cru voir une extrémité depuis *Feniglio*, Fort ruiné, près de *Pergola* ou *Pertia*. Cependant on doit moins s'en rapporter là-deſſus à la carte, qu'à la liſte qui eſt à la fin de ce livre ; & j'en dis autant de *Foſſombrone*, qu'une obſervation incertaine rapprocheroit trop du nord de la valeur de 20″. Le contraire eſt arrivé à *Citta di Caſtello*, que nous n'avons pu découvrir que du ſommet de *Teſio*, ſans pouvoir juger du point auquel elle répondoit dans cette direction, que par ſa diſtance à *Montalte*. Or il nous a fallu tirer la poſition de *Montalte* de la carte du pays de *Perouſe*, que nous avons déja vu n'être pas exempte de fautes. Quoiqu'à mon paſſage par cette ville, je n'aie point apperçu de-là trois objets connus, je me ſuis rappellé depuis qu'il y avoit au voiſinage un poſte avantageux ; & on y a fait l'obſervation que j'avois propoſée ; ce qui nous a donné une détermination un peu plus correcte que celle qui eſt marquée dans la carte ; on

la trouvera encore à la fin de ce livre. S'il étoit vrai cependant que, par le défaut d'observation, il y eût encore de l'erreur dans la position de ces trois villes, on sera bientôt à même d'y suppléer par une nouvelle carte de la légation d'*Urbin*, que j'espere, Dieu aidant, de lever au premier jour par des observations exactes, faites dans des postes plus favorables, & qui me sont aujourd'hui parfaitement connus : cette carte pourra encore servir à rectifier en partie la carte générale, & à y remplir quelques vuides (1).

Latitude d'Urbin selon *Bianchini*.

21. M. *Bianchini* a trouvé à *Urbin* la hauteur du pôle de 43 d. 48′ 32″, avec le gnomon de l'église *Saint François*, d'un tiers plus grand que le gnomon *Clémentin*. Cette observation est conforme à celle qui avoit été faite peu auparavant avec un secteur de bois, mais parfaitement bien divisé, dit M. *Bianchini*, & dont les pinnules étoient remplacées par une lunette, & par laquelle la latitude de ce lieu n'est augmentée que de 24″. Un si grand accord entre ces observations ne permet pas d'abord de douter de leur justesse, surtout si l'on fait attention qu'elles ont été faites par des méthodes fort différentes; aussi n'avois-je pas là-dessus le moindre doute avant mon arrivée dans cette ville : car qui se seroit imaginé qu'une lunette mal ajustée d'une part, & de l'autre un pavé incliné, eussent produit dans ces observations des erreurs égales & du même côté? C'est pourtant ce qu'on ne peut s'empêcher de reconnoître, à moins de vouloir renoncer à toutes les observations : car des observations sûres m'ont donné, pour la longitude & la latitude d'*Urbin*, les quantités suivantes.

Sa vraie latitude démontrée.

22. Le point A (fig. 6. pl. 1.) représente le signal qui est à l'embouchure de l'*Ausa*, L le mont *Luro*, M. la Citadelle de *St. Marin*, C le signal de *Carpegna*, V la ville d'*Urbin*. Des points A & M, menez deux lignes indéfinies ABEDF, MHG, paralleles à la méridienne du dôme de *Saint Pierre*, sur lesquelles vous abaisserez les perpendiculaires MB, LE,

(1) Nous avons déja dit qu'on s'est servi de cette nouvelle carte pour corriger celle qui se trouve à la tête de cette traduction.

CD, VF, VG. Joignez encore AM, AL, MV, MC, CV. Cela supposé, nous avons observé les angles suivans dans le triangle AML

L'ANGLE . . . . . { MAL . . . . . 79° 47′
AML 58 43
ALM 41 30

Donc, puisque AL = 15304 pas, & ML = 17622, on aura AM = 11864; & puisque AM est donnée de position, on aura aussi AB = 9390, & MB = 7253. Ensuite nous avons observé dans le triangle MLV

L'ANGLE . . . . . { LMV . . . . . 50° 57′
MLV 67 55
MVL 61 8

Donc MV = 18646, MG = 15699, GV = 10060, AF = AB + MG = 25089, FV = GV − MB = 2807. Cette position d'*Urbin* est confirmée par le triangle MCV, dans lequel, connoissant MH, HC, on a MC = 11997. Les angles observés sont

L'ANGLE . . . . . { VMC . . . . . 65° 29′
MCV 75 54
MVC 38 37

Donc MV = 18643; d'où l'on tire pour FV & AF les mêmes valeurs que ci-dessus.

Sa différence à celle de *Bianchini*.

23. Comme on n'est pas obligé ici de tenir compte de la convergence des méridiens, & que la ligne FV ne décline pas sensiblement du parallele, il suit de ce qui a été dit au livre précédent, que AF répond à un arc de 20′ 11″, qui, soustrait de la latitude du lieu A, savoir 44 d. 3′ 47″, laisse pour la latitude d'*Urbin* 43 d. 43′ 36″, de près de 5 minutes moindre que celle de M. *Bianchini*. Je ne prétends en aucune façon diminuer la réputation d'un Savant, qui a travaillé avec tant de succès à l'avancement de l'Astronomie & de la Géographie; ce que j'en dis n'est que pour prévenir le soupçon que son autorité pourroit répandre sur des observations qui ont l'avantage d'avoir été faites avec de meilleurs instrumens,

mens, & par une méthode beaucoup plus parfaite. Or il paroît que ſon erreur a été occaſionnée par l'inclinaiſon du pavé; car quoiqu'il pût s'y trouver une erreur de cinq, ſix ou ſept minutes, nous ne voyons pas qu'il ait eu la penſée d'y appliquer le niveau.

Latitudes peu sûres de *Bianchini*.

24. Les latitudes qu'il a aſſignées aux autres lieux, ſont différentes de celles que nous leur avons trouvées: mais il n'a employé, pour déterminer la poſition des lieux, que de petites baſes, qui paroiſſoient ſous des angles d'autant plus petits, qu'elles étoient vues de plus loin; ce qui ne pouvoit manquer de produire de grandes erreurs dans les diſtances. Cette méthode n'eſt bonne que pour meſurer des diſtances médiocres: hors de-là, on ne doit y recourir qu'au défaut de tout autre moyen; & alors même on doit bien prendre garde de compter trop ſur les diſtances conclues.

Avertiſſement ſur un cas particulier.

25. Je dois avertir en finiſſant, qu'il ſe peut bien que nous ayons quelquefois pris un lieu pour un autre, & qu'en conſéquence ſa poſition ne ſoit fauſſe dans la carte, s'il eſt vrai qu'elle ait été déterminée d'après une telle mépriſe. Mais je ne crains pas d'affirmer que ce doute ne peut au plus avoir lieu que par rapport à un très petit nombre d'endroits, & des moins conſidérables: car nous avons toujours été extrêmement en garde contre cette ſorte de danger; & je ne vois qu'une ſeule occaſion, où nous ne puiſſions nous flatter de nous en être totalement affranchis. Du mont *Pennecchia*, dans la terre de *Sabine*, nous découvrîmes ſûrement *Collalto*, que nous vîmes encore de *Guadagnolo*, à ce que nous aſſuroient des perſonnes qui croyoient s'y connoître. C'eſt ſur leur avis que nous avons fixé la poſition que nous lui avons donnée dans la carte: mais nous ne pouvons aſſurer qu'ils ne ſe ſoient point trompés; & nous n'avons aucune obſervation par laquelle nous puiſſions vérifier leur témoignage.

Il reſte à donner une table de la longitude & de la latitude de toutes les villes de l'Etat de l'Egliſe, déterminées par nos obſervations.

TABLE

DES Longitudes & Latitudes de toutes les Villes de l'État de l'Égliſe.

NOMS DES VILLES.	Longitude.			Latitude.		
ACQUA-PENDENTE	29°	21′	19″	42°	45′	23″
ALATRI	30	51	50	41	43	43
ALBE	30	10	31	41	43	50
AMELIE	29	56	1	42	33	32
ANAGNIE	30	40	11	41	44	41
ANCONE	31	1	22	43	37	54
ST ANGELO IN VADO	29	55	40	43	40	0
ASCOLI	31	5	0	42	51	24
ASSISE	30	7	43	43	4	22
BAGNAREA	29	38	22	42	38	9
BERTINORO	29	39	13	44	8	54
BOULOGNE	28	52	33	44	29	39
CAGLI	30	10	4	43	32	55
CAMERINE	30	56	33	43	6	25
CERVIA	29	51	58	44	15	31
CESENE	29	45	35	44	8	25
CINGOLI	30	44	5	43	22	57
CITTA DI CASTELLO	29	44	26	43	28	16
CITTA DELLA PIEVE	29	31	27	43	0	6
CIVITA CASTELLANA	29	55	29	42	17	7
CIVTA VECCHIA	29	17	0	42	5	24
COMACCHIO	29	42	17	44	40	27
CORNETO	29	15	30	42	15	23
FABRIANO	30	25	38	43	20	0
FAENZA	29	24	4	44	17	19
FANO	30	32	8	43	51	0
FERENTINO	30	46	48	41	41	36
FERMO	31	13	56	43	10	18
FERRARE	29	8	40	44	49	56
FOLIGNO	30	13	17	42	57	49
FORLI	29	33	44	44	13	25
FOSSOMBRONE	30	19	22	43	41	15
FRASCATI	30	12	4	41	48	22
FROSINONE	30	52	25	41	38	31
GUBBIO	30	5	27	43	20	35

NOMS des Villes.	Longitude.			Latitude.		
Jesi	30°	45′	53″	43°	31′	51″
Imola	29	13	49	44	21	32
St Leon	29	51	58	43	54	0
Lorette	31	7	20	43	27	0
Macerata	30	58	18	43	18	36
Magliano	30	0	14	42	21	45
Matelica	30	31	8	43	15	8
Montalte	31	7	44	42	59	44
Montefiascone	29	32	59	42	32	15
Narni	30	1	50	42	31	17
Nepi	29	51	25	42	14	39
Nocera	30	18	32	43	6	40
Nursie	30	37	18	42	47	55
Orte	29	54	55	42	27	30
Orviete	29	38	19	42	43	24
Osimo	30	59	38	43	29	36
Ostie	29	48	50	41	45	35
Preneste	30	24	55	41	50	3
Penna di Billi	29	47	10	43	29	23
Pergola	30	20	24	43	33	54
Perouse	29	54	28	43	6	46
Pesaro	30	25	51	43	55	1
Piperno	30	41	57	41	28	38
Ponte Corvo	31	11	48	41	28	5
Porto	29	46	40	41	46	44
Ravenne	29	23	6	44	25	5
Recanati	31	3	38	43	25	44
Rieti	30	22	40	42	24	25
Rimini	30	5	6	44	3	43
Ripa-transone	31	17	0	43	0	24
ROME	30	0	0	41	53	54
Sarcina	29	42	20	43	55	21
Segni	30	32	45	41	41	53
San Severino	30	42	5	43	14	17
Sezze	30	34	29	41	30	5
Sinigaglia	30	44	0	43	43	16
Spolette	30	15	31	42	44	50
Sutri	29	44	26	41	13	34
Terni	30	10	26	42	34	25
Terracine	30	45	37	41	18	14

NOMS DES VILLES.	Longitude.			Latitude.		
TIVOLI	30°	19′	3″	41°	57′	49″
TODI	29	55	26	42	46	45
TOLENTIN	30	48	28	45	12	30
TOSCANELLA	29	23	27	42	24	50
VELLETRI	30	17	45	41	41	16
VEROLI	30	56	16	41	41	41
VITERBE	29	37	49	42	24	54
URBANIE	30	3	27	43	39	56
URBIN	30	9	20	43	43	36

Fin du Livre III.

LIVRE QUATRIEME.

Deſcription & uſage des Inſtrumens.

1. JE me propoſe de donner ici une deſcription exacte des inſtrumens qui nous ont ſervi dans notre meſure. J'ajoute des figures qui pourront éclaircir ce que j'aurai à en dire. On trouvera dans ce livre pluſieurs points que je n'ai pas cru inutiles à la pratique de l'Aſtronomie. Je tâcherai de les expoſer avec le plus de netteté qu'il me ſera poſſible, quoique je ſente la difficulté qu'il y a de s'exprimer en latin ſur ces ſortes d'inſtrumens abſolument inconnus aux Anciens. Sujet du Livre.

2. Nous nous ſommes ſervis de trois eſpeces d'inſtrumens qui feront la matiere d'autant de chapitres. Le premier comprend ceux qui ſont d'uſage dans les obſervations aſtronomiques, opérations les plus délicates de toutes, puiſqu'on doit s'y efforcer d'éviter, s'il ſe peut, juſqu'à l'erreur d'une ſeconde : le ſecond, les inſtrumens qui ſervent à prendre les angles des triangles du polygone, & des autres triangles terreſtres : le troiſieme, ceux qui ont rapport à la meſure de la baſe. Et parcequ'on emploie le ſecteur dans les obſervations aſtronomiques, & le quart de cercle à meſurer les angles des triangles terreſtres ; je traiterai dans le premier chapitre du ſecteur, dans le ſecond du quart de cercle, & je ne négligerai rien de ce qui me paroîtra mériter quelque attention dans la conſtruction, la rectification & l'uſage de ces inſtrumens. Sa diviſion.

CHAPITRE PREMIER.

Du Secteur.

Du secteur & de ses différentes parties.

3. LE secteur en Géométrie est une portion de cercle terminée par deux rayons, & l'arc intercepté. Les Astronomes donnent aussi ce nom à un instrument composé d'un limbe circulaire de quelques dégrés, & d'une regle aboutissant d'une part au milieu du limbe qu'elle soutient, & de l'autre au centre de l'arc. J'ai préféré un limbe rectiligne, qui, posé à angles droits à l'extrémité d'une longue regle, représente plutôt une croix qu'un secteur. Je lui conserve néanmoins son premier nom, parcequ'il ne sert pas moins qu'un secteur proprement dit, à mesurer l'arc intercepté entre une étoile fixe & le zénith.

Sa position. Pl. 2. fig. 1. 2.

4. On le voit tout monté dans la planche 2. fig. 1., & dans une disposition convenable aux observations. Ses différentes parties sont représentées par les autres figures de la même planche.

Son support. Pl. 2. fig 1.

5. Dans la figure premiere a Aa′A′B est le support auquel est suspendu le secteur. On le voit encore plus distinctement dans la figure 2, que j'expliquerai à part; ce qu'on doit entendre aussi de toutes les autres pieces qui sont représentées séparément dans la planche.

Sa regle posée en travers avec son limbe. Pl. 2. fig. 1. 3. 4. 5. 6. 7.

6. Au point B est suspendue une forte regle de fer BDQ, représentée dans la figure 3, avec les petites lames qu'on y a ajoutées. Cette regle se termine en croix dans sa partie inférieure EQE′, à laquelle est attaché un limbe de cuivre, avec une lame mobile où sont marquées les divisions, & qui, par le moyen d'une vis placée en E avec un micrometre, peut être poussée à quelque distance du côté de E′. Le limbe est représenté dans la figure 3 en EE′, & plus distinctement avec ses divisions dans la figure 4 en EE′. La figure 5 montre en E′E le côté postérieur de la petite regle de fer posée en travers à l'extrémité de la premiere, avec la vis du micrometre. Cette partie de la vis, qui emporte avec soi la lame mobile, est représentée dans la figure 6; le cercle & l'aiguille ou l'index, dans la figure 7.

7. Sur la regle de fer eſt attachée en C une eſpece de boëte de laiton, portant une aiguille à laquelle eſt ſuſpendu le fil à plomb CM. On peut en ouvrant la boëte, écarter l'aiguille & découvrir le centre du ſecteur. Cette boëte eſt repréſentée dans la figure 8, fermée & vue obliquement; dans la figure 9, fermée & vue de côté; dans la figure 10, à demi ouverte, & vue de côté; dans la figure 3, entierement ouverte, & vue de face.

Centre du ſecteur. Pl. 2. F. 8. 9. 10. 3.

8. Dans la figure 1, D′, D, d′, d ſont de petites lames de cuivre, aſſez épaiſſes, placées à certaines diſtances, & ſoudées avec la regle de fer, du côté du limbe & du centre. Nous en ferons voir l'uſage dans la ſuite. On en a repréſenté une en D dans la figure 4.

Lames de la regle. Pl. 2. F. 1. 4.

9. De l'autre côté de la regle eſt la lunette HH′, dont l'objectif eſt placé en H d'une façon particuliere, que nous expliquerons dans les figures 11 & 12. Le tuyau HH′ eſt de fer blanc; il eſt attaché à la regle de fer par pluſieurs petits bras de cuivre, aſſez épais, & bien ſoudés de part & d'autre. Quoique ces bras ſoient très courts, il a été néceſſaire de les repréſenter un peu plus longs dans la figure, pour faire paroître tout le corps de la lunette. Vers le point H′ eſt une piece de cuivre, fortement ſerrée avec trois vis contre la regle de fer, portant des fils d'argent qui ſe coupent à angles droits, & qu'on doit placer au foyer de l'objectif. Cette piece eſt repréſentée dans la figure 13. Ce qui a rapport à la maniere de placer l'oculaire & d'éclairer les fils, ſe voit dans les figures 14 & 15.

Lunette. Pl. 2. F. 1, 11, 12,

10. Un peu au-deſſus de EE′ (fig. 1.) eſt une autre regle de fer FF′ poſée en travers ſur la regle BDQ, & par derriere, enſorte qu'elle paſſe entre cette regle & le tube: elle eſt ſerrée contre BDQ par deux vis qui l'attachent à une petite barre de fer recourbée, qui enveloppe des trois côtés la longue regle. Elle eſt repréſentée en FF′ (fig. 4.), & la figure 16 exprime une ſection de toutes ces pieces, perpendiculaire au plan du ſecteur.

Autre regle poſée en travers. Pl. 2. F. 1.

11. Derriere la regle BDQ eſt le tube HH′; & à la hauteur de FF′ eſt une autre barre de fer GG′, beaucoup plus groſſe & plus longue, placée à peu près dans la direction de

Les poids & les vis. Pl. 1. F. 1. 16.

la méridienne, & enfoncée dans le mur, ou dans la charpente; de telle ſorte qu'elle ne puiſſe être ébranlée. Il y a dans cette barre pluſieurs trous propres à recevoir les vis IF, I'F', qui aboutiſſent à la regle FF'. Outre cela deux fils FK, F'K', attachés par une extrémité à cette regle, paſſent par-deſſus la barre GG', & ſoutiennent deux poids de plomb LL' d'une médiocre groſſeur. La projection de la barre, des vis & des fils, ſe voit encore dans la figure 16.

Le petit bras. Pl. 2. F. 1. 18.

12. Enfin par le moyen de deux vis on ſerre fortement en R contre la barre l'extrémité du bras NOV, dont la partie NO eſt verticale, l'autre horizontale, & un peu élevée au-deſſus de la regle EE', afin que l'autre petit bras ST qu'on y attache puiſſe avoir dans ſa partie inférieure, en P, une ouverture qui réponde à la partie ſupérieure de la regle EE', & par laquelle on puiſſe faire paſſer une vis qui pouſſe le limbe de côté, & donner à l'inſtrument telle inclinaiſon qu'on voudra. Voyez la figure 18.

Suſpenſion du ſecteur. Pl. 2. F. 1.

13. Je n'ai fait juſqu'ici qu'indiquer ſommairement chaque piece; nous allons les expliquer en détail. En attendant il ne ſera pas hors de propos de remarquer que cette maniere de ſuſpendre le ſecteur eſt évidemment la plus avantageuſe; car il pend librement du point B, ſans courir aucun riſque de ſe courber: de plus, en pouſſant l'une des vis IF, I'F', on peut faire tourner l'inſtrument & le mettre dans une poſition parallele à la méridienne, enſuite pouſſant ou retirant les deux vis également, on le mettra dans une ſituation verticale que l'on connoîtra par le fil à plomb CM, qui doit effleurer le limbe EE' ſans y appuyer. Par ce moyen le plan du ſecteur ſe trouvera dans le plan du méridien. Or les poids L, L' l'appliqueront tellement contre les vis IF, I'F', que tandis que ces vis l'empêcheront d'approcher de la barre GG', les poids ne lui permettront pas de s'en écarter; d'où il arrivera que le ſecteur une fois placé dans le plan du méridien, il n'y aura plus d'accident capable de le déranger.

Inclinaiſon du ſecteur.

14. Le ſecteur ainſi diſpoſé, on lui donnera l'inclinaiſon qu'il doit avoir pour obſerver, laquelle répond à la diſtance de l'étoile au zénith; on choiſira parmi les trous de la barre GG', pour les vis IF, I'F', ceux qui conviennent à cette poſition,

position ; on attachera à cette barre le bras NOV du côté où eſt porté le ſecteur par ſon propre poids, & en OV le petit bras ST, de telle ſorte que la vis PE′ aboutiſſe à la partie ſupérieure de la face E′ de la regle EE′. On voit que cette vis détermine ſi bien la poſition du ſecteur, qu'il ne peut avoir par lui-même aucun mouvement, & qu'il n'y a que le mouvement de la vis qui le puiſſe incliner plus ou moins à volonté, afin qu'au moment où l'étoile entrera dans le champ de la lunette, on puiſſe l'amener à celui des fils placés au foyer de l'objectif, qui eſt perpendiculaire au plan du méridien. Par ce moyen on fera paſſer l'étoile dans le centre des fils ; & l'intervalle qui ſe trouvera entre le fil à plomb CM & le milieu du limbe EE′ (intervalle qu'on pourra connoître exactement, en avançant, par le moyen de la vis E, la lame mobile, juſqu'à ce que l'une de ſes diviſions rencontre le fil à plomb CM), déterminera la diſtance de l'étoile au zénith. Mais nous aurons encore occaſion de parler de ceci dans la ſuite.

15. Pour décrire chaque piece en particulier dans le même ordre que nous venons de les parcourir, il faut commencer par le ſupport aAa′A′B qui eſt repréſenté un peu plus diſtinctement dans la figure 2. AA′ eſt une piece de fer ou de bois, placée horizontalement, & dont on voit le côté vertical AA′. Elle eſt ſoutenue par le bras aa′ ; l'un & l'autre ſont fortement attachés au mur ou à la charpente. Les faces horizontales EE′, ee′ ſont percées d'un trou vertical, ſurmonté d'un anneau de fer EE′, convexe & poli dans ſa partie ſupérieure, pour retourner plus aiſément le ſecteur. On fait paſſer à travers cette ouverture & cet anneau juſqu'en F, une forte tige ou pivot eBè, qui étant percé d'un trou au-delà de l'anneau, reçoit une cheville de fer qui appuie ſur cet anneau, & porte tout le poids de la tige BF, & du ſecteur BD ſuſpendu à cette tige. Si la cheville eſt bien ronde, & auſſi polie que l'anneau, elle ne le touchera qu'en deux points, & l'on aura beaucoup de facilité à faire tourner la tige & le ſecteur autour de ſon axe.

Support du ſecteur. Pl. 2. F. 1. 2.

16. La tige eBè a une ouverture en B pour recevoir la regle BD du ſecteur. A l'extrémité B de cette regle eſt un

Sa ſuſpenſion. Pl. 2. F. 2.

trou rond, qui se voit en la figure 3, auquel répondent de part & d'autre deux autres ouvertures dans la piece eBè, par lesquelles, & par le trou de la regle on fait passer une cheville de fer Ii, arrêtée d'un côté par une portée i, & serrée de l'autre par une vis. Du reste on pourra donner à toutes les différentes parties de cet ajustement telles dimensions qu'on voudra, pourvu que la machine soit solide.

Sa position. Pl. 2. F. 1. 2.

17. On doit avoir attention en attachant le support, de le placer horizontalement, & à peu près dans la direction de la méridienne. On tournera ensuite la tige de fer sur son axe jusqu'à ce que son ouverture B soit sensiblement parallele à A'A, à peu près comme il est exprimé dans la figure 1, & non pas perpendiculaire comme dans la figure 2, afin qu'ayant fait entrer dans cette fente la regle BQ, le limbe & le plan du secteur soient à peu près dans le plan du méridien. Par ce moyen la lunette n'ira pas donner dans le support AA, soit qu'elle soit placée du côté de l'orient ou de l'occident; le limbe étant au contraire tourné à l'occident ou à l'orient; mais elle recevra librement tous les rayons, quoiqu'elle soit d'ailleurs assez près de la regle BDQ. Il est encore visible qu'on pourra aisément mouvoir le secteur autour de l'axe Ii, (fig. 2.), qu'on voit en B (fig. 1.), en le poussant de côté avec la vis PE'.

Retournement du secteur.

18. Or pour la vérification de l'instrument, dont nous parlerons plus bas, il faut le tourner alternativement sur les deux faces opposées, à l'orient & à l'occident, & faire ensorte qu'il représente dans les deux situations la même étoile au centre des fils. C'est ce qu'on pourra faire aisément, par la facilité qu'on a de mouvoir la tige eBè sur son axe BF: mais il faut dans cette opération commencer par décharger la regle FF' des poids LKF, L'K'F'. Pour n'être pas obligé de porter les poids L, L' sur la barre GG', & de les placer aux points K, K', j'avois attaché à l'extrémité L du fil KL un crochet, & au poids L un anneau. De cette sorte on ôtoit & remettoit facilement les poids, & ayant retiré vers F les fils LK avec leurs crochets, le retournement du secteur étoit l'affaire d'un moment.

Inconvénient à éviter.

19. L'inconvénient unique étoit que les regles FF', & BDQ, au lieu d'être dans le même plan, étoient appliquées

l'une contre l'autre, si le secteur, avant le retournement, avoit été mis dans le plan du méridien, il devoit, après le retournement, être un peu incliné. Mais on y remédioit promptement, en avançant ou reculant les vis IF; le nombre de tours qu'il falloit leur donner pour cela, ne nous étoit pas inconnu, & il étoit toujours le même; il répondoit à la moitié de l'épaisseur des deux regles prises ensemble. Cela fait, nous observions derechef le fil à plomb, & l'instrument étoit bientôt rétabli dans son premier état. Il seroit aisé d'obvier à ce léger inconvénient, en mettant les regles dans le même plan; ce qui donneroit la facilité d'observer dans le même jour, la même étoile dans l'une & l'autre position. Mais nous aurons encore occasion d'en parler dans la suite.

Du rayon. Pl. 2. F. 1.

20. Parlons maintenant de la regle BQ (fig. 1.); elle a un peu plus de 9 pieds de long, (j'entends des pieds de Roi, mesure de *Paris*, & je me servirai ordinairement de cette mesure, qui est divisée, comme l'on sait, en pouces & en lignes, & qui fait environ un palme & demi). Le rayon du secteur, ou l'intervalle de son centre C au milieu de la lame mobile EE', est exactement de neuf pieds. La largeur de la regle est de deux pouces sur cinq lignes d'épaisseur. La regle EE' a 14 pouces en longueur, près de 3 pouces en largeur, & la même épaisseur que BQ.

De l'inclinaison. Pl. 2. F. 2.

21. Le trou qui est à l'extrémité B doit être bien rond, bien poli, & un peu plus grand que celui du cilyndre Ii (fig. 2.) qu'on doit y faire entrer; ces précautions sont nécessaires pour donner plus de jeu à la machine, & pour pouvoir plus aisément, au moyen de la vis PE, incliner le secteur sur le côté.

Du limbe. Pl 2. F. 1. 4.

22. A l'autre extrémité (fig. 1.) est le limbe EE', qu'il faut considérer en détail. Il est représenté dans la figure 4. Sur la regle de fer AA'C'C, dont la largeur AC est de près de 3 pouces, on a soudé une lame de cuivre GG'C'C de 21 lignes de largeur, & de l'épaisseur de deux lignes, sur laquelle on a appliqué trois autres lames de même métal, GG'I'I, II'O'O, OO'C'C, qui ont ensemble la même largeur, c'est-à-dire 7 lignes chacune, & 3 lignes d'épaisseur. De ces trois lames, la premiere & la derniere sont soudées à la lame intérieure,

& auſſi immobiles qu'elle : celle du milieu, ſavoir II'O'O, quoique retenue entre les deux autres comme dans une couliſſe, a néanmoins aſſez de jeu pour pouvoir être pouſſée de E en E' de près de 1 pouce, par la vis E. Nous expliquerons bientôt tout ce méchaniſme. Remarquons d'abord que cette lame contient les diviſions. Sa largeur eſt partagée en quatre par 3 lignes paralleles aux lignes II', OO' qui la terminent. La ligne du milieu tient la place de l'arc du ſecteur ; elle en eſt la tangente. Nous l'appellerons *la ligne du milieu de la lame mobile*. Elle eſt diviſée en pouces & demi-pouces ; chaque demi-pouce eſt encore diviſé en trois parties de 2 lignes chacune. Ces intervalles ſont diſtingués par des lignes perpendiculaires à la ligne du milieu de la lame mobile : celles qui marquent les pouces occupent toute la largeur de la lame ; celles qui marquent les demi-pouces n'occupent que la largeur des trois paralleles ; enfin celles qui déſignent les intervalles de deux lignes, ne font préciſément que couper la ligne du milieu.

De la lame mobile. Pl. 2. F. 5.

23. Pour voir maintenant comment on fait mouvoir avec la vis E la lame du milieu, voyez la figure 5. La petite lame de laiton AB eſt attachée par deux vis à la regle de fer, & repliée en équerre en D, avec un trou pour recevoir la vis EF. Cette vis paſſe dans un écrou P, qui eſt au revers de la lame mobile. La regle de fer a une large ouverture en forme de couliſſe, repréſentée dans la figure 5. La lame intérieure, ſur laquelle gliſſe la lame mobile, a auſſi une ouverture pareille, mais plus étroite ; elle eſt ici couverte par la vis. L'écrou P eſt fixé ſur une lame attachée elle-même à la lame mobile par deux vis qui traverſent la petite fente à droite & à gauche de l'écrou P, du côté de E & du côté de F. Lorſqu'on tourne la vis E, on fait avancer vers F l'écrou P qui entraîne avec ſoi la lame mobile ; mais pour que cette lame ne faſſe que gliſſer ſur la lame intérieure, ſans s'en écarter, elle eſt retenue par des curſeurs M, M', attachés par des vis à la lame mobile, & à travers des ouvertures ſemblables aux précédentes ; c'eſt-à-dire qu'après avoir fait dans la regle de fer des ouvertures HIKL, H'I'K'L' aſſez larges pour ne pas gêner le curſeur, on en fait dans la lame intérieure de

plus étroites *no*, *n'o'*, par où passent les vis qui attachent aux curseurs la lame mobile. Car les curseurs M, M' glissent sur la lame intérieure, dans la longueur des ouverture HIKL, H'I'K'L', & empêchent la lame mobile de s'en écarter.

Du curseur. Pl. 2. F. 6.

24. La figure 6 représente beaucoup plus distinctement l'écrou P avec ses fentes & ses vis. QQ'R'R est l'ouverture faite dans la regle de fer, & à travers laquelle on voit en partie le revers de la lame intérieure. SS'T'T est la fente beaucoup plus petite, faite dans la lame intérieure. VXX'V' est la petite lame qui porte l'écrou P, & qui, au moyen de deux vis VX, V'X' est attachée à la lame mobile, qu'on apperçoit à travers la coulisse SS'T'T.

Du micrometre. Pl. 2. F. 4. 5. 6. 7.

25. Il est donc clair qu'en tournant & retournant la vis E (fig. 4), on fait avancer & reculer les trois curseurs P, M, M' sur la lame intérieure & fixe GG'C'C, & entre les lames GG'I'I, CC'O'O également immobiles, & que ces curseurs emportent avec eux la lame mobile. Or la vis E a un index EI (fig. 7.), dont la pointe parcourt, à chaque tour de la vis, la circonférence du cercle ICAG. Le diametre du cercle est exprimé (fig. 4.) par la ligne CG. La circonférence est divisée (fig. 7.) en 180 parties, qui font chacune la valeur de deux dégrés, & qui sont numérotées de dix en dix. On connoît à quel tour de la vis on en est, ou de combien de pas le curseur est avancé, par l'index Bb (fig. 4.) qui est attaché par une vis à la lame fixe GG'I'I; les intervalles de chaque révolution entiere étant marqués sur le bord de la lame mobile de b en D. Car c'est à ce nombre de révolutions entieres que répond tout l'espace qu'on peut faire parcourir à la lame mobile, lequel est égal à la longueur de tous les pas de la vis qui peuvent mouvoir le curseur P (fig. 5. & 6.) dans chaque révolution. Cinq de ces intervalles égaloient presque dans notre secteur un intervalle de deux lignes, & chaque tour de la vis faisoit presque parcourir aux curseurs & à la lame mobile la cinquieme partie de cet intervalle, de sorte qu'il falloit presque quinze tours de vis pour avancer la lame d'un demi-pouce.

26. Pour avoir exactement les divisions qui répondent aux révolutions entieres, il faut commencer par amener la lame

De la maniere de s'en servir. Pl. 2. F. 4.

mobile contre le cercle CG (fig. 4) jusqu'à ce qu'elle le touche par son extrémité IO, & marquer sur cette lame le point b qui répond à la pointe de l'index Bb; ensuite on tournera la vis pour repousser la lame aussi loin qu'elle pourra aller du côté de E', & on marquera à la fin de chaque tour le point désigné par l'index. De cette sorte il suffira dans les opérations d'examiner la position de l'index, pour connoître le nombre des révolutions entieres.

Son exacte précision. Pl. 2. F. 1, 2, 3, 4, 5, 7.

27. Ainsi la vis E (fig. 4.), avec l'index Bb, & la division de la circonférence AGIC (fig. 7.), fait la fonction d'un micrometre. Car, comme nous le verrons plus bas, lorsque l'index EI (fig. 7.) avance de trois parties de cette division, l'espace parcouru par la lame mobile est à peu près la tangente d'une seconde sur le cercle dont le centre est en C (fig. 1.). Notre Artiste s'étoit signalé dans la construction de toutes ces pieces. En effet la lame mobile ne s'écartoit jamais de la lame intérieure, & les filets de la vis EF (fig. 5.) & de son écrou P étoient si égaux dans toutes leurs parties, qu'à chaque mouvement égal de la vis sur son axe répondoit toujours un mouvement égal de la lame mobile, en quoi consiste surtout la perfection de cet instrument.

Des deux fenêtres. Pl. 2. F. 4.

28. Il reste à voir ce que signifient les fenêtres *io*, *i'o'* (fig. 4.) Ce sont en effet de petites fenêtres que j'ai ajoutées, non que je prétendisse en faire aucun usage pour moi, mais pour lever à d'autres un scrupule astronomique ou méchanique. Ce sont deux verres enchassés dans des cadres de laiton, qui débordent de part & d'autre la lame mobile, & qui sont attachés par des vis aux lames fixes en *i*, *o*, & *i'*, *o'*. Chaque verre est marqué par derriere d'une petite ligne droite très déliée, perpendiculaire à la ligne du milieu EE', & qui touche la lame mobile; de sorte que sans aucun danger de parallaxe, on peut connoître la situation de la vis E, & de l'index EI (fig. 7.) dans laquelle cette petite ligne répond à l'une des divisions de la lame mobile, qui glisse sous le verre à mesure qu'on tourne la vis E.

Distance des lignes gravées sur les verres;

29. J'avois fait ensorte que ces lignes répondissent aux divisions qui sont éloignées du milieu de la lame, ou de l'extrémité du rayon, d'environ 6 pouces. Il eût été difficile de les

placer préciſément à la diſtance d'un pied l'une de l'autre; mais il étoit aiſé de connoître, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, ce qui pouvoit s'en manquer. Il ſuffiſoit pour cela d'avancer ou reculer avec la vis la lame mobile, juſqu'à ce que l'extrémité du pied atteignît la ligne tracée ſur le premier verre, en remarquant au moment de cet attouchement la poſition de l'index; & après avoir répété pluſieurs fois cette opération pour plus grande ſûreté, de faire la même choſe à l'égard du ſecond verre. Car ſi l'on obſervoit, dans l'un & l'autre cas, la même poſition de l'index, c'étoit une preuve que les intervalles étoient égaux; & s'il en arrivoit autrement, la différence des nombres marqués par l'index faiſoit voir la différence des intervalles.

Leur uſage.

30. J'avois pris cette précaution pour conſtater, par une obſervation immédiate, une choſe dont j'étois convaincu d'ailleurs, ſavoir qu'on n'a rien à craindre ici de l'excès de la dilatation du laiton ſur celle du fer, cauſée par la chaleur. Car les regles du ſecteur ſont de fer, & la lame mobile de laiton. Or il eſt évidemment prouvé par les obſervations, que la chaleur dilate plus le laiton que le fer; d'où il ſuit que ces parties de la lame mobile ſeront plus dilatées que celles du rayon du ſecteur, ou de la diſtance du centre, d'où pend le fil à plomb, & qu'elles doivent donner par conſéquent, à proportion de la chaleur, de plus longues tangentes. Mais il eſt conſtant que dans un eſpace ſi petit, par rapport au rayon, l'excès de dilatation eſt ſi peu de choſe, qu'il ne peut occaſionner aucune erreur ſenſible dans les obſervations. Malgré cela j'ai cru qu'il valoit encore mieux éclaircir ce point, s'il ſe pouvoit, par une obſervation immédiate, que par les raiſons dont on a coutume de l'appuyer. Or nous avons éprouvé, comme je le dirai en ſon lieu, en tranſportant notre ſecteur de *Rome* à *Rimini*, & de *Rimini* à *Rome*, que malgré la différence de la chaleur, l'intervalle des verres étoit toujours le même par rapport à la lame mobile; d'où il ſuit que cette lame de laiton n'étoit pas ſenſiblement plus dilatée que la regle de fer, & les lames de laiton ſoudées avec elle; que par conſéquent chaque partie de la lame mobile donnoit toujours les mêmes angles.

31. J'ai expliqué ce qui regarde le limbe, les lames qui y

De la boëte placée au centre du secteur. Pl. 2. F. 1.

sont soudées, la lame mobile avec ses divisions, & son mouvement, le micrometre, l'index & les verres; il faut parler maintenant de la petite boëte fixée en C contre la regle de fer, & où se trouve le centre du secteur, avec une aiguille d'où pend le fil à plomb: c'est ce que je ferai le plus brievement qu'il sera possible.

Suite. Pl. 2. F. 1. 8.

32. Sur une petite lame de cuivre bien polie, est marqué un point qui indique le centre, & dans lequel on fait reposer la pointe d'une aiguille extrêmement déliée. On peut cependant l'en retirer, en ouvrant la boëte dont nous allons donner la description; nous parlerons ensuite de la maniere dont elle doit être placée pour être dans une position convenable. Cette boëte est représentée en grand dans la figure 8, & dans la même situation que dans la figure 1. a'A'Bba est une lame de cuivre quarrée, étroitement serrée avec des vis contre la regle de fer. On y attache perpendiculairement deux consoles ogaeKEDH, a'e'K'E'D'H', qui ont chacune une ouverture ronde pour recevoir l'axe du cylindre KEE'K'. On voit une de ces ouvertures en I. Au cylindre est attachée la lame EDFGMCM'G'F'D'E', qui sert de porte à la boëte, & qui étant fermée, est parallele à la lame AA'B. Sa partie G'M'MG entre dans une échancrure faite à une lame perpendiculaire à AA'B, savoir MGFfbBNM.. M'G'F'N'. On place encore perpendiculairement sur la lame AA'B, depuis le pied a'e' de la console K'H'D'E' jusqu'à la lame F'G'M'N', une autre lame plus mince, & dont la face extérieure s'éleve autant au-dessus de la superficie A'AB à laquelle elle est parallele, que la surface du limbe est éloignée de celle de la regle de fer. C'est sur cette face extérieure qu'est marqué le point qui détermine le centre. Ce point répond dans la figure 8 au point R', que nous avons marqué ici sur la superficie D'DFF' de la lame D'DFGCG'F'D', contre laquelle est attachée perpendiculairement sur la face opposée, & vis-à-vis de R', la tête de l'aiguille.

Suite. F. 3. 8, 9, 10.

33. L'aiguille se voit dans la figure 9, qui représente une section de la boëte, perpendiculaire au plan A'AB de la figure 8. Le reste n'a pas besoin d'explication. P, Q sont des vis qui attachent la boëte à la regle de fer; MG est la face extérieure de

de la petite lame posée en travers; S est le centre du secteur, Rr l'aiguille aboutissant d'une part au centre S, & fixée de l'autre sur la plaque DF*fd*, qui fait corps avec le cylindre qui tourne autour de l'axe I. La boëte est fermée dans la figure 9; elle est à demi ouverte dans la figure 10, où l'aiguille est écartée du centre S. C'est dans cette derniere position qu'on fait entrer l'aiguille dans un large nœud du fil à plomb; ensuite on ferme la boëte en poussant la plaque DC sur FN, & en la remettant dans la position de la figure 9. Pour lors on pousse le fil contre la pointe r, jusqu'à ce qu'il rase la petite lame, sans pourtant la toucher, & qu'ainsi il pende du centre même. Nous n'avions rien à desirer sur tous ces articles. Le point étoit des plus petits, l'aiguille très déliée du côté de la pointe, parfaitement arrondie, & remplissant exactement ce petit point destiné à la recevoir. Enfin la figure 3 représente en C la boëte toute ouverte; l'aiguille est en R, & le centre S totalement découvert.

Maniere de placer cette boëte. Pl. 2. F. 1. 8. 10.

34. Voilà pour ce qui regarde cette boëte; je viens à la maniere de la placer. Sur le rayon du secteur (fig. 1.), à un pied ou environ de distance de la ligne du milieu de la lame mobile EE', on avoit soudé en d sur la regle de fer une lame de cuivre, une seconde lame à deux pieds de distance en d', une troisieme à trois pieds en D, une quatrieme à six pieds en D'. Elles n'avoient pas tout à fait la même épaisseur que le limbe de cuivre appliqué sur la regle de fer; cette précaution avoit été jugée nécessaire pour empêcher qu'elles ne pussent interrompre le mouvement du fil à plomb; mais leur face antérieure n'étoit guere plus retirée sur la regle que celle du limbe. Cela fait, on appliquoit sur le milieu de la regle un fil délié & bien tendu, & avec le compas à verge ouvert d'un pied, pris exactement sur les divisions même de la ligne du milieu de la lame mobile, on commençoit la mesure du rayon. Une pointe du compas appliquée sur la ligne du milieu, on portoit l'autre à l'endroit désigné par le fil tendu, & avec un petit coup de marteau on marquoit un très petit point sur la lame d; ensuite laissant cette derniere pointe en d, on portoit la premiere en d', où l'on marquoit également un point, puis en D un troisieme; & ayant pris avec un

plus grand compas l'intervalle de trois pieds, depuis la ligne du milieu jusqu'en D, on le transportoit en DD′ & en D′C. Le point C déterminoit la position de la boëte, par rapport à la regle de fer à laquelle on devoit ensuite l'attacher, ce point devant tomber précisément sur le point *s* (fig. 9. & 10.), qui représente le centre du secteur. Par-là le rayon de notre secteur, ou la distance du centre à la ligne du milieu de la lame mobile, égaloit neuf fois l'intervalle d'un pied pris sur le limbe.

Division du limbe. Pl. 2. F. 4.

35. Il eût été également facile de déterminer exactement cet intervalle dans la figure 4, & de le diviser en 72 parties, en commençant par transporter trois fois sur la ligne du milieu l'intervalle de deux lignes, deux fois celui de six lignes, trois fois celui d'un pouce, & quatre fois celui de trois pouces, en changeant de compas à chaque nouvel intervalle; car alors on auroit eu un pied contenant exactement les 72 intervalles de deux lignes chacun; on eût ensuite divisé en pouce les intervalles de trois pouces, les pouces en demi-pouces, & les demi-pouces en intervalles de deux lignes: ce qui eût été facile, en se servant des mêmes ouvertures de compas. Il eût encore été à propos de rendre la ligne du milieu fort déliée, & d'y marquer les divisions, non par des lignes perpendiculaires, mais par de petits points qu'on y auroit marqués en frappant légerement sur le compas, dont on auroit pris la précaution de rendre la pointe bien fine & bien aiguë: de cette sorte notre division eût été fort exacte; & dans la vérification qu'on en fait avec le microscope, & dont nous parlerons plus bas, nous n'eussions pas eu à craindre une erreur de la dixieme partie d'une seconde. Mais la division ayant été faite en notre absence, nous y avons trouvé quelques petites inégalités, lesquelles étant une fois bien connues, ne pouvoient plus nuire aux observations. De plus, la ligne du milieu se trouva un peu plus forte que je n'aurois souhaité, & celles qui la traversoient n'étoient ni d'une largeur assez égale dans toutes leurs parties, ni assez exactement perpendiculaires à la ligne du milieu, ni même toujours assez droites. Il résultoit de-là quelque difficulté pour déterminer d'une maniere plus précise le point d'intersection qui marque la division. Cependant je suis

très persuadé que cet inconvénient n'a pas occasionné dans nos observations une erreur d'une seconde; mais je marque ceci pour faire voir combien il eût été facile d'avoir une division beaucoup plus exacte, & beaucoup plus aisée à vérifier. Nous aurons encore occasion d'en parler dans la suite, lorsque nous traiterons de la vérification du secteur.

De la lunette. Pl. 2. F. 1.

36. Après avoir expliqué ce qui a rapport au limbe & au centre du secteur, il faut expliquer en détail ce qui concerne la lunette. Lorsqu'on applique la lunette à la regle de fer, on doit avoir égard à trois choses; savoir à l'objectif placé en H (fig. 1.), au micrometre qu'on y ajoute en H', & au tuyau. J'avois une excellente lunette de 9 pieds, qui auroit pu le disputer avec avantage à des lunettes beaucoup plus longues. Je pris soin qu'on l'appliquât de telle sorte à la regle de fer, qu'elle ne fît avec elle qu'un seul instrument; ce que *Graham* avoit exécuté d'une maniere différente dans le secteur de M. *de Maupertuis*. C'est pourquoi je fis attacher immédiatement à la regle de fer, & la boëte de cuivre qui renfermoit l'objectif, & celle qui contenoit les fils qui se coupent à angles droits dans le foyer de l'objectif; je fis ensorte que le tuyau fût aussi attaché immédiatement par lui-même à la regle de fer, & non pas à ces boëtes, dans la crainte que s'il venoit à heurter contre quelque chose, on ne dérangeât la ligne de foi, qui aboutit de l'objet au centre des fils, & que nous appellerons dans la suite l'axe de la lunette.

De la boëte qui contient l'objectif. F. 11.

37. La figure 11 représente une section faite par l'axe de la boëte qui contient l'objectif. La boëte est toute de laiton, & immédiatement attachée à la regle de fer. La section de l'objectif est Ooo'O'. Ce verre est enchassé dans deux cercles, l'un supérieur SQPoZXVTT'V'X'Z'o'P'Q'S', l'autre inférieur NOoZXYDEFMM'F'E'D'Y'X'Z'o'O'N'. Ces deux cercles forment une boëte qui renferme l'objectif, dont l'axe passe par *b*; & parceque l'objectif est des meilleurs, ce point *b* se trouve au milieu du diametre du verre OO'. TSS'T' détermine l'ouverture de l'objectif dans l'anneau supérieur, NMM'N' dans l'anneau inférieur.

Des cercles qui la contiennent.

38. Cette boëte, composée de deux cercles, est renfermée par une vis EcE'c' entre deux autres cercles, l'un supérieur

DEcABCC'B'A' &c. l'autre inférieur LFEcAHGIKK'I'G &c. Le cercle inférieur renferme les trois autres avec l'objectif; il reçoit dans sa concavité intérieure LKK'L' le tuyau L*d*eL'*d'é* de la lunette, & il est attaché en A'H' sur la regle de fer. *fghi* représente la section de cette regle, pq celle de la petite lame où aboutit la pointe de l'aiguille rR.

De son excentricité.

39. Or le point du milieu de toute la longueur EE' n'est point en *b*, mais en *a*, & c'est en cela que consiste le premier & le principal avantage de cette machine. Car si on lâche la vis Ecc'E', & qu'on souleve le troisieme cercle DEcABCC'B'A', &c. la boëte, composée des deux premiers cercles qui renferment l'objectif, savoir PQSTVXYEF-MNN'M'F' &c. pourra tourner autour de son centre *a*, & dans cette révolution, le point *b*, par où passe l'axe de la lunette, tournera autour du point *a*, & par conséquent s'approchera par une demi-révolution, & s'éloignera par l'autre du plan de la regle, & du plan du secteur passant par le point r. Or par-là on pourra rendre & placer, & aussi exactement qu'on voudra, l'axe de la lunette parallele au plan de l'instrument. Car cet axe passera toujours par *b*, & par le centre des fils du micrometre; & si ce centre reste immobile & placé sensiblement à la même distance du plan du secteur que le point *a*, & que l'excentricité *ab* soit petite, on pourra, en tournant la boëte intérieure, rapprocher ou éloigner le point *b* du plan du secteur, & par-là incliner plus ou moins l'axe de la lunette, jusqu'à ce qu'on l'ait rendu parallele au plan du secteur. Pour lors on serrera la vis Ecc'E, qui appuiera en EDD'E' le troisieme cercle contre le plan EYY'E' de la boëte intérieure. Par ce moyen la boëte intérieure conservera sa position, & la lunette son parallélisme. Nous verrons dans la suite comment on peut s'assurer du parallélisme de l'axe de la lunette, ou connoître de combien elle s'en écarte.

De l'axe de la lunette.

40. Nous appellons ici axe de la lunette la ligne décrite par le rayon qui passe par le centre des fils au foyer de l'objectif, & qui conserve, au sortir de l'objectif, la direction qu'il avoit en y entrant. On appelle proprement axe d'une lentille, la droite qui passe par l'un & l'autre centre

de sa double convexité. Si le verre est bien travaillé, cette ligne passera encore par le centre du verre, & c'est ce qu'on appelle verre bien centré. Le rayon qui passe par cet axe, n'a point de réfraction. Tous les autres rayons homogênes, partant du même point d'un objet éloigné, ou paralleles à ce rayon, s'en rapprochent en entrant dans le verre, & vont se réunir à l'un des points de ce rayon, enforte néanmoins que les rayons violets se réunissent plus près, les rouges plus loin, & qu'entre ces deux termes il y a une suite de foyers pour les rayons des couleurs intermédiaires. Les rayons qui ne partent pas de quelque point dans l'axe, éprouvent tous quelque réfraction; cependant il y en a toujours quelqu'un qui éprouve deux réfractions contraires & égales, & qui par conséquent sort du verre avec la direction qu'il avoit en y entrant. Dans le cas d'une légere inclinaison à l'axe, j'ai démontré dernierement dans ma dissertation sur les lentilles & les lunettes, que ce rayon est celui qui en arrivant se dirige, dans une lentille également convexe de part & d'autre, au point de l'axe qui est abaissé au-dessous de la superficie, dans laquelle il entre, du tiers de l'épaisseur du verre, & qui en sortant prend une direction qui, étant continuée, coupe l'axe dans un point éloigné, de la superficie par laquelle il sort, du tiers de la même épaisseur. Or il est facile, étant donnés les rayons des deux convexités, de déterminer généralement les points de l'axe, où se terminent ces directions.

Usage du rayon qui conserve sa premiere direction.

41. Mais parceque l'épaisseur du verre est très petite, & à plus forte raison ce tiers de cette épaisseur, lequel mesure la distance oblique des rayons qui suivent ces directions, & que la distance perpendiculaire est encore plus courte que l'oblique, ces deux lignes peuvent passer pour une seule ligne droite, & le rayon qui parvient de l'objet au milieu de l'épaisseur du verre, peut passer pour n'avoir point de réfraction. Tous les autres rayons partant d'un même point de l'objet, ou paralleles à ce premier rayon, se réunissent à lui de la même maniere que dans un axe proprement dit. D'où il suit que si l'axe de l'oculaire se trouve dans la ligne qui passe par le centre des fils, & par le milieu de l'épaisseur de l'objectif, ou, pour parler plus exactement, par le point abaissé

au-dessous du milieu de la sixieme partie de l'épaisseur du verre, dans une lentille également convexe sur chaque face, cela produira le même effet que si le vrai axe de l'objectif passoit par l'intersection des fils. Il suit encore que si l'objectif n'étoit pas exactement perpendiculaire à l'axe du tuyau, l'aberration des rayons, causée par la différence de leur réfrangibilité, seroit encore la même, & que ces rayons se réuniroient dans le même ordre, & représenteroient l'objet dans le même lieu relativement aux fils, & à l'œil de l'observateur. Mais ce point appartient à la dioptrique; nous ne le touchons ici qu'à l'occasion de l'axe de la lunette, & en passant.

Excentricité de l'oculaire. Pl. 2. F. 11. 12.

42. La figure 12 représente une section perpendiculaire à l'axe, faite par le point *a* de la figure 11. Les points EDYONbaN'O'Y'D'E' sont les mêmes dans ces deux figures. E*x* est la distance du point E à la droite AH de la figure 11: mn est l'épaisseur de la regle de fer, *uu'* sa largeur; la boëte est soudée avec la regle en *yuu'y'*; *nr* est l'épaisseur, & *ss'* la longueur de la petite lame, *r* le centre du secteur, *r*R l'aiguille d'acier; le cercle EE''E' est le contour de la boëte qui renferme de l'objectif OO''O'. En tournant la boëte on transporte E en E'', *b* en *b'*; & ayant abaissé sur EE' la perpendiculaire *b' d*, on aura *b d*, qui est la quantité dont l'axe, passant par *b*, s'est rapproché du plan du secteur qui passe par *ss'*; & si E'' tombe en *e*, & par conséquent *b'* en *t*, & *d* en *z*, il s'en approchera encore de la quantité *d z*.

Du tuyau de la lunette. Pl. 2. F. 1.

43. Le tuyau HH' (fig. 1.) est armé d'un bon nombre de petits bras de laiton S, auxquels il est soudé, & qui le tiennent à 10 lignes de la regle de fer, à laquelle il est fixé par leur moyen. Son diametre est de 28 lignes. Il n'a par lui-même aucune flexion sensible: il est si bien uni à la regle, déja assez ferme aussi par elle-même, surtout de côté, qu'il en exclut absolument tout danger de flexion. Au-dedans on a placé plusieurs diaphragmes, pour intercepter les rayons réfléchis par les parois du tube: précaution que nous avons jugée nécessaire pour pouvoir observer de jour, encore a-t-il fallu ajouter à l'extrémité H, un tuyau de deux pieds, pour ombrager l'objectif; moyennant quoi les étoiles paroissoient très bien de jour.

Du micrometre. Pl. 2. F. 13.

44. Le tuyau eſt briſé en H', & ne fait point corps avec le micrometre où ſont les fils. Il faut donc expliquer la maniere dont le micrometre eſt attaché à la regle de fer, & dont on doit enſuite ajuſter l'oculaire avec le tuyau. L'aſſemblage du micrometre avec la regle de fer eſt repréſenté dans la figure 13. ABCD eſt une plaque de cuivre fort épaiſſe, fortement ſerrée contre la regle YXSTV par trois vis P: elle porte perpendiculairement deux bras de laiton, encore beaucoup plus épais: le premier eſt repréſenté tout entier dans la figure en BEGFC, & creuſé en demi-cercle en EGF: le ſecond ne ſe laiſſe voir qu'en partie en AHID. Contre ce dernier on a ſoudé ſolidement un tuyau QIHOR de même métal, exactement rond dans l'intérieur, d'un diametre un peu plus petit que le tuyau de fer blanc de la figure 1, & d'environ 4 pouces de long. On enchaſſe dans celui-ci un autre tuyau de laiton IONKLM, parfaitement rond, & qui s'y ajuſte ſi exactement, qu'on ne peut ſans effort le faire avancer ou reculer, ou tourner ſur ſon axe; de façon que par-là on peut lui donner telle poſition qu'on juge à propos, dans laquelle il reſte invariablement.

Fils tendus par une lame élaſtique.

45. Ce tuyau porte une rainure KNML: cette rainure eſt percée dans le fond en quatre endroits, également éloignés, c'eſt-à-dire à 90 dégrés l'un de l'autre: on fait paſſer un fil d'argent très délié dans une de ces petites ouvertures, par exemple en K, & on l'y fixe par un bout avec une goupille de cuivre, qu'on y fait entrer de force, & qui ſerre ſi fortement le fil dans cette ouverture, qu'on ne peut plus l'en tirer. Enſuite on fait paſſer le fil dans l'ouverture oppoſée M; d'où on le ramene en L par la rainure; & de L on le fait paſſer en N: mais entre M & L on met dans la rainure une lame élaſtique, ou un reſſort courbé en arc de cercle d'une moindre courbure que celui de la rainure; & tandis qu'on paſſe le fil, on applique de force le reſſort contre le fond de la rainure, & on le retient dans cette poſition forcée, juſqu'à ce qu'ayant paſſé le fil dans l'ouverture N, on l'y ait également arrêté avec une goupille, & d'une maniere à ne pouvoir ſe lâcher. Pour lors le reſſort abandonné à lui-même agit ſur le fil dans la partie ML de la rainure, le tend encore davantage, &

pour long-tems; le nôtre, au bout de quatre ans, eſt encore auſſi bien tendu que le premier jour: c'eſt un fil cru, qui a lui-même ſon élaſticité, & qui la conſerve; ainſi malgré l'effort continuel du reſſort, il ne riſque point de ſe lâcher.

De l'oculaire. Pl. 2. F. 14.

46. Pour montrer maintenant comment l'oculaire eſt ajuſté au tuyau HH′ de la figure 1, jettons les yeux ſur la figure 14. Cette figure repréſente un tuyau de fer blanc C*cbf*, prolongé en *f* du côté de *b f*, & briſé en CD du côté de C; il eſt plus briſé encore en D*gf*. De plus il a une ouverture en *i*GQRIK*h*, qui eſt d'un grand uſage pour éclairer les fils pendant la nuit; & pour le rendre plus ſolide, on joint les bords de l'ouverture par deux gros fils de laiton *t*K, IG. Au-deſſous eſt un tuyau un peu plus large ML*h*R*a*ONM, avec une petite échancrure en ONM, & l'extrémité du tuyau de la lunette eſt *cebd*.

Des tuyaux. F. 13. 14. 15.

47. Dans la figure 15 A, B, E, H, P ſont les mêmes que dans la figure 13; YTSX eſt encore ici la regle de fer, mais plus prolongée du côté de SX. *qrp* eſt un des petits bras de laiton S de la figure 1. *sxuylp*H eſt la continuation du tuyau de fer blanc, qui ſe briſe au point H. On y ſoude en *ln*, & du côté oppoſé, qui ne paroît point dans la figure, une plaque de fer repliée *lymn*, mais un peu plus ample que la partie du tuyau qu'elle couvre, de ſorte qu'il y a entre l'un & l'autre un eſpace qui paroît en m, & dans lequel on fait entrer la partie D*gf*F du tuyau de la figure 14; ainſi C, i, G, Q, F, D ſont les mêmes dans ces deux figures, & le reſte juſqu'à l'extrémité *cebd* eſt auſſi le même de part & d'autre. Le bord Ci touche le petit bras H; le reſte du tuyau eſt reçu dans la cavité du petit bras E. On peut avancer le tuyau un peu plus large L*h*IR*a*ONM, juſqu'à ce que LhIRK joigne CiGQt, pour fermer de jour l'ouverture iGQRIh; & on peut le retirer de nuit pour éclairer les fils qui ſont cachés ſous le tuyau nDFQiC entre le petit bras H & le bord circulaire iGQt. Cela fait, on inſere dans l'ouverture *cebd* le tuyau qui porte l'oculaire, & qu'on peut très librement avancer ou reculer, ſuivant qu'on a la vue plus longue ou plus courte, ſans cauſer pour cela le moindre mouvement dans l'objectif, ni dans le micrometre.

48.

48. Il reſte à parler des barres GG′, FF′ (fig. 1.), des vis IF, I′F′, des poids L, L′, des bras NOV & ST, & de la vis PE. La figure 16 repréſente une ſection horizontale, faite par les vis IF & les fils FK. GG′ & FF′*f*′*f* ſont ici la même choſe que dans la premiere figure GG′ & FF′; les fils FK, les vis FI, & le tuyau H ſont auſſi les mêmes dans les deux figures. BB′*i*′*i* (fig. 16.) eſt la ſection de la regle BQ (fig. 1.) à laquelle on attache la regle FF′*f*′*f* (fig. 16.) au moyen de la barre recourbée BAC*r*EE′*r*′C′A′B′, & des vis D, D′. Il eût mieux valu, comme je l'ai inſinué n°. 19, plier la regle FF′*f*′*f*, comme dans la figure 17, en B*if*FACC′A′F′*f*′*i*′B′, en mettant dans le même plan *ff*′ & *ii*′, FF′ & BB′; il arriveroit de-là que lorſqu'on tourneroit le ſecteur la face *ff*′ occuperoit exactement la place de la face oppoſée FF′. Ceci ſemble ſe préſenter de ſoi-même; mais je n'y pris garde qu'après les obſervations commencées, ſans que le tems nous permît de les interrompre.

De la regle ſuperieure poſée en travers. Pl. 2. F. 1. 16. 17.

49. On auroit pu faire la regle FF′ de la même épaiſſeur que BQ, & l'unir avec elle comme EE′. J'avois même d'abord deſtiné la regle EE′ à cet uſage; mais alors la barre GG′ auroit dû être placée plus bas, & répondre à la regle EE′; & lorſqu'en retournant l'inſtrument, le limbe EE′ auroit été tourné contre la barre GG′, cette barre auroit empêché de voir ſur le limbe le point déſigné par le fil à plomb. C'eſt pourquoi il a fallu lui ſubſtituer une autre regle plus élevée, & je fis enſorte qu'on pût l'ôter à volonté, pour faciliter le tranſport de l'inſtrument, & donner à ſa caiſſe une forme plus commode. Après le retournement du ſecteur, nous l'avions bientôt rétabli dans ſa premiere poſition, au moyen des vis IF, I′F′; de plus, comme nous avions à obſerver pluſieurs étoiles qui exigeoient différentes inclinaiſons du ſecteur, il falloit placer les vis différemment pour chacune, de ſorte que nous ne pouvions nous ſervir deux jours de ſuite de la même poſition.

Suite. F. 1.

50. Il n'eſt pas beſoin de placer ſi ſcrupuleuſement dans la direction de la méridienne la barre GG′, puiſqu'en avançant les vis IF, I′F′, l'une plus, l'autre moins, on met aiſément le limbe dans le plan du méridien. Il y avoit deux rangs

Des vis de cette regle.

de trous dans la barre, parceque dans le cas d'une plus grande inclinaison du secteur, le limbe est plus élevé, & demande par conséquent plus d'élevation dans les vis; ces trous étoient en assez grand nombre pour pouvoir donner de part & d'autre à l'instrument l'inclinaison qu'on jugeroit à propos.

Du bras de la regle inférieure. Pl. 2. F. 1, 18.

51. Pour ce qui est maintenant du bras RNOV, il est représenté dans la figure 18, dans laquelle, R exprime l'ouverture où l'on fait entrer la barre GG′ de la figure 1. Il y a en N deux vis qui serrent étroitement le bras contre la barre. Le petit bras ST est représenté séparément, & un peu plus bas, avec sa vis PE′. Or il est clair qu'on peut attacher le bras NOV avec les vis N, en quelque endroit qu'on voudra de la barre GG′, & le petit bras ST en quelque endroit qu'on voudra de la partie OV, pour pouvoir ensuite avec la vis PE′ pousser la regle EE′, sur laquelle on a laissé pour cela un espace libre AGG′A′ (fig. 4.), au-dessus des lames de cuivre, de crainte que la vis PE′ n'allât heurter contre le micrometre E, ou contre la lame mobile. Du reste j'ai choisi de pousser la regle EE′ plutôt que FF, afin que l'observateur, dans le tems même de l'observation, pût appliquer la main à la tête de la vis X, & incliner plus ou moins l'instrument, jusqu'à ce que l'étoile arrivât sur le fil perpendiculaire au plan du secteur.

Situation de l'oculaire. F. 1.

52. Pour finir cet article, observez que l'extrémité du tube n'est marquée à la hauteur H′ que pour pouvoir être vue dans la figure; car elle doit descendre jusqu'au bas de la regle BQ, & c'est près de cet endroit que se trouve le micrometre; de sorte qu'on peut fort commodément approcher l'œil de l'entrée du tube, & qu'on n'a presque rien à craindre de la flexion de l'instrument, qui d'ailleurs, ainsi que nous l'avons dit, ne peut être sensible.

De l'aiguille du centre. F. 9.

53. Voilà ce qui regarde la construction du secteur: venons à son usage. Nous avons ici trois choses à considérer, la disposition des parties, la maniere d'observer, les observations mêmes. Quant à la disposition des parties, on doit avoir soin premierement que la pointe *r* (fig. 9.) de l'aiguille du centre R*r* remplisse exactement le point *s* marqué sur la petite lame, & qu'elle soit parfaitement ronde. Nous n'avions rien à desirer sur ce point, comme je l'ai déja dit. Mais c'est un point d'une

extrême délicateſſe, lorſqu'on attache l'aiguille à la lame DF*fd*, & il y a peu d'ouvriers qui en ſoient capables. On en viendra plus aiſément à bout en perçant la lame en R'R, & en ſe ſervant d'une plus longue aiguille. La boëte fermée, on fera entrer l'aiguille dans l'ouverture R'R juſqu'à ce que la pointe aboutiſſe en *s*. La tête de l'aiguille reſtera en dehors de la boëte, & le diametre du trou étant un peu plus grand que celui de l'aiguille, il ſera aiſé de reconnoître ſi l'aiguille eſt bien ronde. Car on n'aura qu'à la faire tourner ſur ſon axe, en obſervant en même tems ſi le fil à plomb CM (fig. 1.) répond toujours à la même diviſion; & s'il change tant ſoit peu de poſition, on connoîtra aiſément par le mouvement de la lame mobile, & à l'aide du microſcope, juſqu'aux plus petites différences des demi-diametres de l'aiguille, & ce qu'il s'en faut que ſon axe ne réponde également au point du centre.

Inſtrumens de vérification des diviſions. Pl. 2. F. 1.

54. Il faut enſuite vérifier les diviſions, tant celles du rayon du ſecteur, depuis le centre C juſqu'à la ligne du milieu de la lame mobile, que celles de la ligne du milieu. C'eſt ce qu'on pourra exécuter ſans difficulté en ſe ſervant du compas à verge, dont les pointes doivent être bien arrondies & bien aiguës, & de la vis E; mais on y parviendra encore plus aiſément avec un autre compas, qui, au lieu de deux pointes, porte deux verres, l'un fixe, l'autre mobile. Je dirai d'abord comment, avec un verre ſeul, nous avons procédé à l'examen des diviſions; je donnerai enſuite une idée de ce compas, armé de verres au lieu de pointes, & qui n'eſt pas d'ailleurs d'une conſtruction difficile.

De la vis du micrometre. F. 4. 7.

55. D'abord on peut vérifier très exactement la vis E (fig. 4.) par le moyen du cercle ACIG (fig. 7.), & de l'index EI. Sur un verre bien net, bien plané & bien poli, menez deux paralleles éloignées l'une de l'autre de la diſtance d'environ un pas de la vis, ou de l'intervalle parcouru par la lame mobile pendant un tour entier de l'index EI (fig. 7.). Tirez enſuite une troiſieme parallele éloignée de la premiere d'une diſtance quintuple, ou de cinq pas de la vis, puis une quatrieme éloignée de dix pas ou environ. Toutes ces lignes peuvent être coupées par une perpendiculaire, qui ſuppléra, comme nous le verrons bientôt, à tous les défauts qui pourroient ſe rencontrer

dans leur paralléliſme. Ces lignes doivent être bien égales, & très déliées. On pourra les tracer avec un morceau de pierre à fuſil, qui, étant briſée, donne des pointes fort aiguës, qui ne coupent pas le verre comme le diamant.

Vérification de la vis. Pl 2. F. 4. 18. 7.

56. Le verre ainſi préparé, on l'appliquera ſur les lames CC′, G′G (fig. 4.), & on l'y fera tenir avec de la cire, ou, pour écarter tout ſcrupule, avec un inſtrument ſemblable à celui qu'on auroit dans la figure 18, en retranchant la partie *a*P du petit bras TSP, & laiſſant T*ta*A avec la vis S; je veux dire en faiſant entrer dans l'ouverture de cet inſtrument tant la regle de fer, que les lames & le verre, & en les ſerrant au moyen de la vis S appliquée ſur le revers de la regle; car de cette ſorte le verre ſera tellement fixé ſur les lames G′GII′, O′OCC′, qu'il ne pourra être ébranlé par le mouvement de la lame mobile. On tournera contre les lames la ſurface du verre ſur laquelle on a tracé des paralleles: la perpendiculaire qui traverſe ces paralleles, doit répondre à la ligne du milieu de la lame mobile, & la premiere parallele à l'une de ſes diviſions, dans le moment où l'index *b* (fig. 4.), & l'aiguille EI (fig. 7.), marquent le commencement des diviſions, & où la lame mobile (fig. 4.) n'a point encore commencé à avancer du côté de E′; enſuite, par le mouvement de l'index EI, on fera avancer la lame mobile, dont le même point de diviſion, après environ un tour de vis, arrivera ſur la ſeconde parallele, & l'on remarquera alors de combien de parties du micrometre cet intervalle differe de celui d'un pas de la vis, lequel répond à toute la circonférence ACIG. La différence, s'il y en a, ſera au moins très petite. Enſuite ayant placé l'aiguille à la fin de la premiere révolution, au nombre 180, & lâché la vis qui attachoit le verre aux lames fixes, on avancera le verre juſqu'à ce que ſa premiere parallele réponde à cette même diviſion de la lame mobile avancée par la premiere révolution du micrometre; on attachera de nouveau le verre contre les lames fixes, & par un ſecond tour qu'on donnera à la vis, & qu'on continuera juſqu'à ce que cette diviſion réponde à la ſeconde parallele, on connoîtra derechef la différence de la ſeconde révolution entiere du micrometre, ou du ſecond pas de la vis, & de l'intervalle qui ſe trouve

entre ces mêmes paralleles : on pourra de la même maniere comparer à cet intervalle les autres révolutions du micrometre, ou pas de la vis, & conſtater l'égalité de ces pas, ou de ces révolutions comparées les unes aux autres, ou la quantité préciſe de leurs différences.

57. De même dans la crainte que les erreurs ne s'accumulent, après avoir comparé les pas de la vis un à un, on pourra les comparer de cinq en cinq avec l'intervalle de la premiere & de la troiſieme parallele, puis de dix en dix, & ainſi de ſuite, au cas que l'on veuille ſe ſervir d'une plus longue vis. Si l'on vouloit encore tirer des paralleles diſtantes de la moitié, ou du tiers d'un pas de la vis, ou d'un, & même de pluſieurs pas déja connus, ajoutés à cette moitié, à ce tiers, &c. on pourroit comparer également les parties de révolutions, & connoître à fond l'état de la vis. Mais lorſqu'on n'emploie qu'un petit nombre de pas, & que la vis eſt faite avec un peu de ſoin, on n'y doit trouver aucune différence ſenſible. Même ſujet.

58. Il eſt à remarquer, & ceci peut ſervir de même pour ce qui nous reſte à dire ſur la vérification du ſecteur, & ſur celle du quart de cercle, l'une & l'autre ayant été faites par cette méthode, que le moment, où le point de la diviſion arrive ſur la parallele tracée ſur le verre, ſe connoît beaucoup mieux par un mouvement continu du micrometre & de la lame. Nous avons obſervé ſouvent que la ligne paroiſſoit répondre au point de la diviſion, quoique nous examinaſſions l'un & l'autre avec le microſcope, & que malgré cela ayant enſuite retiré, puis avancé la lame, leur point de rencontre ne répondoit plus au même nombre de parties du micrometre. Après nous être convaincus à loiſir de cette différence en répétant pluſieurs fois la même opération, nous prîmes le parti de ne plus déterminer le point de rencontre que par un mouvement continu; & il nous eſt arrivé très ſouvent depuis, en obſervant l'un après l'autre, de nous accorder à une, ou tout au plus à deux parties près du micrometre, quoique celui qui obſervoit actuellement ne tournât point lui-même la vis, & ne connût point les nombres indiqués par l'index, & qu'il ſe contentât d'avertir ſon compagnon, au moment de la ren- Remarque ſur la maniere de ſe ſervir du micrometre ;

contre, d'arrêter l'index, & de marquer le nombre. Le mouvement de la vis doit être lent & égal, pour la commodité de l'obſervateur & le ſuccès de l'obſervation.

Sur les moyens de diſtinguer les points de la diviſion;

59. Obſervez de plus, & c'eſt encore une choſe que j'ai moi-même éprouvée, que ſi la diviſion eſt faite par de petits points bien ronds & bien unis, & qu'on applique le microſcope, en éclairant au même endroit la diviſion, par le moyen d'une lentille qui raſſemble les rayons du ſoleil ou d'une lumiere, on pourra appercevoir fort diſtinctement l'inſtant de rencontre du premier & du dernier point de la circonférence de ce petit cercle, avec la ligne tracée ſur le verre, ou même avec un fil délié, tendu ſur la lame mobile, & attaché de part & d'autre aux lames fixes: quoiqu'il ſoit plus à propos de ſe ſervir de verres que de fils, leſquels courroient riſque d'être emportés par la lame mobile, & qu'il faudroit placer pour cela à quelque diſtance de cette lame, avec danger peut-être d'y occaſionner quelque parallaxe; au lieu qu'on peut ſans crainte appliquer immédiatement le verre ſur la lame mobile.

De déterminer le point de rencontre.

60. Obſervez enfin que dans la détermination du point de rencontre, la lame doit toujours être mue du même côté. Car pour peu que la vis ait de jeu dans l'écrou, les mouvemens oppoſés de la lame donneront des nombres différens de parties du micrometre. Nous commencions toujours par retirer la lame mobile; enſuite nous la pouſſions du côté de E', & c'eſt dans ce ſecond mouvement que nous déterminions le point de rencontre.

Vérification de la diviſion.

61. La vis ainſi vérifiée, vérifie à ſon tour, & par une méthode également sûre & facile, la diviſion de la lame mobile en cette ſorte. Ayant amené le micrometre au premier point de la diviſion, on attache contre le limbe un verre marqué d'une petite ligne, laquelle doit répondre au point qui termine le premier intervalle de deux lignes, qu'il faut comparer aux autres intervalles. Enſuite on tourne la vis juſqu'à ce que la ligne du verre réponde au commencement de la diviſion, & l'on compte en même tems le nombre de tours de la vis & de parties du micrometre, contenu dans cet intervalle. Enſuite on ramene la lame & le micrometre à leur premier

point ; on avance le verre jusqu'à ce que sa ligne rencontre le point qui termine le second intervalle, & on pousse la lame mobile, comme auparavant, jusqu'à ce que la ligne du verre se rencontre avec le commencement de cet intervalle, en comptant toujours le nombre de tours & de parties du micrometre. On vérifiera de même tous les autres intervalles ; on les comparera entre eux pour en avoir les différences, s'il s'en trouve quelqu'une ; on en prendra la somme pour avoir en parties de micrometre la valeur du pied *ii'*, ou de la longueur du limbe.

Suite.

62. On pourra encore comparer ces intervalles trois à trois, ou quatre à quatre, au moyen de cette vis qui peut avancer la lame d'environ 8 lignes, ou 4 intervalles. Si elle étoit plus longue, & qu'elle pût avancer la lame d'un demi-pied, on pourroit comparer aussi les deux intervalles de six pouces, les quatre intervalles de trois pouces, ensuite les intervalles d'un pouce, d'un demi pouce, & enfin de deux lignes. On corrigeroit en même tems les petites erreurs qui résulteroient de ces comparaisons multipliées, & l'on auroit en parties de micrometre la valeur exacte des intervalles de la lame mobile, comme nous le verrons bientôt.

Usage des lignes gravées sur le verre ; F. 5.

63. Mais une vis de cette longueur ne laisseroit plus de place aux curseurs M, M' (fig. 5.) qui assujettissent la lame mobile contre la lame intérieure ; & d'ailleurs une longue vis est plus sujette à se courber. C'est pourquoi on en a préféré une plus courte, qui n'agit pas au-delà de 8 lignes ; & on a imaginé un autre moyen de comparer de plus grandes parties du limbe. Ce moyen consiste à tracer, sur un plus long verre, une ligne coupée à angles droits par plusieurs paralleles, dont la seconde soit éloignée de la premiere d'environ six lignes, la troisieme d'un pouce, la quatrieme de trois pouces, la cinquieme de six pouces. On applique ensuite le verre sur les lames, de telle sorte que la premiere parallele réponde au commencement de la division, d'où il arrivera que la seconde parallele répondra au point de milieu du premier pouce. Il faut observer avec soin le point de rencontre du commencement de la division avec la premiere parallele, & du milieu du premier pouce avec la seconde. Si l'un & l'autre donne le même nombre

de parties du micrometre, c'eſt une marque que ce premier demi-pouce eſt égal à la diſtance de ces paralleles ; ſi le nombre eſt différent, on tiendra compte de cette différence, qui ſera toujours fort petite. Cela fait, on avancera le verre juſqu'à ce que l'intervalle de ces deux premieres paralleles réponde à la ſeconde moitié du premier pouce, & ayant remis la lame dans ſa premiere poſition, on la pouſſera de nouveau pour connoître la différence de cette moitié de pouce avec cet intervalle. On opérera de même ſur le reſte de la diviſion ; on comparera ces demi-pouces entre eux, & l'on verra ſi leur différence s'accorde avec celle qu'on a trouvée en comparant à la fois trois intervalles de deux lignes. De même l'intervalle de la premiere & troiſieme parallele vérifiera les pouces, celui de la premiere & de la quatrieme les intervalles de trois pouces, celui de la premiere & de la cinquieme, ceux de ſix pouces.

Qu'on n'y a pas beſoin de connoître l'état de la vis.

64. Il y a un autre auantage conſidérable à ſe ſervir de cette méthode, c'eſt qu'on y eſt diſpenſé de vérifier la vis. Il eſt vrai que pour vérifier les intervalles de deux lignes par la méthode que nous avons donnée, où l'on ſe contente d'une ſeule ligne tracée ſur le verre, il faut employer cinq tours de vis ; mais on emploie toujours les mêmes tours, & la différence dépend de l'excès d'un intervalle ſur l'autre, lequel eſt toujours très petit ; & l'erreur qui en réſulte, & qui après un certain nombre de révolutions pourroit peut être ſe faire ſentir, eſt abſolument inſenſible dès qu'il n'eſt queſtion, comme ici, que d'un petit nombre de parties du micrometre. Enſuite dans les vérifications que l'on fait par le moyen des autres paralleles, on n'a beſoin d'employer qu'un très petit nombre de parties du micrometre, leſquelles ſuffiſent pour faire connoître la différence qui ſe trouve entre les intervalles des paralleles, & ceux qui leur répondent dans la diviſion. Ainſi quelque inégalité qu'il y ait dans les pas de la vis, on peut l'ignorer ſans que la vérification en ſouffre. Remarquez qu'on peut abréger, en ſe ſervant de cette derniere méthode, dans la vérification des intervalles de deux lignes ; car il ne ſera plus beſoin pour lors de tourner & retourner cinq fois la vis, comme auparavant, puiſqu'on pourra ſe contenter d'un petit nombre de parties du micrometre.

65.

65. Cette ligne qui coupe à angles droits les paralleles, eſt ici d'un grand uſage, pourvu qu'elle réponde toujours à la ligne du milieu de la lame mobile, parcequ'elle détermine la diſtance des paralleles, à laquelle on compare tous les intervalles de même genre, & qui pour cette raiſon doit être toujours la même; ce qui ne ſeroit pas, ſi ces lignes n'étant pas exactement paralleles, on prenoit leur diſtance tantôt en un endroit, tantôt en un autre, ou ſi dans la ſuppoſition même d'un paralléliſme exact, on prenoit quelquefois une diſtance plus ou moins oblique.

Avantage de la ligne du verre qui coupe les paralleles.

66. On pourroit encore ſe ſervir ici avec avantage d'un compas dont j'ai parlé plus haut, & qui ſeroit armé de deux verres, l'un fixe, l'autre mobile, ſur chacun deſquels on auroit tracé une ligne fort près du bord intérieur, afin qu'on pût les approcher davantage l'un de l'autre; car il eſt difficile de tracer ſur le verre, à une diſtance donnée, des lignes déliées, unies & paralleles: j'ai gâté pluſieurs verres avant que de m'y faire, encore ai-je bien de la peine aujourd'hui à m'en tirer; tantôt c'eſt la pointe du caillou qui ſe briſe; tantôt c'eſt la regle qui gliſſe ſur le verre, ou qui ſe détourne pour peu qu'on remue la main; ce qui donne des lignes larges, raboteuſes, courbes, tortues & défigurées.

Deſcription d'un compas à deux verres;

67. Ce compas doit avoir deux lames de métal, comme dans la figure 4 GG′I′I, OO′C′C, à une certaine diſtance l'une de l'autre, & unies enſemble par leurs extrémités GC, G′C′. Entre ces lames eſt une lame mobile plus large, percée à jour dans toute ſa longueur, excepté aux deux bouts, & dans une aſſez grande largeur. Il doit y avoir pluſieurs trous contenant des écrous, & fort proches les uns des autres. A l'extrémité, comme en O′I′, on attachera ſolidement aux lames fixes un verre, ſur la ſurface extérieure duquel on aura tracé deux lignes, la premiere, proche le bord intérieur qui regarde GC, la ſeconde, perpendiculaire à la premiere, & paſſant par le milieu du verre dans la direction des lames. On aura un autre verre, renfermé de trois côtés ſeulement, ſavoir *o*, *i*, & OI, dans un petit cadre de métal, dont la longueur n'excede pas la largeur de la lame mobile. Sur le quatrieme côté du verre, & ſur le bord qui regarde O′I′, on

Sa reſſemblance au limbe du ſecteur.

tracera une ligne perpendiculaire à GG'. Les deux côtés du cadre qui ſont en *i* & *o*, doivent être percés de petits trous, pour recevoir des vis qui fixeront le verre ſur la lame mobile, à peu près à la diſtance de *o' i'* qu'on jugera néceſſaire pour la vérification de l'intervalle propoſé : c'eſt ce qu'on peut faire aiſément par le moyen de ce grand nombre de trous préparés dans les lames fixes; enſuite avançant avec la vis E la lame mobile, on aura plus exactement la diſtance des paralleles tracées ſur la ſuperficie extérieure, & proche le bord intérieur des verres.

Du verre mobile.

68. On pourroit ſe paſſer de ce grand nombre de trous des lames fixes, en repliant les bords *i* & *o* du cadre qui porte le ſecond verre, & les faiſant entrer dans des couliſſes pratiquées dans la longueur de l'ouverture de la lame mobile, de telle ſorte néanmoins que le cadre ne pût avoir par lui-même aucun mouvement, & qu'il fallût quelque effort pour le rapprocher du premier verre. On pourroit auſſi l'attacher avec des vis où l'on jugeroit à propos. Ceci n'a pas beſoin d'explication, & il ſeroit inutile de nous y arrêter.

Du micrometre. Pl. 2. F. 7. 5.

69. Rien n'empêche d'ajouter à ce compas un micrometre, ou un cercle en E, ſemblable à celui de la figure 7, avec un index; mais il faut prendre la précaution de placer le curſeur P (fig. 5.), & la vis EF à une plus grande diſtance de la ſurface antérieure, de peur que la circonférence du cercle GC ne s'éleve au-deſſus de cette ſurface, au-delà de celle des verres, & n'empêche qu'on n'applique ces verres à toute ſorte de plans. De plus, comme l'ouverture s'étend dans preſque toute la longueur de la lame mobile, & que le paſſage doit être libre, on ne doit point placer au milieu un curſeur unique M, ou M'; mais on en doit mettre deux, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de ce point de milieu, pour aſſujettir les deux long côtés de la lame mobile contre les lames fixes.

Uſage du micrometre.

70. On peut rapprocher les verres de ce compas à la diſtance d'un demi-pouce, pour comparer entre eux les demi-pouces de la diviſion; puis à la diſtance d'un pouce, pour comparer les pouces; & ainſi de ſuite pour les autres intervalles. Le micrometre même de ce compas ne nous étoit point néceſſaire pour notre uſage propre, puiſque nous avions déja

un micrometre ſur le limbe de notre ſecteur; mais il peut beaucoup ſervir à pluſieurs autres uſages.

Avantage de ces verres ſur les microſcopes.

71. Il y a un compas d'une nouvelle invention, conſiſtant en une longue verge, ayant à l'un de ſes bouts un microſcope fixe, à l'autre un microſcope mobile, qu'on peut rapprocher du fixe plus ou moins à volonté; & chaque microſcope a ſon micrometre. Le P. *Peſenas* Jéſuite, Profeſſeur royal d'Hydrographie à *Marſeille*, & qui s'entend auſſi en Aſtronomie, comme je le vois par ſes lettres, ſe ſert de ce compas pour vérifier les diviſions du quart de cercle: mais pour peu que la diſtance du limbe au micrometre vienne à varier, on change notablement la valeur des parties du micrometre: ce qui n'eſt pas un petit inconvénient; au lieu que mon compas, qui n'eſt au reſte qu'une ſuite naturelle de la conſtruction de mon limbe, lequel étoit achevé long-tems avant que j'euſſe oui parler de ce nouveau compas, renferme tous les avantages du microſcope pour l'augmentation des diſtances, & peut meſurer de très grands intervalles, ſans aucun danger de parallaxe ſemblable, puiſque la ligne tracée ſur le verre touche immédiatement le limbe, où eſt la diviſion qu'il s'agit de vérifier. A l'égard du quart de cercle, on verra dans le chapitre ſecond comment, au moyen de deux verres attachés à ſon alidade, & par une méthode toute fondée ſur les mêmes principes, on peut procéder à l'examen de ſa diviſion.

Vérification des intervalles de deux lignes.

72. Pour revenir à notre limbe, dès qu'une fois on aura une connoiſſance parfaite de la vis, des révolutions & des parties de révolutions du micrometre, il ſera plus court de n'employer qu'une ſeule ligne ſur le verre pour comparer entre eux les intervalles de deux lignes, dont il en faut trois pour le demi-pouce, en faiſant faire pour le demi-pouce quinze tours à la vis, qui feront paſſer ſous la ligne du verre quatre points de la diviſion, dont on remarquera les points de rencontre. C'eſt la méthode dont nous nous ſommes ſervis, après nous être convaincus que notre vis étoit fort égale, & que ſes révolutions n'avoient entre elles aucune différence ſenſible.

Longueur du rayon déterminée par le nouveau compas.

73. Après avoir vérifié la ligne du milieu de la lame mobile, il faut voir à combien de parties du micrometre répond le rayon du ſecteur, ou la diſtance du centre à la ligne du

milieu de cette lame mobile. On le connoîtra en comparant (fig. 1.) la distance du point *d* à cette ligne, avec l'intervalle d'un pied, marqué sur cette même ligne du milieu; ensuite les distances dd', $d'D$ avec ce même intervalle; enfin les intervalles DD′, & D′C avec la distance du point D à la ligne du milieu de la lame mobile. Cette comparaison pourroit se faire aisément par le moyen du compas à deux verres, dont j'ai donné la description au n°. 67 & suivans. On appliquera la ligne du verre immobile à l'une des extrémités de l'intervalle qu'on veut comparer, & si le compas a un petit cercle & un index qui fassent les fonctions d'un micrometre, on amenera avec la vis à l'autre extrémité la ligne du verre mobile. On verra ensuite, à l'aide du microscope, à quel nombre de parties du micrometre répond le point de rencontre.

Moyen de suppléer au micrometre du compas,

74. Si le compas n'a point de micrometre, on pourra y suppléer par la lame mobile EE′. Car dès que l'intervalle à comparer ne surpasse pas la longueur de la lame, comme dd' qui n'est que d'un pied, il suffira, après avoir tellement disposé les verres du compas, que leurs lignes répondent exactement aux points *d*, & *d′*, de les appliquer contre la lame mobile, de sorte que leurs lignes répondent à peu près aux extrémités du pied gravé sur cette lame, & de pousser la lame mobile avec la vis E en deux fois, la premiere, jusqu'à ce que l'une des extrémités du pied réponde exactement à l'une des lignes, la seconde, jusqu'à ce que l'autre extrémité réponde à l'autre ligne. Car examinant à chaque fois la position de l'index, on aura en parties de micrometre le rapport exact de cet intervalle d'un pied à l'intervalle dd'.

De comparer de grands intervalles.

75. Pour comparer de plus grands intervalles, par exemple ceux de trois pieds, on s'y prendra de la maniere qui suit. A l'extremité de la lame mobile, & à peu près dans le même plan, on placera une feuille de carton, ou une planche, ou une autre lame de métal, sur laquelle, dans la direction de EE′, & à la distance de plus de deux pieds, on marquera avec une pointe d'aiguille bien ronde, un petit point. Ensuite ayant pris avec le compas à verres l'un des intervalles qu'on veut comparer, on appliquera sur ce point la ligne de l'un des verres, & l'autre verre sur le limbe, & on avancera la lame

mobile jusqu'à ce qu'une de ses divisions réponde à la ligne de ce second verre, en marquant le nombre désigné par l'index au point de rencontre. On fera la même opération pour l'intervalle suivant, & le rapport des nombres donnera celui des intervalles.

Premier moyen de remplacer ce compas.

76. Nous avons comparé les intervalles DD', & D'C d'une maniere un peu différente, mais pourtant fort exacte, en les divisant chacun en trois intervalles d'un pied, par quatre autres petites lames sur lesquelles il y avoit de petits points qui marquoient la division: ce qui donnoit neuf intervalles d'environ un pied chacun, depuis la ligne du milieu jusqu'au centre du secteur. Nous n'avions point de compas à verres pour connoître les petites différences qui pouvoient se trouver entre ces intervalles & l'intervalle du pied gravé sur la lame mobile; nous y suppléâmes de deux façons: en premier lieu je fis faire une sorte de cadre oblong, qui consistoit en deux lames de cuivre posées à une distance suffisante l'une de l'autre, & attachées à leurs extrémités par deux autres lames plus courtes: j'y faisois tenir avec de la cire deux verres marqués d'une ligne; & au défaut d'une vis, dont l'usage eût été plus commode & plus sûr, j'avançois de force l'un des verres jusqu'à ce que la distance de leurs lignes répondît exactement à l'intervalle que nous voulions comparer. Ensuite on transportoit l'instrument sur le limbe du secteur, & on comparoit, comme ci-dessus, cette distance à l'intervalle d'un pied gravé sur la lame mobile.

Second moyen.

77. Le second moyen que nous employâmes fut de prendre avec un compas à verge, dont les pointes étoient très déliées, un intervalle, par exemple dd'', & de le porter sur la lame mobile, ensorte que l'une des pointes répondant exactement au commencement de la division, nous tracions avec l'autre une petite ligne vers l'extrémité de la division. Il étoit aisé ensuite de connoître de combien de parties de micrometre cette ligne étoit éloignée de cette extrémité; il suffisoit pour cela d'appliquer en travers contre les lames fixes un verre marqué d'une petite ligne, & de pousser la lame mobile jusqu'à ce que cette petite ligne rencontrât successivement l'extrémité du pied, & la ligne tracée avec la pointe du compas, proche cette extrémité.

Grand avantage de la lame mobile & de son micrometre.

78. On voit par-là qu'outre pluſieurs avantages de la lame mobile, elle eſt d'un merveilleux uſage pour comparer des intervalles, & connoître leurs plus petites différences en parties preſque inſenſibles d'une grandeur connue : car on connoîtra très exactement cette différence ſur la lame, ſoit en y tranſportant ces intervalles d'un point pris ſur le limbe, ou hors du limbe, ſuivant que l'intervalle ſera plus petit ou plus grand que le limbe, & avançant enſuite la lame mobile, enſorte que l'extrémité de l'un & de l'autre intervalle paſſe ſous une même ligne tracée ſur un verre fixe ; ſoit qu'ayant pris la différence des intervalles repréſentée par la diſtance de deux lignes tracées ſur un même verre, ou ſucceſſivement par deux ouvertures du compas à verres, on avance la lame mobile juſqu'à ce qu'elle ait paſſé, ou ſous les deux lignes du verre unique, ou ſous la même ligne du compas à verre pris ſucceſſivement avec ſes deux ouvertures.

Ce même moyen, utile dans une autre méthode : avantage des verres ſur les fils.

79. La même choſe arrive dans une autre méthode, dont nous parlerons bientôt, & qui conſiſte à vérifier les diviſions du ſecteur, qui ont ſervi dans l'obſervation, en comparant leur intervalle à une partie aliquote du rayon ; c'eſt-à-dire qu'on en peut très aiſément venir à bout au moyen du compas armé de verres dont j'ai donné la deſcription, & auquel on peut ſuppléer, ou par deux verres collés avec de la cire ſur un cadre oblong, ou par un compas à verge garni de deux pointes très aiguës, de telle ſorte qu'on puiſſe rapprocher l'une de l'autre à volonté, & l'arrêter à la diſtance requiſe. C'eſt ce que nous avons fait, en ſuppléant de ces deux manieres au compas garni de verres. On pourroit, dans toutes ces méthodes, & ſurtout dans celle où l'on fait paſſer la lame mobile ſous un verre marqué d'une ligne, ſe ſervir d'un cheveu, ou d'un fil de ſoie, ou d'argent, poſé tranſverſalement ſur la lame mobile, & attaché de part & d'autre avec de la cire ſur les lames fixes : je m'en ſuis ſervi dans les commencemens, & d'ordinaire avec ſuccès ; mais j'y ai remarqué un inconvénient, ſavoir que ſi ce fil eſt fort près de la lame mobile, il peut très aiſément être pouſſé de côté par un grain de pouſſiere qui ſe trouvera ſur cette lame ; & que s'il en eſt éloigné, il eſt extrêmement difficile, ſoit que l'œil de l'ob-

ſervateur reſte immobile, ſoit qu'il ſoit ramené à la même poſition, d'éviter l'effet de la parallaxe ; au lieu que le verre, pourvu qu'il ſoit bien attaché aux lames fixes, eſt immobile, avec ſa petite ligne, tandis que la lame qui le touche gliſſe par-deſſous, ſans aucun danger de parallaxe.

Uſage de la loupe & du microſcope.

80. Il eſt encore à remarquer que dans ces opérations, & les ſuivantes, nous regardions toujours ces lignes & les points de la diviſion avec une lentille d'un foyer très court, & qui augmentoit conſidérablement les objets. Elle étoit attachée par des fils & des lames élaſtiques, enſorte qu'on pouvoit l'appliquer ſur le limbe, & l'y arrêter à la diſtance qu'on jugeoit la plus convenable à l'obſervation. Je m'y ſuis auſſi quelquefois ſervi du microſcope.

Longueur du rayon.

81. Or dans l'examen de cette diviſion, nous avons trouvé que les ſix pouces qui ſont à gauche, ou du côté du micrometre, contiennent 32716 parties de micrometre, dont une ſeule révolution en contient 180, & que ceux de la droite en contiennent 32734, ce qui fait en tout 65450 ; de plus, que le rayon ayant 9 pieds, & le limbe n'en ayant qu'un, chaque pied du rayon ſurpaſſoit celui du limbe, & que la différence moyenne étoit de 35 parties, ce qui donnoit 65485 parties pour un pied du rayon, & 589365 pour le rayon entier.

L'erreur d'une ſeconde répond à trois parties de micrometre,

82. Il s'enſuit que pour chaque minute il faut 171.446 parties à peu près. Car la tangente d'une minute eſt 2909, pour le rayon 10000000 ; & 10000000 eſt à 2909, comme 589365 à 171.446, ce qui ne change preſque point dans toute l'amplitude de notre ſecteur. En effet, le demi-pied gravé de part & d'autre du point de milieu, n'eſt preſque, pour un rayon de 9 pieds, que la tangente d'un angle de trois dégrés. Or une minute de plus n'augmente la tangente d'un dégré que de 2909, celle de deux dégrés que de 2913, & celle de trois dégrés que de 2917. Il faudroit donc une erreur de près de trois parties de micrometre dans la tangente, lorſqu'on obſerve l'étoile, ou qu'on vérifie les diviſions du ſecteur, pour produire une erreur d'une ſeconde.

82. Mais il faudroit une erreur bien plus grande dans le rayon pris dans toute ſa longueur. Car on démontre aiſément

Et à une bien plus grande différence dans le rayon.

que pour commettre dans un angle une petite erreur donnée, l'erreur du rayon doit être au rayon, comme l'erreur de la tangente à la tangente. On a donc cette analogie : comme 524078 tangente de trois dégrés, eſt à 2917 erreur d'une minute ; (ces nombres ſont pris des tables, pour un rayon 10000000) ; ainſi notre rayon 589365 eſt à un quatrieme terme qu'on trouvera de 3284 parties pour une minute, & par conſéquent il en faut près de 55 pour une ſeconde. Mais ſi cet angle diminue, l'erreur de la tangente eſt ſenſiblement la même, & la tangente diminue preſqu'en raiſon de l'angle ; ainſi l'erreur requiſe dans le rayon augmente preſque dans la raiſon inverſe de l'angle : de ſorte que pour produire dans un angle d'un dégré l'erreur d'une ſeconde, il faudroit dans la détermination du rayon commettre une erreur de près de 165 parties, ce qui n'eſt point à craindre.

Moyen de diminuer l'erreur.

84. Si dans la vérification des intervalles de deux lignes de notre diviſion, dont il y en a 36 à droite, & autant à gauche, on commettoit dans chaque intervalle une erreur d'une partie de micrometre, l'erreur totale pourroit être de 36 parties ; ce qui entraîneroit une erreur de 12 ſecondes : cela arriveroit, dis-je, ſi toutes les erreurs ſe trouvoient du même côté ; mais c'eſt un cas qui n'eſt peut-être jamais arrivé, les erreurs ſe trouvant ordinairement tantôt d'un ſens, tantôt de l'autre, & ſe corrigeant par-là en grande partie les unes les autres, ſi elles ne s'effacent totalement. Mais indépendamment de cette correction, qui ne manque jamais, on diminue conſidérablement cette erreur, en comparant entre eux, ſuivant la méthode expoſée ci-deſſus, les intervalles de ſix pouces, ceux de trois pouces, d'un pouce, d'un demi-pouce, & enfin de deux lignes. Car il n'eſt pas difficile de démontrer, qu'en vérifiant & corrigeant l'inſtrument par cette comparaiſon, l'erreur ne peut être au plus que quintuple de celle qu'on ſuppoſe avoir commis dans chaque intervalle, quand même les erreurs ſe trouveroient toutes du même côté, & cette erreur même, la plus grande qui ſoit poſſible, diminue en raiſon de l'angle ; de ſorte que ſi l'on ſuppoſe avoir commis, dans chacun des intervalles que l'on compare, une erreur d'une partie de micrometre, celle d'un angle d'un dégré

ne

ne pourroit être que de la moitié d'une seconde, les erreurs se trouvassent elles toutes du même côté; ce qui prouve bien la bonté de cette méthode.

Démonstration de cette méthode.

85. En effet, si l'on prend dans le pied un nombre quelconque de parties de micrometre à volonté, par exemple celui que donnent tous les intervalles; qu'on le répartisse sur les deux intervalles de six pouces, suivant le rapport qu'on leur aura trouvé entre eux; & que l'on en fasse de même pour les autres subdivisions, on pourra commettre dans chacune une erreur égale à celle qui se trouve dans l'autre intervalle de six pouces, soit que la subdivision se fasse en deux ou en trois parties, pourvu que dans ce second cas on ne prenne pas immédiatement la valeur de deux parties; mais que pour avoir la valeur de ces deux parties on ait retranché de l'intervalle entier de trois parties, qu'il falloit diviser, la valeur d'une partie sur laquelle on suppose une seule erreur. En général on peut démontrer que si la division se fait en quatre ou en cinq parties que l'on compare entre elles, l'erreur de la totalité sera au plus double de celle de chaque partie; que si on la fait en six ou en sept, elle sera au plus triple, & ainsi de suite.

Méthode de MM. de la Condamine & Bouguer.

86. De cette sorte, pourvu que la division soit nette, surtout si elle est faite par de petits points bien ronds, je suis persuadé qu'en répétant plusieurs fois l'opération, & en s'y servant du microscope, on pourra absolument éviter toute erreur, jusqu'à pouvoir en toute occasion s'assurer que la plus grande erreur possible ne va pas au-delà d'une seconde. Il y a cependant encore une autre méthode beaucoup plus sûre, & qui revient presqu'à celle dont MM. *Bouguer* & *de la Condamine* se sont servis, & par laquelle on vérifie exactement les divisions du secteur, du moins celles qui ont servi dans l'observation. Le P. Maire en a dit quelque chose dans le second livre; nous en allons traiter ici plus au long.

Suite.

87. Après avoir choisi l'étoile qu'ils vouloient observer, & avoir examiné quelle étoit à peu près sa distance au zénith, MM. *Bouguer* & *de la Condamine* prenoient la partie aliquote du rayon qui égaloit la corde de l'arc le plus approchant du double de celui qui mesuroit cette distance, & la

portoient autant de fois sur le rayon, avec le compas à verge, depuis le centre jusqu'au limbe. Le rayon ainsi déterminé, ils décrivoient du centre avec un plus grand compas, & à l'ouverture du rayon même, un arc de cercle sur le limbe, sur lequel ils coupoient l'arc qui répondoit à cette partie aliquote, en faisant ensorte que l'axe de la lunette répondît à peu près au milieu de cet arc, dont chaque extrémité étoit marquée d'un point. Avant l'observation ils faisoient passer le fil à plomb par l'un des points, le limbe tourné du côté de l'orient, & par l'autre point, le limbe tourné à l'occident, & à l'aide du micrometre ils recherchoient la différence de cette double distance au zénith à l'amplitude de cet arc.

Pourquoi on ne s'en est pas servi.

Méthode semblable.

88. Nous eussions pu faire la même chose sur notre secteur, en y décrivant au lieu d'arc une tangente, sur laquelle nous eussions pris une partie aliquote du rayon. Mais le limbe ainsi préparé, ne peut servir qu'à observer une seule étoile, & dans un seul endroit: si l'on en veut observer d'autres, il faut effacer les cercles, ou les tangentes, avec leurs points, & en marquer de nouveaux pour chaque observation. Nous avons mieux aimé avoir un secteur propre à observer toutes les étoiles voisines du zénith, pour pouvoir choisir, suivant la saison, celles qui nous paroîtroient moins exposées à être obscurcies par les rayons du soleil; & afin qu'après nous avoir servi dans notre mesure, cet instrument, une fois vérifié, pût servir dans la suite en tout tems & en tout lieu. Nous étions d'autant plus autorisés à prendre ce parti, que nous avions une méthode toute semblable pour vérifier très sûrement, & avec bien plus de facilité, les divisions; c'est aussi celle dont nous nous sommes servis. Si nous avions eu le compas, dont j'ai donné plus haut la description, garni de deux verres, l'un fixe, l'autre mobile, avec son micrometre, nous nous en fussions servis avec encore plus d'avantage; mais nous avons suppléé à son défaut, comme je l'ai déja dit.

Exemple de cette méthode.

89. Qu'il faille par exemple déterminer l'angle auquel répond sur notre secteur l'intervalle pris sur la lame mobile, composé de dix-sept divisions à droite, & de treize à gauche, chacune de ces divisions étant de deux lignes; c'est aux deux points qui terminent cet intervalle entier, que nous avons

rapporté la position de μ de la grande ourse à *Rimini*, le limbe tourné tantôt à l'orient, tantôt à l'occident ; & nous avons mesuré avec notre micrometre la distance du fil à plomb à chacun de ces points de division, en avançant la lame mobile jusqu'à ce que le fil répondît exactement au point, comme nous l'expliquerons plus au long dans la suite. L'espace entier est composé de 30 intervalles de deux lignes, le pied en comprend 72, & par conséquent le rayon, qui est de 9 pieds, en contient 648. Or 648, divisé par 30, donne à peu près 21. Il falloit donc comparer cet intervalle à la vingt-unieme partie du rayon.

90. Comme en divisant 648 par 21, il vient $30\frac{6}{7}$, nous avons pris à peu près cet intervalle sur la lame mobile, & mené à la même distance sur un long verre poli deux paralleles coupées en certains endroits par de petites lignes. Nous avons ensuite placé horizontalement le secteur sur deux supports, qu'il débordoit d'un quart de part & d'autre ; le tuyau de fer blanc étoit d'ailleurs trop massif & trop bien soudé avec la regle de fer, pour qu'il y eût aucun danger de flexion ; puis appliquant contre le limbe le côté du verre sur lequel étoient marquées les paralleles, de sorte que l'une répondant à peu près à la fin du dix septieme intervalle de deux lignes sur la gauche, l'autre ne devoit pas être fort éloignée du treizieme à droite, nous déterminions en parties de micrometre par le mouvement de la vis, suivant la méthode exposée ci-dessus, la différence de la distance de ces paralleles à l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile. Suite.

91. Nous avions préparé aussi une sorte de petites regles de bois de l'épaisseur des lames de laiton, afin qu'en les appliquant sur le rayon de fer, leur face antérieure se trouvât dans le plan du limbe. Elles étoient recouvertes d'une feuille de papier collée sur le bois. Nous attachions avec de la cire molle contre le rayon de fer la premiere regle D, à peu près à la distance du centre S du secteur, que requéroit l'intervalle que nous avions pris pour la vingt-unieme partie du rayon ; nous appliquions ensuite le verre, de sorte que l'une de ses paralleles passât exactement par le centre du secteur : ce que nous connoissions en l'examinant avec une lentille d'un foyer assez Suite. Pl. II. F. 3.

court ; & nous faiſions gliſſer ſous le verre la petite regle de bois, en l'avançant contre le centre S, juſqu'à ce que le petit point, marqué ſur le papier, répondît en même tems & à la ſeconde ligne marquée ſur le verre, & au milieu de la grande regle de fer : la cire avoit tout à la fois l'avantage d'être aſſez molle pour laiſſer avancer le bois quand on vouloit le pouſſer, & d'avoir aſſez de tenacité pour lui conſerver enſuite invariablement ſa poſition. On arrangeoit de la même façon les autres petites regles de bois, juſqu'à ce qu'il ne reſtât plus qu'un ſeul intervalle à meſurer, depuis le poind D juſqu'au milieu de la ligne EE'.

Suite.

92. Le verre ne pouvoit plus ſervir à comparer cet intervalle avec les précédens ; nous y avons employé notre compas à verge, avec lequel nous avons porté cette derniere partie du rayon, & l'un des intervalles égaux DD ſur la lame mobile, en commençant par le même point, qui étoit comme le centre d'où nous décrivions ſur le limbe deux petites lignes. Il étoit aiſé enſuite de déterminer en parties de micrometre la diſtance de ces deux petites lignes, en pouſſant la lame, & en les faiſant paſſer ſucceſſivement ſous le même trait d'un verre immobile, & appliqué contre le limbe. Cette diſtance devoit ſe répartir ſur les 21 parties du rayon, & l'on connoiſſoit enfin en parties de micrometre la différence d'une de ces parties aliquotes avec notre intervalle de ces 30 parties de la lame mobile, auxquelles nous avions rapporté la poſition de la fixe en l'obſervant à *Rimini* : en conſéquence on voyoit auſſi de combien ce nombre différoit des 30 parties dont le rayon en contient 648, & quelle correction il convenoit de faire à la diviſion de la lame ; ou plus briévement, on voyoit à quelangle du centre répondoit cet intervalle, puiſqu'on ſait à quel angle répond une tangente qui eſt au rayon comme 1 à 42, & qu'en doublant cet angle on a une double tangente, ou plutôt deux tangentes, qui valent enſemble la vingt unieme partie du rayon ; & de-là il étoit aiſé de connoître la différence de cette partie avec l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile, par le nombre connu de parties de micrometre, dont cet intervalle differe de cette partie aliquote.

93. On voit encore qu'il n'étoit pas beſoin de prendre ſi

ſcrupuleuſement l'intervalle précis d'une partie aliquote, puiſque la différence du dernier intervalle doit ſe répartir ſur 21 parties; d'où il ſuit que chaque partie aliquote n'a que la vingt-unieme partie de l'erreur, qui par-là devient inſenſible, puiſqu'il faut trois parties de micrometre pour produire l'erreur d'une ſeconde, & qu'avec un peu d'application on peut éviter l'erreur de deux parties, qui ne produiroit qu'une erreur de deux tierces. Le ſeul inconvénient qu'il y eût, c'eſt que comme il falloit placer les petites regles de bois les unes après les autres, & les mettre chacune à ſon point, cela demandoit du tems, du travail & de la patience.

Préciſion de cette méthode.

94. Le moyen dont nous nous ſervîmes pour y remédier, fut de prendre avec le compas à verge la vingt-unieme partie, ou à peu près, du rayon; de placer les petites regles de bois environ à cette même diſtance les unes des autres, & de tendre par-deſſus un fil bien délié depuis le centre S juſqu'au milieu de la lame mobile EE'. Enſuite ayant appliqué une pointe du compas en S, nous marquions avec l'autre un petit point ſur la premiere regle de bois ſous le fil même en D. De ce dernier point, & à la même ouverture du compas, nous marquions un autre point ſur la ſeconde regle, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere. Cela fait, nous comparions d'abord une des parties égales du rayon avec l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile; puis la partie reſtante du rayon avec l'une de ces parties égales, & cela de deux manieres.

Autre méthode plus commode par le compas à verge.

95. Premierement nous poſions une pointe du compas à une extrémité de cet intervalle; nous tracions avec l'autre une petite ligne ſur la lame mobile, & nous meſurions à l'ordinaire la diſtance de cette ligne à l'autre extrémité du même intervalle par le mouvement de la lame mobile: quant à la partie reſtante du rayon, nous la prenions auſſi avec le compas; nous la portions ſur la lame mobile, en commençant au même point, & nous trouvions, comme ci-deſſus, la diſtance des deux petites lignes marquées ſur le limbe. Secondement au lieu d'un verre, nous en collions deux avec de la cire ſur une longue lame de laiton percée à jour dans ſa longueur, dont nous avons déja parlé, & qui peut ſuppléer en quelque façon au compas à verres, garni d'un verre mobile & d'un

Suite.

micrometre : nous appliquions cet inſtrument ſur deux petites regles de bois voiſines l'une de l'autre ; & nous rapprochions les verres juſqu'à ce que la diſtance de leurs lignes répondît exactement à une des parties égales. Enſuite ayant porté l'inſtrument ſur le limbe, nous comparions cette diſtance avec l'intervalle des 30 parties de la lame mobile, & nous en prenions la différence en parties de micrometre. Nous prenions encore avec le même inſtrument la derniere partie du rayon, & nous la comparions au même intervalle ; ce qui nous donnoit le rapport & la différence de ces diſtances, ſans qu'il fût beſoin de marquer ſur le limbe des lignes qu'il eût fallu enſuite effacer.

Comparaiſon de cette méthode avec une partie aliquote gravée ſur le limbe.

96. Il n'eſt point néceſſaire d'avertir ici que toutes ces comparaiſons euſſent pu ſe faire plus aiſément avec le compas à verres, dont j'ai donné plus haut la deſcription, & qui a un verre mobile, avec un micrometre. Il ſeroit également inutile de dire que, dans toutes ces opérations, nous nous ſommes ſervis d'une très bonne lentille pour groſſir les objets. Mais il ne faut pas oublier que nous faiſons ici deux comparaiſons, celle de la poſition de l'étoile avec l'intervalle des 30 parties de la lame mobile, & celle de cet intervalle avec une partie aliquote du rayon, tandis qu'après avoir tranſporté cette partie aliquote ſur la lame mobile, nous comparons immédiatement la poſition de l'étoile avec cette même partie aliquote. Mais cela ne peut produire qu'une erreur d'une, ou tout au plus de deux parties de micrometre, qu'on peut même éviter en ſe ſervant du microſcope, & qui d'ailleurs ne va pas à une ſeconde. De plus, cette erreur eſt compenſée, & par le grand nombre de méthodes dont on peut ſe ſervir pour procéder à cet examen, qu'on peut recommencer autant de fois qu'on jugera à propos, & parcequ'en comparant de la même façon un nombre quelconque de parties priſes depuis le milieu de la lame mobile, avec une partie aliquote, ou le double de ce nombre pris de part & d'autre du point de milieu, on a la facilité de ſe procurer, une fois pour toutes, une vérification très exacte de toutes les diviſions, laquelle pourra ſervir pour tous les tems, pour tous les lieux, & pour toutes les étoiles voiſines du zénith, ſans courir riſque de commettre une erreur qui excede le tiers d'une ſeconde.

97. Dans les obſervations ſuivantes, nous nous ſommes ſervis de la même méthode pour vérifier les diviſions. Seulement lorſque la partie aliquote différoit notablement de l'intervalle auquel elle devoit être comparée, nous prenions la moitié de cet intervalle, & la vérification ſe faiſoit avec un ſuccès égal. J'apporterai pour exemple l'intervalle qui nous a ſervi pour l'étoile α du cygne. Nous avons obſervé ſa poſition à *Rome*, & nous l'avons rapportée à 30 parties ſur la gauche, & à 26 ſur la droite; ce qui fait 56 en tout: le rayon en contient 648, qui, diviſé par 56, donne 11 $\frac{1}{2}$, ou environ. On pourroit donc porter à droite & à gauche ſur cet intervalle, en commençant par le milieu, la vingt-troiſieme partie du rayon; mais ce ſeroit s'engager dans une nouvelle opération, avec danger de commettre une nouvelle erreur. On pourroit encore ſe ſervir de 11 parties; mais 648, diviſé par 11, donne près de 59, intervalle plus grand que l'intervalle à comparer de 3 parties, ou de 15 tours de vis; ce qui donneroit lieu de ſoupçonner une erreur encore plus conſidérable. On peut y remédier au moyen de trois verres. Suppoſons que la diſtance du milieu aux extrémités ſoit à peu près la vingt-troiſieme partie du rayon, ou 28 intervalles de deux lignes, les extrémités ſeront éloignées l'une de l'autre de 56 parties de la lame mobile: portons 11 fois cet intervalle ſur le rayon, il reſtera environ la moitié d'un intervalle: faiſons enſorte que les verres des deux bouts répondent exactement à une des premieres diviſions du rayon, & que celui du milieu, avec l'un des précédens, réponde de même à la derniere, qui n'eſt que la moitié d'une des autres, ou à peu près. Comparons la premiere diſtance, qui eſt la plus grande, avec l'intervalle de 56 parties, auquel on a rapporté la poſition de l'étoile; enſuite les diſtances du premier verre au ſecond, & du ſecond au troiſieme, avec un même intervalle de la lame mobile, pour avoir en parties de micrometre la différence de ces parties entre elles. La moitié de cette différence ſera la différence entiere de la derniere diviſion avec la moitié d'une des diviſions précédentes. Ainſi cette moitié de différence, diviſée par 23, fera connoître ce qu'il faut ajouter ou retrancher à chaque moitié des diviſions précédeutes, pour parvenir

Ce qu'il faut faire quand la partie aliquote eſt trop grande ou trop petite.

à une parfaite égalité. De-là on verra de combien on doit augmenter ou diminuer une de ces 11 parties égales, pour qu'elle contienne préciſément $\frac{1}{213}$ du rayon, & par-là même on connoîtra auſſi la différence de cette meſure, ou de $\frac{1}{213}$ du rayon, avec notre intervalle de 56 parties de la lame mobile.

Exactitude de la vérification.

98. Je ne finirois point ſi je voulois propoſer des exemples pour tous les cas : il ſuffit de remarquer que nous fîmes pluſieurs eſſais, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, juſqu'à ce que l'uſage nous eût donné plus de facilité pour la pratique, & que l'accord de pluſieurs obſervations ne nous laiſſât plus aucun doute ſur l'état de notre inſtrument ; de ſorte qu'il n'y a plus lieu de s'étonner de l'accord parfait qui ſe trouve entre nos obſervations aſtronomiques. Du reſte on voit aſſez de quelle utilité eſt la lame mobile pour la rectification des diviſions ; nous verrons bientôt quel eſt ſon avantage dans les obſervations mêmes, & nous appliquerons dans le chapitre ſuivant la même théorie à la vérification du quart de cercle.

De la maniere de placer les fils.

99. Après avoir expliqué ce qui regarde la rectification des diviſions, il faut dire quelque choſe ſur la maniere de placer les fils. La premiere attention qu'on doit avoir eſt de les poſer à angles droits : ce qui dépend beaucoup de l'habileté de l'ouvrier, qui doit donner aux petits trous MNLK (fig. 13.) la forme & la diſpoſition néceſſaire, pour que les fils de ſoie, ou d'argent, ce qui eſt encore mieux, ſe coupent exactement à angles droits. Notre artiſte y avoit parfaitement bien réuſſi. On peut aiſément s'en aſſurer, en appliquant à l'orifice du tuyau un papier, où l'on aura tracé, par des poïnts beaucoup plus diſtans l'un de l'autre, deux lignes perpendiculaires, & ſur lequel on étendra une goutte d'huile pour le rendre tranſparent, afin qu'en appliquant l'œil du côté de ces fils, on puiſſe les voir diſtinctement. Quant à la maniere de leur conſerver leur poſition, on en vient à bout au moyen de la lame élaſtique dont nous avons parlé, & ſans laquelle ils pourroient très facilement ſe lâcher, & changer de poſition.

D'une erreur facile à éviter dans cette eſpece de ſecteur.

100. Il faut enſuite placer le tuyau qui porte les fils, au foyer de l'objectif, comme au lieu où ſe peint l'image de l'objet. Il eſt vrai, & nous l'avons déja remarqué, que les rayons qui partent d'un même point de l'objet, n'ont pas

tous

tous le même foyer, & qu'il y a une ſuite de foyers qui occupent une vingt-ſeptieme partie de la diſtance du foyer le plus proche à l'objectif: cet intervalle eſt de 4 pouces pour un ſecteur tel que le nôtre, où cette diſtance eſt de 9 pieds. Les rayons violets ſont ceux qui ſe réuniſſent le plus près de l'objectif, & les rouges, ceux qui ſe réuniſſent le plus loin. Quant aux erreurs que cela peut occaſionner, M. *Bouguer* en a traité aſſez amplement. Je me contenterai de quelques obſervations. Pemierement cet eſpace diminue de plus de moitié, ſi l'on n'a égard qu'aux rayons les plus clairs, tel que le jaune, avec une partie de l'oranger & du violet. De plus, ſi le verre eſt bien centré, & que l'œil ſoit placé dans la ligne qui paſſe par le centre des fils, & par le milieu de l'ouverture de l'objectif, & qu'enfin ce point de milieu ſoit celui où paſſe l'axe, il n'y a plus d'erreur à craindre dans notre inſtrument, quand même les fils ne ſeroient pas au foyer de l'objectif. Car cet inſtrument n'eſt point de ceux où l'on meſure les angles par le mouvement des fils; ce qui lui donne un grand avantage ſur les autres; mais il n'eſt queſtion uniquement que d'avoir la ligne, que nous avons nommée plus haut axe de la lunette, & qu'on appelle auſſi ligne de foi, & de la faire paſſer par l'objet & le centre des fils. Or il eſt aiſé, comme nous le dirons bientôt, dans un inſtrument comme le nôtre, de connoître exactement le point où paſſe l'axe de l'objectif, & de placer l'œil dans la ligne qui paſſe par ce point, & par le centre des fils, puiſqu'après avoir déterminé la poſition tant des fils que de l'objectif, on peut, ſans y toucher davantage, déterminer celle de l'oculaire, & placer à la diſtance que l'on veut l'ouverture par où l'on regarde.

Parallaxes des fils.

101. Il eſt encore à remarquer que nous avions les yeux également conformés, le P. *Maire* & moi étant auſſi myopes l'un que l'autre; qu'ainſi le foyer de l'oculaire étoit le même pour tous les deux, & que nous n'étions point expoſés à l'incommodité qu'ont éprouvée MM. de *la Condamine* & *Bouguer*, dont le premier a la vue longue, & le ſecond l'a courte; enſorte que nous pouvions le même jour obſerver l'un & l'autre la même étoile. Si les fils ſont placés en-deçà ou en-delà du foyer de l'objectif, ou de cet endroit du foyer où les

rayons ſont plus denſes, la tache qui ſe fait ſur la rétine, par un effet des la diverſe réfrangibilité des rayons, & par le défaut de la figure ſphérique, qui ne réunit pas tous les rayons au même point, produit une eſpece de jeu ou de parallaxe, qui ſe manifeſte en hauſſant ou baiſſant l'œil, en conſéquence de quoi l'objet paroît changer de place par rapport aux fils, & ſuivre le mouvement de l'œil dans le premier cas, & dans le ſecond ſe mouvoir en ſens contraire. Lorſqu'on n'apperçoit pas cette parallaxe, c'eſt la meilleure preuve que les fils ſont exactement placés. Or il nous étoit aiſé de la faire diſparoître, en retirant ou en avançant le tuyau OIKN, dont le mouvement qui ſe faiſoit ſans ſacade, ne pouvoit cependant être produit que par un effort conſidérable; ce qui lui conſervoit invariablement ſa poſition. Les fils ayant été mis à la place qui leur convenoit, il ne m'eſt jamais arrivé d'appercevoir une autre parallaxe, ou changement de foyer, que MM. de *la Condamine* & *Bouguer* ont obſervé (1), occaſionné par la différente conſtitution de l'atmoſphere; de ſorte que l'étoile une fois amenée au centre des fils, nous avions beau promener l'œil ſur tout l'orifice du tuyau, nous n'appercevions de parallaxe ni de façon ni d'autre, & l'étoile nous paroiſſoit toujours au même endroit.

Direction des fils.

102. Après avoir placé les fils à une juſte diſtance de l'objectif, il falloit les mettre dans une ſituation convenable; l'un devant être parallele, & l'autre perpendiculaire au plan du ſecteur, c'eſt-à-dire au plan qui paſſe par le limbe & le centre. Nous y avons réuſſi ſans peine, en plaçant à l'ordinaire le ſecteur dans un plan horizontal, au moyen d'un niveau rempli d'une liqueur où nageoit une bulle d'air, appellé *niveau d'eau*, & tournant enſuite ſur ſon axe le tuyau OIKN, ſans changer ſa poſition, juſqu'à ce que l'autre fil devînt parallele au fil à plomb, qui étoit ſuſpendu librement devant lui. Mais comme l'axe du tuyau QAOR étoit ſenſiblement pa-

(1) On peut voir à ce ſujet le Supplément au Journal Hiſt. par M. de *la Condamine*, page 163 & ſuivantes, & le Mémoire de M. *Bouguer*, du 29 Juillet 1750.

rallele à la regle de fer qui porte tous les tubes, il s'enſuit que ce fil étoit ſenſiblement perpendiculaire au plan du ſecteur, & par une conſéquence ultérieure, que l'autre fil étoit parallele à ce plan & à la ligne du milieu de la lame mobile. Voilà ce qui regarde la poſition des fils.

Illumination des fils.

103. On les éclairoit aiſément avec une lampe qu'on plaçoit derriere l'obſervateur, pour que la lumiere ne lui donnât pas dans les yeux, par l'ouverture *i*QR*h* de la figure 14, & l'on avoit pourvu à ce que l'obſervateur n'en fût point incommodé, ſoit en rendant tout l'intérieur de la lunette le plus noir qu'il ſe pouvoit, ſoit en couvrant la lampe, ſur-tout pardevant, d'un corps opaque de figure conique, dans lequel on avoit pratiqué une petite fenêtre, qui ne laiſſoit paſſer qu'autant de lumiere qu'il en falloit pour éclairer un eſpace fort reſſerré, autour de l'ouverture *i*QR*h*. Mais il eſt arrivé heureuſement que la plupart de nos obſervations, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, ſe ſont faites, ou en plein jour, ou à la faveur du crépuſcule; ce qui nous diſpenſoit d'éclairer les fils, & rendoit l'image de l'étoile plus diſtincte.

Paralléliſme de la lunette au plan de l'inſtrument

104. Pour achever ce qui regarde la diſpoſition du ſecteur, il nous reſte à parler du paralléliſme de l'axe de la lunette au plan de l'inſtrument; ſujet ſur lequel M. *Bouguer* s'eſt fort étendu. Pour moi, je puis aſſurer avec vérité, que du moment que je commençai à penſer à notre voyage, & à l'inſtrument néceſſaire à ce deſſein, & avant que nous euſſions reçu le livre de M. *Bouguer*, je penſai d'abord à ce paralléliſme, & je crois que tous les Aſtronomes y ont eu égard, dans ces longs inſtrumens dont on ſe ſert pour obſerver les étoiles voiſines du zénith, comme M. de *la Condamine* me paroît abſolument l'avoir démontré, même par rapport aux petits quarts de cercle (1), & ſurtout à la néceſſité de placer le plan du ſecteur dans la direction de la méridienne; moyennant quoi on ne doit pas certainement ſe mettre fort en peine de ce paralléliſme: & je m'apperçus dès-lors qu'il étoit très

(1) Voyez le Supplément au Journal, par M. de *la Condamine*, ſeconde Partie, Réponſe à l'Objection XIII.

facile de connoître par les obſervations mêmes, ſi la lunette s'écartoit du plan, & la quantité de cette déviation, de ſorte que ſi cela pouvoit produire quelque erreur, on pût l'évaluer ſans peine, & la corriger.

Moyen de procurer ce paralléliſme.

105. Lorſque la lunette eſt adoſſée à la regle de fer, il eſt un peu plus difficile de placer tellement l'objectif, que l'axe ſoit exactement parallele au plan du ſecteur. C'eſt pourquoi j'ai pourvu 1°. à ce que le point de l'objectif, par où l'axe doit paſſer, pût être écarté ou rapproché du plan du ſecteur, enſorte qu'un mouvement conſidérable n'y produisît qu'une très légere différence de rapprochement ou d'éloignement; 2°. à ce qu'après avoir reçu le mouvement néceſſaire, ce même point pût être fixé de maniere à ne pouvoir perdre ſa poſition. En conſéquence nous avons placé la boëte qui renferme l'objectif (fig. 11.) excentriquement, relativement à la caiſſe où cette boëte eſt elle-même renfermée (nous en avons deja parlé): car puiſque l'excentricité *a b* (fig. 11. & 12.) eſt peu de choſe en comparaiſon du rayon *a*E, il s'enſuit qu'un grand mouvement dans le point E n'en produit qu'un très petit dans le point *b*, encore ne doit-on pas tenir compte de celui-ci pris dans ſon entier, pour déterminer le rapprochement ou l'éloignement, comme de *b b'*, ou *b t*, mais ſeulement de ſa partie *b d* ou *b z*.

Méthode pour trouver le point de l'axe de l'objectif.

106. Au moyen de ce mouvement circulaire on peut trouver le point précis de l'objectif par où paſſe l'axe: ce qui n'eſt pas un petit avantage, ſurtout pour connoître ſi le verre eſt bien centré, afin de pouvoir placer ce point dans le centre de l'ouverture, & faire enſorte que l'axe de l'oculaire & le centre de l'orifice de ſon tuyau ſe trouvent dans la ligne qui, partant de ce point, paſſe par le centre des fils. Il y a encore pluſieurs autres méthodes pour connoître le point par où paſſe l'axe; en voici une: je place l'objectif à la hauteur d'un rayon de lumiere, ou d'un point lumineux, & à une juſte diſtance, par exemple vis-à-vis de l'ouverture circulaire d'un corps opaque, proche laquelle on a placé de nuit, & par derriere, une flamme plus grande que le diametre de cette ouverture; on recevra l'image du point lumineux ſur une feuille de papier percée avec la pointe d'une épingle, de maniere que le trou réponde

au centre de l'image : j'applique contre l'objectif un carton avec une ouverture assez grande pour laisser passer une quantité suffisante de rayons de l'objectif, & je marque la position du verre, par rapport au carton, par trois points marqués sur le contour du verre, auxquels répondent trois autres points marqués sur le carton : ce point de l'axe se trouve dans la ligne qui joint le point lumineux au centre de l'image. Ayant donc écarté l'objectif, je vise par le centre de l'image, & par l'ouverture du carton au point lumineux, tandis qu'un aide fait glisser sur le carton une regle jusqu'à ce qu'elle me paroisse couvrir la moitié de ce point. Pour lors on marque sur le carton cette position de la regle ; & après avoir marqué deux positions de cette espece, on remet l'objectif à sa place, on applique de nouveau la regle sur le carton aux endroits désignés, on continue sur le verre les lignes tracées sur le carton, & le point d'intersection de ces deux lignes est le point cherché.

Autres méthodes.

107. On peut se servir aussi d'une lunette qui ait un micrometre au centre de l'objectif. Un aide fait tourner sur son axe la boëte qui renferme l'objectif, & qui dans les lunettes ordinaires est concentrique au verre, tandis que l'observateur vise par le centre des fils à un objet éloigné ; si le point de l'axe de l'objectif est exactement au centre de la boëte, le centre des fils répondra toujours au même point de l'objet ; s'il n'y est pas, le centre des fils parcourra divers points de l'objet ; on remarquera ces points ; on déterminera avec le fil mobile la quantité de cette déviation, & le côté qui répond à chaque position de la boëte ; par-là on connoîtra la grandeur du cercle décrit par le point de l'axe autour du centre de la boëte, puisqu'il est égal à l'aberration du centre des fils sur l'objet, & le côté opposé à celui où se porte le centre des fils par rapport à l'objet, c'est-à-dire qu'on aura le point de l'axe.

Moyen de le trouver dans le secteur.

108. Mais comme je ne mets point dans mon instrument un fil mobile au foyer de l'oculaire, j'ai rendu l'objectif excentrique, afin qu'au moyen de cette excentricité on pût connoître exactement ce point de l'axe ; car si l'on a l'intervalle dont ce point s'éloigne ou se rapproche du plan du secteur

par deux changemens de position dans la boëte (or on l'aura par la méthode que nous donnerons bientôt), on connoîtra auſſi le point précis par où paſſe l'axe de l'objectif. Soient par exemple trois poſitions b', t, t' (fig. 12.), qui répondent à trois poſitions E″, e, e' de la boëte, & qu'on connoiſſe la valeur des intervalles $d\zeta$, $\zeta\zeta'$, dont le point ſe rapproche du plan du ſecteur par ces deux changemens de poſition, il eſt queſtion de trouver b', t, t', c'eſt-à-dire le point de l'axe dans les trois poſitions.

Suite. 109. Puiſqu'on connoît les mouvemens E″e, ee', on pourra prendre avec un compas la meſure de ces arcs, & déterminer l'angle E″ee' meſuré par la moitié du reſte de la circonférence, ou de l'arc E″Ee' ſur lequel il s'appuie. De plus, les cordes E″e, & $b't$, ee', & tt' ſont paralleles, puiſqu'elles répondent aux mêmes angles du centre de deux cercles concentriques. Donc les angles E″ee', $b'tt'$ formés par ces cordes, ſont égaux. Donc ſi l'on continue les lignes $t't$, db' juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en c, l'angle $b'tc$ ſera meſuré par la moitié de l'arc E″ee'. On aura auſſi le rapport de $b't$ à tt', qui ſera le même que celui de E″e à ee', & le rapport de $t't$ à tc, qui ſera celui de $\zeta'\zeta$ à ζd. Donc on aura celui de $b't$ à tc; & comme on connoît d'ailleurs l'angle $b'tc$, on aura les autres angles de ce triangle, nommément l'angle $cb't$, & par conſéquent ſon alterne $b't\zeta$. Donc ayant mené $b'i$ parallele, & égal à $d\zeta$, on aura $b't$ par cette proportion: comme le ſinus de l'angle connu $b'ti$, ou $b't\zeta$ eſt au rayon, ainſi la ligne donnée $b'i$ eſt à $b't$. Donc ſi l'on prend une quatrieme proportionnelle à E″e, E″a, & $b't$, on aura ab', diſtance du point cherché b' au centre a, ou l'excentricité; & comme on a auſſi les points E″, e, e', on connoîtra les trois poſitions du point de l'axe b', t, t', & le problême ſera réſolu.

Méthode trop imparfaite de M. *Bouguer* pour trouver le paralléliſme, 110. Il faut chercher maintenant l'intervalle $d\zeta$, dont le point de l'axe ſe rapproche du plan du ſecteur, en allant de b' en t, tandis que la boëte change de poſition de E″ en e; & nous donnerons en même tems une méthode pour déterminer l'inclinaiſon de l'axe de la lunette au plan du ſecteur, & l'erreur qui en peut provenir, & pour rendre enſuite la lunette parallele, ou ſi on aime mieux la laiſſer inclinée,

pour évaluer l'erreur & la corriger. Les Aſtronomes donnent pluſieurs méthodes pour connoître ſi l'axe eſt parallele au plan du ſecteur, ou de combien il eſt incliné ſur ce plan. Celle de M. *Bouguer* eſt au moins fort imparfaite : elle conſiſte à placer le ſecteur horizontalement, à viſer enſuite à quelque objet très éloigné par le bord du limbe, & par la platine du centre, en pointant à la vue ſimple, & à placer ſur le centre & le limbe des pinnules, pour viſer plus juſte ; après quoi il ne reſtera plus qu'à ajuſter la lunette ſur le même objet pour la rendre parallele. Cette méthode eſt, dis-je, aſſez informe, comme l'a très bien remarqué M. *de la Condamine*, parcequ'il n'eſt pas poſſible de pointer aſſez exactement à la vue ſimple, pour prévenir une erreur de deux ou trois minutes, ou plus, dans la poſition de la lunette. Elle peut néanmoins ſervir pour donner tellement quellement un paralléliſme approché.

Autre méthode plus sûre, mais difficile dans la pratique.

111. Pour ne point parler des autres méthodes, celle dont MM. *Bouguer* & *de la Condamine* ſe ſont ſervis pour trouver la déviation de la lunette, eſt exacte, à la vérité ; mais elle demande beaucoup de travail : ſouvent même, à raiſon de la diſpoſition du lieu où ſe fait l'obſervation, elle devient impraticable. Suivant cette méthode, on place d'abord exactement le ſecteur dans le plan du méridien ; on détermine enſuite l'inſtant de la médiation d'une étoile par pluſieurs hauteurs correſpondantes, ou ſi l'on connoît l'aſcenſion droite, & le rapport du mouvement de la pendule à celui du ſoleil, par la différence du tems qui ſe trouve entre le point du midi & le paſſage de l'étoile par le méridien. Si l'étoile atteint le fil vertical préciſément à l'inſtant de la médiation calculée, la lunette eſt parallele ; ſinon on prendra la différence du tems, on la réduira à l'ordinaire en parties de l'équateur, & on aura l'arc du parallele de l'étoile intercepté par la ligne de foi, & le plan du méridien, que l'on convertira en arc de grand cercle par une méthode uſitée en Aſtronomie, ſavoir en diminuant le nombre des minutes & des ſecondes, en raiſon du rayon au co-ſinus de la déclinaiſon de l'étoile, ou du rayon d'un grand cercle à celui du parallele.

Sa difficulté.

112. Mais outre qu'il en coute toujours beaucoup de tems,

& de travail pour prendre ces hauteurs, le lieu de l'obſervation eſt ſouvent tel, qu'on n'y a de vue ni à l'orient, ni à l'occident. Telle a été notre ſtation de *Rome*, telle à peu près a été celle de *Rimini*, où il n'y avoit que peu de vue à l'orient, point à l'occident; enſorte que pour avoir des hauteurs correſpondantes, il nous eût fallu avoir recours à des réductions de tems, après avoir obſervé au voiſinage dans quelque endroit plus commode. Il y a plus; il arrive ſouvent qu'on ne peut avoir deux hauteurs correſpondantes, les étoiles pouvant difficilement être apperçues de jour avec de petits quarts-de-cercle, tellement qu'on eſt obligé de recourir à l'aſcenſion droite.

Méthode de l'Auteur.

113. Pour moi dès que je commençai à m'exercer dans cette ſorte d'opérations, après avoir pointé l'inſtrument dans le plan du méridien; ce qui eſt également ſuppoſé dans la méthode précédente, & nous verrons bientôt par quel moyen on y peut peut réuſſir, je trouvai tout de ſuite une méthode facile (dont j'ai dit un mot dans le premier livre) pour connoître d'une maniere très préciſe la déviation de l'axe de la lunette, & cela ſans avoir aucune connoiſſance, ni de l'aſcenſion droite de l'étoile, ni de l'état de la pendule par rapport au ſoleil, ni du tems de la médiation: c'eſt ce que nous allons expliquer maintenant plus en détail.

Suite.

114. Soit (fig. 19.) G le centre du ſecteur, AB le limbe placé avec le centre dans le plan du méridien, GD le fil à plomb qui effleure le limbe en E; ſoit GF la ligne de foi, ou l'axe de la lunette, que l'on conçoit ici rapproché par un mouvement parallele à lui-même, juſqu'à ce que ſon extrémité ſupérieure ſe confonde avec le centre G. Si cet axe eſt incliné, ſon autre extrémité F ſera éloignée du limbe de l'intervalle d'une ligne FR perpendiculaire à ce limbe, & l'angle de la déviation ſera FGR. Suppoſons maintenant que G ſoit le centre d'une ſphere céleſte, dont le pôle eſt P, le méridien PQ paſſant par le zénith Z, où va ſe terminer la ligne du fil à plomb prolongée. L'axe FG ſe dirigera à un point L d'un cercle horaire PL incliné ſur le méridien PQ, & ſi l'on continue RG juſqu'à ce qu'elle rencontre le méridien en un point M, l'angle LGM ſera égal à l'angle de l'inclinaiſon

l'inclinaiſon FGR, & l'étoile ſe trouvera au centre des fils, non au moment de ſon paſſage au méridien en M, mais à celui où elle paſſera par ce cercle horaire en L. Si on obſerve le jour ſuivant la même étoile, après avoir tourné le limbe du côté oppoſé, l'axe de la lunette & le cercle horaire ſe trouveront de l'autre côté du méridien, c'eſt-à-dire que GF ſera changée en GF′, & PL en PL′: & ayant retourné l'inſtrument le troiſieme jour, l'axe reviendra à ſa premiere poſition GF, & le cercle horaire en PL.

Suite.

115. Suppoſons PL à l'orient par rapport au méridien PQ, l'étoile arrivera en L plutôt qu'en M. Le jour ſuivant, après une révolution entiere, elle reviendra au point L, (car le mouvement propre des étoiles, pour un ou deux jours, ne tire pas à conſéquence, & il ſeroit encore aiſé d'y avoir égard ſi on vouloit); mais pour arriver au point L′ ſur lequel la lunette eſt dirigée, elle a encore à parcourir l'arc entier LOL′ de ſon parallele, dont le pôle eſt en P, & qui eſt coupé également, & à angles droits, en O par le méridien PQ. Le troiſieme jour l'étoile paroîtra en L avant la fin de ſa révolution, & la différence de ce tems à celui d'une révolution entiere ſera le tems qu'il lui faut pour parcourir l'arc LOL′, double de LO. Ainſi les intervalles de tems écoulés de la premiere obſervation à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſieme, different entre eux du double du tems néceſſaire pour l'arc LOL′, ou du quadruple du tems néceſſaire pour l'arc LO, le premier intervalle étant plus long, & le ſecond plus court, que celui d'une révolution, de tout le tems qu'il faut pour parcourir l'arc LOL′. On auroit la même différence ſi PL étoit à l'occident, & PL′ à l'orient, auquel cas le premier intervalle ſeroit au contraire plus court, le ſecond plus long de la même quantité, c'eſt-à-dire du quadruple du tems dû à l'arc LO.

Inclinaiſon de la lunette réduite en parties du parallele.

116. Maintenant que la pendule s'accorde ou ne s'accorde pas avec le mouvement du ſoleil, ou des étoiles fixes, pourvu que ſon mouvement ſoit uniforme, elle marquera de la premiere à la troiſieme obſervation le tems requis pour deux révolutions, & l'on aura cette analogie: comme cet intervalle de tems eſt à la quatrieme partie de la différence ci-deſſus;

ainſi deux cercles, ou 720 dégrés, ſont à un quatrieme terme qui ſera l'arc LO. Mais ſi la pendule eſt à peu près réglée ſur les étoiles fixes, de ſorte qu'elles s'accordent à un petit nombre de minutes près, ſur 24 heures; il ſera beaucoup plus facile de déterminer l'arc LO par cette différence des tems, en réduiſant à l'ordinaire le tems en minutes & ſecondes, & en donnant 15 ſecondes de dégrés du parallele à chaque ſeconde de tems, & à quatre ſecondes de tems une minute du parallele.

Réduction en parties de grand cercle. Démonſtration.

117. Mais puiſque les arcs LOL', LML' ſe terminent aux mêmes points L, L', leur corde eſt commune; par conſéquent la même ligne ſert de ſinus aux arcs LO, LM: mais ces cercles n'ont pas le même rayon. Le rayon du cercle LOL' eſt la perpendiculaire à l'axe PG, ou le ſinus de l'arc PO diſtance de l'étoile au pôle; & le rayon de l'arc LML' eſt le rayon même de la ſphere. Or en tout arc de cercle, le rayon eſt à la perpendiculaire tirée d'une extrémité de l'arc ſur le rayon qui paſſe par l'autre extrémité, comme le ſinus total, qu'on prendra dans les tables, au ſinus de l'angle meſuré par cet arc. Ainſi le ſinus de l'angle du centre, ou du nombre de dégrés, minutes & ſecondes qui ſe trouvent dans cet arc, eſt en raiſon directe du ſinus rapporté à ſon rayon, & en raiſon inverſe du rayon. Donc dans le cas préſent, où la même ligne ſert de ſinus à deux arcs différens, le ſinus de l'angle meſuré par l'arc LO, eſt au ſinus de l'angle meſuré par l'arc LM, comme le rayon du cercle LML' eſt au rayon du cercle LOL', c'eſt-à-dire comme le rayon de la ſphere eſt au ſinus de la diſtance PO de l'étoile au pôle. Et puiſqu'enfin de petits angles ſont en raiſon de leurs ſinus, le rayon de la ſphere eſt au ſinus de la diſtance au pôle, comme l'angle meſuré par l'arc LO, ou le nombre de dégrés, minutes & ſecondes qui ſe trouvent ſur cet arc, à l'angle meſuré par l'arc LM, ſavoir à l'angle LGM, égal à l'angle de l'inclinaiſon cherchée FGR.

Autre démonſtration. Récapitulation.

118. Plus briévement. Les arcs LML', LOL' ſont à peu près égaux à leur corde commune. Donc ils ſont égaux, & leurs moitiés LO, LM égales entre elles. Donc elles contiennent un nombre de dégrés en raiſon inverſe de la cir-

conférence de leurs cercles divisés l'un & l'autre en 360 dégrés. Et tel est ce moyen si connu en Astronomie de réduire des arcs des parallele en arcs de grand cercle : moyen dont on a si souvent occasion de faire usage, nommément quand on se sert d'un micrometre avec des fils qui se coupent sous des angles de 45 dégrés. Nous avons donc démontré la méthode que j'ai donnée dans le premier livre, & cette méthode revient à ce qui suit. *Observez l'étoile trois jours de suite, en retournant alternativement le secteur. Si le tems écoulé entre la premiere & la seconde observation, est égal à celui qui se trouve entre la seconde & la troisieme, l'axe de la lunette est exactement parallele au plan de l'instrument. Si ces tems sont inégaux, prenez le quart de leur différence, & le réduisez en arc de parallele de l'étoile, en mettant une minute du parallele pour quatre secondes de tems. Vous ferez ensuite cette analogie : comme le sinus total est au sinus de la distance de l'étoile au pôle, ou au cosinus de sa déclinaison ; ainsi ce nombre de minutes est à un quatrieme terme qui sera l'inclimaison cherchée de l'axe de la lunette au plan du secteur.*

Exemple de cette méthode.

119. J'apporterai pour exemple les dernieres observations que nous avons faites à *Rome* sur u de la grande ourse. Nous y avons observé cette étoile trois jours de suite, savoir les 8, 9 & 10 décembre, en retournant le secteur au second & au troisieme jour. A la premiere fois que l'étoile parut au centre des fils, la pendule marquoit $5^{h.}$ $9'$ $25''$, à la seconde 5. $5'$ $55''$, à la troisieme 5. $1'$ $20''$; ainsi le premier intervalle a $3'$ $30''$ par-dessus les 24 heures, & le second a $4'$ $35''$ de moins. La différence est $1'$ $5''$, dont le quart est $16'' \frac{1}{4}$, qui, réduit en arc de parallele, donne $4'$. $4''$, ou $244''$. La distance de cette étoile à notre zénith étoit d'environ $50'$, en tirant vers le pôle, & notre zénith est à $48°$ $6'$ du pôle. Donc la distance de l'étoile au pôle étoit de $47°$ $16'$: & faisant cette analogie : le sinus total 1000 est au sinus de $47°$ $16'$, savoir 735, comme 244 secondes du parallele à un quatrieme terme ; on aura le nombre de secondes d'un grand cercle, ou l'inclinaison de l'axe de la lunette, qui sera de $2'$ $59''$.

120. Il n'est pas même nécessaire de retourner le secteur pour les deux dernieres observations, mais seulement pour

Autre exemple par une méthode un peu différente.

l'une des deux, & pour lors les obſervations faites du même côté, marqueront l'intervalle d'une révolution entiere, & celles qui ſont faites du côté oppoſé déſigneront le même intervalle augmenté, ou diminué non du quadruple, mais du double du tems que l'étoile met à parcourir l'arc LM. On pourroit encore commencer par deux obſervations de ſuite faites du même côté, & finir à quelque tems de-là par deux autres qu'on feroit après avoir retourné le ſecteur, pourvu que pendant ce tems-là l'égalité de mouvement dans la pendule ne fût point altérée par une variation conſidérable dans la température de l'atmoſphere. L'étoile μ de la grande ourſe obſervée à *Rimini* nous ſervira encore d'exemple pour le premier cas. Nous l'avons obſervée le 29 & le 30 avril, le limbe tourné à l'orient, & le premier mai, le limbe tourné à l'occident. A la premiere obſervation la pendule marquoit $7^{h.}\ 43'\ 26''$, à la ſeconde $7^{h.}\ 39'.\ 27''$, à la troiſieme $7^{h.}\ 35'.\ 3''$. Le premier intervalle eſt de $24^{h.}$ moins $3'.\ 59''$, le ſecond de $24^{h.}$ moins $4'.\ 24''$. La différence eſt $25''$, dont la moitié eſt $12'' \frac{1}{2}$, qui, multiplié par 15, donne pour l'arc du parallele de l'étoile $187'' \frac{1}{2}$, & réduit en arc de grand cercle, donnera pour l'inclinaiſon de l'axe $138''$, ou $2'\ 18''$.

Troiſieme exemple par une méthode encore différente.

121. Si l'on avoit même deux obſervations faites à pluſieurs jours l'une de l'autre, le limbe tourné du même côté, & deux autres de la même étoile, ou d'une étoile différente; en préſentant le limbe à deux côtés oppoſés, on en tireroit également l'angle d'inclinaiſon, puiſque les deux premieres obſervations déterminent le tems de la pendule pour un nombre donné de révolutions, & par conſéquent pour une ſeule, d'où l'on conclut le tems néceſſaire pour le nombre de révolutions qui ſe trouvent entre les deux dernieres obſervations, & la différence de ce tems au tems obſervé donne également le double de la déviation. Seulement ſi l'on mettoit un long intervalle entre chaque obſervation, il ſeroit à craindre qu'il n'arrivât quelque changement dans la pendule, à moins qu'elle ne fût des meilleures, & des plus juſtes. Dans notre premiere ſtation de *Rome*, nous obſervâmes la même étoile le 4 mars, le limbe tourné à l'occident; le 7 & le 9, le limbe tourné à l'orient. A la premiere obſervation la pendule marquoit $11^{h.}$

3′. 0″, à la seconde 10h. 50′. 39″, à la troisieme, 10h. 42′. 31″. Les deux dernieres donnent 8′. 8″ de différence pour deux révolutions, pour chacune 4′. 4″. De-là il devoit y avoir pour les trois premieres révolutions 12′. 12″. Or il s'en est trouvé 12′. 21″; la différence est 9″, dont la moitié 4″ $\frac{1}{2}$ donne 67″ $\frac{1}{2}$ pour l'arc du parallele, qui, réduit en arc de grand cercle, donne pour toute inclinaison un angle de 50″.

122. Plusieurs autres déterminations s'accordent dans l'intervalle d'un très petit nombre de secondes, & cette différence provient de quelque petit changement dans la pendule, & de quelque petite erreur qu'on a pu commettre en plaçant le plan du secteur dans le plan du méridien, soit que le limbe ne se trouvât pas si exactement dans la direction de la méridienne, soit que le plan du secteur fût tant soit peu incliné sur le plan vertical : articles que nous traiterons plus bas. Mais les exemples que nous avons rapportés suffisent pour éclaircir la méthode, d'autant plus qu'il faut une erreur de trois minutes dans la déviation de l'axe de la lunette, pour produire dans la distance de l'étoile au zénith une erreur d'une petite fraction de seconde. On doit cependant remarquer que la premiere fois que nous avons observé à *Rome*, la lunette étoit à très peu près parallele; que nous l'avons trouvée ensuite fort inclinée à *Rimini*, & qu'elle a encore éprouvé depuis de petites variations jusqu'à notre derniere station à *Rome*. Le premier changement est venu de ce que nous avions ôté de sa place l'objectif de la lunette avant notre départ, & de ce que nous l'avons remis à *Rimini* dans une position, qui, à raison de cette excentricité de sa boëte, différoit notablement de la premiere. Au retour nous l'avons laissé à sa place, & tout le changement qu'y a occasionné l'ébranlement de la voiture, s'est réduit à trois secondes & demie de tems.

D'où vient la différence de ces trois inclinaisons.

123. Si nous eussions eu ces trois positions dans le même lieu, nous eussions pu déterminer, par la méthode proposée au n°. 109, le point *b′* de l'axe (fig. 12.). Car l'inclinaison diminue à proportion que ce point se rapproche du plan du secteur; & comme cette inclinaison est dans la premiere position de 2′. 59″; dans la seconde, de 2′. 18″; dans la troisieme,

Détermination de l'axe de l'objectif,

de 0′. 50″, le point se rapprocheroit dans le premier changement de position de 41″; dans le second, de 1′. 38‴, & la valeur de ces approximations donneroit celle des petites lignes dz, zz', par cette analogie : le rayon est au sinus de chacun de ces angles, comme la distance de l'objectif aux fils du micrometre, qui est ici de 9 pieds, à la petite ligne correspondante. Or les points b', t, t' étant donnés de position, il nous eût été facile de déterminer la quantité de mouvement qu'on doit donner à la boëte pour rendre la lunette parallele. Mais cette précaution, comme nous le verrons bientôt, eût été superflue, une si petite inclinaison ne pouvant produire une erreur sensible dans la distance observée de l'étoile au zénith.

De l'inclinaison de l'axe de la lunette dans le plan du méridien.

124. Le parallélisme de l'axe de la lunette au plan du secteur n'est pas la seule chose qui mérite attention; il n'est pas moins important de connoître le point R du limbe AB (fig. 19.) auquel répond cet axe. Il seroit à souhaiter qu'il répondît au milieu du limbe; cependant s'il s'en faut de quelque chose, les observations n'en souffriront pas, pourvu qu'on sache de combien il s'en écarte. Or il ne faut pour cela que tourner le secteur du côté opposé; car le fil à plomb n'étant pas alors également éloigné du point de milieu, dans l'une & l'autre position, la différence de ces distances sera double de la distance du point R au point de milieu. Soit par exemple AB la position du limbe, le secteur tourné à l'occident, & que le point C, où se termine le rayon, soit le point de milieu entre A & B. Soit GR l'axe de la lunette, ou la ligne de foi, ou, si l'on veut, GF qui répond au point R; CE sera la distance du fil à plomb GED au milieu du limbe. Tournons le limbe à l'orient; si la ligne de foi est sur RG, elle conservera sa position; si elle est sur FG, elle retombera sur FG, de sorte qu'elle répondra toujours au point R. Le point A tombera en a, B en b, C en c, E en e, & cE sera la nouvelle distance du fil à plomb au point de milieu. Or sa premiere distance CE est l'intervalle ce; & ôtant cC qui leur est commun, on a Ce = cE. Donc la différence des distances est Cc, dont la moitié est RC distance du point, où répond l'axe de la lunette, au milieu du limbe; & par la même raison la correction qu'il y aura à faire aux angles en G déterminés par

les tangentes *c*E, *ce*, ſera de retrancher des plus grands, & d'ajouter aux plus petits la moitié de leur différence, pour avoir l'angle RGE, ou MGZ, qui meſure la diſtance de l'étoile au zénith, au moment de ſon paſſage par le méridien: meſure exacte dans le cas du paralléliſme de la lunette, & très approchée dans le cas d'une petite déviation, comme nous le verrons plus bas.

Défaut de l'inſtrument ;

125. Remarquez que de cette maniere de placer l'objectif, il ſuit que l'erreur qu'on découvre en retournant le ſecteur, n'eſt plus la même, ſi par le mouvement circulaire de la boëte (fig. 12.) le point *b'* de l'axe eſt éloigné ou rapproché du plan du ſecteur. Car le point *b'* ſe rapproche en même tems, ou s'éloigne de la ligne EE' qui répond au centre du ſecteur, & dont il eſt maintenant éloigné de l'eſpace *db'*. Donc ſi l'on conçoit que l'axe de la lunette ſe rapproche par un mouvement parallele du corps de l'inſtrument, juſqu'à ce que le point *b'* ſe confonde avec le centre *r* du ſecteur; ce que nous avons ſuppoſé dans la figure 19, dans laquelle le point G eſt le même que le point *r* de la figure 12, l'autre extrémité R de cet axe (fig. 19.) ſera également diſtante du milieu C, dont elle s'approchera auſſi, ou s'éloignera. Concluons qu'avec un objectif ainſi diſpoſé, on ne peut changer la direction de l'axe par rapport au plan du ſecteur, ſans changer en même tems, par un mouvement continu, la diſtance RC; & c'eſt pour cela que l'erreur que nous découvrîmes à *Rimini*, en retournant le ſecteur, ſe trouva plus grande que celle que nous avions découverte à *Rome* (1).

Moyen d'y remédier.

126 Mais on pourroit tellement placer l'objectif, que ces deux mouvemens de l'axe fuſſent indépendans l'un de l'autre. Il ſuffit pour cela d'enchaſſer les unes dans les autres trois boëtes quarrées, dont la premiere, qui eſt la plus grande, ſoit attachée à la regle de fer; la ſeconde puiſſe ſe mouvoir, au moyen d'une vis, par un mouvement perpendiculaire au plan du ſecteur, dans la direction de EE' (fig. 12.); & la troiſieme contenant l'objectif, puiſſe, avec une autre vis, ſe mouvoir dans la ſeconde par un mouvement parallele à ce même plan. On voit que par le mouvement de la ſeconde

(1) Voyez L. II. n°. 43.

boëte on peut rendre la lunette parallele, & par celui de la troiſieme, l'ajuſter au rayon. Ainſi l'on peut remédier en même tems, & à la déviation de l'axe, & à l'inégalité de diſtance au point de milieu ; & c'eſt la meilleure façon de diſpoſer la lunette. Il eſt vrai que par-là il n'eſt plus poſſible de déterminer, par le mouvement de l'objectif, le point de ſa ſurface où paſſe la ligne de foi ; mais on pourra le connoître par d'autres méthodes, (comme par exemple celles que j'ai données n°. 106 & 107), & le placer enſuite au centre de l'ouverture, de maniere que l'axe de l'objectif paſſe par le centre des fils. Cela fait, on n'a plus à craindre, dans un inſtrument tel que celui-ci, la parallaxe des fils réſultant de la différence dans la longueur des vues, dans la conſtitution de l'atmoſphere, dans la diverſe réfrangibilité des rayons. Ainſi loin de déſapprouver cette diſpoſition de l'objectif, je ne ſuis pas éloigné de la préférer à la premiere, pour s'affranchir de la néceſſité de retourner l'inſtrument (1).

Maniere de placer l'inſtrument.

127. Juſqu'ici nous avons traité de ce qui a rapport à la diſpoſition des parties du ſecteur ; il faut parler maintenant de la maniere de le ſuſpendre. Elle doit être telle, que le plan du ſecteur ſoit exactement dans le plan du méridien, qu'on puiſſe lui donner dans ce plan tel dégré d'inclinaiſon qu'on jugera à propos, & lui conſerver invariablement cette poſition. Or pour placer l'inſtrument dans le plan du méridien, il faut premierement que le plan du ſecteur ſoit dans un plan vertical ; en ſecond lieu, que le limbe ſuive exactement la direction de la méridienne. Avant que de vérifier ces deux points, nous commencions par mettre le ſecteur dans la poſition que nous jugions à peu près la plus convenable pour l'obſervation, ſuivant que l'étoile nous paroiſſoit devoir plus ou moins approcher du zénith. Pour cela nous attachions le bras NOV du côté où le ſecteur devoit ſe porter par ſon propre poids ; nous donnions aux vis IF, I'F' une poſition

(1) Il ſemble qu'on pourroit réunir tous ces avantages en plaçant l'objectif dans une quatrieme boëte ſemblable à celle de la figure 12, & dont l'uſage unique ſeroit de faire connoître le point de l'axe.

qui

qui répondît à cette inclinaiſon, & nous les avancions autant qu'il étoit néceſſaire pour mettre à peu près le ſecteur dans une ſituation verticale, & le limbe dans une direction parallele à la méridienne.

Comparaiſon du limbe avec la méridienne.

128. Nous procédions enſuite à la vérification ; & pour commencer par la direction du limbe, nous avions tracé ſur le pavé une méridienne exacte, qui paſſoit directement ſous le point de ſuſpenſion. Nous regardions par-deſſus le limbe EE′ (fig. 1.), l'œil placé à la hauteur FF′, ou environ, & nous cherchions en bornoyant, & en pouſſant ou retirant un côté du limbe, le point où le rayon viſuel, raſant le limbe, aboutit à quelque point de la méridienne. Le limbe ne paroiſſoit à l'œil que comme une ligne, & s'il ſe trouvoit dans la direction de la méridienne, cette ligne ſembloit ſe confondre avec la méridienne ; mais pour peu qu'il s'en écartât, elle la coupoit quelque part : pour lors nous avancions ou reculions une des vis IF, ſuivant le beſoin, pour détourner le limbe, juſqu'à ce qu'il ne parût faire qu'une ſeule ligne avec la méridienne. Comme le limbe occupoit ſur le pavé une partie conſidérable de la méridienne, la moindre déviation devenoit très ſenſible, & l'on y remédioit ſur le champ par le mouvement de la vis : nous examinions ordinairement l'un après l'autre ce paralléliſme, en montant ſur une chaiſe, pour pouvoir plus aiſément porter la vue ſur le limbe & ſur la méridienne.

Tracer une méridienne.

129. La méridienne étoit tracée ſur un pavé de marbre, dans une ſalle du college romain. Il étoit facile de lui mener une parallele qui paſſât ſous le ſecteur, & l'on rendoit cette parallele plus ſenſible, en tendant par-deſſus un fil noir pendant le jour, & pendant la nuit un fil blanc, qu'on éclairoit avec des flambeaux. Dans notre obſervatoire de *Rimini*, qui ſe trouvoit placé ſous le toit de la maiſon de M. le Comte *Garampi*, nous avions tracé une méridienne avec un fil, en laiſſant paſſer dans la chambre un rayon du ſoleil, par une petite ouverture pratiquée, ſelon l'uſage, dans une lame de métal. La lame étoit placée horizontalement dans une petite lucarne, qui ſe trouva fort à propos ſur le toit, du côté du midi, & qui ſembloit faite exprès ; nous traçâmes notre

méridenne par la méthode dont j'ai coutume de me ſervir, dans laquelle il n'eſt aucunement beſoin de ſavoir l'état de la pendule, pourvu que ſes heures ne different pas aſſez des heures ſolaires, pour donner lieu d'en appréhender une erreur de quelques ſecondes, & où un ſeul jour ſuffit pour toutes les obſervations néceſſaires à ce ſujet.

Suite. 130. Pendant le cours de la matinée nous prîmes quelques hauteurs du ſoleil, dans un lieu aſſez voiſin de la maiſon, pour que l'obſervateur pût entendre compter les ſecondes de la pendule. Entre onze heures & midi, nous étendîmes ſur le pavé de la chambre une grande feuille de papier, ſur laquelle nous avions tracé pluſieurs paralleles à égale diſtance, & nous fîmes enſorte que la ligne du milieu répondît à un fil à plomb ſuſpendu au centre de l'ouverture de la lame. On ôta enſuite le fil à plomb, & on obſerva le tems auquel l'image du ſoleil arrivoit ſur chacune des paralleles, en marquant à chaque fois l'heure qu'il étoit à la pendule. Après midi nous obſervâmes le tems auquel le ſoleil deſcend aux mêmes hauteurs. La moitié du tems écoulé entre des hauteurs égales, après y avoir fait, ſelon l'uſage, la correction néceſſaire pour le changement de déclinaiſon, nous donna l'heure de la pendule à midi; & nous trouvâmes en ceci un parfait accord entre pluſieurs obſervations correſpondantes, qui n'étoient pas fort éloignées les unes des autres, car nous avions obſervé avec un grand quart de cercle. On avoit auſſi marqué le tems auquel les bords du diſque du ſoleil avoient atteint chacune de ces lignes; d'où il étoit aiſé de conclure en quel tems le centre y avoit paſſé; & l'inſtant du midi étant d'ailleurs connu, on voyoit entre quelles paralleles ſe trouvoit l'image du ſoleil à midi. Enfin on diviſoit l'intervalle de ces paralleles à l'endroit même où l'on avoit marqué à peu près le chemin du centre, & on le diviſoit en deux parties dans le rapport des deux intervalles de tems écoulés, l'un depuis l'inſtant où le centre avoit atteint la premiere parallele juſqu'à midi, l'autre depuis midi juſqu'à celui où il avoit atteint la ſeconde; & le point de la diviſion étoit celui du midi; ce qui étoit encore confirmé par la comparaiſon qu'on pouvoit faire des inſtans auxquels le centre avoit atteint les autres paralleles.

Ce point connu, on ſuſpendoit de nouveau le fil à plomb au centre de l'ouverture, on tendoit un fil qui raſoit le fil à plomb, paſſoit par le point du midi, & étoit attaché par les deux bouts avec des crochets enfoncés dans les murs oppoſés, ſur leſquels on marquoit par de petites lignes la poſition exacte du fil. Les jours ſuivans on pouvoit tendre le fil dans la poſition déſignée par ces lignes, & ſe procurer ainſi une méridienne propre à marquer l'inſtant précis du midi. Telle eſt, dis-je, la méridienne que nous traçâmes à *Rimini*, & nous lui menâmes une parallele ſous le ſecteur.

Placer le limbe dans le plan du méridien.

131. Le ſecteur placé dans la direction de la méridienne, il s'agiſſoit de lui donner une ſituation verticale; ce qui ne ſouffroit aucune difficulté; car le fil à plomb CM (fig. 1.) qui pendoit librement du centre, étoit un fil de ſoie écrue, plus délié qu'un cheveu, tendu par un plomb fort peſant, & qu'on plongeoit dans l'eau. On montoit par une échelle placée auprès du ſecteur, pour examiner ſi le fil étoit aſſez près du centre, & s'il n'y avoit point quelque obſtacle, comme une toile d'araignée, qui pût en empêcher l'alignement, ou quelque filament qui frotât contre la regle de fer, ou contre les lames de laiton. Après avoir remédié à tous ces inconvéniens, on examinoit ſi le fil à plomb effleuroit le limbe, ſans y appuyer: pour peu qu'il en fût trop loin, ou trop près, on y remédioit par le mouvement des vis, en les pouſſant, ou les retirant également l'une & l'autre, afin de donner au ſecteur une ſituation verticale, ſans rien changer à la direction du limbe; enfin on ne manquoit pas d'examiner de nouveau la poſition du limbe par rapport à la méridienne, pour voir ſi le mouvement des vis n'y avoit cauſé aucun changement.

De l'inclinaiſon du ſecteur.

132. Pour derniere opération, il faut incliner le ſecteur, dans le plan même du méridien, plus ou moins, ſuivant la diſtance de l'étoile au zénith. C'eſt ce qui ſe fait, ainſi qu'il a été dit, par le moyen de la vis PE (fig. 1.), qui après lui avoir donné cette poſition, la lui conſerve, en le ſoutenant de côté, & en l'empêchant de retomber vers P, où ſa pente l'entraîne. En même tems les vis FI, F'I' l'empêchent de s'approcher de GG', & les poids L, L' de s'en éloigner. Du reſte j'ai éprouvé que ces poids avoient moins d'effet pour

assurer le secteur, lorsque les fils FK, F′K′ étoient dans une direction perpendiculaire à GG′, que lorsqu'on les plaçoit obliquement, & en tirant du côté où se trouvoit la vis PE′; car dans le second cas, les poids attirent le secteur contre la vis, & l'empêchent de s'en écarter.

Maniere d'observer

133. Nous avons donné une description détaillée de toutes les parties du secteur ; nous avons expliqué la maniere de le vérifier & de le pointer: venons à son usage, dont nous avons déja eu plus d'une fois occasion de parler. Cet usage consiste à déterminer exactement, en dégrés, minutes & secondes, la distance d'une étoile au zénith. L'instrument placé exactement dans le plan du méridien, l'observateur s'asseyoit proche l'ouverture H′ de la lunette. Pour plus grande commodité, nous avons pris soin que cette ouverture se trouvât précisément à la hauteur de l'œil d'un observateur assis, qui regarde contre le ciel. Le toit étoit ouvert dans l'endroit qui répondoit à la lunette, & l'on découvroit cette ouverture dans le tems de l'observation. Dans cette situation, l'observateur attendoit le moment où l'étoile commençoit à entrer dans le champ de la lunette. Après une ou deux observations, ce moment étoit indiqué par la pendule, à quelques secondes près, pourvu néanmoins que le secteur ne fût pas éloigné de la situation qui lui convenoit: or on avoit soin de changer tant soit peu son inclinaison, de peur que l'étoile, dès son entrée, ne fût couverte par le fil perpendiculaire au méridien, comme il arrive de jour. Dès que l'étoile commençoit à paroître, l'observateur la ramenoit sur le fil, en poussant de côté le limbe avec la vis E′P, qu'il tournoit lui-même.

Du diametre apparent des étoiles.

134. Le diametre apparent des étoiles fixes est non seulement beaucoup plus petit qu'une seconde, comme l'a fait voir M. *Huygens* dans son *Cosmotheoros*, mais même qu'une tierce, comme j'ai tâché de le prouver dans une dissertation sur les lentilles & les lunettes. Elles devroient donc ne nous paroître que comme un point ; ce qui seroit assez incommode : en effet, le fil les couvriroit de telle sorte, qu'on ne pourroit jamais savoir si elles sont au milieu de l'espace intercepté par le fil, lequel est de quelques secondes. Mais l'aberration de la lumiere, dont il a déja été fait mention plus haut, nous

les fait paroître comme de petits cercles, dont le diametre eſt plus ou moins grand, ſuivant que l'étoile a plus ou moins de lumiere, & au contraire que le ciel eſt moins ou plus éclairé: de-là nos deux étoiles nous paroiſſoient de nuit déborder notablement le fil de part & d'autre, & ſi le ciel étoit un peu éclairé, leur image, quoiqu'un peu obſcurcie, ſe voyoit encore toute entiere; dans le crépuſcule il s'en falloit de fort peu que l'étoile ne fût couverte par le fil. De jour l'étoile α du cygne égaloit ſenſiblement la largeur du fil; ſeulement on appercevoit quelquefois ſur les bords une lumiere très foible, qui marquoit le lieu de l'étoile. Quant à l'étoile μ de la grande ourſe, elle étoit entierement couverte par le fil pendant le jour; mais pour peu qu'on tournât la vis dans les deux ſens oppoſés, elle paroiſſoit tantôt ſur un bord, tantôt ſur l'autre. Ainſi nous avions toujours un moyen sûr de faire enſorte que le milieu du fil répondît exactement au centre de l'étoile.

Paſſage de l'étoile au méridien.

135. Mais pour pouvoir obſerver le moment où l'étoile traverſoit le fil parallele au plan du ſecteur, il étoit quelquefois néceſſaire d'attendre qu'elle l'eût paſſé pour l'amener ſur le fil horizontal. Or on le pouvoit faire en toute sûreté; car une preuve que les fils étoient parfaitement diſpoſés, c'eſt que dès l'inſtant où l'étoile étoit arrivée au milieu du fil, elle ne le quittoit plus, & que ſi elle étoit couverte dès le commencement, elle l'étoit juſqu'à la fin.

Diſtance du fil à plomb au milieu du limbe.

136. Cette obſervation finie, on examinoit le point où le fil à plomb CM coupoit la ligne du milieu de la lame mobile EE', & on déterminoit la diſtance de ce point au milieu du limbe, ou à l'extrémité du rayon. On voyoit d'abord le nombre d'intervalles de deux lignes compris dans cette diſtance, & comme le fil ne répondoit jamais exactement à aucun point de la diviſion, on avançoit la lame mobile pour connoître en parties de micrometre de combien il s'en falloit qu'il ne répondît au point le plus voiſin. On ajoutoit enſuite, ou l'on retranchoit du nombre des intervalles entiers ce nombre de parties de micrometre, ſuivant que le fil tomboit du côté de E' où s'avance la lame, ou du côté oppoſé, le fil étant dans le premier cas plus éloigné du milieu du limbe que du

milieu de la lame mobile de cette quantité, tout au contraire de ce qui arrive dans le second cas.

Précaution à prendre en observant.

137. Pour plus de précision, nous nous servions d'une lentille très convexe, attachée au limbe d'une maniere fixe, à une distance convenable, & perpendiculairement au-dessus du fil à plomb. Et comme ce fil, pour plus de liberté, ne doit point toucher le limbe, mais seulement l'effleurer; afin de prévenir tout danger de parallaxe, nous regardions d'abord obliquement pour distinguer le fil de son image réfléchie par le limbe, ensuite nous ramenions l'œil sur le fil jusqu'à ce qu'il couvrît entierement son image. De cette sorte nous étions assurés que le rayons visuel, qui passoit par le fil, étoit perpendiculaire au limbe, & qu'on n'avoit rien à appréhender de la parallaxe. Enfin tantôt l'un de nous se contentoit d'observer la position du fil par rapport aux points de la division, tandis que l'autre poussoit par un mouvement lent & continu la lame mobile, jusqu'à ce que son compagnon l'avertît d'arrêter; tantôt l'observateur tournoit lui-même la vis jusqu'à ce qu'il eût amené le fil sur un point de la division. Nous observions cependant toujours l'un après l'autre; nous y revenions même plusieurs fois, & nous prenions un milieu entre toutes ces observations, dont la plupart s'accordoient à deux ou trois parties de micrometre près; ce qui faisoit à peine la différence d'une seconde. Souvent même nous avons prié ceux qui se trouvoient présens, d'observer à leur tour; & ils se rencontroient avec nous. Mais ce qui contribuoit encore plus à rendre l'observation exacte, c'est qu'elle se faisoit dans une chambre bien fermée de tous côtés, & où il n'entroit pas le moindre air: précaution que nous avions jugée indispensable, depuis que nous avions remarqué que le souffle même de la bouche suffit quelquefois pour déranger le fil à plomb. Du reste il nous est arrivé souvent de revenir à notre secteur plusieurs heures après l'observation, & de retrouver entre la division & le fil le même nombre de tours de vis & de parties de micrometre, tant les supports avoient de force pour lui conserver sa position.

138. Connoissant le nombre des tours de vis, dont il avoit fallu avancer la lame mobile, & la distance du milieu à chaque

division corrigée par les méthodes que nous avons expliquées, on avoit la tangente qui marquoit la distance de l'étoile au zénith, & où l'on devoit corriger l'erreur occasionnée par la déviation de l'axe comparé au rayon, laquelle se connoissoit en retournant alternativement le secteur, comme nous l'avons encore expliqué plus haut. Cette correction faite, on avoit la distance corrigée de l'étoile au zénith pour le tems de l'observation, telle que celles qu'on voit dans les tables du second livre. Il faut néanmoins y corriger encore l'erreur de la réfraction qui éleve les objets plus ou moins, suivant leur distance au zénith. Dans le cas d'une petite distance, la différence est d'une seconde par degré ; différence qu'on doit ajouter à la distance observée, pour avoir la vraie ; mais cela peut se faire après toutes les réductions.

Correction à faire à la distance de l'étoile au zénith.

139. Cette distance au zénith pouvoit renfermer quelques erreurs résultantes de cette inclinaison de l'axe de la lunette au plan du secteur, que nous avons trouvée n°. 120 & suivans, comme aussi de la position du secteur, soit qu'il fût tant soit peu incliné au plan vertical, soit que le limbe ne suivît pas exactement la direction de la méridienne. Il faut apprécier ces erreurs pour constater d'une part que cette inclinaison de la lunette ne pouvoit produire aucune erreur sensible (& c'est pour cela que nous ne nous sommes point mis en peine de la corriger), de l'autre, que les précautions que nous avons prises pour placer le secteur dans le plan du méridien, ne permettent pas de soupçonner de l'erreur dans les observations. Nous allons les évaluer séparément.

Trois sources d'erreurs dans cette distance.

140. Si l'inclinaison de l'axe (fig. 19.) est RGF ou LGM, le secteur représente la distance ZM au zénith, déterminée par l'arc LML′ d'un grand cercle, pour la distance ZO déterminée par l'arc LOL′ du parallele de l'étoile dont le pôle est en P. Ainsi l'erreur est MO, qui diminue la distance lorsque l'étoile est plus éloignée du pôle que le zénith, comme dans la figure, & qui l'augmente lorsqu'elle en est plus proche. Pour trouver la valeur de MO, remarquez d'abord que PL égale à PO est la base du triangle rectangle sphérique PML ; d'où il suit que MO est la différence de la base PL au côté PM ; de plus, que par la trigonométrie sphérique,

Apprécier l'erreur provenant de la déviation de l'axe ;

Pl. II. fig. 19.

le rayon est au co-sinus du côté ML, comme le co-sinus du côté PM est au co-sinus de la base PL. Donc le rayon est à sa différence au co-sinus du côté ML, ou, ce qui est le même, donc le rayon est au sinus verse de ce côté, comme le co-sinus de PM, ou à peu près de PL, est à la différence des co-sinus.

Déterminer généralement cette erreur;

141. Or c'est un théorème connu, & dont a souvent occasion de faire usage dans la géométrie de l'infini, savoir que lorsque deux arcs different de très peu de chose entre eux, le sinus du plus grand est au rayon, comme la différence des co-sinus est à la différence de ces mêmes arcs. Supposons par exemple (fig. 12.) que la différence des arcs bb', bt soit très petite, l'angle $b't a$ différera très peu d'un angle droit, & l'angle $b'ti$ sera à peu près le complément de l'angle ζta à 90 dégrés, & par-là même il ne différera pas sensiblement de l'angle $ta\zeta$. Ainsi on peut dire que le triangle $b'it$ est semblable au triangle ζta, & que $b'i$ ou $d\zeta$, différence des co-sinus ad, $a\zeta$ des arcs bb', bt, est à $b't$ différence des arcs, comme $t\zeta$, sinus du plus grand arc bt, est au rayon at. Donc le sinus de PL (fig. 19.) est au rayon, comme la différence des co-sinus de PM, PL, est à MO différence de ces arcs. Et comparant cette analogie avec la derniere du numéro précédent, on aura par égalité troublée la proportion suivante: le sinus de PL est au co-sinus de PM, ou à peu près de PL, comme le sinus verse de ML est à la différence MO. De plus, en tout arc le sinus est au co-sinus, comme le rayon à la co-tangente. Donc puisque PL est la distance de l'étoile au pôle, dont le complément est la déclinaison de l'étoile, ayant pour tangente la co-tangente de PL, & que ML mesure l'inclinaison de l'axe de la lunette au plan du secteur, si l'on prend le sinus d'un petit arc pour l'arc même, on aura le théorème qui suit: *le rayon est à la tangente de la déclinaison de l'étoile, comme le sinus verse de l'angle d'inclinaison de la lunette au plan du secteur, est au sinus de l'erreur occasionnée par cette inclinaison dans la détermination de la distance au zénith.*

142. Il s'ensuit que l'erreur est en raison composée de la raison de la tangente de la déclinaison de l'étoile, & de la raison

raiſon du ſinus verſe de l'inclinaiſon de la lunette. Et comme le ſinus verſe eſt en raiſon du carré de la corde, (car il eſt troiſieme proportionnel au diametre, & à la corde), & que dans un petit arc on peut prendre la corde pour le ſinus; il s'enſuit encore que l'erreur eſt en raiſon compoſée de la raiſon ſimple de la tangente de la déclinaiſon, & de la raiſon doublée du ſinus de l'inclinaiſon de la lunette; par où l'on voit que dès qu'il n'eſt queſtion d'obſerver que des étoiles voiſines du zénith, cette erreur ſe réduit à rien ſous l'équateur, où la déclinaiſon de l'étoile devient nulle, & par conſéquent auſſi la tangente de cette déclinaiſon; mais qu'à meſure qu'on ſe rapproche du pôle, la déclinaiſon pouvant augmenter juſqu'à 90°, & la tangente à l'infini, l'erreur doit devenir plus ſenſible. M. *Bouguer* a démontré la même choſe par une autre méthode.

En quelle raiſon elle augmente ou diminue.

143. Pour venir à notre meſure, ſuppoſons que la lunette eût été inclinée de trois minutes, ce qui n'eſt jamais arrivé, & que l'étoile ſe fût trouvée à trois dégrés du zénith, & du côté du pôle, ce qui lui eût donné une déclinaiſon de 45° plus grande que celle de l'étoile α du cygne, & à plus forte raiſon de μ de la grande ourſe; il n'eſt pas difficile d'évaluer l'erreur, puiſque la tangente de 45° eſt égale au rayon. Donc le ſinus de l'erreur ſeroit égal au ſinus verſe de l'inclinaiſon de l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire de trois minutes. Or pour le rayon 10000000 le ſinus verſe de trois minutes eſt 4, & le ſinus d'une ſeconde eſt 48. Ainſi dans toutes nos obſervations, l'erreur a toujours été au-deſſous de $\frac{4}{48}$ ou de $\frac{1}{12}$ de ſeconde.

Elle ſe réduit à rien dans notre meſure.

144. Tranſportons-nous ſous le cercle polaire; donnons à la lunette une déviation de 6 minutes, & à l'étoile une diſtance de quatre dégrés & demi du zénith, & du côté du pôle, enſorte que ſa déclinaiſon ſoit de 68°; l'erreur n'ira pas même alors à une ſeconde. Car le rayon 10000000 eſt à 24750869 tangente de 68°, comme 16, ſinus verſe de 6 minutes, eſt à 39.6, moindre que 48, ſinus d'une ſeconde. Or une déviation de ſix minutes dans un ſecteur de 9 pieds, feroit qu'à une extrémité de la lunette, la diſtance ſeroit plus grande de 22 lignes & demie qu'à l'autre, ce qui fait près de deux pouces de différence: erreur trop conſidérable pour pouvoir échapper

Elle ne ſeroit pas même ſenſible ſous le cercle polaire.

à l'œil de l'ouvrier le moins attentif. Concluons donc que dans des observations de cette nature, où l'on se sert communément d'instrumens fort longs, & dans des lieux même où l'erreur devroit être plus grande, (car on n'a pas encore fait de semblables observations au-delà du cercle polaire), on ne peut raisonnablement craindre une erreur sensible. Au reste, dans de petits quarts-de-cercle, construits au hasard, où la lunette pourroit être beaucoup plus inclinée, l'erreur pourroit aussi, même dans notre latitude, monter beaucoup plus haut; de même qu'on pourroit s'exposer à commettre d'autres erreurs par le mauvais usage d'un secteur défectueux.

De l'erreur produite par l'inclinaison de l'instrument au plan vertical. Pl. II. fig. 19.

145. Nous avons parlé de l'inclinaison de l'axe, en supposant le secteur dans le plan du méridien; supposons maintenant la lunette parallele, & le secteur un peu incliné au plan vertical, sans que le limbe sorte pour cela de la direction de la méridienne; la position du limbe (fig. 19.) sera A'B' parallele à AB; mais le fil à plomb GD en sera éloigné de EI égal à RF', la ligne de mire F'G aboutira en L', & rapportant le fil à plomb perpendiculairement au point I, la tangente de l'angle du centre sera F'I égale à RE, & l'on aura pour la distance au zénith l'arc ZM, au lieu de ZO. Ainsi l'angle d'inclinaison du plan du secteur au plan du méridien sera F'GR, & l'on aura par conséquent pour cette inclinaison la même proportion que celle qu'on a eue ci-devant pour l'inclinaison de l'axe. C'est-à-dire que si notre secteur avoit été incliné de trois minutes, auquel cas le fil à plomb auroit dû s'écarter du limbe de près d'un pouce, l'erreur ne seroit pas allée à $\frac{1}{12}$ de seconde. Il n'est certainement point à craindre qu'un observateur, quelque négligent qu'on le suppose, donne à son secteur une inclinaison capable de mettre une distance de près d'un pouce, ni même d'une ligne, entre le limbe & le fil à plomb: la lui donnât-il, il n'en résulteroit aucune erreur sensible dans la distance de l'étoile au zénith. La seule chose qu'on pourroit appréhender en pareil cas, seroit la parallaxe du fil, qui, à raison de sa distance, ne pourroit que difficilement se rapporter au point précis auquel il répond perpendiculairement sur le limbe. Nous avons toujours eu attention à ne donner d'autre distance à notre fil à plomb que celle

dont il a besoin pour pendre librement, sans appuyer contre le limbe.

Erreur produite par la déviation du limbe ; Pl. II. fig. 19.

146. Il nous reste à examiner ce qui arriveroit dans le cas où le limbe ne suivroit pas la direction de la méridienne. Soit donc *b' a'* le limbe du secteur rétabli dans sa *verticalité*, de sorte que le fil à plomb GD effleure le limbe en E, & que cependant ce même limbe décline de la méridienne de tout l'angle AEF'. Au lieu de la distance ZO au zénith, on aura ZL'; ou bien, si l'on imagine un arc LQL', dont le pôle soit en Z, & qui coupe le méridien en Q, on aura ZQ, & l'erreur sera OQ, qui sera la différence de MO, MQ, si l'étoile est d'un autre côté que le pôle P, comme dans la figure; mais qui seroit leur somme, si l'étoile étoit du même côté que le pôle, & qui dans l'un & l'autre cas augmente la distance au zénith.

Déterminée généralement

147. Or quelle que soit la différence des arcs PL', PZ, & la valeur de l'angle AEF', ou L'ZQ, dont le secteur est incliné sur le plan du méridien, on peut évaluer l'erreur OQ. Car étant donnés, dans le triangle PZL', les côtés PZ, PL', & l'angle en Z, complément à deux droits de la déviation L'ZQ dans le premier cas, qui est celui de la figure, & la déviation même dans le second; on connoîtra ZL', ou son égale ZQ, dont la différence à ZO, excès de PL' sur PZ dans le premier cas, sa différence par défaut dans le second, donne l'erreur cherchée OQ.

Déterminée pour le cas présent.

148. Mais dans le cas où l'arc ZL', & l'angle L'ZQ sont fort petits, on peut abréger en cette maniere : soit pris L'ZQ pour une surface plane, on aura cette analogie : la distance observée ZL' est à MQ, comme le rayon au sinus verse de l'angle L'ZQ, ou de la déviation du limbe. De plus ZL' est à L'M, comme le rayon au sinus du même angle L'ZQ; & par le n°. 141, le rayon est à la tangente de la déclinaison, comme le sinus verse de l'arc L'M, au sinus de MO, qui soustrait, ou ajouté à MQ, donne l'erreur qu'on cherche.

Suite.

149. On voit que MQ est en raison de ZL', distance au zénith, & du sinus verse de la déviation du limbe, qui est en raison doublée du sinus de cette déviation, ou, parceque ce sinus est très petit, en raison doublée de l'angle même de

la déviation. Donc MQ est en raison composée de la distance au zénith, & de la raison doublée de la déviation du limbe. Nous trouverons avec la même facilité le rapport de MQ à MO. Soit la distance ZL′ au zénith $= d$, le sinus de la déviation du limbe $= s$, le rayon GM de la sphere $= r$, qu'on exprimera par le nombre affecté au rayon dans les tables des sinus, la tangente de la déclinaison $= t$; on aura L′M $= \frac{ds}{r}$ & le sinus verse de l'angle L′ZQ, qui est très petit, sera à peu près $= \frac{ss}{2r}$. Donc $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} r : \frac{ss}{2r} :: ZL' (d) : MQ = \frac{ssd}{2rr}$. Or le sinus verse de L′M (étant la troisieme proportionnelle au diametre $2r$ & à la corde de L′M) sera $\frac{ddss}{2r^3}$. Ainsi le sinus de MO sera $\frac{ddsst}{2r^4}$ (1); & parceque les petits arcs sont à peu près égaux à leurs sinus, on aura MO $= \frac{ddsst}{2r^4}$. Donc MQ : MO $:: \frac{ssd}{2rr} : \frac{ddsst}{2r^4} :: rr : dt :: \frac{rr}{t} : d$. De plus, $\frac{rr}{t}$ est la cotangente de la déclinaison, dont la tangente est t; & la cotangente de la déclinaison est la tangente de la distance de l'étoile au pôle. D'où il suit que prenant l'arc ZL′ pour sa tangente, MQ sera à MO, comme la tangente de la distance de l'étoile au pôle est à la tangente de sa distance au zénith. La démonstration de ce théorème est facile, si on regarde le petit arc MOQ comme une ligne droite, qui étant continuée, rencontre les lignes GZ, GP aussi prolongées, & détermine les tangentes des arcs ZQ, PO, ou ZL′, PL′; car on pourroit démontrer que MQ est à peu près troisieme proportionnelle au double de la premiere & à ML′, & que MO est également troisieme proportionnelle au double de la seconde & à la même ligne ML′: d'où il suit que MQ est à MO, comme la tangente de PL′, à la tangente de ZL′; ce qui fait voir que MO est très petit par rapport à MQ.

150. De-là on détermine aisément l'aberration OQ, pour

(1) Par le théorème du n°. 141 de ce Livre.

une distance donnée quelconque de l'étoile au zénith, & pour une déviation quelconque du limbe. Mais il faut examiner auparavant de combien le limbe pourroit être incliné à la méridienne. Si l'une de ses extrémités A rencontre la méridienne, & que l'autre extrémité B s'en écarte d'une ligne, cette distance se manifeste d'une maniere très sensible sur le pavé d'une chambre; car nous avons souvent remarqué qu'il suffisoit de donner un demi-tour à l'une des vis IF (fig. 1.) pour déranger notablement la position du limbe, quoique le pas de ces vis soit moindre qu'une ligne. Or la longueur AB du limbe (fig. 19.) est de 14 pouces, ou de 168 lignes; & faisant cette proportion: 168 est à 1, comme le rayon 100000 à un quatrieme terme, savoir 595, on a le sinus de la déviation, qui se trouve de 20 minutes. Ainsi pour peu que l'observateur soit attentif, on ne doit pas appréhender une erreur de 20′ dans la déviation du limbe.

Apprécier l'erreur de la déviation du limbe. Pl. II. fig. 19.

151. Supposons maintenant la distance de l'étoile de trois dégrés, ou de 10800 secondes, & l'angle de la déviation de 20′; on aura cette analogie: le rayon 10000000 est à 170 sinus verse de 20′, comme l'arc ZL′ de 3 d. ou 10800″ à MQ, qu'on trouve = 0.18. De plus, la tangente de 45°, qui est notre plus petite distance au pôle, est à la tangente de 3 d., ou bien 1000 est à 5, comme 0.18 à un quatrieme terme, qui ne donne pour la valeur de MO qu'une fraction insensible. Ainsi de quelque côté que soit l'étoile, l'erreur QO ne monteroit qu'à $\frac{18}{100}$ ou environ $\frac{1}{6}$ de seconde. Mais si l'on diminue la distance au zénith, & l'angle de la déviation, l'erreur se réduira presqu'à rien.

Cette erreur est ici très petite;

152. On voit cependant qu'on doit plus se précautionner contre cette erreur, que contre les deux autres; car si la méridienne est mal tracée, & que le limbe s'écarte de la direction de cette méridienne dans le même sens, l'erreur pourroit augmenter au point de n'être plus tant à mépriser, puisqu'elle seroit alors en raison doublée de l'angle de la déviation. Il suit de-là que dans une déviation triple, ou d'un dégré entier, laquelle est moins sensible dans un limbe d'environ un pied, que dans une lunette de neuf pieds de long, l'erreur (qui augmente toujours la distance au zénith) pourroit aller au-

Elle pourroit augmenter, & pourquoi.

delà d'une seconde. On voit encore que cette erreur devient plus sensible à mesure que l'étoile est plus éloignée du zénith: car tant que la surface sphérique peut être régardée comme une superficie plane, l'erreur augmente en raison de cette distance; & dans des distances plus grandes encore, elle n'augmente pas à la vérité suivant ce rapport, mais elle augmente pourtant toujours beaucoup, au lieu qu'elle diminue considérablement à de moindres distances.

Précautions à prendre suivant que l'étoile est près ou loin du zénith.

153. De ces deux points il est aisé de conclure que lorsqu'on a à observer des étoiles très voisines du zénith, on doit commencer par mettre le limbe à peu près dans la direction de la méridienne, sans attendre que l'étoile arrive sur le fil au moment de sa culmination; & que quand il est question d'étoiles fort éloignées du zénith, on doit donner sa premiere attention à ce dernier article. En effet, il suffiroit de commettre une légere erreur, soit en déterminant par le calcul le moment de la culmination, soit en l'observant dans les étoiles voisines du zénith, qui changent promptement d'azimut, pour produire dans la déviation du limbe une erreur beaucoup plus forte, qui produiroit elle-même une erreur considérable dans la distance de l'étoile. Au contraire, une légere erreur dans l'angle d'inclinaison du limbe, produiroit, à la vérité, comme nous l'avons vu, dans les étoiles plus éloignées du zénith, une erreur considérable; mais elle mettroit aussi un grand intervalle entre le moment où l'étoile arrive sur le fil, & celui de son passage par le méridien; par conséquent étant connu le moment de la culmination, on peut même éviter une déviation beaucoup moindre avec toutes ses suites.

Des observations simultanées,

154. Je crois avoir suffisamment pourvu à ce qu'il ne se pût glisser aucune erreur dans nos observations astronomiques. Il me reste à exposer en peu de mots la maniere dont on doit se servir de ces sortes d'observations, pour déterminer la valeur d'un dégré. Si au même instant, deux observateurs placés aux deux extrémités de l'arc, dont on doit assigner l'amplitude en dégrés, minutes & secondes, déterminent la distance d'une même étoile à leur zénith; il est clair que la somme des distances, si l'étoile est entre les deux zéniths, & leur différence, si elle n'y est pas, est la mesure de l'arc céleste

qu'on cherche. C'eſt ce que M. *de la Condamine*, & avec lui M. *Bouguer* ont exécuté enfin de concert; quoiqu'il eût été à propos de réitérer, pendant pluſieurs nuits, ces obſervations ſimultanées, puiſqu'elles étoient les ſeules, ainſi qu'ils en conviennent l'un & l'autre, dont ils duſſent ſe ſervir pour déterminer l'amplitude de l'arc céleſte, afin qu'on pût corriger les petites erreurs, en prenant un milieu entre chaque obſervation.

Qu'elles ſont néceſſaires au cas qu'on ignore les mouvemens des fixes;

155. MM. *de la Condamine* & *Bouguer* ſont les premiers qui aient fait des obſervations ſimultanées; précaution abſolument néceſſaire au tems où ils ont opéré: on ne connoiſſoit point encore ſi exactement tous les mouvemens des étoiles fixes, & il y en avoit quelques-uns qui leur étoient alors inconnus. En effet, tandis qu'on tranſporte le ſecteur d'un poſte à l'autre, l'étoile, qui a auſſi ſon mouvement particulier, change un peu de place; d'où il s'enſuit qu'on ne pourroit ſans erreur déterminer la diſtance d'un zénith à l'autre, par leur diſtance aux deux points du ciel, où l'étoile a paru ſucceſſivement, à moins qu'on ne connût auſſi la diſtance de ces points entre eux. Il doit arriver pour lors (& ils l'ont eux-mêmes éprouvé), que toute réduction faite pour ces mouvemens particuliers, & les obſervations rapportées à un tems commun, ou réduites à une même époque, celles qui s'accordoient le mieux, ſoient les plus diſparates; & que celles qui s'accordoient le moins, ſoient préciſément celles qui ſont le moins éloignées de cet accord parfait.

Que hors ce cas il eſt mieux d'y renoncer.

156. Mais aujourd'hui qu'on connoît parfaitement tous les mouvemens des étoiles fixes, cette précaution n'auroit abouti qu'à nous mettre dans le cas d'avoir beſoin d'un ſecond ſecteur, & d'un plus grand nombre d'obſervateurs; car un homme ſeul n'a ni la même facilité à obſerver, ni la même préciſion dans ſes obſervations, que lorſqu'il eſt aidé d'un ſecond. Nous avons donc obſervé avec le même ſecteur à *Rome* & à *Rimini*, & nous avons réduit ces obſervations à une même époque; pratique aujourd'hui univerſellement uſitée dans l'Académie royale des Sciences. Un autre avantage, c'eſt qu'en réduiſant à une même époque toutes les obſervations faites à un même poſte, on voit ſi elles s'accordent plus ou moins; ce

qu'on ne peut voir dans des obſervations ſimultanées, & non réduites.

Trois mouvemens à conſidérer dans les étoiles : préceſſion des équinoxes.

157. Or nous avons à conſidérer ici, comme je l'ai remarqué dans le premier livre, & le P. *Maire* dans le ſecond, trois mouvemens des étoiles fixes ; car pour le mouvement commun & journalier, qui ſe fait parallelement à l'équateur, il ne change rien dans le lieu où l'étoile paſſe au méridien, & d'où ſe meſure, au moment de ſon paſſage, ſa diſtance au zénith, laquelle ſert à déterminer l'amplitude de l'arc céleſte. Le premier, qui eſt connu depuis long-tems en Aſtronomie, eſt celui de la préceſſion des équinoxes, par lequel les points équinoxiaux remontent chaque année dans le zodiaque de 50 ſecondes. Par ce mouvement toutes les étoiles fixes avancent en une année de 50 ſecondes à l'orient dans des cercles paralleles à l'écliptique ; ce qui ne change point leur latitude, mais ſeulement leur longitude, leur aſcenſion droite, & leur déclinaiſon. Nous n'avons à examiner ici que le changement de déclinaiſon qui eſt le ſeul des trois qui change le point du méridien où paſſe l'étoile. Or étant donné le lieu de l'étoile, c'eſt-à-dire ſa longitude & ſa latitude, ou ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon, on peut déterminer de combien ſon mouvement annuel de 50″ en longitude, change ſa déclinaiſon, ou de combien en un an elle s'éloigne ou ſe rapproche du pôle. Si donc on a une obſervation faite en un tems donné, & qu'il faille la réduire à un autre tems auſſi donné, on voit ce qu'il y a à retrancher ou à ajouter à la diſtance obſervée de l'étoile au zénith, ſelon que l'étoile ſe ſera approchée ou éloignée du zénith, en même tems qu'elle s'éloignoit ou s'approchoit du pôle.

Aberration de la lumiere.

158. La connoiſſance des deux autres mouvemens eſt due à l'admirable conſtance & à la ſagacité merveilleuſe de M. *Bradley*. Ses découvertes, en ce genre, ſont ſans contredit les plus belles de notre ſiecle ; & la poſtérité, à laquelle il a rendu un ſi important ſervice, conſervera à jamais dans les faſtes de l'Aſtronomie la célébrité de ſon nom. L'un eſt l'aberration de la lumiere, l'autre la nutation de l'axe terreſtre. Le premier eſt le plus conſidérable, & c'eſt auſſi celui qu'on s'eſt le plus attaché à bien connoître, tant par les obſervations, que

que par la théorie. Nous n'avons plus rien à desirer à cet égard, & l'on peut déterminer avec autant de précision que de certitude la grandeur de l'aberration pour un tems quelconque donné. Indépendamment de ce qu'en a écrit l'Auteur de la découverte, plusieurs Astronomes & Physiciens l'ont mis dans le plus grand jour. Par ce mouvement chaque étoile nous paroît décrire annuellement un petit cercle parallele au plan de l'écliptique, & d'un rayon de 20 secondes. Le point du cercle occupé par l'étoile est de 90° plus oriental que celui où est le soleil dans l'écliptique par rapport à la terre, ou de 90° plus occidental que celui où est la terre par rapport au soleil. Or ce petit cercle vu obliquement de la terre, & rapporté à la surface concave du ciel, a l'apparence d'une ellipse, dont le grand axe perpendiculaire au cercle de latitude de l'étoile, & parallele au plan de l'écliptique, est de 40″, & le petit axe, qui tombe sur la circonférence même du cercle de la latitude, est au grand ou à 40″, comme le sinus de la latitude du centre est au rayon.

Effets de cette aberration.

159. L'Astronomie fournit des méthodes pour déterminer par la construction, ou le calcul, le changement occasionné par ce mouvement circulaire, ou elliptique, dans la longitude, l'ascension droite, & la déclinaison. M. *Clairaut* de l'Académie royale des Sciences, & l'un des premiers Géometres de ce siecle, nous a donné là-dessus d'excellentes formules insérées dans les Mémoires de cette Académie de l'année 1735. Je me suis aussi essayé sur ce sujet dans ma dissertation de 1742, où je détermine les effets de la parallaxe annuelle & de l'aberration de la lumiere prises d'abord séparément, puis ensemble ; ce qui fait trois cas, dans chacun desquels j'ai trouvé l'ellipse de la même forme & dans la même position, avec cette seule différence, que dans le premier & le second cas l'étoile arrive au même point de l'ellipse au bout de trois mois, & dans le troisieme cas en un tems intermédiaire, plus ou moins approchant de l'un des deux premiers, suivant que la parallaxe l'emporte sur l'aberration, ou l'aberration sur la parallaxe. Mais par l'accord des observations avec la seule théorie de la lumiere, il demeure aujourd'hui pour constant, qu'il n'y a point de parallaxe sensible,

& que ce mouvement apparent eſt un pur effet de l'aberration de la lumiere. Or en déterminant par cette théorie le changement de déclinaiſon pour un tems donné, il eſt évident qu'on détermine par-là même la correction qui ſe doit faire à la diſtance obſervée, pour la réduire à un autre tems auſſi donné.

Nutation de l'axe.

160. L'hypothèſe de M. *Bradley* ſur la nutation de l'axe ſe peut voir dans le Journal de *Trevoux* à l'année 1748 au mois d'octobre. Il n'eſt pas ſi aiſé de déterminer avec préciſion ce mouvement par la théorie, qui eſt très ſublime, & appuyée ſur des principes qui n'ont pas encore été aſſez éclaircis; car il dépend, ainſi que la préceſſion des équinoxes, de l'action du ſoleil & de la lune ſur cette couche de terre qui s'éleve, depuis les pôles juſqu'à l'équateur, au-deſſus de l'exacte ſphéricité. Mais comme il eſt très petit, les connoiſſances que nous en avons par les obſervations ſuffiſent, & au delà, dans la matiere préſente.

Deux ſentimens ſur cette nutation.

161. Voici une idée de ce mouvement, tel que M. *Bradley* l'a déduit de ſes obſervations. Il ſuppoſe que le vrai pôle de l'équateur décrit un cercle, dont le rayon eſt de 9 ſecondes, autour d'un point fixe, qui eſt comme ſon point de milieu, & qu'il le parcourt en un tems égal à une révolution des nœuds de la lune, qui eſt d'environ 18 ans; tellement qu'il ſe trouve toujours plus avancé de trois ſignes que le nœud aſcendant de la lune; répondant par exemple au premier point du cancer, lorſque le nœud de la lune eſt au premier point d'*aries*: ainſi lorſque le nœud de la lune retourne, il lui ſert comme d'une eſpece de guide qui l'entraîne à ſa ſuite, & qu'il n'abandonne jamais. M. d'*Alembert* qui a examiné par des recherches profondes, & la théorie de la préceſſion des équinoxes, & en même tems la nutation de l'axe terreſtre qui y a rapport, ſubſtitue au cercle une ellipſe aſſez allongée; cependant les obſervations de M. *Bradley* nous repréſentent un mouvement circulaire, ou qui s'écarte très peu de cette figure.

Effet de ce mouvement;

162. Quoi qu'il en ſoit, pourvu qu'il n'y ait pas un trop long intervalle entre les obſervations, la différence entre le mouvement circulaire & le mouvement elliptique n'y ſauroit produire une erreur ſenſible, puiſque le pôle ne varie en neuf

ans que de 18 secondes, & que la diversité des hypothèses ne comporte qu'une différence d'un très petit nombre de secondes pour neuf ans. L'effet continuel de ce mouvement est d'approcher le pôle de l'équateur de plusieurs étoiles fixes, & de l'éloigner de plusieurs autres, plus ou moins, suivant la position de chaque étoile par rapport à la direction de l'arc actuellement décrit. Cet effet devient plus sensible dans les étoiles qui se trouvent placées sur le grand cercle qui touche cet arc, & il l'est moins à mesure qu'elles s'en éloignent, toutes choses égales d'ailleurs; de sorte que si elles sont au contraire sur un grand cercle, qui coupe l'arc à angles droits, il n'y a plus de différence sensible dans leur distance au pôle de l'équateur. Cette différence fait varier la déclinaison d'une étoile, & par conséquent sa distance au zénith.

Qu'on n'en doit pas tenir compte ici; mais seulement des deux premiers.

163. On voit que nous n'avions rien à craindre de ces mouvemens des étoiles fixes. Car les deux premiers sont exactement connus, & s'il reste quelque doute sur la juste valeur du troisieme, il n'en peut résulter aucune erreur dans notre mesure, vu qu'il n'y a pas eu deux mois entiers d'intervalle entre nos premieres observations de *Rome* & celles de *Rimini*; intervalle pendant lequel le pôle de l'équateur ne peut s'éloigner ou se rapprocher d'une étoile, dans le cas même où l'effet de son mouvement est le plus sensible, que d'une petite fraction de seconde. Un autre avantage que nous avons eu, c'est que les deux étoiles que nous avons observées se trouvoient de part & d'autre du lieu moyen du pôle, & fort proches du grand cercle perpendiculaire à l'arc qu'il décrivoit, de sorte que leur distance au pôle a presque été la même pendant tout ce tems; d'ou il suit que non seulement il n'est arrivé depuis nos premieres observations de *Rome* jusqu'à celles de *Rimini* aucun changement dans la distance, dont nous soyons obligés de tenir compte, mais encore que le changement même qui s'y est fait entre nos premieres & nos dernieres observations de *Rome*, ne va pas au-delà d'une petite fraction de seconde. C'est pour cela qu'en réduisant toutes les observations au 4 mars, le P. *Maire* a eu raison de ne faire aucune correction pour la nutation de l'axe, comme il le dit lui-même *liv. II.* n°. 43, où il est à observer que lorsqu'il dit n'avoir

eu égard dans cette réduction qu'à l'aberration de la lumiere, il ne parle que des mouvemens de M. *Bradley*, non de la préceſſion des équinoxes à laquelle il eut égard ſans doute, puiſque dans ſes obſervations réduites au 4 mars, on voit que la correction a été faite, & pour la préceſſion des équinoxes, & pour l'aberration de la lumiere.

Utilité des étoiles qu'on a choiſies dans cette meſure.

164. Ce ne ſont pas là les ſeules raiſons que nous euſſions de préférer α du cygne, & μ de la grande ourſe; car comme ces étoiles étoient dans une poſition preſque entierement contraire, relativement au pôle de l'équateur & à l'écliptique, l'aberration de la lumiere & la préceſſion des équinoxes rapprochoient la premiere du pôle, & en éloignoient la ſeconde: de plus, celle-ci étoit entre les deux zéniths, & celle-là plus ſeptentrionale que l'un & l'autre; d'où il ſuit que c'eſt la ſomme des diſtances au zénith dans μ de l'ourſe, & leur différence dans α du cygne qui déterminoit l'amplitude de l'arc céleſte. Or l'accord qui s'eſt trouvé dans les réſultats, entre deux témoins d'ailleurs ſi oppoſés, ſemble donner un nouveau poids à leur témoignage.

Accord des obſervations.

165. Pour voir juſqu'où va cet accord, il ſuffit de ſe rappeller ce que j'ai dit vers la fin du premier livre, où j'ai propoſé pluſieurs combinaiſons d'obſervations qui déterminent la meſure de notre arc. Je les réunis dans la table ſuivante, ſous un ſeul point de vue; elles ſont priſes de ce qui en a été dit au ſecond livre depuis le n°. 43 juſqu'au n°. 46, en prenant un milieu entre les dernieres obſervations de *Rome*, après y avoir fait la correction néceſſaire pour la réfraction, comme on l'a fait aux premieres.

Distance au Zénith,							
Suivant les Observations		De α du cygne,			De μ de la grande ourſe.		
Les premieres de *Rome*		2°	30′	20.″7	0°	50′	0.″8
Celles de *Rimini*			20	34. 6	1	19	46. 6
Les dernieres de *Rome*		2	30	23. 4	0	49	59. 4
Amplitude de l'arc, tirée des	1 & 2	2	9	46. 1	2	9	47. 4
	2 & 3	2	9	48. 8	2	9	46. 0

166. Si l'on prend un milieu entre ces quatre arcs dont les deux premiers se rapportent à l'étoile α du cygne, & les autres à μ de l'ourse, on voit l'accord qui se trouve entre nos observations. Car on a pour milieu entre

On prend plusieurs milieux, & un résultat moyen.

le	1er.	& le	2d.	2°	9′	47.″4
les	1er.	&	3e.	2	9	46.7
les	1er.	&	4e.	2	9	46.0
les	2d.	&	3e.	2	9	48.2
les	2d.	&	4e.	2	9	47.4
les	3e.	&	4e.	2	9	46.7
Entre tous les arcs pris ensemble				2	9	47.0

167. Ce dernier résultat moyen s'accorde assez bien avec les six premiers, parmi lesquels il y en a seulement deux dont il differe d'une seconde, & ce sont précisément ceux dont on devroit faire ici moins de cas, fussent-ils d'ailleurs plus conformes, à cause de la diversité des étoiles, & des tems où les observations auxquelles ils se rapportent ont été faites; tandis que les autres ont été faites dans le même tems, & sur la même étoile. Tous ces autres résultats s'accordent avec le dernier à une fraction de seconde près; ce qui confirme admirablement la théorie de M. *Bradley*, sur laquelle est appuyée cet accord, & qui prouve en même tems, & la bonté de notre secteur, & l'exactitude de nos observations.

Accord de ce résultat avec les précédens.

168. A l'égard de ces observations, ce qui en fait encore mieux voir la justesse, c'est que dans chaque suite d'observations faites à *Rimini*, ou à *Rome*, il n'arrive qu'une fois que le dernier résultat moyen differe des autres d'une seconde. Mais rien ne distingue plus notre secteur que cette lame mobile, qui donne tant de facilité pour l'observation & la vérification, & qui les rend l'une & l'autre beaucoup plus exactes, que dans toute autre espece de secteurs, également propres d'ailleurs à observer les étoiles voisines du zénith. Ajoutons que dans les secteurs où l'on adapte un micrometre à la lunette, on a deux échelles à rectifier, celle des divisions du limbe, ou de l'arc qui répond à la partie aliquote, lesquelles se comparent au rayon du secteur, & celles des parties du micrometre qui se comparent à l'axe de la lunette; au lieu que toute l'opération se termine ici à l'échelle unique des

Avantages du secteur. Justesse des observations.

parties de la lame mobile. Enfin notre maniere de ſuſpendre & de pointer le ſecteur, eſt également ſimple & sûre; & au moyen des vis de la figure 1, on peut aiſément lui donner la poſition qui lui convient, le retourner enſuite en fort peu de tems, & le rétablir dans ſa premiere poſition, qu'il conſerve invariablement par le moyen des deux poids de la même figure. Mais en voilà aſſez ſur le ſecteur, & ſur les obſervations auxquelles il a ſervi.

CHAPITRE II.

Du Quart-de-cercle.

Du quart-de-cercle.

169. JE m'étendrai un peu moins ſur ce qui regarde le quart-de-cercle, que je ne l'ai fait ſur la deſcription du ſecteur, tant parcequ'il y a moins de choſes qui le diſtinguent des quarts-de-cercle ordinaires, qu'à cauſe que les obſervations dans leſquelles on l'emploie, ſont moins délicates, les erreurs qu'on y pourroit commettre, n'étant pas à beaucoup près de la même conſéquence pour la meſure du dégré. Je ſuivrai du reſte la même méthode que pour le ſecteur, c'eſt-à-dire que je donnerai d'abord la deſcription de l'inſtrument, & de celles de ſes parties qui méritent une attention particuliere; je parlerai enſuite de ſa rectification, & des obſervations auxquelles il a ſervi: ce qui doit néanmoins comporter quelques détails.

Explication des figures.

170. Le quart-de-cercle eſt repréſenté dans la troiſieme planche: on le voit avec ſon pied dans la figure 1, & dans une poſition oblique: il y manque la petite piece dans laquelle on ſuſpend au centre le fil à plomb, dans la poſition verticale du quart-de-cercle, & où l'on attache l'alidade qui porte la lunette mobile, dans la poſition oblique ou horizontale. La figure 2 repréſente cette petite piece, avec le garde-filet. On voit dans la troiſieme le premier dégré du limbe diviſé en minutes. La quatrieme figure indique le méchaniſme par lequel on tourne le quart-de-cercle en tout ſens, avec autant de facilité que d'exactitude; & la cinquieme, ce

quart-de-cercle avec son alidade mobile, & une espece de vérificateur ajouté à l'instrument, soit pour le rectifier & comparer entre elles les divisions du limbe, soit pour donner plus de précision aux observations.

Suite.

171. Il y a quelques parties de cette machine qui me paroissent nouvelles, & d'une grande utilité; & parcequ'elles sont représentées dans la figure 5 trop en petit, pour pouvoir être apperçues distinctement, elles sont séparément exposées dans les figures 6, 7 & 8. La figure 6 représente le petit tuyau de l'oculaire, qui est brisé, & qui tourne autour de la charniere AB, pour l'écarter, & laisser appercevoir au milieu de l'alidade un verre sur lequel il y a une ligne tracée du côté qui touche le limbe, laquelle marque les minutes & les secondes. La figure 7 représente le vérificateur, qui, au moyen d'une vis, fait mouvoir l'alidade, & remplit ici la même fonction que la vis qui fait avancer dans le secteur la lame mobile. On a mis ici, comme dans le secteur, un cercle avec une aiguille, ou index, qui sert de micrometre. La figure 8 représente plus distinctement la maniere dont le vérificateur est adapté au limbe.

Description du quart-de-cercle, Pl. III. fig. 1.

172. Commençons par la premiere figure: elle représente un quart de-cercle de fer, avec un limbe de cuivre soudé sur celui de fer, & divisé en dégrés, dont chacun est subdivisé en six parties de dix minutes chacune: les minutes sont marquées à l'ordinaire par des transversales & des cercles concentriques. A la regle IC, plus longue que AC, on a ajouté une lunette avec un micrometre mobile en M: il y a en C une ouverture circulaire, où s'attache l'alidade, ou la petite piece qui porte le fil à plomb. La barre EGHF sert à lier toutes les parties du quart-de-cercle, & elle porte sur son pied TVX. Pour la rendre plus ferme, on y a ajouté sur les côtés EG, HF, & à angles droits, deux autres barres, dont la derniere se voit en FH *hf*. T *t* Q est un cylindre qui s'ajuste à la barre GEFH en *t*, au moyen d'une espece de genou représenté dans la figure 4. T *tg* est reçu dans la concavité du demi-cylindre TVS auquel on le fixe par le moyen de trois lames élastiques qui l'entourent, & qu'on serre avec les vis *t*, *u*, *s*. Le demi-cylindre TVS est lié avec la piece de cuivre TV, dans laquelle

on fait entrer la tête du pied de bois TVX. Celui-ci porte à l'ordinaire sur trois traverses avec des vis YZ, dont on se sert pour l'élever, ou l'abaisser, ou l'incliner.

Dimension de plusieurs de ses parties.

173. Le rayon AC est de près de 3 pieds de roi. L'épaisseur des barres est partout de 5 lignes; mais la largeur n'est point la même : celle de AC & IC est de 30 lignes; celle de EH de 36; celle du limbe ADK de 33; celle des barres posées de champ H*hf*F de 20. Au reste, le limbe est très exactement plané, & la machine entiere n'est sujette à aucune flexion. Il est vrai qu'il y en avoit un peu en *t*, avant qu'on y eût ajouté les barres H*hf*F; mais depuis cette addition, le quart-de-cercle est solide, & ne laisse plus rien à desirer à cet égard.

Description de son pied.

174. Le pied TVX est d'un bois compacte & très dur: il a six pouces d'épaisseur. Je l'avois fait faire très solide, afin qu'on pût le transporter d'une montagne à l'autre, sans aucun accident. Les trois traverses ζζ du pied sont aussi fort épaisses, & fortement serrées, par des vis, contre le pied TXV; mais on peut, en lâchant ces vis, les séparer du corps de l'instrument pour la facilité du transport. Les vis YZ, qui sont de fer, & assez grosses, peuvent s'ôter aussi, & être transportées séparément. Chaque traverse est attachée avec le pied du quart-de-cercle par deux moyens: 1°. par un boulon à tête carrée, & taraudé par le bout, qui, entrant en ζ, & sortant en *x* au côté opposé, est serré fortement au moyen d'un écrou: 2°. par une vis qui entre dans la traverse au-dessus de ζ', passe de part en part, & va se visser dans une espece d'oreille qui fait partie de l'anneau de fer qui serre le bas du pied. De cette sorte les traverses sont si bien liées au pied, que le tout fait un corps parfaitement solide. Nous ferons voir en détail les pieces T*t*Q, & PQR, en expliquant la figure 4.

Pourquoi la lunette est plus longue que le rayon.

175. La lunette LO, & la barre IN sont presque d'un pied plus longs que le rayon: mais je n'avois pas à craindre, vu l'épaisseur des barres, que l'instrument éprouvât dans une si courte étendue une flexion capable de rendre les angles défectueux. D'un autre côté j'avois dessein d'employer de grands triangles dans notre mesure, comme nous l'avons fait aussi; la distance du mont *Soriano* au mont de *Perouse* qui fait le côté d'un de nos triangles, étant de près de 60 milles d'Italie,

d'Italie. Or il nous falloit une lunette d'environ quatre pieds pour reconnoître plus sûrement les signaux à pareille distance. L'objectif O est attaché solidement à la barre, vers son extrémité N, de même que le micrometre en M. Le tuyau est de cuivre, & assez mince; mais les pieces de cuivre qui portent l'objectif & le micrometre, & qui sont attachées d'une maniere fixe sur la barre, sont beaucoup plus fortes; & il étoit à propos de les rendre telles, pour une plus grande solidité.

Du micrometre de la lunette fixe.

176. Le micrometre est étroitement attaché en M à l'une de ces pieces, avec quatre vis: il est composé de quatre fils d'argent très déliés, qui se coupent à angles de 45 dégrés. Ces fils sont placés dans l'intérieur du tuyau, dont ils suivent tous les mouvemens; & ils sont tendus par un ressort qu'on met dans une rainure pratiquée en dehors sur la surface convexe du tube, de la même façon que je l'ai exposé n°. 45, en parlant du micrometre du secteur (pl. II. fig. 13.). Il y a encore un fil parallele à l'un des quatre premiers, & qui, au moyen d'une vis M, se meut en conservant son parallélisme; l'index marque à l'ordinaire sur la circonférence d'un petit cercle, le nombre des parties du micrometre, comme on a tâché de l'exprimer dans la figure. Je ne crois pas devoir donner la description de ce méchanisme, parceque notre artiste, qui avoit fait toutes les autres pieces avec autant d'adresse que de simplicité, s'est servi dans celle-ci d'une méthode fort compliquée, & qu'il y a mis une vis si défectueuse, qu'elle rendoit le mouvement du fil très inégal. Nous n'avons pu trouver hors de *Rome* un ouvrier assez habile pour raccommoder cette piece, qui nous auroit été d'un si grand usage. Cependant elle n'a pas laissé de nous servir dans la rectification du quart-de-cercle, pour les hauteurs, comme nous le dirons plus bas.

Même sujet.

177. Mais l'artiste a parfaitement réussi à faire tourner le micrometre autour de l'axe de la lunette, ensorte que nous pouvions mettre la vis dans une situation perpendiculaire, parallele, ou oblique à volonté par rapport au limbe; ce qui donne au micrometre un usage plus étendu, & rend le quart-de-cercle très utile pour plusieurs observations astronomiques,

par exemple pour prendre la différence de la déclinaiſon d'une planette & d'une étoile; puiſqu'on peut tellement diſpoſer le micrometre, que le fil mobile ſoit perpendiculaire à la direction du mouvement diurne; d'où il s'enſuit que ſa diſtance à celui des quatre autres fils, qui lui eſt parallele, donne la différence de la déclinaiſon. C'eſt ce que j'avois en vue lorſque je demandai que le micrometre fût tellement enchâſſé dans le tuyau de la lunette, qu'on pût le faire tourner aiſément ſur ſon axe.

Second objectif & ſecond micrometre.

178. Il y a un objectif en M proche les fils du micrometre, & un autre en O, lequel n'eſt point fixé à l'extrémité du tuyau, mais qui eſt porté par un petit tuyau ſéparé, qu'on fait entrer dans celui de la lunette, & qu'on peut approcher plus ou moins du micrometre M. Près de ce dernier objectif eſt un autre micrometre, conſiſtant en un anneau de cuivre avec une rainure par dehors, & deux fils qui ſe coupent à angles droits, & qui ſont tendus, comme ci-devant, par un reſſort placé dans la rainure. On fait gliſſer cet anneau ſur deux lames de cuivre, entre leſquelles on peut l'élever ou l'abaiſſer plus ou moins à volonté, ou le faire tourner ſur ſon axe: on le ſerre enſuite avec des vis. Mais pour lui donner préciſément la poſition qui lui convient, avant que de l'attacher, on le fait mouvoir à diſcrétion, au moyen de quelques autres vis placées de côté. Tout ceci eſt trop clair pour s'y arrêter.

Lunette double.

179. De cette ſorte on a une double lunette; c'eſt-à-dire qu'ayant placé l'oculaire en L, on voit les objets par le moyen de l'objectif qui eſt au-deſſous du point O, & que l'ayant porté enſuite à l'autre extrémité O, on peut voir au moyen de l'objectif qui eſt en M. Du reſte on ſait qu'un objectif ne peut nuire à l'autre; ce qui eſt conſtant par les principes d'optique. Et pour raſſembler ici tout ce que nous avons à dire ſur les micrometres, ajoutons que l'alidade DCEF (fig. 5.) à laquelle eſt appliquée une autre lunette, porte auſſi au foyer de l'objectif un micrometre ſemblable, & attaché en F*f*, & qui conſiſte en un anneau, avec des fils qui ſe coupent à angles droits, & qui ſont également tendus par un reſſort.

Maniere de ſuſpendre le fil à plomb.

180. La figure 2 repréſente la petite piece qui ſe place en C, pour ſuſpendre au centre le fil à plomb. Elle eſt toute de cuivre.

LM est une vis qui tient au cylindre IKON, lequel entre dans l'ouverture C de la figure 1, & s'attache, si l'on veut, par derriere, au moyen de cette vis. GH est une lame circulaire avec une rainure à sa circonférence GH: on y suspend avec un fil le garde-filet, ou l'étui qui doit garantir du vent le fil à plomb. AF est une petite surface convexe, qui s'éleve un peu au-dessus de celle de la lame. Il y a au milieu un petit trou en C, dans lequel on fait entrer l'aiguille BC, laquelle passe dans le petit bras ADE, par une ouverture faite en B, vis-à-vis le point C. On commence par retirer l'aiguille du côté de B; on en fait passer la pointe dans le nœud du fil à plomb, & on la repousse jusqu'en C.

Suite.

181. L'artiste s'étoit distingué dans cette piece: le cylindre INOK étoit si bien tourné, & tellement proportionné à l'ouverture C (fig. 1.), qu'il pouvoit se mouvoir avec beaucoup de facilité autour de son axe, de la maniere la plus égale & la plus uniforme, & sans aucun mouvement de côté. Le petit trou C (fig. 2.), autour duquel le cylindre INOK fut tourné avant qu'on y eût attaché le petit bras ADE, répond si exactement à l'axe de ce cylindre, qu'après y avoir suspendu le fil à plomb, le quart-de-cercle placé dans une position verticale, on peut faire tourner toute cette petite piece, sans que le fil s'écarte tant soit peu du point auquel il répondoit sur le limbe. Cet article étoit d'une extrême conséquence, puisque le centre des cercles gravés sur le limbe est dans l'axe de l'ouverture C de la figure 1.

Autres pieces; leur usage. Pl. III. fig. 2. 4.

182. L'artiste avoit fait une seconde piece toute semblable, excepté qu'il n'y avoit point de bras, comme ADE (fig. 2.): le trou en C étoit un peu plus large & plus profond, mais terminé pourtant en une pointe très aiguë, & répondant aussi fort exactement à l'axe de son cylindre INOK. On faisoit entrer dans ce trou une pointe du compas à verge, pendant que l'autre pointe répondoit aux cercles concentriques marqués sur le limbe de la figure 1: cette petite piece pouvoit encore tourner sur son axe, sans que la pointe du compas s'écartât le moins du monde de l'arc de cercle auquel elle répondoit. L'alidade de la figure 5 a aussi un cylindre, qui n'est point exprimé dans cette figure, & qui est tout semblable au

cylindre INOK de la figure 2 : il n'eſt pas travaillé avec moins d'art que les autres, & dès qu'on l'a introduit dans l'ouverture C de la figure 1, l'alidade n'a plus qu'un mouvement circulaire autour du même axe, & répond toujours dans les mêmes points aux cercles du limbe; de ſorte que le point d'où eſt ſuſpendu le fil à plomb, & celui autour duquel l'alidade tourne, ſe trouvent préciſément l'un & l'autre au centre des cercles concentriques. On peut encore s'aſſurer ici, comme on l'a fait pour le ſecteur n°. 53, que l'aiguille eſt exactement ronde vers ſa pointe, puiſqu'on peut la tourner ſur ſon axe, ſans rien changer à la poſition du fil à plomb.

Diviſion du limbe en dégrsé, Pl. III. fig. 3.

183. La figure 3 repréſente le premier dégré diviſé en minutes par des tranſverſales, & des cercles concentriques, ſelon l'uſage. AB eſt le premier dégré du plus petit cercle, C*i* celui du plus grand. L'artiſte, après avoir diviſé fort exactement le grand cercle, s'en ſervit pour faire la diviſion du plus petit : d'abord il porta le rayon du grand cercle ſur ſa circonférence, en commençant par le point qui répond au milieu de la largeur de la barre ACGB; ce qui lui donnoit un arc de 60°. Cet arc fut diviſé en deux parties égales, & par ce moyen le quart-de-cercle ſe trouvoit diviſé en trois arcs de 30° chacun. La diviſion ſe fit enſuite en trois, en deux, & en cinq à l'ordinaire ; ce qui donnoit 90° auxquels l'ouvrier en ajouta deux de part & d'autre, avec quelques minutes, pour mettre à profit le reſte de la longueur du limbe.

Diviſion en minutes.

184. Il diviſa enſuite chaque dégré en ſix parties, par exemple le premier dégré en C*a*, *ae*, *ef*, &c. ; & ayant appliqué l'alidade au centre, & aux points C, *a*, *e*, *f*, &c. il trouva les points A, E, F, G, &c. Ainſi la ligne CA continuée aboutit au centre : il en ſeroit de même des lignes *a*E, *e*F, *f*G, &c. ſi on les tiroit. Nous avons fait marquer à l'ordinaire les tranſverſales A*a*, E*e*, F*f*, ainſi que les cercles 1*r*1′, 2*s*2′, 3*t*3′, &c. après avoir diviſé par une méthode exacte la ligne AC en dix parties, ſuivant la proportion convenable. Les points 1, 2, 3, &c. ſe trouvent aiſément par la Trigonométrie. Si l'on imagine deux lignes tirées des points A, & *a*, au centre, on aura un triangle, dont on pourra connoître tous les côtés au moyen d'une échelle.

L'angle du centre eſt de 1 minutes, étant meſuré par l'arc AE, ou C*a*, & on trouvera par le calcul l'angle en A. Pour avoir le point 1, imaginons un arc de cercle 1 *r* 1′, qui rencontre A*a* en *r*; ſi de ce point *r* on tire une ligne au centre, on aura un triangle, dont le côté qui s'étend depuis A juſqu'au centre eſt donné; on a trouvé dans le premier triangle l'angle en A; l'angle du centre ſera d'une minute. On trouvera donc par le calcul le côté qui aboutit de *r* au centre, ou de 1 au centre, d'où l'on retranchera le rayon du petit cercle, ou la ligne tirée de A au centre, & le reſte donnera A 1, & par conſéquent le point 1. Pour avoir les points 2, 3 par les points *s*, *t*, il ſuffit de faire attention qu'on a déja le côté tiré de A au centre, avec l'angle en A, & que l'angle du centre eſt dans le premier cas de 2, dans le ſecond de 3 minutes, d'où l'on tirera la diſtance des points *s*, *t*, ou 2, 3 au centre; & l'on continuera la même opération juſqu'au point 9. Le P. *Maire* fit avec ſoin tout ce calcul: il tranſporta ſur le papier la ligne AC priſe ſur le limbe, & la donna toute diviſée à l'ouvrier pour lui ſervir de modele. Celui-ci en profita pour marquer les points 1, 2, 3, &c. & tirer en conſéquence les cercles concentriques aux deux premiers. Nous avons vérifié les intervalles de ces cercles, & la diviſion s'eſt trouvée très exacte.

Méthode pour trouver les tranſverſales.

185. Pour mener plus aiſément les tranſverſales, l'artiſte attacha à l'alidade une ſeconde regle inclinée ſur la premiere dans la direction de A*a*, qu'il appliqua ſucceſſivement aux points *e*, *f*, &c. en tirant de chaque point une tranſverſale avec la pointe d'une aiguille. Malgré ſes précautions, il n'a pu éviter de petites erreurs, ainſi que dans le reſte de la diviſion: où eſt l'artiſte qui puiſſe ſe flatter de les éviter toutes? Mais elles ſe ſont réduites à très peu de choſe, comme on le verra lorſque je parlerai d'une nouvelle méthode; je dis nouvelle au moins pour moi, dont nous nous ſommes ſervis pour l'examen des diviſions, au moyen d'un inſtrument que j'ai imaginé & fait conſtruire à cet effet, & dont je donnerai une deſcription détaillée.

186. La figure 4 repréſente le méchaniſme par lequel on fait tourner le quart-de-cercle, & la maniere dont il tient au

Machine pour incliner le quart-de-cercle à volonté. Pl. III. fig. 4.

pied. COVP est une piece de cuivre assez épaisse; il y a dans sa partie inférieure COV un anneau surmonté d'une platine, ou plaque circulaire, à laquelle est attaché un long cylindre, qui entre dans le pied PX. On fait entrer de force le pied dans l'anneau, auquel on l'attache encore avec trois vis, dont deux se voient dans la figure de part & d'autre du point O. Sur la plaque inférieure il y en a une autre P, qui n'est pas moins solide, & qui a en T, & en VS, une espece de gouttiere, pour recevoir le cylindre TD, qu'on y attache en T, V, S par des ressorts d'acier qui l'entourent, & qui sont serrés par les vis *t*, *u*, *s* au point qu'il faut faire quelque effort pour tourner le cylindre sur son axe. Le cylindre est attaché par son extrémité T à une piece de cuivre très forte, armée de trois dents à égales distances, qui s'engrainent dans autant d'échancrures pratiquées dans une autre piece de cuivre B, également solide, & attachée à la barre EGHF (la même que EGHF dans la figure 1), avec huit vis, dont on en voit quatre à droite & à gauche du point B; les quatre autres sont cachées derriere la lettre T. Les dents sont traversées par un axe qui attache solidement le cylindre TD au quart-de-cercle, & lui donne la facilité de tourner autour de l'axe TD.

Donner au quart-de-cercle une position stable; faciliter ses mouvemens.

187. G*ge*E, H*hf*F sont les deux barres posées de champ sur celle du milieu GHFE de la figure 1, pour la garantir de toute flexion. Elles sont liées d'espace en espace par d'autres petites barres attachées par plusieurs vis A, A à la barre du milieu. Enfin KLM est un arc de fer, qui se meut à charniere autour du point K. La petite barre K est fixée avec deux vis contre la barre GEFH. L'arc KLM passe dans une ouverture située à l'extrémité du cylindre. Il y a en I, d'un côté de cette ouverture, une vis qui presse l'arc LM, de maniere à le retenir & à le fixer où l'on veut. De l'autre côté il y a aussi une vis *i*, pour y retenir l'arc, & l'empêcher de sortir de l'ouverture, lorsqu'on desserre la vis I pour élever plus ou moins le quart-de-cercle.

Suite.

188. On voit par-là que le quart-de-cercle peut librement se mouvoir de trois façons; premierement, autour de l'axe vertical qui est au-dessous de P; en second lieu, autour de l'axe horizontal TD; enfin autour de l'axe qui est en B. Par

ce triple mouvement, il eſt aiſé de lui donner telle poſition qu'on veut; & on la lui conſerve avec la même facilité.

Inſtrument de vérification. Pl. III. fig. 5.

189. La figure 5 repréſente le quart-de-cercle avec les deux lunettes, l'une fixe, ſavoir LCN, l'autre mobile & appliquée ſur l'alidade, ſavoir DEF*f*. La lunette eſt briſée en F*f*, à l'endroit où commence la diviſion du limbe, & où ſe trouve le micrometre. On a attaché deux pieces à l'alidade; la premiere eſt GMABHE *ehbam*G; elle eſt de fer, & elle ſuit en grande partie le contour du limbe, ſavoir de A en M, & de B en H, de même de *a* en *m*, & de *b* en *h*, & même au-delà de ces termes; elle laiſſe voir les diviſions du limbe, & s'étend depuis A juſqu'en *a* à plus de 45°. Cette eſpece de grillage eſt attaché à l'alidade avec quatre vis, deux deſquelles ſont entre E & *f*, & les deux autres entre *e* & F; mais on peut l'ôter en lâchant les vis, pour laiſſer l'alidade & la lunette libres. La ſeconde piece eſt dans l'intervalle I*i* du côté G; elle eſt également attachée avec quatre vis à l'alidade, & elle ſe voit en grand dans les figures 7 & 8.

De l'alidade & de ſa petite fenêtre. Fig. 5.

190. On peut encore l'ôter pour laiſſer l'alidade libre entre F*f* & I*i*, juſqu'à l'extrémité du limbe. L'alidade a en cet endroit une fenêtre avec un verre très poli, au milieu duquel eſt marquée une ligne qui eſt dirigée au centre du quart-de-cercle. Cette fenêtre eſt couverte par le petit tuyau de l'oculaire: pour éviter la confuſion, on n'a point repréſenté ici ce petit tuyau; mais il eſt ſur la même ligne que le reſte du tube DF, auquel il eſt attaché avec une charniere en F*f*, de ſorte qu'on peut le lever & le replier ſur le reſte du tuyau entre F*f* & E*e*, ainſi qu'on le voit dans la figure 6, dans laquelle EF*fe* eſt le même tuyau que dans la figure 5: IK, HL ſont les deux fils qui ſe coupent à angles droits; ils ſont contenus dans un anneau recouvert d'une plaque mince, fixée au moyen des vis D, D, D, D au rebord BGMF du tuyau. G eſt une des vis avec leſquelles on arrête l'anneau dans une juſte poſition, avant que de ſerrer les vis D. AB eſt la charniere autour de laquelle tourne le tuyau F′M′*f*′O, qui renferme en N*n* l'oculaire, & qui a en O l'ouverture où l'on applique l'œil pour obſerver; mais il faut auparavant faire tourner le tuyau F*f*′O ſur la charniere AB, juſqu'à ce qu'il

vienne exactement s'appliquer contre l'autre tuyau, & que leur axe ſoit le même. L'obſervation finie, lorſqu'il n'eſt plus queſtion que de regarder par la petite fenêtre de l'alidade, pour voir le nombre de dégrés, de minutes & de ſecondes déſignées par la ligne du verre, entre F*f* & I*i* (fig. 5.), on leve le tuyau de l'oculaire, & on le tourne juſqu'à ce qu'il ſoit dans la poſition de la figure 6, pour laiſſer la fenêtre libre.

Machine pour faire mouvoir l'alidade. Pl. III. fig. 5. 7. 8.

191. Il faut maintenant décrire le vérificateur qui eſt entre I*i* & G, & qui ſe voit à peine dans la figure 5, mais qui eſt repréſenté en grand dans les figures 7 & 8, ſans quoi il ſeroit difficile de ſe faire entendre. Dans la figure 7, A*ab*B eſt la face antérieure du limbe; BC, *bc*, *ah* ſon épaiſſeur, qui eſt encore exprimée dans la figure 8 en BC, *bc*, *ah*, avec la face poſtérieure C*ch*H du limbe. Les objets ſont repréſentés dans l'une & l'autre figure, tels qu'ils paroîtroient à une diſtance infinie, & vus un peu obliquement. La projection de l'inſtrument eſt exprimée par des paralleles, comme dans les figures précédentes; mais on y a fait ici quelques légers changemens, qu'on a jugé néceſſaires, pour faire connoître plus diſtinctement chaque partie du vérificateur.

Ses différentes pieces.

192. Les plaques TY, *ty*, ſont courbées en équerre, & aſſemblées par une plaque de fer, qui ſe voit dans la figure 8 en I'L'*l'i*: on les fait tenir à l'endroit du limbe qu'on juge à propos, avec deux vis M', *m'*, qui le preſſent par derriere; & l'on a couvert d'une peau leurs parties T, *t* dans toute leur largeur, de peur qu'en les ſerrant on ne gâtât la face antérieure du limbe. A la plaque *ty* eſt attaché, dans les deux figures un cercle, dans lequel on fait paſſer la vis *u*V, que l'on fait tourner par le moyen de ſa tête Z*u*, & dont l'index *ux* marque ſur la circonférence de ce cercle le nombre de parties de chaque tour de la vis. Cette vis traverſe un parallélipipede de cuivre, dans lequel eſt un écrou, dont les filets ſont exactement égaux à ceux de la vis; elle paſſe enſuite dans l'ouverture V d'un petit bras attaché à l'autre plaque T, puis au travers de l'anneau D, où elle eſt arrêtée par la vis E, de ſorte que ſa partie *u*V ſe trouve toujours entre ſes deux ſupports V & *u*. Ce parallélipipede a deux cylindres

P, *p*

P, *p* (fig. 8.), qu'on insere dans les ouvertures de deux lames (fig. 7.), dont l'une est placée sur le devant, savoir MNOP *omn*, l'autre par derriere, où elle s'éleve jusqu'à la hauteur de L, *l*; on en voit encore un bord sur la droite en *lqrs*; mais pour exprimer dans la figure la partie *lq*, il a fallu la transporter sur l'alidade QF*fq*, qui porte la lunette mobile, & la fenêtre ED*de*, dont le verre est marqué dans son milieu d'une ligne GH: cette lame est pliée en équerre en *q*; & après avoir parcouru l'épaisseur du limbe, elle est pliée encore en équerre en *r*, mais en sens contraire, afin que le plan *rs* soit parallele au plan *mno*P, à l'alidade & au limbe, & qu'on puisse renfermer le parallélipipede entre ces deux plans paralleles, & l'y arrêter en faisant entrer de part & d'autre dans leurs ouvertures les cylindres P, *p* de la figure 8.

193. Les lames sont attachées l'une à l'autre par les vis M, *m*; celle de derriere est serrée contre l'alidade par les vis L, *l*; & elles y sont serrées toutes les deux par les vis N, *n*. D'où il arrive que si après avoir serré les vis M′, *m*′ de la figure 8, on tourne la vis *u*V, on fera avancer le long du limbe l'alidade FQ*qf* (fig. 7.), avec la fenêtre DE*ed*, & la ligne GH qui parcourra les divisions, tandis que l'index *ux* marquera le nombre de parties du micrometre, dont on peut compter les révolutions entieres par le nombre de fois que l'index arrive au commencement de la division. Mais pour que la vis *u*V puisse tourner, elle doit être bien droite, & le point P doit avoir un mouvement circulaire autour du centre du quart-de-cercle; d'où il suit qu'on ne peut faire servir cet instrument que pour un arc si petit, qu'il puisse être pris pour une ligne droite, tel que l'arc d'un dégré, dont la courbure, prise de part & d'autre de son point de milieu, n'éloigne pas sensiblement le point C du centre du quart-de-cercle, ou du limbe; car il ne s'en éloigne que du sinus verse de 30′, qui n'est pas $\frac{4}{100000}$ du rayon. Suite.

194. Cette différence est absolument insensible; mais comme la ligne tirée du point P au centre du quart-de-cercle, change continuellement de direction, il est nécessaire, pour que le parallélipipede A′*a*′ puisse changer de position par rapport à cette ligne, qu'il ne soit pas attaché immédiatement à Mouvement de l'alidade égal à celui de l'index.

l'alidade ; mais qu'au moyen des cylindres P, *p* de la figure 8, il ſoit tellement enchaſſé dans les lames de la figure 7, qu'il puiſſe tourner dans leurs ouvertures. De plus, afin que le mouvement du parallélipipede, de ſon cylindre P, de l'alidade & de la ligne du verre, répondît également au mouvement de l'index, il a fallu pourvoir à ce que les pas de la vis fuſſent bien égaux, que ſon axe *u* V fût exactement perpendiculaire au plan du cercle, que ce plan fût lui-même bien uni, & qu'il joignît bien contre la tête de la vis en *u*, de même que la vis fût arrêtée en V par des plans également perpendiculaires à ſon axe, & joignant auſſi bien entre eux. Enfin la diſtance *u* V des ouvertures, où paſſe la vis, doit être tellement proportionnée à ſa longueur, que ni la vis, ni le parallélipipede, ni l'alidade ne puiſſent avoir d'autre mouvement que celui qu'on leur communique en tournant la vis ſur ſon axe. Pour en venir à bout, notre artiſte a eu beſoin de recourir à un anneau plat D′, qu'il a mis derriere l'ouverture V du bras TV, après l'avoir bien poli du côté de V ; & il l'y a appliqué en faiſant avancer de force la vis FE dans ſon écrou E, autant que l'élaſticité du métal le pouvoit permettre : enſuite à force de tourner la vis, il a produit deux effets par le frottement ; le premier, de polir encore davantage les faces qui touchent en D′ & *u*, le ſecond, de les rendre exactement perpendiculaires à l'axe de la vis ; d'où il ſuit que le mouvement de l'alidade répond parfaitement à celui de la vis.

Uſage des vis du vérificateur.

195. Il ſuffit de lâcher les vis M′, *m* de la figure 8, pour pouvoir faire tourner toute cette machine, avec l'alidade & la lunette autour du quart-de-cercle : on l'attache enſuite avec les mêmes vis contre le limbe, & à l'endroit qu'on veut. Si avant que de l'attacher on venoit à tourner la vis, ce ne ſeroit plus l'alidade qu'on feroit mouvoir, mais cette machine même. En effet, l'une des plaques T, *t* s'approcheroit alors de l'alidade, & l'autre s'en éloigneroit d'autant. Mais ſi on lâche de plus les vis L, *l*, N, *n*, toute la machine ſe détache du limbe & de l'alidade, laquelle peut tourner enſuite librement avec ſa lunette, comme dans les quarts-de-cercles ordinaires.

196. Ce n'eſt que depuis mon retour à *Rome*, que j'ai fait

ajouter au quart-de-cercle les deux machines dont je viens de donner la description, savoir celle des figures 7 & 8, avec le grillage représenté dans la figure 5, n'ayant pu trouver ni à *Rimini*, ni ailleurs un ouvrier assez habile pour venir à bout de la premiere. De sa construction.

197. Il est à présent question de la disposition des parties de l'instrument, de sa rectification, & de l'usage qu'on y peut faire des deux dernieres machines; après quoi nous en viendrons à l'usage du quart-de-cercle, & aux observations auxquelles il a servi. Pour commencer par les lunettes, on doit autant qu'il se peut les rendre paralleles au plan de l'instrument. Nous en avons assez dit sur ce parallélisme dans le chapitre précédent, en parlant de la lunette du secteur; & les moyens de le procurer sont connus des Astronomes. Notre artiste n'y avoit point mal réussi; nous verrons de plus que dans les observations faites avec ce quart-de-cercle, la déviation de la lunette, à moins qu'elle ne fût bien considérable, ne peut y produire une erreur sensible. Or pour la rendre plus aisément parallele, il ne nous a pas peu servi d'avoir rendu mobiles les fils du micrometre, en les inférant dans un anneau qui, avant que d'être serré par les vis, peut se mouvoir de côté en tout sens, jusqu'à ce que la ligne qui passe par le point de l'axe de l'objectif, & par le centre des fils, se trouve dans une position convenable. Parallélisme des lunettes au plan de l'instrument.

198. A l'égard des fils, on verra s'ils se coupent à angles droits dans les trois micrometres, dont les deux premiers sont dans la lunette fixe, & le troisieme dans la lunette mobile, & si les autres fils de l'un des premiers micrometres font avec les précédens des angles de 45°, on pourra, dis-je, s'en convaincre par la méthode que nous avons proposée en parlant du micrometre du secteur, & qui se réduit à comparer ces fils avec des lignes tracées sur le papier, avec les mêmes angles; & l'on huilera le papier, s'il en est besoin. Or pour mesurer les angles & prendre les hauteurs, l'un de ces fils doit être parallele, l'autre perpendiculaire au plan du quart-de-cercle; & c'est ce qu'on pourra vérifier dans la lunette fixe, en plaçant le quart-de-cercle dans une situation verticale, que l'on connoîtra en faisant raser le limbe par le fil à plomb, & Des fils du micrometre.

examinant enſuite ſi l'un des fils répond à un autre fil à plomb, qui pendra librement. Nous l'avons ſouvent vérifié dans cette lunette au rivage de la mer : nous placions le quart-de-cercle dans un plan vertical ; nous pointions enſuite la lunette ſur l'horizon de la mer, & nous examinions ſi le fil qui doit être perpendiculaire au plan de l'inſtrument répondoit dans tous ſes points à cet horizon. Quant au micrometre de l'alidade, qui ne peut s'appliquer au quart-de-cercle avec le fil à plomb, nous placions le limbe horizontalement, en y appliquant le niveau, & nous examinions ſi l'un des fils du micrometre répondoit à un fil à plomb ſuſpendu devant lui.

Même ſujet.

199. La meilleure maniere de diſpoſer les fils des micrometres de la lunette fixe, eſt de faire enſorte que les deux lignes, qui de part & d'autre paſſent par le point de l'axe de l'objectif & le centre des fils, ce que nous appellerons encore ici l'*axe de la lunette*, ſoient paralleles au dernier rayon du quart-de-cercle, c'eſt-à-dire à celui qui aboutit à la fin du 90me. dégré ; & pour ce qui eſt de la lunette mobile, le meilleur eſt encore de rendre ſon axe parallele au même rayon, après avoir mis la ligne du verre de l'alidade à la fin du 90me. dégré ; c'eſt-à-dire en rendant cet axe parallele à cette ligne, qui doit elle-même être exactement dirigée au centre du quart-de-cercle.

De la ligne du verre. Pl. III. fig. 2, 3.

200. Pour connoître ſi elle a cette direction, & la lui donner ſi elle ne l'a pas, il ſuffit d'amener l'alidade au commencement de la diviſion, & de mettre la ligne du verre ſur la ligne AC (fig. 3.) tirée du centre ſur le limbe, & au commencement même de la diviſion. Or on verra ſi cette ligne eſt dirigée au centre, en ôtant l'alidade, & mettant à ſa place la petite piece du centre (fig. 2.), qui porte le fil à plomb : en effet, ſi le fil tendu de la pointe de l'aiguille au point C, paſſe par A, ce ſera une preuve que la ligne AC ſe dirige au centre : l'artiſte ne nous avoit rien laiſſé à deſirer ſur ce point. Ayant enſuite appliqué l'alidade, il faudra diſpoſer ſon verre dans la fenêtre, de maniere que ſa ligne réponde exactement à la ligne CA ; & c'eſt pour cela que la fenêtre doit être un peu plus grande que le verre, lequel doit être coupé obliquement ſur les bords, pour pouvoir, lorſqu'il eſt ajuſté dans la fenêtre, toucher le limbe. Dès que la ligne du verre répon-

dra à celle du limbe, on ſe ſervira de cire, ou de gomme, pour coller le verre ſur l'alidade.

201. On peut avoir pluſieurs méthodes, ſoit pour examiner ſi les axes des lunettes ſont dans la direction que nous avons dit être la meilleure, ſoit pour la leur donner; mais elles ſont ſi incommodes, que le plus court eſt de corriger dans les obſervations les erreurs occaſionnées par la déviation de l'axe; & c'eſt ce que nous avons fait de la maniere que nous dirons plus bas, lorſque nous parlerons de l'uſage du quart-de cercle, ſoit pour déterminer les angles formés par des lignes qui ſe dirigent à deux objets différens, ſoit pour connoître de combien un lieu eſt élevé, ou abaiſſé au-deſſous de l'horizon. De la déviation de l'axe.

202. Nous avons vu plus haut comment on peut s'aſſurer que le centre autour duquel tourne l'alidade, & celui d'où eſt ſuſpendu le fil à plomb, ſont les mêmes que celui des cercles gravés ſur le limbe. Tout cela ſe trouvoit dans notre quart-de-cercle, comme nous l'avons dit; d'où il ſuit que les cercles AEB, $1\,1'$, &c. du limbe, ſont exactement tracés. Nous avons vu encore la maniere de placer ces cercles à une juſte diſtance les uns des autres, & d'examiner s'ils y ſont. Il y a plus d'ouvrage à vérifier les autres diviſions, dans leſquelles les meilleurs artiſtes ne peuvent ſe répondre d'éviter des erreurs de quelques ſecondes. Or il ne ſuffit pas de ſavoir en général qu'il y a quelque erreur, mais il faut voir à quoi elle ſe monte dans chaque diviſion, du moins celles qui ont ſervi: c'eſt ce qu'on appelle vérifier les diviſions du limbe, opération pour laquelle on a inventé pluſieurs méthodes: elle ne m'a pas peu donné de peine, juſqu'à ce qu'enfin j'ai imaginé l'inſtrument de la figure 5, au moyen duquel elle ſe fait avec une entiere préciſion. De la vérification.

203. Pour mieux entendre ceci, il eſt à propos de donner un exemple de la maniere dont on détermine les angles avec l'alidade. Soit la lunette LN (fig. 5.) dirigée à un point quelconque, la lunette GCD à un autre objet, après qu'on l'aura debarraſſée de tout l'appareil AB*ba*, & C le point d'interſection des axes de ces lunettes. Si les axes ſont bien diſpoſés, l'arc compris entre le dernier point de la diviſion vers KI, & la ligne du verre, qui eſt entre FI & *fi*, meſurera Prendre les angles. Pl. III. fig. 5.

l'angle GCL, & par conſéquent l'angle NCD qui lui eſt oppoſé au ſommet. Pour lors il ſuffit d'examiner le nombre de dégrés qui ſe trouvent depuis le commencement AB de la diviſion, juſqu'à la ligne du verre, & de le retrancher de 90°, pour avoir l'angle cherché.

Corriger le défaut du paralléliſme.

204. Mais ſi les axes ne ſont pas exactement diſpoſés, de ſorte par exemple que la ligne du verre répondant à la fin du 90me. dégré, l'un des axes s'écarte un peu du rayon qui paſſe par ce point; on ſe contentera d'avancer une fois pour toutes la lunette mobile, juſqu'au point où elle repréſentera au centre des fils le même objet que la lunette fixe, & d'examiner de combien il s'en faut que la ligne du verre ne réponde préciſément à la fin du 90me. dégré. Cela fait, on ajoutera, ou l'on retranchera de l'angle obſervé cette différence, ſuivant que la ligne du verre ſe ſera trouvée au-delà, ou en-deçà de ce terme.

La lunette mobile y peut ſuffire.

205. Si de plus la lunette fixe LN n'étoit pas parallele au plan de l'inſtrument, tout au contraire de la lunette mobile, auquel cas elles ne pourroient repréſenter enſemble le même objet au centre des fils, il ſuffira de diſpoſer le quart-de-cercle enſorte que ſon plan paſſe par l'un & l'autre objet; de pointer enſuite la lunette mobile ſur le premier, puis ſur le ſecond, le quart-de-cercle reſtant toujours dans la même poſition, & de prendre la différence des arcs déſignés par la ligne du verre dans cette double poſition de la lunette mobile. Pour juger ſi le quart-de-cercle a été immobile, on verra ſi dans la lunette fixe LN on apperçoit toujours le même point d'un autre objet quelconque au centre des fils; car quoique le quart-de-cercle puiſſe abſolument ſe mouvoir ſans que l'axe de la lunette fixe change pour cela de place, il eſt cependant infiniment plus probable que l'un n'aura pas remué ſans l'autre. Mais nous avions rendu les lunettes paralleles au plan de l'inſtrument; ainſi elles repréſentoient enſemble le même point de l'objet au centre des fils.

Point du limbe déſigné par l'alidade. Pl. III. fig. 3.

206. Dans tous ces cas on doit toujours examiner le nombre de dégrés, minutes & ſecondes, déſignés par la ligne du verre; & l'on pourra s'y prendre de la maniere qui ſuit: ſoit A (fig. 3.) le commencement, & B la fin d'un dégré quel-

conque; si cette ligne passe par A ou B, on aura exactement le nombre de dégrés; si elle passe par F, comme KL, ou par G comme K″L″, on ajoutera au nombre de dégrés qu'on compte jusqu'en A, dans le premier cas, 20, dans le second, 30 minutes. Ces lignes passeront aussi par les points *e*, *f*, si les transversales sont bien tirées, & que le premier & le dernier cercles soient exactement divisés. Si elle passe entre F & G, par exemple en *x x*, comme K′L′, il faudra ajouter à 20′ le nombre de minutes & de secondes qui se comptent sur l'arc F*x*, & qu'on trouvera par les transversales. Car si elle passe par le point d'intersection de la transversale avec l'un des cercles intermédiaires, comme avec le quatrieme en Q, ou le cinquieme en R, on aura exactement le nombre de minutes qui doivent être ajoutées aux 20 premieres, savoir 4 minutes dans le premier cas, & 5 dans le second.

Connoître par estime le nombre des secondes.

207. Si la ligne passe entre deux de ces points, par exemple en S, entre Q & R, on aura le nombre de secondes, qu'on doit ajouter aux minutes, par cette analogie: QR est à QS, comme 60 au nombre cherché. Cette proportion ne se voit que difficilement sur la ligne QR; mais si K′L′ rencontre le cercle supérieur en T, l'inférieur en V, & qu'on regarde avec une lentille d'une assez grande convexité les lignes QT, VR, on en découvrira aisément le rapport; & divisant le nombre 60 dans la même raison, on aura le nombre de secondes qui répond à l'arc QT. Cet arc sera par exemple de 30″, si QT est égal à VR, & de 40″, s'il en est le double. Or il y a si loin de l'égalité à la raison double, qu'on peut aisément appercevoir à la vue simple plusieurs rapports intermédiaires; & comme cette différence répond à 10″, il est clair qu'on peut connoître le nombre de secondes qui doit s'ajouter aux minutes, à peu de secondes près.

Moyen plus exact.

208. Au lieu de cette méthode, on peut se servir du micrometre commun, comme je l'expliquerai plus bas; mais si l'on veut une précision entiere, on n'a qu'à appliquer le micrometre de la figure 7, & tourner la vis jusqu'à ce que la ligne du verre passe par le point Q, puis par le point R: on marquera les nombres désignés par l'index, dans les trois positions Q, S, R, & on fera cette proportion: l'intervalle de

la premiere à la troiſieme eſt à l'intervalle de la premiere à la ſeconde, comme 60 eſt au nombre cherché : plus brievement encore, dès qu'on connoîtra le nombre des parties du micrometre contenu dans une minute, & qu'on aura dreſſé une table où on les aura réduits en ſecondes, ſelon l'uſage, il ſuffira des deux premieres poſitions pour avoir le nombre de ſecondes de l'arc QT. Notre micrometre commun s'étoit dérangé, comme je l'ai dit ; & nous n'avions perſonne pour le raccommoder, ni pour en faire un autre que j'avois imaginé : nous n'avons trouvé qu'à *Rome* un homme également capable & de rétablir l'ancien, & d'exécuter le nouveau.

Son application aux ſecondes. Pl. III. fig. 3.

209. Ainſi nous avons été obligés, pendant tout le voyage, de nous ſervir de la méthode du n°. 207. A la fin de chaque obſervation nous examinions ſéparément le rapport entre QT & VR, ou ſi le point S étoit trop près de l'un des points Q, R, entre les arcs des cercles qui ſont immédiatement au-deſſus & au-deſſous de ce même point ; nous tirions de ce rapport le nombre de ſecondes, nous comparions nos réſultats, & nous trouvions qu'ils s'accordoient ordinairement à deux ou trois ſecondes près ; rarement la différence eſt allée juſqu'à 5″, & jamais au-delà. Lorſque nous nous rencontrions d'aſſez près, nous prenions un milieu entre les obſervations : pour peu que la différence ne fût pas à négliger, nous examinions de nouveau avec la lentille, une ſeconde & une troiſieme fois ; ainſi il ne s'eſt pu gliſſer de ce côté-là que de très petites erreurs dans nos obſervations.

Méthode plus courte.

210. Nous nous ſommes affranchis de la néceſſité de revenir deux fois à cet examen, en employant une méthode qui rend la rectification du quart-de-cercle incomparablement plus facile & plus sûre. Nous examinions d'abord l'angle que formoient à peu près les axes des lunettes dirigées l'une ſur un objet, l'autre ſur un autre ; nous faiſions enſuite mouvoir l'alidade juſqu'à ce que la ligne du verre paſſât par le commencement du dégré le plus voiſin. Cela fait, nous faiſions mouvoir tout le quart-de-cercle, juſqu'à ce que le même objet reparût au centre des fils de la lunette mobile, puis le fil mobile de la lunette fixe, juſqu'à ce que l'autre objet parût au point d'interſection de ce fil avec le fil fixe auquel il eſt perpendiculaire.

diculaire. Du reſte, afin que le fil mobile fût perpendiculaire au plan de l'inſtrument, nous tournions à l'ordinaire le micrometre au commencement de chaque obſervation, & nous avions ſous les yeux un ſigne permanent pour pouvoir toujours reconnoître cette poſition. Après cela nous amenions la lunette mobile ſur cet autre objet, juſqu'à ce qu'il parût au centre de ſes fils, ſans ſortir du point d'interſection que nous avons dit; & nous remarquions ſur l'arc du dernier, ou du pénultieme dégré l'endroit déſigné par la ligne du verre: enfin nous marquions pour le premier objet le nombre entier de dégrés, & le nombre des dégrés, minutes & ſecondes pour le ſecond.

Faciliter la vérification.

211. On voit à quel point cela doit abréger la rectification du quart-de-cercle; en effet, il ſuffit alors de rectifier les 90me. & 91me. dégrés, avec le commencement & la fin des autres. Seulement pour connoître de combien un objet étoit élevé ou abaiſſé au-deſſous de l'horizon, nous avons encore eu beſoin de rectifier deux dégrés entiers, pris de part & d'autre du premier point de la diviſion. Mais au lieu du commencement du dégré voiſin, dont je n'ai parlé (n°. 210) que pour me rendre plus intelligible, & ne point trop embarraſſer mon explication, nous avons pris, tant dans les obſervations que dans la rectification de l'inſtrument, le point qui termine la premiere minute de ce dégré; parceque nous avons vu par expérience, que dès qu'on emploie des tranſverſales, il eſt bien plus aiſé de remarquer le paſſage d'une ligne droite, comme du fil à plomb, ou de la ligne du verre, par le point d'interſection de deux lignes telles que A*ra*, 1*r*1′, qui eſt en *r*, que par le point de concours des lignes A*a*, AB, qui eſt en A; outre que nos tranſverſales ſont ſans comparaiſon plus nettes & plus égales dans tous leurs points intermédiaires, qu'à leurs extrémités, où elles rencontrent le plus grand & le plus petit cercle. Ainſi nous marquions toujours pour le premier objet, un certain nombre de dégrés, avec une minute.

Utilité de ces explications.

212. Je me ſuis un peu étendu ſur cet article, pour faire connoître les moyens que nous avons jugé les plus propres à aſſurer le ſuccès de nos opérations, & pour n'avoir pas

besoin d'y revenir dans la suite. Quelques esprits dédaigneux traiteront ceci de minuties ; mais ceux qui s'exercent dans la pratique de l'Astronomie le regarderont, comme je l'espere, avec d'autres yeux, & me sauront peut-être gré de mes remarques : il seroit même fort à desirer en général que les Astronomes voulussent bien faire part au public des moyens qu'ils ont employés pour observer avec plus de précision. Pour revenir, ceci nous conduit naturellement à la rectification du quart-de-cercle.

Moyen de vérifier exactement.

213. Car ces choses étant supposées, voici la méthode la plus sûre & la plus exacte de procéder à l'examen des divisions. Dans une plaine découverte, & également de niveau, on mesure avec des perches en forme de regles, semblables à celles qu'on emploie pour la mesure des bases, ainsi que je l'ai exposé dans le premier Livre, & que je l'exposerai de nouveau dans le Chapitre quatrieme de celui-ci ; on mesure, dis-je, une distance considérable, par exemple de 1000 toises : on place le centre du quart-de-cercle à l'une des extrémités, & on tire par l'autre une ligne perpendiculaire, dans laquelle on met les perches, & dans une position horizontale. Il seroit nécessaire que les perches ou regles fussent exactement d'un certain nombre de toises, comme par exemple de trois toises chacune ; & que sur leurs côtés verticaux, chaque toise se trouvât divisée d'abord en dix, puis en cent parties, par des lignes numérotées : les trois premieres perches feroient déja $\frac{900}{100000}$ de la distance. Ces perches étant placées, & les lunettes disposées de telle sorte que leurs fils verticaux répondent au commencement de la premiere perche, & la ligne du verre au premier point de la division, on retiendra la lunette fixe dans cette position, & on fera mouvoir l'alidade de sorte que la ligne du verre marque successivement une, deux, trois minutes, & ainsi de suite. Ces trois premieres perches donneront déja les tangentes des petits arcs du quart-de-cercle, jusqu'à la moitié du premier dégré. On transportera la premiere perche au-delà de la troisieme, dès qu'on aura fini de s'en servir (ce que l'observateur pourroit indiquer de la main, ou avec un mouchoir blanc, à ceux qui président aux perches) ; & continuant sur le même pied, on pourra aller de suite

jusqu'à 1000 toises, c'est-à-dire jusqu'à la fin du 45e dégré, au-delà duquel les tangentes augmentent considérablement. Ainsi on pourroit vérifier en même tems, & de la même maniere, l'autre moitié du quart-de-cercle, & par-là on auroit immédiatement tous les arcs au-dessous de 45 dégrés, & ceux qui sont au-dessus, par l'addition de deux arcs, dont on a la valeur immédiate, sans courir le risque d'accumuler les erreurs.

214. On pourroit aisément par cette méthode éviter l'erreur d'une seconde; car avec une lunette de deux ou trois pieds, on distingue parfaitement, à mille toises de distance, la centieme partie d'une toise, qui est un peu moindre qu'un pouce, & même la deux centieme. Or la centieme d'une toise n'entraîneroit au commencement qu'une erreur d'environ deux secondes, & à la fin que d'une seconde, comme on peut s'en convaincre par l'inspection des tables des sinus. Précision de la méthode.

215. Mais cette méthode même demande bien du travail, & nous n'avons jamais vu de plaine où l'on pût l'employer. Nous pouvions y suppléer en comparant entre elles les divisions du quart-de-cercle, & le quart-de-cercle lui-même avec les quatre parties de l'horizon. Car si on compare entre elles les deux moitiés, ou plutôt les trois tiers du quart-de-cercle, c'est-à-dire des arcs de 30 d., puis les tiers de ceux-ci, ou les arcs de 10 d., puis de 5 d., enfin de 1 d., en divisant d'abord 90 d., suivant le rapport trouvé dans les trois tiers, puis chaque tiers suivant celui qu'on a trouvé dans les arcs de 10 d., & ainsi de suite, par la méthode proposée pour le secteur, n°. 85; après quatre opérations, on a tous les arcs de dégrés entiers; & dans les trois premieres on ne peut commettre qu'une erreur simple dans chaque partie de la division; dans la quatrieme qu'une erreur double. On peut de la même maniere comparer les minutes de dix en dix, & d'une à une; mais si l'on trouve que les transversales soient bien tirées, on pourra se dispenser de les comparer une à une; car en comparant les dix minutes du plus grand cercle avec celles du plus petit, on verra aisément la correction qu'il y a à faire aux minutes intermédiaires. Par-là tous les arcs se trouveront corrigés, dans la supposition que l'instrument soit exactement Autres méthodes de vérification.

la quatrieme partie du cercle ; & ſi l'on y découvre quelque différence, on la répartira ſur le quart-de-cercle par cette analogie : comme un arc de 90° eſt à un autre arc quelconque ; ainſi cette différence eſt à un quatrieme terme, qui ſera cette partie même de la différence qu'il faudra aſſigner à cet arc. De cette ſorte tout l'inſtrument ſera exactement corrigé.

Même ſujet.

216. Pour comparer entre elles les parties du quart-de-cercle, on place d'abord la ligne du verre au commencement de la diviſion, puis à la fin de l'arc à comparer, par exemple de 45°, en remarquant les objets qui paroiſſent dans cette double poſition au centre des fils : on tourne enſuite l'inſtrument ſur ſon centre, juſqu'à ce que le premier objet reparoiſſe au centre des fils ; on pointe ſur le ſecond, & on examine de combien la ligne du verre eſt éloignée de la fin du ſecond arc, comme ici de la fin du 90me. dégré ; cette différence eſt celle des arcs, & c'eſt la même méthode pour les autres.

Erreurs qu'on y peut craindre.

217. Nous nous ſommes ſervis de cette méthode premierement à *Rome*, dès qu'on nous eut remis notre quart-de-cercle, puis à *Rimini ;* mais pluſieurs difficultés contribuerent à nous en dégoûter. Car en premier lieu nous trouvions rarement au centre des fils des objets aſſez diſtincts ; de plus, la largeur des fils dans l'une & l'autre lunette, quelque déliés qu'ils fuſſent, & pluſieurs autres inconvéniens qu'on éprouve en obſervant avec ces inſtrumens, produiſoient infailliblement dans chaque obſervation une erreur de quelques ſecondes ; erreur qu'on ne pouvoit eſtimer au juſte, ſurtout à cauſe du dérangement que notre micrometre avoit ſouffert, comme je l'ai dit n°. 176.

Méthode où l'on emploie le ſecteur.

218. Ayant donc renoncé à nous ſervir de cette méthode, je fus d'avis qu'on eſſayât de confronter les diviſions du quart-de-cercle avec celles de la lame mobile du ſecteur, dont nous avons vu une deſcription détaillée au Chapitre précédent. Pour cela nous mettions le ſecteur & le quart-de-cercle dans une poſition horizontale, & dans le même plan, de ſorte que le milieu de l'arc à comparer répondît exactement au rayon du ſecteur ; & nous prenions avec le compas la diſtance de ce point de milieu à la ligne du milieu de la lame mobile. Malgré la petite difficulté qu'il y a à diſpoſer ainſi les choſes, nous

nous en tirions heureusement à l'aide d'un fil fort délié, & tendu de l'aiguille du quart-de-cercle au centre du secteur.

Suite.

219. Cela fait, nous faisions passer le fil toujours tendu qui partoit de l'aiguille du quart-de-cercle, par le premier point d'un arc quelconque de 15 dégrés, & nous avancions la lame mobile jusqu'à ce que le fil répondît à quelqu'une de ses divisions, ce qui nous faisoit juger de sa distance au milieu du limbe du secteur. On répétoit la même opération, en faisant passer le fil à la fin du premier, puis du second dégré, & ainsi de suite, jusqu'au quinzieme, la lame mobile ayant pour cela une étendue suffisante. On comparoit ensuite de la même façon les autres arcs de 15°, en prenant toujours la précaution de placer le quart-de-cercle à la même distance de la ligne du milieu.

Tentatives inutiles.

220. Cette méthode est assez exacte, surtout lorsqu'on applique la loupe; nous l'essayâmes plusieurs jours à *Rimini*, & elle nous eût réussi, si nous eussions eu une connoissance suffisante des divisions de la lame mobile, & si nous eussions pu trouver un endroit propre à notre dessein. Il n'y en avoit aucun dans tout le college de *Rimini*. Ici les chambres étoient embarrassées par les décombres d'un bâtiment neuf; là elles étoient trop obscures; plus souvent encore le plancher ne portoit que sur des poutres, au lieu d'être solidement appuyé sur une voute: ainsi nous trouvâmes des obstacles de tout côté. Les poutres en particulier étoient si foibles, que le moindre mouvement du corps s'y faisoit sentir, & qu'il suffisoit de se baisser à dessein de mieux voir les divisions, pour causer dans le pavé un trémoussement qui ne laissoit pas de déranger un peu la position du quart-de-cercle par rapport au secteur, & troubloit toute l'opération. De plus, nous ne connoissions point assez le rapport des divisions de la lame mobile, & nous avions fort à craindre d'ajouter de nouvelles erreurs à celles qu'on pourroit découvrir dans la vérification de la lame. Toutes ces raisons nous obligerent enfin de renoncer à la méthode.

Nouvel instrument de vérification.

221. Je ne dis rien de plusieurs autres tentatives; mais avant que d'en venir à celle qui à la fin nous a réussi, je crois devoir observer que le compas formé de deux verres, l'un

fixe, l'autre mobile, dont j'ai donné la description n°. 66, nous eût été ici d'un grand usage: nous eussions pu nous en servir pour comparer entre eux avec assez de précision les arcs observés, mais nous n'en avions point alors, & l'idée de cet instrument, & de son usage, ne m'est venue que quelque tems après. J'imaginai donc un instrument équivalent à celui-là, & qui l'emporte même de beaucoup pour l'objet que nous traitons; mais n'ayant trouvé personne ni à *Rimini*, ni dans tout le trajet, qui pût l'achever; ce n'est qu'à *Rome* que je l'ai fait finir, & que je lui ai fait donner sa derniere perfection: c'est l'ouvrage de notre artiste ordinaire M. *Rufo*, & il est représenté dans les figures 5, 7 & 8: j'en ai donné la description n°. 189 & suivans; en voici l'usage pour la rectification du quart-de-cercle; il a beaucoup de rapport avec celui de la lame mobile, destinée à la vérification du secteur.

Moyen de connoître sa vis. Pl. III. fig. 7.

222. Il n'est besoin que du petit instrument de la figure 7, pour vérifier la vis Z*u*V; car il suffit pour cela de faire parcourir à la ligne GH du verre, au moyen des pas de la vis qu'on y emploie successivement, l'intervalle de deux points marqués sur le limbe, & dont la distance réponde à un tour de cette vis; ou de faire correspondre, au moyen de la même vis, à un point unique du limbe l'intervalle de deux lignes marquées sur le verre à la même distance. A cet effet on ne serrera les vis M, *m* (fig. 8.) qu'après avoir amené la ligne du verre au commencement de l'intervalle des points du limbe, ou le point du limbe au commencement de l'intervalle des lignes du verre, l'index placé au commencement du pas de la vis; & lorsqu'après une révolution de l'index on sera arrivé à la fin de ce pas, on lâchera les vis, & on placera de telle sorte l'alidade avec le vérificateur, que le commencement de l'intervalle réponde, comme ci-devant, à la ligne ou au point: enfin on fera faire un tour à l'index pour mesurer le second pas de la vis. De cette sorte on pourra comparer tous les pas, d'abord un à un, puis deux à deux, ou trois à trois, &c. enfin les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de chaque pas, comme nous avons dit, n°. 56 & 57, qu'on pouvoit faire pour la vérification de la vis du secteur, qui pousse la lame

mobile. Celle-ci se trouva également parfaite.

223. La vis étant vérifiée, on pourra comparer tous les dégrés entre eux, comme on a comparé les divisions de la lame mobile (n°. 61), & cela, ou en faisant parcourir à la ligne du verre GH un dégré entier quelconque, & la ramenant ensuite à sa premiere position, ou ce qui est mieux, en marquant sur le verre de l'alidade, si sa fenêtre est assez large, deux lignes à la distance d'environ un dégré, & amenant, comme ci-dessus, l'une au commencement, l'autre à la fin du dégré. Il ne sera pas même besoin pour cela d'avoir vérifié la vis; mais dès qu'elle le sera, on pourra comparer les minutes entre elles, ou du moins le commencement & la fin de chaque dixaine de minutes, ou bien, comme nous l'avons fait, la fin des premieres & le commencement des dernieres minutes de chaque dixaine, dans les points où les transversales coupent le second & le dixieme des onze cercles concentriques (fig. 3.). Car ayant remarqué combien il y a dans un dégré moyen de parties du micrometre de la figure 7, & combien il en doit revenir à chaque partie quelconque de ce dégré, l'erreur, tant du dégré que de chacune de ses parties, se manifeste d'elle-même. Tout ceci revient à ce que nous avons dit, à l'endroit cité, de la lame mobile du secteur, & de son micrometre.

Comparez les dégrés.

224. Comparant donc ainsi tous les dégrés, on vérifie tout le quart-de-cercle; de même qu'on connoît toute la division de la lame mobile, en examinant chacune de ses parties. Car on connoîtra le nombre de parties de micrometre contenu dans le quart-de-cercle entier, & par-là même dans un arc quelconque, & on fera cette analogie: comme le nombre de parties de micrometre contenu dans le quart-de-cercle est au nombre de parties contenu dans un arc quelconque, ainsi 90° est à un quatrieme terme, qui, étant soustrait de cet arc, en fera connoître l'erreur; mais par-là on commettroit une erreur dans chaque opération, & ces erreurs pourroient s'accumuler jusqu'au nombre de 45, suivant le n°. 84.

Corriger les arcs.

225. On peut donc, par la méthode proposée, n°. 76, pour le rayon du secteur, diminuer considérablement ce nombre d'erreurs, au moyen de l'instrument représenté dans la figure 5,

Diminuer l'erreur. Pl. III. fig. 5.

depuis AB jusqu'à *ab*. On y collera avec de la cire deux verres P*p*, Q*q*, sur le revers desquels on aura marqué des lignes dirigées au centre de l'instrument, & placées à peu près l'une au commencement de la division, l'autre à la fin du 45e dégré; & tournant la vis qui est au dessous du point *i*, on fera avancer avec l'alidade toute la machine, jusqu'à ce que les lignes des verres répondent successivement, l'une au commencement de la division, l'autre à la fin du 45e dégré; ce qui fera connoître la différence de cet arc, avec l'intervalle de ces lignes. On transportera ensuite toute la machine, jusqu'à ce que la ligne du premier verre soit à peu près à la fin du 45e dégré, & par conséquent celle du second proche la fin du 90e; & l'on trouvera la différence de cet arc à l'intervalle des lignes, & par conséquent la différence des arcs. Si l'on compare de la même maniere les arcs de 30, de 10 & de 5 dégrés, en plaçant les verres à ces intervalles, l'erreur ne pourra être au plus que quintuple de celle qu'on aura commise dans chaque opération.

Même sujet. 226. Pour trouver les angles de notre polygone, nous n'avons eu besoin, comme je l'ai dit, n°. 211, que de vérifier les minutes des 90e & 91e dégrés, avec le commencement & la fin des autres; & pour connoître de combien un objet est élevé, ou abaissé au-dessous de l'horizon, il a fallu y ajouter la vérification de deux dégrés pris de part & d'autre du premier point de la division. Toutes ces opérations demandent beaucoup de travail & de patience; mais elles sont absolument nécessaires, & nous nous y sommes appliqués sérieusement depuis notre retour à *Rome*. Or il est à observer que si l'on vérifie les minutes d'un même dégré par le mouvement continu d'une vis bien faite, la somme des erreurs n'augmente point, & qu'il n'y a d'autre différence dans la grandeur de l'arc, que celle qui provient de l'erreur unique de la derniere opération, comparée à la premiere erreur; d'où il suit que ce quintuple de l'erreur ne peut être augmenté que de cette erreur unique : mais il n'arrive jamais que les erreurs soient toutes du même côté; au contraire, elles s'effacent presque toujours les unes les autres, du moins en partie.

227.

227. Le rayon de notre quart-de-cercle étant le tiers de celui du secteur, le mouvement de l'aiguille ou de l'index, qui, dans le secteur, répond à une seconde, répond ici à trois secondes. De même donc qu'avec un micrometre & une lentille on distingue aisément dans le secteur le tiers d'une seconde, on distinguera pareillement ici une seconde. Mais si la division se faisoit par de petits points, & qu'on se servît du microscope, je ne doute nullement qu'on ne pût distinguer les dixiemes de secondes, & même les tierces; de sorte qu'en perfectionnant cette méthode, on peut parvenir à éviter, je dis même dans la totalité de toutes les erreurs possibles, une erreur qui excede une petite fraction de seconde. Mais il seroit inutile de chercher tant de précision dans la circonstance présente, où les angles se mesurent avec les fils du micrometre; ce qui expose à des erreurs de deux, de trois, & même de cinq secondes. Ce n'est pas sans raison que j'ai préféré plus haut cette méthode à celle du compas à verres, l'un fixe & l'autre mobile, à la place desquels on peut encore mettre des microscopes; car ici le mouvement de la machine & de l'intervalle qui est entre les lignes des verres, se fait autour du centre du quart-de-cercle, suivant le mouvement même de l'alidade, dont on se sert pour prendre les angles; ce qui contribue beaucoup à donner une détermination plus exacte de ces angles, au moyen d'une division ainsi vérifiée.

Avantages du nouvel instrument de vérification.

228. Connoissant le rapport des parties du quart-de-cercle, & la correction faite en conséquence, il reste à corriger le quart-de-cercle même. Pour cela il faut, comme nous l'avons déja dit plus d'une fois, placer le quart-de-cercle dans une situation horizontale, & l'alidade d'abord au commencement de la division, puis à la fin du 90me. dégré, en remarquant les deux objets qui paroissent au centre des fils de la lunette mobile. Cela fait, on ramene l'alidade au point de zéro, & on tourne le quart-de-cercle horizontalement, jusqu'à ce que le second objet se retrouve dans l'axe de la lunette mobile, après quoi on remet l'alidade à la fin du 90me. dégré, & on remarque un troisieme objet. On répete encore l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la quatrieme position du quart-de-cercle; & si le premier objet se retrouve alors au

Vérification du quart-de-cercle. Premiere méthode.

centre des fils, l'alidade marquant 90°, le quart-de-cercle eſt juſte : mais s'il faut, pour amener la lunette ſur cet objet, avancer l'alidade au-delà de 90°, ou la retirer en-deçà, la quatrieme partie de cette différence marque ce qui manque au quart-de-cercle dans le premier cas, & ce qu'il a de trop dans le ſecond, puiſque cette erreur ſe déduit de quatre poſitions.

Suite.

229. Or pour connoître exactement cette différence, il faut préalablement connoître cet arc ajouté ou retranché dans la quatrieme poſition ; car s'il y avoit quelque erreur cachée, elle rendroit la correction vicieuſe. Mais parcequ'il eſt très rare de trouver des objets diſtincts à une telle diſtance, qu'ils paroiſſent terminer à l'horizon les arcs qui répondent au quart-de-cercle ; dès qu'on aura rectifié le 90me. & le 91me. dégré, il ſuffira d'obſerver quatre objets, qui répondent à peu près à l'amplitude du quart-de-cercle, & de meſurer l'angle que fait le premier avec le ſecond, le ſecond avec le troiſieme, & ainſi de ſuite ; & ſi la ſomme des quatre angles eſt au-deſſus ou au-deſſous de quatre droits, le quart de cette différence ſera l'erreur de l'inſtrument, par défaut dans le premier cas, par excès dans le ſecond. On voit que dans tous ces cas il faut choiſir des objets très éloignés, à moins de quoi on ſeroit obligé, en tournant l'inſtrument, d'en tranſporter le pied, pour remettre le centre au même point ; car le pied, autour duquel ſe fait cette révolution, ne répond point au centre du quart-de-cercle ; ce qui produit une parallaxe qui, à une médiocre diſtance, pourroit troubler l'opération.

Seconde méthode.

230. Si l'on eſt obligé de déterminer avec le quart-de-cercle tous les angles d'un triangle, comme il arrive dans la meſure d'un dégré, où l'on prend avec cet inſtrument tous les angles du polygone, & que la ſomme de ces angles ſoit préciſément 180°, le quart-de-cercle eſt juſte ; ſinon la différence ſera le double de l'erreur. On ne peut cependant ſe promettre avec un ſeul triangle d'évaluer l'erreur, à cauſe que dans tous les angles meſurés avec un quart-de-cercle, il ſe trouve toujours une erreur de quelques ſecondes, puiſqu'avec le ſecteur, qui eſt beaucoup plus long, on ne peut éviter une erreur d'une ou deux ſecondes. Mais ſi l'on a pluſieurs triangles,

comme ceux d'un long polygone, ils donneront autant de différences, dont les unes pourront être positives, les autres négatives: on en fera une somme qu'on divisera à l'ordinaire par le nombre des triangles, pour avoir une différence moyenne, dont la moitié sera l'erreur d'autant plus approchée, que le nombre des triangles sera plus grand.

Troisieme méthode.

231. On trouve la même chose avec une double lunette, telle qu'étoit notre lunette fixe, n°. 179. D'abord il faut chercher avec cette lunette deux objets diamétralement opposés; ce qui est requis pour procurer le parallélisme des deux axes posés l'un sur l'autre en sens contraire: on choisit ensuite un objet moyen, & l'on mesure les deux angles avec le quart-de-cercle: si la somme des angles équivaut à 180°, le quart-de-cercle est juste; sinon la moitié de la différence est l'erreur cherchée. On ne peut se dispenser de substituer cette méthode à la premiere de celles que nous venons de proposer, lorsqu'on ne découvre d'un côté de l'horizon aucun objet distinct, comme il nous est arrivé à *Rimini*, où la mer occupoit tout le nord; ou bien lorsqu'un édifice voisin cache une bonne partie de l'horizon.

Suite. Pl. III. fig. 5.

232. Or pour trouver avec une lunette double deux objets diamétralement opposés, & le parallélisme de ses axes; le quart-de-cercle posé horizontalement, je place l'oculaire du côté du centre, comme en N (fig. 5.), & je pointe cette lunette sur quelque objet: ensuite, sans toucher au quart-de-cercle, je porte l'oculaire en L du côté du limbe, & je remarque quelque objet, sur lequel j'amene le fil mobile du micrometre, qui se trouve en cet endroit, n°. 176. Cela fait, je retourne l'instrument jusqu'à ce que la direction NL se change en LN; & je dirige tellement la lunette, qu'en visant par N du côté du centre, le second objet paroisse au centre des fils: ensuite ayant porté l'oculaire du côté du limbe en L, je vois si le premier objet est à l'intersection du fil mobile, avec le fil fixe qui le coupe à angles droits: s'il en est ainsi, les deux objets sont diamétralement opposés; s'il s'en faut de quelque chose, j'amene sur cet objet le fil mobile, dont je mesure cependant le mouvement, & que je retire ensuite jusqu'au milieu du chemin que je lui ai fait faire: le nouvel objet,

qui dans cette position paroît au centre des fils, est diamétralement opposé au second, & l'on est parvenu au parallélisme des deux axes, ou plutôt des deux lignes de foi, dont l'une passe par le point de l'axe de l'objectif en L, & le centre des fils en N, l'autre par le point de l'axe de l'objectif en N, & le point d'intersection du fil mobile en L, avec le fil qui le coupe perpendiculairement; & l'on pourra dans la suite se servir de ces deux lignes, pour trouver, dans une position quelconque du quart-de-cercle, deux objets diamétralement opposés.

Démonstration. Fig. 9.

233. Supposons en effet (fig. 9.) que dans la premiere position de la lunette, l'une des lignes de foi NL aboutisse au point A, l'autre L*n* en B, au lieu du point opposé *a*; après avoir retourné l'instrument, NL sera changée en N′L, & aboutira au second objet B, & L*n* changée en L*n*′ aboutira en A′, non en A; l'angle ALN′ sera égal à l'angle NL*n*, qui lui est opposé au sommet, & qui est le même que l'angle A′LN′. Donc l'angle A′LA, qui mesure la distance apparente de l'objet de A au point A′, est double de l'angle *n*′LN′, qui est l'angle de la déviation des lignes de foi. Donc si la ligne de foi L*n*′ parcourt la moitié de l'angle A′LA, elle retombera sur LN′, & les deux lignes de foi devenues paralleles, étant placées l'une sur l'autre en sens contraire, seront dirigées par N′L, & LN′ à des objets diamétralement opposés.

Autre moyen moinssûr. Pl III. fig. 5. 9. 10.

334. Au lieu des deux positions horizontales du quart-de-cercle, on pourroit lui en donner deux verticales, pourvu que le limbe A fût alternativement au-dessus & au-dessous de LN, & c'est la même démonstration que dans la figure 9: car dans la position verticale, il ne suffit pas de tourner l'instrument autour de son pied, par un mouvement horizontal, en laissant le limbe A au-dessous de NL, dans les deux positions; auquel cas les lignes de foi, quoique déviées, aboutiroient toujours aux mêmes objets. En effet, si dans la premiere position (fig. 10.), LN, *n*L représentent les lignes de foi, & que le quart-de-cercle tourne horizontalement autour d'un axe vertical; LN′ restera toujours au-dessus de L*n*′, comme auparavant, ainsi qu'il est marqué dans la figure;

comme au contraire il seroit au-dessous, s'il y avoit été d'abord; & donnant à N'L la direction précédente de L n, L n' prendra celle qu'avoit N L.

Précaution à prendre contre la parallaxe.

235. Il faut encore avoir soin, dans ces opérations, de choisir des objets fort éloignés, ou de remettre le centre du quart-de-cercle au point où il étoit dans la premiere position, ou du moins dans la ligne tirée d'un objet à l'autre, de crainte que la parallaxe ne cause quelque confusion. Au reste, il est bien plus facile de retourner l'instrument, dans la position horizontale, que dans la verticale; car dans celle-là, il n'est question que de mouvoir un peu le quart-de-cercle horizontalement; au lieu que dans celle-ci, il faut l'élever au-dessus de la lunette fixe, qui doit toujours rester à la même hauteur.

Erreurs de l'instrument.

236. Les lignes de foi rendues paralleles, il est aisé de marquer sur l'horizon deux points opposés, & de prendre les angles qu'ils font avec quelque objet intermédiaire, afin de voir de combien le quart-de-cercle differe de 90°. Je viens de donner pour cela trois méthodes, dont nous nous sommes servis à plusieurs reprises; & par l'accord de plusieurs observations de toute espece, qui ne different que d'un très petit nombre de secondes, nous avons trouvé qu'il manque à notre quart-de-cercle 25″ pour completter les 90°. Cette erreur doit se répartir sur tous les arcs, suivant le rapport du quart-de-cercle à ces mêmes arcs; & c'est enfin le moyen de corriger toutes les erreurs qui auroient pu se glisser dans la division du quart-de-cercle.

Déviation de la lunette fixe; moyen de la corriger. Pl. III. fig. 5.

237. Ayant trouvé les lignes de foi de la lunette double, il n'est pas difficile de voir de combien il s'en faut qu'elles ne soient paralleles au dernier rayon; j'entends celui qui termine le 90me. dégré. Otons l'alidade (fig. 5.) avec l'instrument qui y est ajouté, & plaçons au centre C la petite piece de la figure 2, avec le fil à plomb: si ces lignes de foi sont paralleles au rayon, & qu'on vise de L par L N, ou de N par N L à quelque objet situé à l'horizon, il est clair que le fil à plomb doit être au commencement du premier dégré. Mais si ce parallélisme subsistant, l'objet étoit au-dessus de l'horizon, ou bien L seroit plus bas que N, & pour lors le fil se rappro-

cheroit du point I ; ou bien N, ſi l'on viſe par NL, ſeroit plus bas que L, & le fil s'écarteroit du côté oppoſé AB ; & ces arcs ſeroient égaux à la hauteur de l'objet ſur l'horizon. C'eſt pour avoir le dernier de ces arcs, qu'on a ajouté quelques dégrés entre le premier point de la diviſion & l'extrémité AB du limbe.

Suite. 238. Si les lignes de foi ne ſont pas paralleles au dernier rayon, & qu'on viſe à un objet, tantôt par LN, tantôt par NL, le fil ne ſera pas à la même diſtance du commencement de la diviſion ; & le point de milieu, entre les extrémités de ces diſtances, ſera éloigné de 90° du point du limbe, où aboutit le rayon parallele ; ainſi la diſtance de ce point de milieu, au commencement de la diviſion, marquera la déviation. Or ſi la diſtance du fil au premier point de la diviſion, eſt plus grande du côté de KI, lorſqu'on viſe par LN, que du côté de AB, lorſqu'on viſe par NL, le point du milieu tombera du côté de KI, & il tomberoit du côté de AB, ſi la premiere diſtance étoit plus petite que la ſeconde. Lorſqu'enſuite on meſurera la hauteur des objets au-deſſus de l'horizon, en viſant par LN, cette diſtance du point du milieu doit être retranchée dans le premier cas, & ajoutée dans le ſecond à l'arc déſigné par le fil à plomb, pour avoir la hauteur qu'on cherche, puiſque ſelon que le point du milieu eſt en-delà ou en-deçà du premier point de la diviſion, le fil eſt de même en-delà ou en-deçà du point, où l'on doit commencer à compter les dégrés de l'arc. Il faudroit au contraire l'ajouter dans le premier cas, & la retrancher dans le ſecond, ſi l'objet étoit au-deſſous de l'horizon, le fil tombant alors du côté oppoſé AB. On voit, ſans que je le diſe, que pour connoître la déviation, il ſuffit de retrancher la plus petite diſtance de la plus grande, & de prendre la moitié du reſte.

Trois autres moyens. 239. Tout ceci eſt trop connu pour qu'il ſoit beſoin d'en donner des exemples. On ſait également qu'il y a pluſieurs autres moyens de connoître la déviation, avec la lunette ſimple ; j'en rapporterai trois principaux. Le premier conſiſte à viſer par LN à un objet un peu élevé au-deſſus de l'horizon, en remarquant de combien le fil s'éloigne, du côté de KI, du premier point de la diviſion ; & à viſer enſuite à ſon image

peinte dans un grand vaſe plein d'eau, laquelle devra être abaiſſée au-deſſous de l'horizon, en remarquant toujours la diſtance du fil au même point: on prend le point du milieu entre ces deux poſitions du fil, & la moitié de ſa diſtance au premier point de la diviſion eſt la déviation cherchée.

240. Le ſecond moyen eſt de viſer à cet objet par LN, le limbe A étant au-deſſous de NI, en marquant, comme ci-devant, la poſition du fil, & de retourner l'inſtrument de ſorte que le limbe A ſoit au-deſſus de LN, pour lors on ôte l'aiguille d'où eſt ſuſpendu le fil à plomb, & on le ſuſpend avec la main, autour du limbe A, de ſorte qu'il paſſe par le centre C, qui eſt au-deſſous du limbe, en marquant encore la diſtance du fil au premier point de la diviſion; & le point du milieu, entre ces deux poſitions, ſervira encore à faire connoître la déviation. Au reſte, ſoit qu'on emploie l'un ou l'autre de ces deux moyens, il faut avoir ſoin de prendre un objet très éloigné, ſinon de remettre le centre du quart-de-cercle au même point, pour éviter la parallaxe. L'un & l'autre vérifie immédiatement le premier point de la diviſion, comme le troiſieme, dont nous allons parler, vérifie immédiatement le dernier point; d'où, connoiſſant l'erreur du quart-de-cercle, on tire la vérification du premier. Suite.

241. Ce troiſieme moyen conſiſte à placer exactement le quart-de-cercle dans le plan du méridien, & à obſerver le paſſage par ce plan d'une étoile très voiſine du zénith, le limbe tourné à l'occident: le lendemain on répete l'obſervation, le limbe tourné à l'orient, & l'on marque la poſition du fil dans ces deux ſituations de l'inſtrument; le point du milieu, entre ces deux poſitions, eſt celui où aboutit le rayon parallele, & dont la diſtance au 90me. dégré eſt la déviation cherchée. Suite.

242. On a propoſé ci-deſſus des méthodes, pour connoître l'erreur du quart-de-cercle. Suppoſé qu'elle ſoit encore inconnue, & qu'on ait trouvé par le troiſieme moyen, que nous venons d'indiquer, le point auquel devroit répondre le 90me. dégré, & par celui qu'on voudra des deux autres moyens, le point auquel devroit répondre le commencement du premier dégré, il eſt clair qu'on en tirera l'erreur du quart-de-cercle, Connoître l'erreur du quart-de-cercle.

dans le cas où ces deux points ne seroient pas à même distance, & du même côté, l'un du commencement, l'autre de la fin de la division.

Du fil à plomb.

243. Il reste uniquement à observer que le point du limbe est désigné de la même maniere par le fil à plomb, que par la ligne du verre, suivant la méthode proposée, n°. 206 & suivans. Car de même que cette ligne se dirige au centre, ainsi ce fil est suspendu du centre, ou passe par le centre.

Usage du quart-de-cercle pour deux sortes d'angles.

244. En voilà assez sur ce qui a rapport à la construction du quart-de-cercle, à la disposition de ses parties, & à l'examen de ses divisions : il reste à parler de son usage, & des observations auxquelles il a servi. A l'égard de son usage, la matiere est presque épuisée par ce que nous en avons dit à l'occasion de l'examen des divisions. Car cet usage se réduit à mesurer l'angle formé par deux lignes tirées d'un point donné, à deux objets vus de ce même point, & l'angle qui répond au nombre de dégrés, dont un objet est élevé, ou abaissé au-dessous de l'horizon, par rapport au point d'où il est vu. On a donné, n°. 203 & suivans, la mesure du premier; & celle du second depuis le n°. 237.

Deux méthodes pour les angles obtus.

245. Il ne reste plus qu'à mesurer les angles obtus, s'il s'en trouve. Il y a deux moyens d'y parvenir : premierement avec une lunette double, dont les lignes de foi soient paralleles entre elles, on peut avoir ces angles immédiatement, en visant à un objet par GD, à un autre par NL, & retranchant de la somme de deux droits l'angle GCL, qui seroit déterminé par cette position de l'alidade (n°. 203), si l'on visoit par LN. En second lieu, au défaut d'une lunette double, on doit prendre un objet intermédiaire, & à peu près dans le même plan que les deux autres, & mesurer les deux angles aigus, dont la somme sera la valeur de l'angle obtus.

Angles de la premiere classe.

246. Nous avons mesuré deux sortes d'angles de la premiere classe, savoir les angles du polygone, & les angles que formoit, à une heure donnée, une ligne tirée à l'un des signaux, avec celle qui aboutissoit au centre du soleil, le soleil étant pour lors très peu au-dessus de l'horizon. Au moyen de ces angles-ci, on détermine la position de tout le polygone, par rapport à la méridienne; & par ceux-là, les côtés mêmes du

du polygone, ou la distance d'une station à l'autre, non encore réduite à l'horizon, ni à la direction de la méridienne; d'où il arrive qu'une base se vérifie par l'autre. Ces distances se réduisent à un plan horizontal, ou plutôt à une surface sphérique par le moyen des angles de la seconde classe, qui font connoître de combien un objet est élevé au-dessus de l'horizon, ou abaissé au-dessous; ce qu'on peut faire aisément par la méthode du Livre second (n°. 24); ensuite, l'inclinaison des côtés sur la méridienne étant connue, on les réduit à la méridienne.

Usage des transversales.

247. Dans la mesure de ces angles, nous nous sommes toujours servis des transversale (n°. 206), le nouveau micrometre n'étant pas achevé, & l'ancien hors d'état de servir. Il y a déja long-tems que M. le Chevalier de *Louville* a observé qu'il est beaucoup mieux de s'en tenir à la division des dégrés entiers, en la faisant par de petits points, & de déterminer les minutes & secondes avec les fils du micrometre placés au foyer de l'objectif de la lunette fixe, ou de la lunette mobile. Je l'aurois fait volontiers, surtout pour les angles du premier genre, si lorsqu'il est question de faire parcourir au fil mobile un dégré entier, on pouvoit se fier au micrometre ordinaire. Nous avons déja remarqué, en parlant du secteur, qu'à moins que les fils ne soient au foyer de l'objectif, il en résulte une parallaxe: le fait est constant. Il est certain aussi que le foyer de l'objectif est un composé d'autant de foyers qu'il y a de sortes de couleurs, & que ces foyers sont les uns plus loin, les autres plus près. Or M. *de la Condamine* & M. *Bouguer* ont remarqué que le foyer d'une lunette est sensiblement différent pour deux observateurs qui ont la vue inégalement longue; comme aussi que ce foyer devient plus long, ou plus court, selon la différente constitution de l'atmosphere, & selon que l'oculaire est plus ou moins éloigné de l'objectif ou des fils: ils ont de plus observé que dans ces différentes circonstances, la parallaxe se fait en sens contraire, & que quoiqu'ils observassent la même étoile, & presqu'au même instant, ils trouvoient en parties de micrometre des différences de plusieurs secondes. S'il arrivoit quelque chose de semblable, dans le micrometre d'une lunette, dont le fil

dût parcourir un si grand espace, cela produiroit nécessairement des erreurs qui ne seroient point à négliger. Rien de tout cela n'est à craindre dans le micrometre de la figure 7, qui fait tourner l'alidade avec sa lunette sur le quart-de-cercle.

Observations des hauteurs.

248. De-là j'ai cru qu'il valoit mieux ne pas se borner aux dégrés, mais pousser plus loin la division, & l'achever par des transversales, comme *Graham* l'a pratiqué dans ses quarts-de-cercle. Cela est beaucoup plus commode pour prendre les hauteurs, celles des astres surtout. En effet, s'il n'y a que les dégrés de marqués, il faut tellement placer le quart-de-cercle, que le fil à plomb réponde exactement à l'un des points de la division, & commencer là-dessus l'observation; ce qui est très incommode, outre qu'il faudroit déja connoître à peu près la hauteur.

Erreur provenant du défaut de parallélisme de la lunette mobile.

Pl. III. fig. 11.

249. Dans ce qui nous reste à dire sur l'usage du quart-de-cercle, nous avons à examiner en premier lieu à quoi peut monter l'erreur produite dans les angles par le défaut de parallélisme de la lunette mobile au plan de l'instrument. Soit ACB (fig. 11.) le plan du quart-de-cercle, & ACD, ou BCE l'angle de la déviation de cette lunette; le quart-de-cercle donnera l'angle ACB, au lieu de DCE, & les angles ACD, BCE seront égaux, ainsi que leurs sinus, qui seront perpendiculaires au plan de l'instrument, & par conséquent paralleles. Donc DE, FG sont aussi égales & paralleles entre elles; par conséquent CF est égale à CG. Les lignes FG, AB, seront encore paralleles: or DE est la corde de l'angle DCE, & AB celle de l'angle ACB, celle-là double du sinus de la moitié de l'angle observé, celle-ci double du sinus de la moitié de l'angle désigné. Donc puisque le rayon CA est à CF co-sinus de l'angle de la déviation, comme AB double du sinus de la moitié de l'angle désigné, est à FG ou DE double du sinus de la moitié de l'angle observé, on aura le théorème suivant: *le rayon est au co-sinus de la déviation de la lunette, comme le sinus de la moitié de l'angle désigné par le quart-de-cercle, est au sinus de la moitié de l'angle cherché.*

250. Dans le cas d'une petite déviation, on peut abréger:

car en soustrayant on a cette proportion : le rayon CA est à AF sinus verse de la déviation, comme le sinus de la moitié de l'angle désigné ACB, est à sa différence au sinus de la moitié de l'angle observé. Or dès qu'il n'est question que de petites différences d'angles, on a un théorème semblable à celui dont nous nous sommes servis, n°. 141, savoir que le co-sinus du plus grand angle est au rayon, comme la différence des sinus, est au sinus de la différence des angles. En effet, *ti* (fig. 12. pl. II.), différence des sinus *tz*, *b'd*, est à *b't*, qui est la corde de la différence des arcs *bb'*, *bt*, laquelle équivaut ici au sinus de cette différence, comme le co-sinus *az*, au rayon *at*. Donc par égalité troublée, le co-sinus de la moitié de l'angle désigné est au sinus verse de la déviation, comme le sinus de la moitié du même angle, est au sinus de l'erreur de cette moitié; & le double de cette erreur donne l'erreur totale. Donc si l'on compare les antécédens & les conséquens, on aura ce théorème : *le co-sinus de la moitié de l'arc désigné est à son sinus*, ou, ce qui est le même, *le rayon est à la tangente de la moitié de l'arc désigné, comme le double du sinus verse de la déviation, est au sinus de l'erreur; & l'angle désigné par le quart-de-cercle, est toujours plus grand que le vrai angle.*

Théorème plus simple.

251. Par où l'on voit qu'à moins que la déviation ne fût énorme, il n'y a aucune erreur sensible dans un angle désigné qui n'excede pas de beaucoup un angle droit, tel que ceux qu'on fait entrer dans un semblable polygone. La plupart des angles y sont fort au-dessous de 90°, & pour peu qu'ils fussent trop au-dessus, on ne pourroit avec un quart-de-cercle les déterminer par cette méthode, je veux dire au moyen d'une lunette mobile, qui peut à peine aller au-delà de 90°. Ainsi puisque le rayon est égal à la tangente de 45°, il arrive presque toujours dans ces angles, que le rayon surpasse la tangente de la moitié de l'angle; d'où il suit que le sinus de l'erreur est moindre que le double du sinus verse de la déviation. Or le sinus d'une seconde, pour un rayon 10000000, est 48, & le sinus verse de 7 minutes est 21, dont le double 42 est encore moindre que 48. Donc avec une déviation de 7 minutes, l'erreur d'un angle aigu quelconque, & même d'un angle

Que cette erreur n'est point à craindre,

droit, n'eſt pas d'une ſeconde. A meſure que la déviation augmente, l'erreur augmente en raiſon doublée de la déviation, puiſque le ſinus verſe augmente à peu près ſuivant ce rapport: mais dans les petits angles, cette erreur eſt bien moindre à raiſon de la diminution de la tangente.

Excepté dans les petits angles.

252. L'erreur ſeroit au contraire beaucoup plus grande dans les petits angles, ſi (fig. 5.) on ne viſoit avec la lunette mobile GD qu'à un ſeul objet, & à l'autre avec la lunette fixe LN, & que l'une des lunettes fût parallele, & l'autre déviée: car en ce cas le point D (fig. 11.) tomberoit en A, & on auroit un triangle ſphérique rectangle ABE. Or le point A tombant ſur B, AB s'évanouit, & cependant AE devient égale à BE; ainſi l'erreur eſt égale à la déviation. Au contraire, ſi AB eſt de 90°, l'erreur s'évanouit; car A devient le pôle d'un grand cercle BEP, & l'arc AE eſt de 90°, comme AB. En général, & quelque ſoit l'arc AB, on trouvera l'erreur par ce théorême de trigonométrie ſphérique: *le rayon eſt au co-ſinus de la déviation BE, comme le co-ſinus du côté, ou de la diſtance déſignée AB, eſt au co-ſinus de la baſe, ou de la vraie diſtance AE.*

Pl. III. fig. 5. 11.

Autre théorême.

253. De-là on peut déduire un autre théorême, qui, dans le cas d'une petite déviation BE, donne immédiatement l'erreur cherchée: car on a par converſion de raiſon l'analogie ſuivante: le rayon eſt au ſinus verſe de la déviation BE, comme le co-ſinus de AB, à la différence des co-ſinus de AB, & AE. Or (n°. 141.) le ſinus du plus grand angle eſt au rayon, comme la différence des co-ſinus, à la différence des arcs, qui peut ſe prendre ici pour le ſinus de cette différence même des arcs. Donc par égalité troublée, le ſinus de la diſtance déſignée AB, eſt au ſinus verſe de la déviation BE, comme le co-ſinus de AB, à la différence des arcs, ou au ſinus de l'erreur: & en raiſon alterne, le ſinus de l'angle déſigné eſt à ſon co-ſinus, ou, ce qui revient au même, la tangente de cet angle eſt au rayon, comme le ſinus verſe de la déviation eſt au ſinus de l'erreur. Si l'autre lunette s'écarte, ou dans le même ſens, comme de la quantité AD, ou du côté oppoſé, il eſt aiſé dans tous les cas particuliers de déterminer l'erreur qui en réſulte. Mais ſi l'angle eſt d'une raiſon-

nable grandeur, l'erreur provenant d'une légere inclinaiſon des lunettes eſt des plus petites. D'ailleurs nous n'avons obſervé qu'avec la lunette mobile; & nous avions pris ſoin de rendre les lunettes paralleles au plan de l'inſtrument.

Erreur provenant du défaut de paralléliſme de la lunette fixe. Pl. III. fig. 11.

254. Lorſqu'on meſure les angles verticaux au-deſſus de l'horizon ou au-deſſous, l'erreur eſt la même que celle que nous venons d'évaluer. Soit ABC le plan du quart-de-cercle, CE l'axe de la lunette répondant au point B, CA le fil à plomb; le quart-de-cercle déſignera la diſtance ACB au zénith; mais la diſtance vraie eſt ACE, & comme ſon complément eſt la hauteur, ou la dépreſſion au-deſſous de l'horizon, il s'enſuit que l'erreur de la hauteur ou dépreſſion, eſt la différence des arcs, AB, AE; différence qui, dans le cas où la déviation BE eſt petite, & l'arc AB peu différent d'un arc de 90°, devient elle-même très petite, & diſparoît entierement à la fin du 90me. dégré: or on peut toujours l'évaluer par le théorème du n°. précédent, dans lequel prenant le premier rapport, ſavoir celui du ſinus de AB à ſon co-ſinus, dans le cas d'une petite hauteur, ou dépreſſion au-deſſous de l'horizon, ou, pour dire en un mot, dans le cas d'une petite diſtance à l'horizon, auquel cas AB eſt de près de 90°, le ſinus de AB eſt preſque égal au rayon, & ſon co-ſinus eſt le ſinus de la diſtance à l'horizon. Le théorème du n°. précédent ſe réduit donc à celui-ci: *le rayon eſt au ſinus de la diſtance à l'horizon, comme le ſinus verſe de la déviation au ſinus de l'erreur.* Cette erreur eſt donc comme un infiniment petit du troiſieme ordre, puiſqu'on ſuppoſe que la diſtance à l'horizon, & par conſéquent ſon ſinus, la déviation & ſon ſinus ſont très petits: d'où il ſuit que le ſinus verſe, qui eſt lui-même petit par rapport au ſinus droit, eſt un infiniment petit du ſecond ordre.

Que ces erreurs n'ont pas influé dans la meſure.

255. De tout ce que nous venons de dire ſur les erreurs qui peuvent réſulter de la déviation des lunettes, il eſt aiſé de conclure que nous n'avions rien à craindre de ce côté-là. Quant à la meſure des angles des triangles du polygone, & des hauteurs ou dépreſſions, il ſe trouve heureuſement que les premiers angles, où l'on demande plus d'exactitude, ſont juſtement ceux qui ſe déterminent avec plus de préciſion.

256. Pour prendre les angles de la premiere eſpece, on

Moyen de prendre les angles. Pl. III. fig. 4. 1. commence par mettre le quart-de-cercle dans le plan qui passe par les deux objets, ensorte qu'ayant visé à un objet avec la lunette mobile, qu'on suppose parallele à la lunette fixe, on puisse ensuite, l'instrument restant toujours dans la même position, amener la lunette mobile sur l'autre objet qui doit se trouver encore au centre des fils. Je n'ai jamais eu de peine à donner cette position au quart-de-cercle, moyennant le méchanisme de la figure 4, par lequel on donne à l'instrument, de quelque façon que soit posé son pied, la position que l'on veut. L'un des observateurs vise toujours à un des objets par la lunette fixe, & l'autre par la lunette mobile à l'autre objet, tandis qu'un aide tourne la vis (fig. 4.), & fait glisser le long de l'ouverture D, l'arc KLIM, pour donner plus ou moins d'élévation au quart-de cercle, jusqu'à ce qu'il soit à peu près dans la position requise. On acheve de le mettre dans cette position au moyen des vis YZ (fig. 1.), qu'on tourne tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, jusqu'à ce que les deux objets paroissent en même tems au centre des fils. Nous avions à peine essayé un ou deux tours de vis, que le quart-de-cercle se trouvoit exactement placé; nous n'avons jamais éprouvé l'embarras que donnent les pieds d'une construction différente, & nous n'avions pas besoin de nous assujettir à certaines regles qu'on prescrit sur la maniere de disposer les traverses; regles qui, dans des endroits montueux, pierreux & escarpés, tels que ceux de nos stations, sont presque impraticables.

Suite. 257. Le quart-de-cercle ainsi disposé, on amenoit l'alidade au premier point du dégré voisin, & on l'y retenoit, tandis qu'on retournoit un peu l'instrument, pour ramener la lunette mobile sur son objet. Cela fait, le premier observateur, sans toucher au quart-de-cercle, faisoit mouvoir le fil parallele jusqu'à ce qu'il apperçût le premier objet au point d'intersection de ce fil avec celui qui lui est perpendiculaire; enfin l'on amenoit la lunette mobile sur la lunette fixe, ensorte que le premier objet parût dans l'une & l'autre à l'intersection des fils, & l'on observoit la position de la ligne du verre par rapport aux transversales. Tout ceci s'exécutoit sans peine, malgré le tremblement que la violence des vents sur de hautes montagnes communique d'ordinaire au quart-de-cercle, en agissant sur toute sa masse, tandis qu'il ne tient que par un

endroit à son pied, sur lequel il est comme en équilibre; le vent y produisoit même toujours un petit trémoussement, qui quelquefois troubloit un peu l'opération, & la rendoit moins exacte: mais cet effet même étoit bien plus rare, dans cette position horizontale du quart-de-cercle, sur lequel d'ailleurs l'alidade étoit immobile, que lorsqu'on prenoit les hauteurs ou les dépressions.

Des angles de hauteur & dépression.

258. En effet, ces hauteurs & ces dépressions ne se mesurent qu'avec la lunette fixe, & le fil à plomb, qui occupe alors la place de la seconde lunette, & qui en fait l'office; & on observe le point, où il répond sur le limbe, de la maniere que nous avons dit, n°. 143. S'il y a du calme, il suffit, pour arrêter le fil, de plonger le poids dans l'eau; mais si le vent est fort, le fil est tellement agité, que nous ne trouvions quelquefois point de moyen de le fixer. Nous tâchions d'y remédier en suspendant à la rainure GH (fig. 2.) le garde-filet; mais comme le fil doit raser le limbe, le garde-filet devoit être ouvert par derriere, à l'endroit qui répond au limbe, & le vent entroit par cette ouverture. De plus, le quart-de-cercle étant placé dans une situation verticale, le vent y avoit plus de prise, & y causoit un trémoussement qui se communiquoit au fil à plomb (1). De-là il est arrivé plus d'une fois, que tandis que nous regardions l'un dans la lunette, l'autre sur le limbe, le fil, par un mouvement d'oscillation, parcouroit de part & d'autre plusieurs minutes. Pour déterminer sa position, nous attendions toujours que le vent relâchât un peu, & que l'oscillation se réduisît à peu de chose, pour lors nous prenions le point du milieu de l'espace parcouru. Cependant je ne voudrois pas répondre que dans la mesure des hauteurs ou des dépressions, il n'y ait eu souvent des erreurs même de plus d'une minute; au lieu que dans les angles du premier genre, je ne crois pas qu'elles puissent monter au-delà d'un petit nombre de secondes.

Plusieurs sources d'erreurs.

259. Il se peut que dans ces angles même du premier genre, il se soit trouvé des erreurs de plusieurs secondes, provenant de diverses causes. Avec une lunette de trois ou quatre pieds,

(1) Le moyen de se mettre à l'abri du vent, seroit d'observer sous une tente.

on ne peut diſcerner deux ou trois ſecondes. Le fil de la lunette mobile, quelque délié qu'il ſoit, couvre un eſpace de ſix, huit & dix ſecondes. L'on peut donc, dans l'une & l'autre poſition de cette lunette, commettre une erreur de trois ſecondes, ſurtout ſi l'objet eſt près de l'horizon, & à une aſſez grande diſtance, les vapeurs détournant alors les rayons; ce qui rend l'image de l'objet tremblante. On eſt expoſé à la même erreur avec la lunette fixe, enſorte qu'il ſe pourroit que ſa poſition ne fût pas abſolument la même dans les deux poſitions de la lunette mobile. Cette erreur peut augmenter encore par la violence du vent qui agite le quart-de-cercle. Il eſt vrai qu'on pourroit remédier à ce dernier inconvénient, & conſerver la lunette fixe dans ſa poſition, tandis qu'on change celle de la lunette mobile; on le pourroit, dis-je, en donnant encore au quart-de-cercle de nouveaux ſupports, qui le fixeroient invariablement dans le plan qui paſſe par les deux objets: mais vu l'inégalité du terrein ſur les montagnes, ces ſupports devroient être fort compoſés, & capables de bien des mouvemens différens: de plus, les erreurs qu'on pourroit éviter par ce moyen, ne produiſent, comme nous le verrons plus bas, dans la meſure du dégré, qu'une erreur très légere, & c'eſt pour cela que nous n'avons pas cru devoir ajouter de nouveaux ſupports.

Même ſujet. 260. En plaçant l'alidade ſur l'une des diviſions, on commet une nouvelle erreur. Nous nous y ſervions toujours de la loupe; mais cela n'empêche pas qu'on n'y puiſſe ſoupçonner une erreur d'une ou deux ſecondes, peut-être même plus grande, car elle eſt triple de celle qu'on commettroit en cela dans le ſecteur, qui eſt trois fois plus long. Lorſqu'on examine le point du limbe, auquel répond la ligne du verre, dans la ſeconde poſition du quart-de-cercle, on peut commettre une erreur de 3, de 4, & même de 5 ſecondes. Ces deux dernieres erreurs ſeroient beaucoup moindres, ſi on ſe ſervoit de mon micrometre de la figure 7, qui fait mouvoir l'alidade; car ſi ce mouvement eſt continu, ſuivant le n°. 58, ſi on applique le microſcope, & que la diviſion d'ailleurs ſoit faite par de petits points, on pourra éviter juſqu'à l'erreur d'une ſeconde; on évitera auſſi l'erreur qu'on peut commettre

en

en dirigeant la lunette mobile à ſon objet. Je ne doute pas qu'en répétant pluſieurs fois l'opération, & marquant à chaque fois le nombre de parties du micrometre, on ne pût éviter une erreur d'une ſeconde. Mais nous n'avions point alors ce micrometre.

Autres ſources.

261. Si dans la vérification des diviſions on a commis des erreurs de quelques ſecondes, l'erreur ſe répand dans l'angle qu'on meſure avec le quart-de-cercle, & elle y eſt même double, à cauſe de la double poſition de l'alidade. Une autre ſource d'erreur, c'eſt la réfraction qui éleve les objets. Il eſt vrai que ce nouveau dégré d'élevation dans un plan vertical, ne met pas beaucoup de différence dans un angle qui eſt preſque horizontal ; il y en met néanmoins, & on ne peut la corriger parfaitement, à cauſe que la réfraction change d'un moment à l'autre proche l'horizon : de plus, il ſe pourroit peut-être que des vapeurs inégalement répandues détournaſſent de côté le rayon viſuel ; ce qui cauſeroit du dérangement dans l'angle horizontal. Dès qu'il eſt queſtion de petites différences, comme de quelques ſecondes, on a tout à craindre de l'influence des cauſes phyſiques ſur la préciſion géométrique.

Total d'erreurs.

262. Ces erreurs pourroient aller aſſez loin, ſi elles ſe trouvoient toutes du même côté ; mais c'eſt un cas qui n'arrive jamais. Nous pourrions nous-mêmes en avoir commis quelquefois de 10 à 12 ſecondes, ou par un effet de la violence du vent, ou par l'aſſemblage fortuit de quelques erreurs dans la vérification du quart-de-cercle ; mais nous avons ſujet de croire que nos erreurs n'excedent pas pour la plupart cinq à ſix ſecondes. De-là la table des angles, *Liv. II*, n°. 21, ne donne pas 180 dégrés juſte pour chaque triangle, & en conſéquence il a fallu y faire une correction. Ces triangles ſont au nombre de 11, y compris ceux que forment les baſes. La ſomme des trois erreurs eſt dans le ſecond — 28 ſecondes, dans le ſeptieme + 22, dans le quatrieme + 20, dans le troiſieme + 17, dans les neuvieme & dixieme ∓ 16, dans le premier + 8, dans le cinquieme & le onzieme ∓ 6, dans le huitieme + 3, enfin dans le ſixieme — 2. Ces erreurs ſont la plupart en ſens contraires, & ſe détruiſent mutuellement, du

moins en grande partie. Par conſéquent elles influent d'autant moins dans la meſure de la méridienne. La ſomme des erreurs négatives n'égale pas celle des poſitives, parcequ'il manquoit 25″ à notre quart-de-cercle ; différence que nous avons conclue, ſuivant le n°. 236, tant de ces triangles, que de pluſieurs autres triangles & obſervations, en prenant un milieu.

Erreur de réfraction.

263. La réfraction produit une plus grande erreur dans la hauteur de l'objet au-deſſus de l'horizon, ou dans ſa dépreſſion ; & le changement continuel de cette réfraction, près de l'horizon, fait qu'on ne peut jamais bien évaluer l'erreur qui augmente encore davantage par la difficulté d'obſerver. Mais nous verrons bientôt, ainſi que je l'ai déja inſinué, que cette erreur même, fût elle beaucoup plus grande, n'en produit qu'une très petite dans la diſtance de l'objet, quoiqu'elle en produiſe une grande dans la hauteur abſolue des montagnes.

Réduction au centre. Pl. I. fig. 2.

264. Pour apprécier ces erreurs, il ſuffit de conſidérer de quelle façon on déduit, des angles obſervés, & des baſes, la meſure de la méridienne. Notre polygone ſe voit dans la figure 2 de la premiere planche. Suivant l'article 5 du Livre II, & la table qui s'y trouve au n°. 21. *a*L eſt la baſe de *Rimini*, *eb* celle de *Rome :* les ſtations A, B, C, D, E, F, G, H, I ſont le dôme de *St Pierre*, & les monts *Genarro*, *Soriano*, *Fionchi*, *Teſio*, *Pennino*, *Catria*, *Carpegna*, *Luro*. Tous les angles de ces triangles ont été meſurés avec le quart-de-cercle ; & ils euſſent été immédiatement & exactement connus par cette meſure, ſi l'obſervation eût été faite au centre du ſignal de la ſtation. Mais parcequ'il eſt ordinairement bien plus commode d'obſerver à côté du ſignal, & que cela eſt même quelquefois abſolument néceſſaire, ſuivant l'eſpece de ſignal qu'on emploie, il y avoit toujours quelque petite correction à faire aux angles obſervés ; & elle ſe fait aiſément en meſurant la diſtance du centre du ſignal au lieu de l'obſervation, & ſa poſition ; au moyen de quoi on a la perpendiculaire tirée du centre du quart-de-cercle ſur la ligne qui aboutit du centre du ſignal de la ſtation au centre du ſignal obſervé.

Suite. Pl. I. fig. 2. Pl. III. fig. 12.

265. En effet, connoiſſant ces angles non corrigés, & la premiere baſe *a*L, on aura la valeur du moins approchée de tous les côtés, premierement du triangle LH*a*; puis du triangle LHI, connoiſſant le côté LH; puis du triangle HGI, connoiſſant le côté HI; & ainſi de ſuite juſqu'à l'autre baſe *bc*, par les regles connues de la trigonométrie. Or la valeur du moins approchée de ces côtés fera connoître l'angle formé par les lignes tirées du centre du quart-de-cercle, & du ſignal voiſin au ſignal obſervé. Soit (fig. 12. pl. III.) A le centre du ſignal, C le centre du quart-de-cercle, avec lequel on obſerve les ſignaux D, E; l'angle obſervé DCE étant connu, on demande l'angle DAE. On a déja la diſtance AC, & ſa poſition par rapport aux lignes AE, AD: on aura donc auſſi les perpendiculaires CI, CH; il eſt même ordinairement très facile de les meſurer, en déterminant à peu près les lignes AI, AH; & puiſqu'on connoît d'ailleurs CD, CE, on fera cette analogie: CE ou CD eſt à CI ou CH, comme le rayon au ſinus de l'angle CEI, ou CDH.

Suite.

266. Or ſi les côtés CE, CD ſont tous deux dans l'angle EAD, le point C ſe trouvant dans cet angle, les deux angles que nous venons de trouver doivent être retranchés de l'angle DCE, pour avoir l'angle DAE. Mais ſi C′ n'eſt pas dans l'angle, & qu'il ſoit au-delà d'un des côtés AE, l'un des côtés DC′ de l'angle obſervé paſſant dans l'angle DAE, & l'autre côté EC′ ſe trouvant tout entier hors de cet angle, on retranchera l'angle ADC′ du premier côté, & on ajoutera l'angle AEC′ du ſecond. Si DC′ tomboit lui-même au-delà de DA, le point A ſe trouvant dans l'angle DCE, l'un & l'autre angle devroient s'ajouter à l'angle DC′E. Car ſi l'on prolonge EC, elle rencontrera DA en un point B: de même prolongeant EC′, elle rencontrera DA prolongée en B′; l'angle externe DCE ſera égal aux deux angles internes oppoſés CBD, CDB, & l'angle CBD ſera pareillement égal aux deux internes BAE, BEA. Donc retranchant de l'angle DCE l'angle CDB, on aura l'angle DBC; & retranchant de celui-ci l'angle BEA, ou CEA, on aura l'angle DAE; ce qu'il falloit démontrer en premier lieu. De même ſi de l'angle externe DC′E on retranche C′DB′, on aura DB′C′,

ou AB'E; auquel ajoutant AEB', ou AEC', on aura l'angle externe DAE; ce qu'il falloit démontrer en ſecond lieu. La démonſtration pour le troiſieme cas approche fort de celle du premier; car s'il faut retrancher les angles CDA, CEA de l'angle DCE, pour avoir l'angle DAE, il s'enſuit qu'il faudroit au contraire les ajouter, ſi C étoit en A, & A en C.

Moyen plus facile.

267. Mais on n'a pas même beſoin d'une meſure ſi approchée de CD, CE, non plus que de ces ſinus, pour trouver les angles en E ou D, qu'on doit ajouter ou retrancher de l'angle obſervé; puiſque les diſtances CI, CH étant toujours très petites par rapport aux côtés CE, CD, elles ne peuvent répondre qu'à un petit nombre de ſecondes. Pour que l'angle CEI ſoit d'une ſeconde, CI doit être environ $\frac{1}{200000}$ de CE; c'eſt-à-dire que CI étant d'un pied, CE doit être de 40 milles d'Italie: & ſi CE eſt plus grand ou plus petit, l'angle ſera au contraire plus petit ou plus grand. Donc ſi le nombre de pieds contenu dans la diſtance perpendiculaire CI, augmente autant, que CE eſt plus petite que 40 milles, ou qu'on le diminue à meſure que CE ſera plus grande que 40 milles, on aura le nombre de ſecondes qu'on doit retrancher ou ajouter ſuivant que le centre C du quart-de-cercle ſera en-deçà ou en-delà de AE. On voit qu'il ſuffit de ſavoir à peu près à combien de milles l'on eſt du ſignal obſervé, & de combien de pieds le centre du quart-de-cercle eſt éloigné de la ligne tirée du centre du ſignal voiſin au ſignal obſervé, pour ſavoir ce qu'on doit retrancher ou ajouter à l'angle.

Déterminer les côtés du polygone. Pl. I. fig. 2.

268. Les angles qu'on trouve dans la table du Livre II, ſont des angles ainſi corrigés. Il eſt clair que par leur moyen on peut avoir tous les côtés rectilignes du polygone, d'une baſe à l'autre, par ce théorème ſi connu de trigonométrie: les côtés ſont comme les ſinus des angles oppoſés. Mais pour parvenir d'une baſe à l'autre, il ſuffit de déterminer dans chaque triangle les côtés qui pourront ſervir pour le triangle ſuivant. C'eſt ce qu'a fait le P. *Maire* à l'endroit cité; & c'eſt ainſi que de la premiere baſe L*a* (fig. 2. pl. I.) il eſt arrivé à la ſeconde *bc*, moyennant les côtés LH, HI, HG, GF, FE, FD, DC, CB, BA, B*c*; & de la même maniere il pouvoit remonter de la ſeconde baſe *bc* à la premiere L*a*.

Réduire les côtés du polygone à une surface réguliere de la terre.

269. Or ces côtés rectilignes du polygone ne sont ni dans une surface réguliere de la terre, ni dans la direction de la méridienne. De-là il est besoin de deux réductions, l'une par laquelle on leur substitue les arcs qui leur répondent sur cette surface, ou qui sont terminés par des points de cette surface qui répondent perpendiculairement au-dessous des signaux, dont ils sont plus ou moins distans, à cause de l'inclinaison des côtés à l'horizon; l'autre par laquelle ayant trouvé la direction de la méridienne A*n*, qui passe par l'une des extrémités A du polygone, on réduit, au moyen des arcs B*d*, C*e*, D*f*, E*g*, F*h*, G*i*, H*l*, I*m*, L*n*, les points B, C, D, E, F, G, H, I, L aux points *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *l*, *m*, *n* de la méridienne; ce qui donne enfin l'intervalle A*n* de la méridienne, intercepté par les deux extrémités du polygone.

Méthode pour cette réduction.

270. La premiere réduction se fait très commodément par la méthode expliquée au même endroit par le P. *Maire*, n°. 24 & suivans. Elle consiste à réduire à l'horizon tous les angles du polygone, ou à leur substituer ceux qui leur répondent sur la surface réguliere de la terre, & qui sont compris entre les arcs terminés par les points de la surface placés directement au-dessous des signaux. Dans cette réduction on prend la surface de la terre pour une surface sphérique, & cela sans aucun danger d'erreur sensible. Car puisque la figure du globe terrestre differe très peu de celle d'une sphere, la différence de cette partie de sa surface qui répond au polygone, & plus encore de celle qui répond à chaque triangle en particulier, doit être absolument insensible.

Autre méthode par la trigonométrie sphérique.

271. Voici pour cette même réduction une autre méthode assez analogue à la premiere. Supposons (pl. III. fig. 11.) que CD, CE soient des lignes dirigées du signal C à deux autres signaux, & qu'elles soient rencontrées en D & E par une sphere dont le centre est en C. Soit dans cette même sphere une ligne verticale CP dirigée au zénith répondant au point P, & CA, CB les intersections des plans verticaux PCD, PCE avec le plan horizontal qui passe par C, & par conséquent les angles ACD, BCE ceux qu'on a trouvés en mesurant la hauteur de D & E au-dessus de l'horizon. Si ces hauteurs,

ou du moins l'une des deux étoit nulle, les points D, E, du moins l'un des deux, tomberoient sur A & B, ou sur l'un de ces deux points; & si l'un des signaux, ou même tous les deux, au lieu d'être élevés étoient abaissés au-dessous de l'horizon, le point D ou E, ou l'un & l'autre, descendroit au-dessous de A & B, au contraire de ce qui est marqué dans la figure. Mais dans tous ces cas, connoissant les hauteurs ou les dépressions, on a PD & PE en retranchant les premieres, ou ajoutant les secondes à 90 d.

Elle se réduit à connoître un triangle sphérique.

272. Or les intersections des plans PCA, PCB avec la surface réguliere de la terre, seroient les deux arcs que nous avons dit, ou les deux côtés du polygone réduit à cette surface; & CA, CB sont perpendiculaires à l'intersection des plans de ces arcs: d'où il suit que l'angle qu'elles font entre elles est égal à l'angle sphérique de ces arcs mêmes, puisque par le n°. 57 des Elémens des solides, dans le Tome I de mes Elémens, cet angle ACB est celui que les plans de ces arcs forment entre eux, & que par le n°. 153 de mes Elémens de trigonométrie sphérique, même Tome, cet angle sphérique est celui de ces plans. Donc connoissant l'angle ACB, on a l'angle sphérique; & cet angle ACB, formé par des tangentes dans un plan horizontal, est ce qu'on appelle l'angle DCE réduit à l'horizon. Or on le trouve par la résolution du triangle sphérique DPE, dans lequel, étant données les hauteurs ou dépressions AD, BE, on a les côtés PD, PE, suivant le n°. précédent; de plus, le côté DE est la mesure de l'angle observé DCE: mais l'angle sphérique DPE est mesuré par l'arc AB, ainsi que l'angle rectiligne ACB, ou l'angle DCE réduit à l'horizon, ou l'angle du polygone réduit à une surface réguliere de la terre. Donc connoissant les hauteurs ou dépressions, & l'angle observé DCE, & par conséquent les trois côtés du triangle sphérique DPE, on a l'angle réduit DPE, qui est l'angle cherché.

Méthode facile. Cas particulier.

273. On se sert communément, pour trouver cet angle, d'une méthode de trigonométrie sphérique, aussi facile qu'elle est connue; mais celle que donne le P. *Maire*, Liv. 2, n°. 26 & suivans, est encore plus facile. Que si l'une des hauteurs ou dépressions étoit nulle, le point D tombant en A, on

devroit réſoudre le triangle APE; mais on a bien plutôt fait de réſoudre le triangle ABE, dans lequel, connoiſſant la hauteur ou dépreſſion BE, & l'hypothénuſe obſervée AE, on trouve le côté AB, qui meſure l'angle réduit à l'horizon, au moyen d'un triangle rectangle ſphérique, dont parle le P. *Maire*, n°. 25.

Trouver les côtés du polygone réduit. Pl. 1. fig. 2.

274. Ayant donc trouvé (fig. 2. pl. I.) tous les angles du polygone réduit en arcs de grands cercles de la terre, on trouve tous les côtés, en commençant par le premier triangle, par cette analogie: le ſinus de l'angle LH*a*, oppoſé à la baſe *a*L, eſt au ſinus de l'angle HL*a*, ou H*a*L, comme la baſe *a*L oppoſée au premier angle, eſt au côté H*a*, ou HL oppoſé au ſecond. Ce raiſonnement doit s'appliquer ſucceſſivement à tous les triangles de proche en proche; & par-là on aura la valeur de tous les côtés du polygone réduit, exprimés en pas ou en toiſes, ou autrement, ſuivant la meſure qu'on aura employée pour meſurer la baſe. Car dans tout triangle ſphérique, les ſinus des côtés ſont comme les ſinus des angles oppoſés. Or ſi les côtés ſont petits par rapport à leurs cercles, ils ſont à peu près dans la raiſon de leurs ſinus, comme on peut s'en convaincre par l'inſpection des tables; & le premier côté rectiligne *a*L, qui eſt la baſe actuellement meſurée, peut ſe prendre pour l'arc auquel il répond, puiſque cet arc eſt à peine de 6 minutes. Ainſi après la réduction des angles, on trouve les côtés du polygone réduit à une ſurface ſphérique, de la même maniere que les côtés rectilignes du polygone non réduit. Le P. *Maire* donne une liſte de ces angles & de ces côtés, n°. 28, même Livre. Mais comme il y a eu quelques hauteurs & dépreſſions, qu'on n'a pu obſerver immédiatement avec une préciſion ſuffiſante, nous verrons bientôt par quel moyen on a ſuppléé à ce défaut.

Trouver les ſegmens de la méridienne qui répondent aux côtés du polygone.

275. Après avoir trouvé par cette méthode tous les angles & les côtés du polygone réduit, il reſte à trouver les ſegmens de la méridienne interceptés par les arcs B*d*, C*e* perpendiculaires à la méridienne. On peut avoir les arcs & les ſegmens par une obſervation du ſoleil, dont j'ai déja dit un mot. Le P. *Maire* traite ce point, Liv. II, art. 6, n° 30 & ſuivans; je le traiterai ici un peu plus au long. Premierement on doit

mesurer à une heure donnée avec le quart-de-cercle l'angle compris entre une ligne tirée d'un point donné à l'un des signaux, & une ligne tirée du même point au centre du soleil. Pour cela on dirigera l'une des lunettes sur ce signal, ensorte qu'il paroisse au centre des fils, & l'autre sur le soleil, en marquant les momens où les deux bords du limbe atteignent le fil perpendiculaire au plan du quart-de-cercle; ce qui fait connoître le moment où le centre a passé sur ce fil. On examine aussi le point du limbe auquel répond la ligne du verre dans cette position de l'alidade; après quoi on dirige les deux lunettes à un même objet, & l'angle compris entre ces deux positions de l'alidade est l'angle cherché.

Même sujet.

276. Si le soleil décrit un arc peu incliné à l'horizon, tellement qu'il quitte le champ de la lunette avant que le bord opposé ait atteint le fil, ou si on ne veut pas attendre qu'il l'atteigne, il suffira de remarquer le moment où le premier bord y est arrivé, & d'ajouter ou retrancher de l'angle le demi-diametre du soleil, suivant que le centre du soleil sera de l'autre côté, ou du même côté que le signal, par rapport à ce bord du limbe. Car il ne sera pas difficile de mesurer le diametre apparent du soleil, & les tables astronomiques le donneront encore d'une maniere assez approchée. On est obligé de recourir à l'un de ces moyens près de l'équateur, où le soleil coupe l'horizon à angles droits.

Connoître l'angle de position. Pl. III. fig. 11.

277. Or le moment de l'observation étant connu, on trouve dans les tables astronomiques la déclinaison du soleil, & par-là même sa distance au pôle. De plus, dans un triangle sphérique terminé au soleil, au zénith & au pôle, on connoît la distance du pôle au zénith; c'est le complément de la hauteur du pôle: l'on connoît aussi l'angle au pôle, puisque l'heure est donnée. On aura donc la distance du soleil au zénith, & l'angle au zénith, ou l'azimuth du soleil. Cette distance du soleil au zénith étant connue, on en retranchera la réfraction, qu'on trouvera dans les tables, pour avoir la distance apparente; & comme on connoît d'ailleurs la hauteur ou la dépression du signal, on a tout ce qu'il faut pour réduire l'angle observé à l'horizon, par la méthode proposée. Car si (fig. 11. pl. III.) CE est dirigée au soleil, CD

au

au ſignal, on aura PE, PD, avec l'angle obſervé DCE, & par conſéquent l'angle APB, ou ACB: & parcequ'on connoît l'azimuth du ſoleil, ou l'angle que forme avec le méridien le cercle vertical PEB, qui paſſe par le ſoleil, on connoîtra auſſi l'angle compris entre le même méridien, & le cercle vertical PDA, qui paſſe par le ſignal D; c'eſt-à-dire qu'on connoîtra le nombre de dégrés qui ſe comptent ſur l'horizon depuis le point B juſqu'au nord, en tournant du nord à l'orient, juſqu'à ce qu'on arrive à ce que le P. *Maire* appelle, dans cet article, l'angle de poſition.

Exemple de la méthode.

278. On en voit un exemple dans le même article: de l'extrémité ſeptentrionale de la plate-forme du college romain, nous obſervâmes le ſoleil, un peu avant ſon coucher, le 14 ſeptembre 1753, & nous meſurâmes l'angle qu'il faiſoit avec l'arbre qui ſervoit de ſignal ſur le mont *Soriano*. Nous fîmes trois obſervations conſécutives, qui ſont marquées, n°. 31 de cet article 6, avec les angles obſervés, & les angles réduits. On voit, n°. 32, les trois diſtances du ſoleil au méridien, ou les trois diſtances du point B (fig. 11.) au midi de l'horizon: ce ſont les complémens à deux droits de l'angle ſphérique formé au zénith par le triangle qui ſe termine au ſoleil, au zénith & au pôle. Comme ces diſtances ſe prenoient depuis le midi, en tournant vers l'occident, & que l'arbre de *Soriano* étoit par rapport à nous dans la même direction, en tirant du couchant au nord, on les a ajoutées aux angles réduits du n°. 31; ce qui a donné trois diſtances de l'arbre de *Soriano* au midi de l'horizon, & la diſtance moyenne s'eſt trouvée 158°, 2′, 35″. Mais parceque cette déclinaiſon moyenne ſe compte depuis le midi, en tournant à l'occident, dans la même direction, ſuivant laquelle on tourne du nord à l'orient ſur la droite, on lui ajoute les 180° qu'on compte du nord au midi, pour avoir l'angle de poſition, ſavoir 338°, 2′, 35″.

Autre réduction néceſſaire.

279. On pourroit s'en tenir là, ſi l'obſervation avoit été faite au dôme de *St Pierre*; mais comme elle s'eſt faite au college romain, il faut encore une réduction pour avoir l'angle de poſition de cet arbre obſervé du dôme de *St Pierre* avec le méridien de ce dôme, ou de l'arc AC (fig. 2. pl. I.)

avec l'arc A*e*, en comptant de A*e* sur la droite, c'est-à-dire pour avoir le complément de l'angle *e*AC à quatre droits, afin d'en tirer les inclinaisons des autres côtés sur la méridienne, au moyen de quoi on pourra connoître les perpendiculaires abaissées sur la méridienne, & les segmens qu'elles y interceptent, suivant le n°. 269.

De la parallaxe du lieu de l'observation. Pl. III. fig. 13.

280 Cette réduction se voit au n°. 34, Liv. II; & l'on doit y considérer deux choses, savoir la parallaxe du lieu de l'observation par rapport à celui de la réduction, & la convergence des méridiens de ces mêmes lieux. Soit A (fig. 13. pl. III.) le dôme de *St Pierre*, C l'arbre de *Soriano*, M la plate-forme du college romain, MP le méridien de ce college, AP celui du dôme: si l'on imagine une ligne AN perpendiculaire à MP, une autre A*n* perpendiculaire à MC, & le petit arc AD parallele à MN; l'angle AC*n*, ou son alterne CAE, est ce que le P. *Maire* appelle en cet endroit la parallaxe du mont *Soriano*, & l'angle DAP est la convergence des méridiens. La perpendiculaire A*n* sert à trouver le premier angle, & AN donne le second: or supposé qu'on connoisse la distance AM, & les angles AMC, AMP, on connoîtra A*n* & AN; car on a cette proportion, AM est à A*n*, ou AN, comme le rayon au sinus de l'angle opposé AMC, ou AMP.

De la convergence des méridiens.

281. Et d'abord l'angle AC*n* se trouve par cette analogie: AC est à A*n*, comme le rayon au sinus de l'angle AC*n*; car AC, A*n* sont en raison de leurs sinus, & de petits arcs tels que ceux-ci sont comme leurs sinus. On a donc la parallaxe, que le P. *Maire* a trouvée au même endroit de 1° 53′ 28″. Pour la convergence des méridiens, il y a plusieurs moyens de l'avoir: en voici un des plus faciles. Connoissant le nombre de pas ou de toises, ou d'une autre mesure quelconque, qu'on compte sur un arc quelconque, comme sur l'arc AN, il est aisé de les convertir en minutes & secondes d'un grand cercle, d'une maniere du moins assez approchée, pour n'en avoir à craindre aucune erreur. Car on peut connoître avec assez de précision, pour le cas présent, la mesure d'un grand cercle de la terre, tant par les mesures de dégrés qui ont précédé la nôtre, que par le polygone même de la figure 2, quoiqu'imparfaitement réduit, & sans égard à la

convergence des méridiens. De-là on pourra faire cette proportion : le nombre de pas ou de toises d'un dégré, est à celui de l'arc AN comme 60′ à un quatrieme terme, qui sera le nombre de minutes de l'arc AN. Maintenant dans le triangle sphérique PNA rectangle en N, connoissant l'hypoténuse PA, complément de la hauteur du pôle, & le côté AN, on aura l'angle PAN : & parceque DA, MN étant paralleles, les angles alternes DAN, ANM sont égaux, il s'ensuit que l'angle trouvé PAN est le complément de l'angle cherché DAP, qui est l'angle de la convergence. Le P. *Maire* l'a trouvé de 1′ 7″.

Théorème pour cette convergence.

282. On peut avoir plusieurs beaux théorèmes sur cette convergence. La trigonométrie sphérique donne cette regle pour connoître un angle, étant donnée la base, avec le côté adjacent : le rayon est au co-sinus de l'angle, comme la tangente de la base à la tangente du côté adjacent. Donc puisque le sinus de la convergence cherchée PAD est le co-sinus de l'angle PAN, & que la tangente de AP est la co-tangente de la hauteur du pôle, ou de la latitude du lieu ; on n'a qu'à substituer ces noms pour avoir en raison alterne, puis en renversant, le théorème suivant : *la co-tangente de la latitude du lieu est au rayon, comme la tangente de AN est au sinus de la convergence cherchée PAD.* Ou parcequ'en tout arc le rayon est à la tangente, comme la co-tangente au rayon ; ayant réduit AN en portion de grand cercle, on aura ce théorème : *le rayon est à la tangente de la latitude du lieu A, comme la tangente de AN au sinus de la convergence PAD.* Si l'on aime mieux se servir de la différence APM des longitudes, on aura, par la sixieme regle de ma trigonométrie sphérique, en raison alterne, cette analogie : le rayon est au co-sinus de la base AP, ou au sinus de la latitude du lieu A, comme la tangente de l'angle P à la co-tangente de l'angle PAN, ou à la tangente de l'angle PAD ; d'où l'on tire ce théorème : *le rayon est au sinus de la latitude, comme la tangente de la différence des longitudes à la tangente de la convergence des méridiens.* On peut encore simplifier ce théorème pour de petits angles, en prenant les angles pour leurs tangentes ; car les petits arcs, qui mesurent ces angles, ne different pas

ſenſiblement de leurs ſinus & de leurs tangentes. Donc le rayon eſt au ſinus de la latitude du lieu, comme une petite différence de longitude eſt à la convergence des méridiens.

Autre théorème plus général.

283. Ce dernier théorème pourroit ſe démontrer immédiatement pour le cas d'une petite différence de longitude. En général, pour deux arcs de méridiens terminés au même parallele, ou à deux points pris dans la même latitude, quelle que ſoit leur différence de longitude, on a le théorème ſuivant : *le rayon eſt au ſinus de la latitude ; comme le ſinus de la moitié de la différence des longitudes eſt au ſinus de la moitié de la divergence des méridiens.* Mais en voilà aſſez ſur ces théorèmes. Obſervons ſeulement que dans les méthodes, où l'on ſe ſert de la différence des longitudes, il faut, pour réduire le nombre de toiſes ou de pas en arc parallele, premierement faire cette proportion : le rayon eſt au co-ſinus de la latitude, comme le nombre de pas ou de toiſes d'un dégré de grand cercle, au nombre de pas ou de toiſes d'un dégré du parallele ; puis celle-ci, ce dernier nombre eſt au nombre propoſé, comme 60′ au nombre de minutes cherché : & l'on ne doit point craindre d'erreur ſenſible dans ce dernier terme, ſi c'eſt un petit nombre, quoiqu'on n'eût peut-être pas pris le nombre juſte de pas ou de toiſes qui ſe trouvent dans un dégré de grand cercle.

De l'angle de poſition.

284. Pour revenir au point d'où nous ſommes partis ; connoiſſant les angles de parallaxe & de convergence, on a la poſition de AC par rapport au méridien AP. Car ayant mené AE parallele à MC, l'angle EAD ſera égal à l'angle CMP (1). Or nous avons vu que pour avoir la poſition de CM par rapport à MP, il falloit retrancher de quatre droits l'angle CMP égal à EAD ; ici il en faut retrancher l'angle CAP ; d'où il ſuit que ce qu'on retranche eſt augmenté de la convergence DAP, & diminué de la parallaxe CAE, & par une conſéquence ultérieure, que l'angle de poſition eſt augmenté de la parallaxe, & diminué de la convergence. Ainſi

(1) Il y a en cet endroit du texte latin pluſieurs fautes d'impreſſion que le P. *Boſcovich* a lui-même reconnues : mais il n'avoit pu veiller par lui-même à l'impreſſion de ſon Livre.

dans l'endroit cité, le P. *Maire* retranche de la parallaxe 1°, 53′, 28″ la convergence 1′, 7″, & ajoute le reste 1°, 52′, 21″ à la premiere position 338°, 2′, 35″; ce qui donne pour l'angle de position de *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*, 339°, 54′, 56″.

Connoître une position réciproque. Pl. 1. fig. 2.

285. Cet angle fait connoître celui que forme AB (fig. 2. pl. I.) avec le même arc A*n*, c'est-à-dire l'angle de position du mont *Genarro:* car suivant la table du n°. 28, Liv. II, l'angle CAB est de 78°, 59′, 11″; d'où retranchant l'angle C*An*, complément à quatre droits de l'angle de position du point C, savoir 20° 5′ 4″, il reste pour l'angle de position *n*AB du point B vu de A 58°, 54′, 7″. Maintenant si l'on tire du point C un arc C*p* parallele à A*n*, les angles formés par C*p* & les lignes CF, CD, CB, CA, en tournant du nord à l'orient, sur la droite, sont ce que le P. *Maire* appelle les angles de position des points F, D, B, A vus du point C, sans avoir égard à la convergence des méridiens. On voit d'abord comment de l'angle de position du point C vu de A, on peut tirer l'angle de position du point A vu de C. Car dès que ce dernier point est plus occidental, comme dans le cas présent, ce qui donne à son angle de position plus de 180°, il suffit d'en ôter 180°, en prenant, comme on le peut faire ici, un arc de cercle pour une ligne droite. Au contraire, s'il étoit plus oriental, comme B, ce qui rend l'angle de position moindre que deux droits, il faudroit lui ajouter deux droits. Pour s'en assurer, il suffit de faire attention aux propriétés des paralleles.

Exemple de cette méthode.

286. Dans le cas présent, l'angle de position du point C, vu de A, est de 339°, 54′, 56″,; celui de A, vu de C, sera donc de 159°, 54′, 56″; & comme celui de B, vu de A, est de 58°, 54′, 7″, celui de A, vu de B, seroit de 238°, 54′, 7″. Or connoissant l'angle de position du point A, vu de C, & les angles que font avec CA les lignes CB, CD, CF, on aura aussi leurs angles de position, en retranchant les angles qu'elles font avec CA de l'angle de position du point A, si elles s'écartent à gauche de CA par rapport au point C, & en les ajoutant si elles vont à droite. Ainsi l'angle ACB étant, suivant la table du P. *Maire*, n°. 28, de 32°, 12′, 14″, & se

trouvant sur la gauche, on l'ôtera de 159°, 54′, 56″; ce qui donnera, pour l'angle de position du point B, vu de C, 127°, 42′, 42″. De même ayant retranché de celui-ci l'angle BCD qui dans cette table est de 70°, 10′, 19″, il reste pour l'angle de position de D, vu de C, 57°, 32′, 23″. Enfin ôtant de ce dernier l'angle DCF, qui se trouve dans la même table de 49°, 27′, 33″, on a 8°, 4′, 50″ pour l'angle de position du point F vu de C.

Suite. Pourquoi on a omis quelques positions.

287. On peut de même trouver les angles de position de tous les points vus de B, & remonter de l'un des points B, C au point D, comme de A on est remonté à B & C, pour en déduire les angles de position de tous les points vus de D, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la derniere station L du polygone. C'est ainsi qu'on a trouvé tous les angles de position marqués au n°. 34, Liv. II. Mais on n'y a pas mis la position du dôme de *St Pierre*, vu de *Soriano*, parcequ'on peut la tirer de celle de *Soriano* en retranchant de celle-ci 180°, comme nons l'avons dit. De même parmi les angles de position des points vus de *Fionchi*, on n'a point marqué celui de *Soriano*, d'où l'on a pris l'angle de position de *Fionchi*. On en a usé de la même maniere à l'égard des autres positions réciproques, parcequ'on peut toujours les avoir en ajoutant ou retranchant 180°, suivant que la position précédente est au-dessous ou au-dessus de ce nombre de dégrés. Par la même raison on a omis les positions de tous les points vus de B, ou du mont *Genarro*, dont on a marqué la position par rapport aux points A, C, D, & celles de tous les points vus de E, ou de *Pennino*, dont on a la position par rapport à D, F, G, enfin celles de tous les points vus du mont *Luro* l, dont on a déja la position par rapport aux points G, H, L. D'ailleurs les seules positions marquées à l'endroit cité, sont plus que suffisantes pour tout ce qui nous reste à dire sur la mesure du dégré.

Double avantage des angles de position.

288. On tire un double avantage de ces angles de position. Car en premier lieu, les côtés de tous ces triangles étant d'ailleurs connus de grandeur, leur position sert à déterminer les perpendiculaires C*e*, F*h*, &c. B*d*, D*f*, &c. & les segmens A*e*, A*h*, &c. A*d*, A*f*, &c. de la méridienne; de plus, on peut comparer les observations faites à *Rome*, sur la position

du polygone, avec celles de *Rimini*. Nous allons dire de quelle façon on doit s'y prendre.

289. Et d'abord dans le triangle rectangle A*e*C on a l'angle CA*e*, complément à quatre droits de l'angle de position du mont *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*. On connoît de plus le côté AC par le n°. 38. On trouvera donc A*e* & *e*C par les regles de la trigonométrie sphérique, qui, lorsqu'il ne s'agit comme ici que de petits arcs, lesquels sont proportionnels à leurs sinus, reviennent à celles de la trigonométrie rectiligne. On voit dans la figure de quel côté se doivent prendre ces lignes. Du reste, & ceci doit s'entendre aussi de tous les autres triangles rectangles, on déduira l'angle formé par une ligne tirée d'un signal à l'autre avec l'arc A*n*, ou un arc parallele, de la position du dernier signal vu du premier, en prenant pour cela cette position même, si elle est au-dessous de 90°; son complément à deux droits, si elle est au-dessus de 90°, & au-dessous de 180°; sa différence au demi-cercle, si elle est au-dessus de deux droits, & au-dessous de trois; & son complément à quatre droits, si elle excede trois droits. Ce triangle résolu, le côté parallele à la méridienne A*n*, sera dirigé du premier signal vers le nord, dans le premier & le quatrieme cas; & au midi dans le second & le troisieme: pour la perpendiculaire, elle se tirera de ce signal à l'orient dans les deux premiers cas, & dans les deux derniers à l'occident.

Moyen de se procurer le premier.

290. De même dans le triangle rectangle A*d*B, connoissant la position du mont *Genarro* B, vu du dôme de *St Pierre* A, on aura A*d* & *d*B. Supposons que l'arc C*q*, parallele à A*n*, soit rencontré en *p* & *q* par les perpendiculaires D*f*, *h*F: ce petit arc ressemble fort à celui d'un grand cercle, & pour la grandeur, & pour la position, & il peut être pris pour une ligne droite. Or dans les triangles C*p*D, C*q*F, connoissant les positions des points D & F, vus de C, on aura les angles en C, & par conséquent les lignes C*p*, C*q*, paralleles & égales à *ef*, *eh*, qui, ajoutées séparément à A*e*, donnent A*f* & A*h*. On trouvera de même D*p*, *q*F; & ôtant de la premiere la ligne *pf* égale à C*e*, & la seconde de *qh* égale à la même C*e*, il restera D*f*, F*h*. Pareillement si les perpendiculaires E*g*, G*i*, H*l*, rencontrent en *r*, *s*, *t* un arc tiré par le point F,

Même sujet.

& parallele à A*n*; on aura, dans les trois triangles F*r*E, F*s*G, F*t*H, les angles en F, par les positions des trois points E, G, H. Donc on aura les côtés F*r*, ou *hg*, qui, retranché de A*h*, laisse A*g*; F*s*, ou *hi*, qui, ajouté à A*h*, donne A*i*; F*t*, ou *hl*, qui, ajouté à A*h*, donne A*l*; & les côtés E*r*, G*s*, H*t*, dont les deux premiers seront diminués de *rg*, *si*, ou F*h*, & le troisieme augmenté de *tl* égal à F*h*, pour avoir E*g*, G*i*, H*l*. Enfin si l'arc décrit du point H, & parallele à A*n*, est rencontré en *u* & *x* par les perpendiculaires I*m*, L*n* prolongées; connoissant la position des points I & L, ou du mont *Luro* & de l'embouchure de l'*Ausa*, on aura H*u*, H*x*, ou *ml*, *ln*, & par-là même A*m*, A*n*; & parceque *um*, *xn* sont égales à H*l*, on aura aussi I*m*, L*n*.

Qu'un certain nombre de positions suffit.

291. On voit que les positions marquées, n°. 34, Liv. II, suffisent pour trouver les perpendiculaires abaissées sur la méridienne, & les segmens de la méridienne. On peut même se passer ici de la position des points vus de *Fionchi*, & de celle de *Genarro* vu de *Soriano*, quoiqu'elles pussent servir, si l'on s'y prenoit d'une autre façon, pour résoudre les triangles. Ces perpendiculaires & ces segmens sont marqués à la fin de l'article cité; c'est le premier avantage qu'on retire des angles de position; mais il n'est pas le seul.

Du second avantage.

292. On a par la méthode proposée n°. 287, pour l'angle de position du mont *Luro* I vu de L, embouchure de l'*Ausa*, 137°, 53′, 58″. Cet angle n'est point formé par le méridien du lieu L, mais par un cercle parallele à la méridienne A*n*. Or par la résolution de tous ces triangles, on trouve, n°. 39, Liv. II, *n*L = 7139.8 pas; ce qui fait environ 7 $\frac{1}{8}$ milles d'Italie; & par la méthode exposée ci-dessus, n°. 281, on a à cette distance 5′, 34″ pour la convergence des méridiens, qui est l'angle d'inclinaison du méridien du lieu L sur la méridienne A*n* prolongée. Ainsi l'angle que forme la ligne LI avec ce méridien, est plus grand de 5′ 34″, qui, ajoutées à la premiere position, donnent pour l'angle de position du point I vu de L, par rapport au méridien du lieu L, 137°, 59′, 32″.

Moyen de se le procurer

293. Or nous avons encore le même angle par les observations de *Rimini* (n°. 36. Liv. II.), & par la méthode exposée, n°.

n°. 284. Car des trois observations du soleil levant à l'horizon de la mer, faites dans la maison de M. *Garampi*, on déduit l'angle de position du mont *Luro* vu de cette maison, & il se trouve de 135°, 21′, 51″. Connoissant la distance de cette maison à l'embouchure de l'*Ausa*, & sa position par rapport à ce point, on trouve, par la méthode du n°. 280, pour la parallaxe du mont *Luro*, observée de cette montagne même, 2°, 35′, 34″; c'est l'angle compris entre les lignes tirées du mont *Luro* à la maison de M. *Garampi*, & à l'embouchure de l'*Ausa*, angle qui doit être ajouté à la position du mont *Luro* vu de cette maison. On trouvera aussi, pour la convergence des méridiens, ou l'inclinaison du méridien de l'embouchure de l'*Ausa* sur celui de la maison de M. *Garampi*, qui est plus orientale, 39″, qui répondent à une distance de 835 pas, & qu'il faut aussi ajouter. Ainsi l'angle de position du point I vu de L, est de 137°, 58′, 4″: cet angle differe de près d'une minute & demie de celui qu'on a trouvé par les observations de *Rome*; mais nous donnerons bientôt la raison de cette différence, & nous ferons voir en même tems que cela ne change point sensiblement la mesure du dégré, dont il est ici uniquement question. Finissons ce qui a rapport à l'usage des observations faites avec le quart-de-cercle.

294. Selon la table du n°. 39, Liv. II, A*n* est de 161127.9 pas, & le point *n* est déterminé par la ligne L*n*, qui équivaut à une ligne droite perpendiculaire, tirée du point L sur A*n*: mais le parallele qui passe par L, ayant son pôle dans la méridienne A*n* prolongée au-delà de *n*, de 46°, ou environ, il doit couper la méridienne en-deçà du point *n*. Il faut chercher cette différence, & la retrancher de A*n* pour avoir l'intervalle compris entre les paralleles du dôme A & de l'embouchure L de l'*Ausa*: or on la trouvera par la méthode dont nous nous sommes servis, n°. 140, pour avoir (fig. 19. pl. II.) l'erreur provenante de la déviation de la lunette du secteur. Soit en effet P le pôle, L′ l'embouchure de l'*Ausa*; L′M sera la perpendiculaire tirée de cette embouchure sur la méridienne, L′O l'arc du parallele, & OM la différence qu'on doit retrancher. Or par le n°. 141, le sinus de PL′ est à son co-sinus, ou sa tangente est au rayon, ou le rayon à sa

Correction pour la distance de la perpendiculaire au parallele.

co-tangente, c'eſt-à-dire, ou le rayon à la tangente de la latitude du lieu L', comme le ſinus verſe de l'arc L'M, eſt à MO. De plus, PL' eſt le complément de la déclinaiſon du lieu L', & le ſinus verſe de l'arc L'M eſt la troiſieme proportionnelle au diametre & à la corde de cet arc. Donc, puiſque L'M a été trouvée de 7139.8 pas, & que le diametre de la terre, qu'il n'eſt pas néceſſaire ici de connoître ſi exactement, eſt d'environ 8544000, on aura pour le ſinus verſe de l'arc L'M 5.9, & par le théorème propoſé, on trouvera pour l'arc MO 5.7.

Diſtance des paralleles. Pl. I. fig. 2.

295. Ayant donc retranché 5.7 pas de l'intervalle A*n* (fig. 2. pl. I.) ou de 161127.9, & ayant ajouté 269 pas, dont la ſalle du college romain eſt plus méridionale que le dôme de *St Pierre*, & retranché 139.1, dont la maiſon de M. *Garampi* eſt plus méridionale que l'embouchure de l'*Auſa*; on a enfin l'intervalle des paralleles qui paſſent par les lieux où les obſervations ont été faites, ſavoir 161252.1 pas. Cette meſure doit être corrigée par les obſervations de *Rimini* ſur la poſition du polygone, leſquelles cependant l'augmentent à peine de trois pas, comme nous le verrons bientôt. Il faut encore la réduire en toiſes, & c'eſt ce que nous ferons dans le chapitre ſuivant, où nous donnerons le rapport du pas à la toiſe. Enfin il faut comparer ce nombre de toiſes à l'amplitude de l'arc céleſte, déterminée par le chapitre précédent, pour avoir la meſure du dégré que l'on cherche.

Pourquoi on s'eſt étendu ſur ce ſujet.

296. Telle eſt la ſuite d'opérations par laquelle les obſervations faites avec le quart-de-cercle, ſervent à déterminer la grandeur du dégré. Je me ſuis un peu étendu ſur ce point, afin que ſi quelqu'un de ceux qui ſont peu exercés dans ces ſortes d'opérations, vouloit entreprendre quelque part une ſemblable meſure, il pût trouver ici la méthode d'y procéder. Cela étoit encore néceſſaire pour évaluer avec plus de préciſion les erreurs qu'on auroit pu commettre, pour vérifier nos réſultats, & diſcuter les obſervations mêmes ſur leſquelles ils s'appuient, comme nous allons le faire nous-mêmes.

297. Pour commencer par la poſition du polygone, relativement à la méridienne; la différence de près d'une minute & demie qu'on y a trouvée (n°. 293) entre les obſervations

de *Rome* & celles de *Rimini*, vient de plusieurs causes. Premierement, pour déterminer, par l'observation de *Rome*, le dernier côté du polygone, il faut (n°. 287) parcourir tous les angles du polygone, dans chacun desquels on peut commettre une erreur de 10 secondes. En second lieu, il peut se trouver quelque différence dans la réduction du côté qui joint la salle du college romain avec la premiere montagne, au côté qui joint cette montagne avec le dôme de *St Pierre*, comme aussi dans la réduction de la maison de M. *Garampi* à l'embouchure de l'*Ausa*. De plus, il y a quelque erreur dans l'estimation de l'angle, dans les observations même astronomiques, &, ce qui est le principal, dans la pendule qui marque le moment de l'observation, duquel dépend l'azimuth du soleil. Pour peu que le mouvement de la pendule soit irrégulier, ou seulement s'il y avoit une augmentation ou diminution considérable dans la chaleur, cette derniere erreur pourroit aisément produire un très grand effet : car à chaque seconde de tems, le soleil parcourt 15 secondes de son parallele, qui produisent aisément dans l'azimuth une erreur de 10″. J'ai quelque raison de soupçonner dans la pendule de *Rimini* une erreur de quelques secondes, à cause de la longueur du tems écoulé depuis le midi de la veille jusqu'à l'observation du soleil levant. Quoique ces erreurs s'effacent en grande partie, leur somme peut aisément monter à une minute & demie, en mettant une seconde d'erreur pour chaque observation, & un bien plus grand nombre pour la derniere.

Différence des observations pour la position du polygone.

298. Mais le point capital est qu'une erreur même beaucoup plus considérable dans la position du polygone, n'en produit qu'une très petite dans le segment de la méridienne, intercepté par les paralleles des points A & L (fig. 2. pl. I.). On trouve l'erreur produite par une minute & demie, en supposant la premiere position du *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*, d'une minute & demie plus petite, & faisant un nouveau calcul, par la méthode du n°. 288 & suivans, pour avoir une nouvelle valeur de A*n*, d'où l'on retranchera l'intervalle compris entre L*n*, & le parallele du lieu L. Mais dès qu'il ne s'agit, comme ici, que d'une légere différence, on peut abréger en cette maniere.

Connoître l'erreur qui en résulte. Premiere méthode.

Seconde méthode. Pl I. fig. 2. 3. 14.

299. Les points A, *n*, L (fig. 14. pl. III.) ſont les mêmes que dans la figure 2, planche I; A*n'* eſt une autre méridienne plus proche du point L, ſur laquelle on abaiſſe la perpendiculaire L*n'*. Comme on ſait le nombre de pas de A*n*, *n*L, & à peu près celui qui ſe compte ſur un dégré, on pourra réduire ces deux lignes en parties de grand cercle. Ainſi dans le triangle ſphérique A*n*L, rectangle en *n*, on aura l'hypoténuſe AL, & l'angle *n*AL, d'où retranchant l'angle *n*A*n'*, il reſte l'angle *n'*AL, au moyen duquel, & de l'hypoténuſe AL, on aura A*n'* & L*n'*, en parties de grand cercle, qu'il ſera aiſé de réduire en pas.

Troiſieme méthode.

300. Cette méthode eſt générale, de quelque grandeur que ſoient ces triangles: mais s'ils ne s'étendent pas au-delà d'un ou deux dégrés, on peut encore abréger par la trigonométrie rectiligne. Car connoiſſant A*n*, *n*L, on trouve l'angle *n*AL par cette analogie: A*n* eſt à *n*L, comme le rayon à la tangente de cet angle. Cet angle connu, on en retranche l'angle *n*A*n'* pour avoir l'angle *n'*AL; enſuite de quoi on trouve A*n'* par cette analogie: le co-ſinus de l'angle *n*AL eſt à celui de l'angle *n'*AL pour le rayon commun AL, comme A*n* eſt à A*n'*.

Quatrieme méthode.

301. Enfin ſi l'angle *n*A*n'* eſt petit, on abrégera encore davantage en cette ſorte: ſoit I le point d'interſection de A*n'* & L*n*; A*n* pourra s'égaler à AI, en prenant *n*I pour un arc de cercle décrit du point A comme centre. Or l'angle *n'*LI eſt égal à l'angle *n*AI, & L*n'* eſt à peu près égale à L*n*. On a donc cette proportion: le rayon eſt au ſinus de l'angle *n'*LI, ou *n*AI, comme L*n'* ou L*n* à I*n'*. Or I*n'* eſt la différence de A*n* à A*n'*; & parceque le petit intervalle intercepté par la perpendiculaire L*n* ou L*n'* & l'arc du parallele dont nous avons parlé (n°. 294) eſt ſenſiblement le même de part & d'autre, comme on le peut déduire du théorème propoſé là même, il ſuit que cette petite ligne I*n'* eſt la différence de deux arcs de méridien, aboutiſſans d'une extrémité du polygone à l'autre, provenant de la différence d'inclinaiſon du méridien ſur la ligne AL.

Théorème général.

302. De-là on tire le théorème ſuivant: *le rayon eſt au ſinus de la différence d'inclinaiſon du méridien, comme la diſtance de*

l'extrémité du polygone à la méridienne, déterminée par la premiere position, est à la différence des arcs du méridien, compris, en conséquence de ces suppositions, entre les paralleles qui passent par les extrémités des lignes inclinées; différence qu'on doit ajouter à l'arc qui forme le plus grand angle avec la ligne qui joint ces deux extrémités. Dans le cas présent, la différence d'inclinaison est 1′ 28″, dont le sinus est 4266, pour le rayon 10000000; & par le n°. 292, la distance L*n* est de 7139.8 pas. On a donc cette proportion 10000000 est à 4266, comme 7139.8 à un quatrieme terme, qui se trouve 3.0; & si l'on doit avoir égard à cette différence, on l'ajoutera à l'arc A*n*, qui, par le n°. 294, est de 161127.9 pas, suivant les observations de *Rome*, pour avoir, suivant celles de *Rimini*, 161130.9, mêmes nombres que ceux qui sont marqués Liv. II, n°. 37: & prenant un milieu, on aura 161129.4; d'où l'on déduit, par la méthode du n°. 295 pour l'arc du méridien intercepté par les deux observatoires, l'espace de 161253.6 pas, d'un pas & demi plus grand que le premier résultat. Ce qui n'ajoute pas une demi-toise à la mesure du dégré: différence insensible, comme je l'ai dit plus haut.

De l'erreur des angles.

303. Voyons maintenant l'erreur que peuvent produire dans cette mesure les angles du polygone, qui servent à déterminer les côtés rectilignes inclinés à l'horizon, & ces côtés mêmes réduits à une surface réguliere de la terre, quoiqu'encore inclinés sur la méridienne, enfin ces côtés réduits à la méridienne, ou à l'arc intercepté par les paralleles des lieux où se sont faites les observations astronomiques. Et d'abord voyons quelle erreur peut produire, dans la réduction du polygone à une surface réguliere de la terre, l'erreur qu'on auroit commise dans l'observation des hauteurs ou des dépressions.

Théorème de M. *Cotes*. Pl. III. fig. 15.

304. Dans la figure 15, planche III, les points A, D, P, E, B sont les mêmes que dans la figure 11, suivant le n°. 271; c'est-à-dire que PD, PE sont les complémens des hauteurs ou dépressions des signaux D, E, l'arc DE la mesure de l'angle observé, AB celle de l'angle réduit à l'horizon; & comme nous l'avons vu au même endroit, l'angle DPE sera la mesure du côté DE réduit à une surface réguliere de la terre. Supposons maintenant qu'il se soit glissé quelque erreur dans

la mesure de la hauteur ou de la dépression, ensorte qu'au lieu du triangle DEP on ait le triangle DE′P, dans lequel le côté PD est absolument le même, le côté DE′ égal à DE, & le côté PE′ differe de PE de la valeur de IE, l'arc E′I ayant pour pôle le point P; & à cause que cet arc est très petit, on peut le regarder comme étant perpendiculaire à EI. De plus, les arcs DE, DE′ étant égaux, l'arc EE′ aura pour pôle le point D, & pourra de même se prendre pour un arc perpendiculaire à l'arc DE. Ainsi l'angle IEE′ sera le complément de l'angle DEP; EI sera l'erreur commise dans l'observation de la hauteur ou de la dépression; & BB′ l'erreur qui en résulte dans l'angle réduit. Or dans le triangle rectangle EIE′, le rayon est à la tangente de l'angle IEE′, ou à la co-tangente de l'angle DEP, comme EI est à IE′. De plus, le sinus de PE′ est au sinus de PB′, ou au rayon, comme IE′ est à BB′. Donc, par égalité troublée, le sinus de PE′, ou, ce qui est à peu près le même, le sinus de PE est à la co-tangente de l'angle DEP, comme EI est à BB′. Cette évaluation est de M. *Cotes*, dans l'ouvrage qui a pour titre, *Æstimatio errorum in mixta matheſi.*

Evaluation de l'erreur.

305. Connoissant donc les côtés du triangle DPE, on aura le rapport de EI, ou de l'erreur commise dans la mesure de la hauteur ou de la dépression, à BB′, ou à l'erreur qui en résulte dans l'angle réduit. Car ayant cet angle, on trouve l'angle DEP par cette analogie: le sinus de DE est au sinus de DP, comme le sinus de l'angle DPE, qu'on a déja trouvé, au sinus de l'angle DEP; & cet angle étant connu, on aura sa co-tangente, & par conséquent le rapport du sinus de PE à cette co-tangente.

Que cette erreur est petite; & pourquoi.

306. Si l'angle DEP est droit, l'erreur s'évanouit, puisque la co-tangente d'un angle droit est nulle. Et parceque AD, BE étant fort petits, l'angle DEP approche fort de l'angle droit ABP, il est évident qu'il ne peut y avoir qu'une très petite erreur dans l'angle réduit. Car puisque le sinus de PE est presque égal au rayon, si l'angle DEP est moindre d'un dégré qu'un angle droit, sa co-tangente sera la tangente d'un dégré; & puisque le rayon est à peu près à la tangente d'un dégré, comme 57 est à 1, il s'ensuit que pour chaque minute

d'erreur dans la mesure de la hauteur, il se trouvera à peine une seconde d'erreur dans l'angle réduit.

307. Pour se convaincre de la petitesse de cette erreur, il suffit de comparer la table du n°. 28, Liv. II, où sont les angles réduits, avec celle du n°. 21, même Livre, où sont les angles observés: on verra qu'ils ne sont pas fort différens les uns des autres. Dans les trois premiers triangles la différence va à peine au-delà d'une minute: il n'y a qu'un cas où elle approche de deux minutes; dans presque tous les autres elle est au-dessous d'une minute, très souvent même elle se réduit à un petit nombre de secondes. Or en consultant la table qui est à la fin du même Livre, on verra que les hauteurs & les dépressions étoient souvent de plus d'un dégré, très souvent de plus de 30′, ordinairement de plusieurs minutes, & que lorsqu'elles n'étoient que de quelques minutes, la réduction ne produisoit dans l'angle qu'une différence d'un très petit nombre de secondes. Il demeure donc pour constant qu'une erreur de deux, ou même de trois minutes dans l'observation de la hauteur, produit rarement une erreur d'une seconde dans l'angle réduit, presque jamais une erreur de deux ou trois secondes; ainsi quoiqu'on n'ait pas pris les hauteurs & les dépressions avec autant de précision que les angles du polygone, on n'en doit cependant craindre aucune erreur notable en ce qui a rapport à la mesure du dégré. Autre preuve.

308. La plupart des observations des hauteurs & des dépressions se trouvent dans cette table. Il en manque quelques-unes; mais fort peu de celles dont nous avons fait usage dans la réduction. Celles qui manquent sont celles du mont *Tesio* & du dôme de *St Pierre*, vus de *Soriano*, celle de *Tesio* vu de *Fionchi*, celles de *Soriano* & de *Fionchi* vu de *Tesio*, & celle du mont *Luro* vu de *Catria*. Nous n'avons pu faire ces observations: tantôt un nuage nous déroboit la vue des signaux; tantôt nous étions surpris par la nuit. Car comme ces observations ne demandent pas une exactitude si scrupuleuse, & qu'on peut même y suppléer aisément; dès que nous étions arrivés sur une montagne, nous commencions par prendre les angles du polygone, & nous prenions ensuite les hauteurs. Or il nous est souvent arrivé de trouver toutes les montagnes Observations des hauteurs & dépressions.

enveloppées de nuages; ce qui nous a quelquefois obligés, comme je l'ai marqué au Livre I, de monter jusqu'à dix fois sur la même montagne, & sans aucun fruit. Lorsque le ciel nous étoit un peu plus favorable, nous avions quelquefois peine à voir sortir un signal d'un nuage, encore n'étoit-ce que pour y rentrer bientôt après; d'autres fois, au défaut d'un nuage, c'étoit un brouillard qui nous en déroboit la vue, ou bien des observations plus importantes emportoient tout notre tems, & ne nous laissoient plus de jour pour celles-ci. Mais il étoit aisé, comme je viens de le dire, de suppléer à ce défaut, ou par les observations précédentes, ou par les suivantes, & d'une maniere assez approchée, pour n'en avoir à craindre aucune erreur sensible dans la mesure du dégré; & c'est pour cela que nous n'avons pas jugé à propos d'entreprendre de nouveaux voyages, dont le succès eût été d'ailleurs incertain, & qui n'auroient abouti qu'à nous donner une peine inutile, & à nous faire perdre du tems.

Moyens de suppléer à ces observations. Pl. III. fig. 16.

309. Qu'on puisse suppléer à ces observations, rien de plus évident. Car dès qu'on a la hauteur ou la dépression d'un signal par rapport à un autre, on a par-là même la dépression ou la hauteur de celui-ci vu du premier. Soient A, B (fig. 16) deux signaux, & les deux lignes verticales réunies au centre C d'une surface réguliere dans cet intervalle des signaux, dont l'arc soit rencontré en D & E par les lignes CA, CB. Connoissant dans le polygone non réduit la distance AB, qui sera à peu près égale à l'arc DE, & la mesure de quelque dégré, on aura à peu près le nombre de minutes qui se comptent sur l'arc DE, ou dans l'angle ACB. De plus, si du point A on observe la hauteur ou dépression du point B, on n'aura qu'à l'ajouter ou la retrancher de 90°, pour avoir l'angle CAB, dont on retranchera pour la réfraction la dix-huitieme partie de l'angle ACB. Car suivant la remarque du P. *Maire* (Liv. II. n°. 56 & suiv.), la somme des deux réfractions est ordinairement la neuvieme partie de l'angle ACB; ce qui est constant, & par nos observations, & par plusieurs autres observations antérieures. On n'a plus qu'à retrancher de 180° les angles CAB, ACB pour avoir l'angle CBA corrigé; auquel ajoutant la dix-huitieme partie de l'angle ACB, on aura l'angle qu'auroit donné

donné l'observation, & dont la différence à 90° donne la hauteur ou la dépression du point A, telle qu'on l'auroit eue immédiatement en l'observant du point B. On trouve par la même méthode la hauteur ou la dépression du dôme de *St Pierre*, vue de *Soriano*, & celle du mont *Luro*, vue de *Catria*, puisqu'on a celle de *Soriano*, vue du dôme de *St Pierre*, & celle de *Catria*, vue du mont *Luro*.

On y supplée par deux problêmes. Solution du premier. Pl. III. fig. 16.

310. Il reste à suppléer aux observations des hauteurs ou abaissemens respectifs du *Soriano* & du *Tesio*, vus du *Tesio* & du *Fionchi*, dont aucune ne se trouve dans la table; & c'est ce qu'on fait sans peine au moyen de deux problêmes dont l'un est l'inverse de l'autre. Le premier est conçu en ces termes: étant donnée la distance AB des signaux, avec l'angle CAB, trouver la différence des hauteurs DA, EB. Pour le résoudre, il faut connoître, du moins à peu près, la mesure d'un dégré du méridien, d'où l'on tire, comme ci-dessus (n°. 294) le demi-diametre CD ou CA, qu'il suffit d'avoir d'une maniere approchée. Ensuite dans le triangle CAB, connoissant les côtés CA, AB, & l'angle A, on trouve le côté CB, dont la différence au côté CA est la différence cherchée de la hauteur; & il est aisé de démontrer qu'une erreur assez considérable dans le demi-diametre CD ou CA, ne produit dans cette hauteur aucune différence sensible.

Autre solution plus courte.

311. On peut abréger en cette maniere: connoissant la distance AB, & à peu près la mesure d'un dégré, on en tirera l'angle C; & comme l'angle A est aussi connu, on aura l'angle B avec cette proportion: le sinus de l'angle B est à sa différence au sinus de l'angle A, comme le demi-diametre de la terre CD, ou CA à la différence cherchée des côtés CA, CB.

Solution du second.

312. Le second problême se propose ainsi: connoissant la différence des hauteurs de A & B, & la distance AB, trouver les angles A & B. Ayant assigné à CA la grandeur qui lui convient, ou à peu près, on lui ajoutera ou l'on en retranchera cette différence pour avoir CB. Ainsi connoissant tous les côtés du triangle CAB, on aura les angles cherchés A & B; ou bien ayant déduit l'angle ACB de la distance AB, & connoissant les côtés CA, CB avec l'angle compris, on aura les autres angles A & B.

Hauteurs & dépressions par le premier problême.

313. Ces problêmes levent toute la difficulté. Car en commençant par l'embouchure de l'*Ausa*, on tire des observations qui y ont été faites au niveau de la mer, par le premier problême, la hauteur de *Carpegna* & celle du mont *Luro*, qui sont connues d'ailleurs, parcequ'on avoit observé de ces montagnes mêmes, & leur hauteur ou dépression respectives, & la dépression de l'*Ausa*. Ensuite de la hauteur des monts *Luro* & *Carpegna* on tire celle de *Catria*, déja connue par l'observation de celle de *Carpegna*, vue de *Catria*: ainsi on a de trois façons sa hauteur absolue. Il en est de même de la hauteur de *Tesio*, qu'on trouve par celles de *Carpegna* & de *Catria*, & qu'on avoit déja par celle de *Catria*, vue de *Carpegna*. Celle du *Pennino*, déja connue par celles de *Catria* & de *Tesio* observées de ce point, se connoît encore par les hauteurs absolues des mêmes *Catria* & *Tesio*, & par conséquent de quatre manieres. Celle de *Pennino* donne celle de *Fionchi*, d'où l'on a encore observé celle de *Pennino*. Celle de *Fionchi* donne celles de *Soriano* & de *Genarro*, d'où l'on a observé celle de *Fionchi*. De celle de *Soriano* on tire encore celle de *Genarro*, & de celle-ci la hauteur du dôme de *St Pierre*, déja connue par celles de *Genarro* & de *Soriano*, vues de ce point. Cette hauteur de l'endroit de ce dôme, où nous avons observé, est à peu près la même que celle dont on sait d'ailleurs qu'il est élevé au-dessus du pavé de l'Eglise *St Pierre*; & nous savons à peu près de combien ce pavé est élevé au-dessus du Tibre; & le Tibre au-dessus de la mer. C'est ainsi qu'en allant de l'un à l'autre, on a tiré de la comparaison des observations, de celles surtout qui nous paroissoient mériter la préférence, la table du n°. 57, Liv. II.

Par le second problême.

314. Connoissant ces hauteurs, on trouve par le second problême les hauteurs & dépressions respectives qui n'ont point été observées, savoir celles de *Tesio* & de *Fionchi*, celles de *Tesio* & de *Soriano*. Celles ci eussent été déterminées avec moins de précision par des observations immédiates, à cause de la distance qui est de 60 milles, & de l'irrégularité de la réfraction. Car ayant les hauteurs absolues de A & B (fig. 16. pl. III.), on aura leur différence, au moyen de laquelle, connoissant d'ailleurs le côté AB du polygone non réduit, on

trouvera les angles A & B; celui-ci augmenté de la réfraction, & ſouſtrait enſuite de 90°, donnera la hauteur ou dépreſſion qu'on cherchoit.

Qu'il n'eſt pas néceſſaire de les obſerver toutes.

315. C'eſt ainſi qu'on a ſuppléé aux obſervations qui manquoient, & qu'on a corrigé celles qu'on avoit faites, afin de pouvoir confronter les réſultats, & en prendre le milieu; ce qui ſuffit, & au-delà, pour les angles du polygone, dans leſquels les erreurs de ces obſervations euſſent à peine pu produire une erreur d'une ou deux ſecondes. On voit qu'inutilement nous euſſions cherché à tout réſoudre par des obſervations immédiates, qui ne devoient aboutir qu'à nous faire perdre du tems, & à nous donner bien de la peine.

Erreurs des côtés provenantes d'autres côtés.

316. Je me ſuis aſſez étendu ſur la réduction des angles du polygone, & du polygone même à une ſuperficie réguliere de la terre: il faut maintenant parler de l'erreur que peuvent occaſionner les erreurs des angles non réduits; erreurs qui, ſuivant le n°. 262, auroient pu quelquefois ſe monter à dix ſecondes. Premierement, en tout triangle, connoiſſant les angles & un côté, on a celui des autres côtés que l'on veut, par cette analogie: le ſinus de l'angle oppoſé au côté connu, eſt au ſinus de l'angle oppoſé au côté que l'on cherche, comme le côté connu au côté cherché. C'eſt pourquoi l'erreur du côté cherché peut venir de trois ſources, de l'erreur du côté donné, de l'erreur de l'angle oppoſé au côté cherché, & de celle de l'angle oppoſé au côté donné: & parceque l'erreur du côté donné, ou celle du premier angle fait varier le côté cherché dans leur raiſon directe, & que l'erreur du ſecond angle le fait varier dans ſa raiſon inverſe, il s'enſuit, en mettant les ſinus à la place de ces angles, que dans les deux premiers cas, le côté cherché ſera toujours exactement à ſa variation, & dans le dernier à peu près, la variation étant petite, comme le côté donné, ou l'un des deux ſinus de ces angles à ſa propre variation (1).

---

(1) Si deux quantités variables ſont en raiſon directe, la différence de la premiere ſera à celle de la ſeconde exactement dans la même raiſon que la premiere quantité à la ſeconde. Soient les deux états de la premiere quantité a & $a \pm x$; ceux de la ſeconde b & $b \pm y$; on aura (hyp.) $a : a \pm x :: b : b \pm y$. Donc $ab \pm ay = ab \pm bx$, &

Erreurs produites par les variations des angles.

317. Maintenant si l'angle varie de 10 secondes, & qu'il approche d'un angle droit, son sinus n'éprouvera aucune différence sensible, comme on le peut voir dans les tables des sinus : mais plus cet angle deviendra aigu, plus la différence du sinus sera grande par rapport au sinus même : si l'angle est de 60 d., la différence sera au-dessous de $\frac{1}{36000}$ du tout ; s'il est de 30 d., elle sera au-dessous de $\frac{1}{12000}$; s'il est de 19 d., au-dessous de $\frac{1}{7000}$. Or il est aisé de démontrer généralement par la seule inspection de la figure, que dans le cas d'une légere différence des arcs, la variation du sinus est au sinus, comme la corde de la variation de l'arc, ou ce petit arc même, ou son sinus (car ils peuvent se prendre l'un pour l'autre) à la tangente (1). D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé ce rapport pour un seul cas, on pourra l'appliquer à tous les autres ; & qu'on trouvera l'erreur qui en résulte pour un côté quelconque, par cette analogie : comme la tangente de l'angle est au sinus de son erreur, ainsi le côté en question est à l'erreur de ce côté ; erreur par conséquent qui sera dans la raison directe de l'erreur de l'angle, & de ce côté même, & dans la raison inverse de la tangente de cet angle : & supposant une erreur constante dans l'angle, l'erreur de ce côté sera seulement en raison inverse de cette tangente, ou en raison directe de la co-tangente de l'angle.

Des angles trop aigus.

318. C'est pour cela qu'on doit, autant qu'il se peut, ne faire entrer aucun angle trop aigu dans le polygone, de crainte que sa tangente ne soit trop petite, & que l'erreur, qui est en raison inverse de cette tangente, ne soit d'autant plus grande. Or on le peut ordinairement ; mais on excepte les angles opposés aux bases, lesquels doivent être petits, pour ne pas donner trop de longueur à la base. Ils se trouvent de 19 à 20 dégrés dans les tables du Livre II : tous les autres angles sont au-dessus de 30°, la plupart au dessus de 60 ; ce

---

$\pm ay = \pm bx$, d'où l'on tire $a : b :: x : y$; & $a : b :: -x : -y$; rapport exact. Mais si l'une des deux quantités est en raison inverse de l'autre, on aura $a : a \pm x :: b \pm y : b$. Donc $ab = ab \pm bx \pm ay + xy$, & $\pm ay + xy = \pm bx$. D'où l'on tire $x : y :: a + x : b$; & $x : y :: -a + x : -b$; rapport approché.

(1) Cette figure consiste en deux arcs qui different peu : on mene leurs sinus & la tangente ; & par l'extrémité du petit arc, on mene une perpendiculaire au sinus du plus grand.

qui diminue considérablement les erreurs. Les angles opposés aux bases sont ceux qui ont été mesurés avec plus de soin : nous avons répété plusieurs fois l'opération : & pour ce qui regarde en particulier l'angle opposé à la base de *Rimini*, qui est la plus exactement mesurée, il a été pris en présence de M. le Comte *Garampi ;* & le suffrage d'un témoin si éclairé a assuré l'accord de nos observations. On peut supposer dans les angles opposés aux bases, une erreur moindre de moitié.

Somme des erreurs dans les côtés.

319. Malgré cela, si nous supposons dans tous les autres angles une erreur de cette nature, l'erreur des côtés pourroit aller plus loin, puisque les erreurs des côtés précédens produisent dans les suivans, qu'ils déterminent, une nouvelle erreur. Mais lorsqu'il s'agit d'une légere différence, il est aisé de démontrer le théorème suivant, dans lequel on regarde comme nulle l'erreur de la premiere base ; aussi bien ne peut-il y avoir une erreur sensible : *on trouvera la différence d'un côté quelconque par cette analogie ; la tangente de chacun des angles employés dans les triangles précédens, pour trouver ce côté, est au sinus de l'erreur de cet angle, comme ce côté, à sa propre erreur :* & l'on prendra la somme de toutes ces différences ou erreurs. En effet, l'erreur produite dans le côté, par celle d'un angle précédent, est à ce côté, comme l'erreur du sinus de l'angle, au sinus de l'angle ; ensuite l'erreur de ce côté en produit une autre dans le côté suivant, laquelle est à ce même côté, comme l'erreur du côté précédent au côté précédent, ou comme l'erreur de ce sinus à ce sinus. Donc puisque la même chose arrive dans tous les triangles qui suivent, l'erreur du dernier côté est à ce côté, comme l'erreur du sinus de l'angle ci-dessus au sinus de cet angle, c'est-à-dire comme la corde, ou le sinus de l'erreur de l'angle, à la tangente de l'angle. Et parceque l'erreur de chaque angle produit le même effet, il suit qu'on a dans le dernier côté la somme de toutes les erreurs.

Méthode plus courte.

320. Dans la table du n°. 21, Liv. II, la seconde base *bc* se déduit de la premiere *La* par une suite de 11 triangles, dans chacun desquels on a fait servir deux angles ; & si toutes ces erreurs se rassembloient dans la seconde base, il y en auroit 22. On trouve par le théorème du n°. 317, l'erreur

produite dans cette baſe par l'erreur de l'un de ces angles; & ſuppoſant dans les autres angles une erreur égale, qui ſoit à cette erreur produite, comme la tangente du ſecond angle à la tangente du premier, ou comme la co-tangente du premier à la co-tangente du ſecond, on aura l'erreur produite par l'erreur du ſecond angle; & de cette ſorte, ſi toutes les erreurs étoient du même côté, leur ſomme donneroit l'erreur totale. Pour avoir plutôt fait, on cherchera l'erreur provenante d'un angle de 45°, dont la co-tangente eſt égale au rayon. Cette erreur multipliée par la ſomme des co-tangentes des autres angles, pour le rayon 1, donnera le total des autres erreurs. Or l'erreur provenant de 10 ſecondes d'erreur dans un angle de 45°, eſt, pour une baſe de huit milles, d'environ 0.388.

Que les erreurs s'effacent.

321. On met 5 ſecondes d'erreur pour les angles oppoſés aux baſes, & 10 ſecondes pour les autres; & ſuppoſant que toutes ces erreurs ſoient du même côté, on trouve par le calcul une erreur de $6\frac{1}{2}$ pas dans la derniere baſe *bc*. Cependant cette erreur paſſe à peine un pas, comme on peut le voir Liv. II, n°. 22; & la raiſon eſt, comme je l'ai inſinué plus haut, que les erreurs ne ſont pas toutes du même côté, mais qu'elles s'effacent en grande partie, les unes étant dans un ſens, les autres dans un autre.

Moyen de les diminuer. Pl. I. fig. 2.

322. On trouveroit de la même maniere les erreurs des côtés LH, HF, FC, CA: il y en auroit deux en LH; huit en HF, qui ſe trouve par les 4 triangles LH*a*, LHI, IHG, HGF; 14 en FC, qu'on trouve par 7 triangles; & 18 en CA, qu'on trouve par 9 triangles. Il y auroit encore d'autres erreurs dans la réduction de ces côtés à la méridienne; mais comme l'un des angles eſt droit, & l'autre preſque droit, ces erreurs ſeroient abſolument inſenſibles. Les premieres ſeroient aſſez conſidérables; mais on pourroit les diminuer, en arrivant à HF par la baſe de *Rimini*, & à CF par celle de *Rome*; & ce qui les diminue encore davantage, c'eſt qu'elles ne peuvent être toutes du même côté, & qu'elles ſe détruiſent pour la plupart les unes les autres. L'erreur qu'on peut raiſonnablement craindre dans la méridienne, eſt à la juſte valeur de la méridienne, comme l'erreur de la baſe, à la baſe: & puiſque notre baſe eſt la vingtieme partie de la méridienne, il s'enſuit

que l'erreur de la méridienne devroit être d'environ 20 pas; ce qui se réduiroit dans le dégré à une erreur de 9 pas, moindre que 7 toises, & prenant un milieu, moindre que 3 ½ toises; erreur presque insensible, en comparaison de la différence qu'on a trouvée entre divers dégrés.

Réduction immédiate des côtés. Pl. I. fig. 2. 3. 16.

323. Nous arrivons d'une base à l'autre (n°. 21, Liv. II.) par les angles non réduits du polygone; & nous trouvons, (n°. 28.) par les angles réduits, tous les côtés du polygone réduit à une surface réguliere de la terre. On pourroit réduire immédiatement ces côtés, connoissant un côté quelconque, & la hauteur ou dépression respective des points qui le terminent. J'apporterai pour exemple le côté AB (fig. 2. pl. I.) terminé par le dôme de *St Pierre* & le mont *Genarro*. La dépression du point A vu de B, est de 2°, 1′, 40″; & la hauteur du point B vu de A, est de 1°, 45′, 15″: la différence est 16′, 25″, dont la dix-huitieme partie est 49″, qu'il faut ajouter pour la réfraction à 2°, 1′, 40″, pour avoir 2°, 2′, 29″ & retrancher de 1°, 45′, 15″, pour avoir 1°, 44′, 26″. Ainsi l'angle CBA (fig. 16. pl. III.) est de 87°, 57′, 31″, CAB de 91°, 44′, 26″: leur somme retranchée de 180°, laisse pour l'angle ACB 17′, 53″. Soit CF égal à CA, la différence de chacun des angles CAF, CFA à un angle droit, sera la moitié de l'angle C, ou 8′, 55″. Donc CFA est d'environ 89°, 51′.

Sa différence à la réduction médiate.

324. Cela supposé, on a (n°. 21. Liv. II.) AB égal à 22954 pas: de plus, le sinus de l'angle F, ou de 89°, 51′, est 9999966; celui de l'angle B, ou de 87°, 57′, 31″, est 9993653; leur différence 6313: on aura donc la réduction de AB par cette analogie: le sinus de F, ou 9999966, est à sa différence au sinus de B, ou 6313, comme AB, ou 22954 pas, est à sa différence à AF, qui se trouve 14.49. Ensuite comme AD est d'environ 80 pas (n°. 58. Liv. II.), & que le demi-diametre de la terre CD est d'environ 4272000, qui font aussi à peu près la valeur de CA, on aura cette analogie: CA, ou 4272000, est à DA, ou 80 pas, comme AF, ou 22940, à 0.43, différence de AF & DE, qui, ajoutée à 14.49, différence de AB & AF, donne pour la différence de AB & DE, 14.92 pas, ou environ 15 pas, qui, retranchés de AB, ou de 22954.3, laisse pour DE 22939.3. Or on ne

lui a trouvé, n°. 28, Liv. 2, par les angles réduits, que 22935.6, ce qui fait 3.6 pas de moins; différence à peu près égale à celle que le P. *Maire* lui assigne au n°. suivant, & qu'il attribue aux erreurs provenantes de la réduction des angles à l'horizon, & de l'inégalité de la réfraction. Il y a eu égard dans la détermination du dégré, n°. 47.

De l'usage des éclipses par rapport aux longitudes. Pl. I. fig. 2.

325. Je me suis plus étendu que je ne me l'étois d'abord proposé, tant sur la description & l'usage du quart-de-cercle, que sur les observations où il a été employé. Il ne reste plus qu'à observer que la position de notre polygone se détermine beaucoup plus exactement par la méthode dont nous nous sommes servis, que si on cherchoit, par les observations des éclipses, la différence de longitude de ses deux extrémités. En effet, au lieu d'observer l'azimuth du soleil à *Rome* & à *Rimini*, nous pouvions nous servir du polygone (fig. 2. pl. I.) pour connoître la distance AL; ce qui se fait en menant AD, AE, AG, AI, AL, & en cherchant AD dans le triangle ABD, dont on connoît deux côtés, avec l'angle compris; de même AE dans le triangle ADE, & ainsi de suite. Et si l'on observoit de plus, au moyen de quelque éclipse, la différence de longitude des points A & L, on auroit dans le triangle sphérique terminé à *n*, à L, & au pôle, l'angle en *n*, qui est droit, l'angle au pôle, & l'arc compris entre L & le pôle, savoir le complément de la latitude du lieu L. On auroit donc l'arc L*n*, par lequel, & par la distance LA, on connoîtroit A*n*.

Qu'il est ici inutile.

326. Mais cette méthode peut induire en de grandes erreurs: en effet, une erreur de 4 secondes sur le tems de l'éclipse, produit une erreur d'une minute sur le parallele, & une différence d'un mille, ou environ, dans la distance L*n* prise sur le parallele de l'embouchure L de l'*Ausa*; tandis que quatre secondes d'erreur, sur le moment où le soleil arrive à l'azimuth donné, ne produit pas à beaucoup près, dans l'angle LA*n*, une erreur d'une minute, & n'apporte pas dans la distance L*n*, une différence de 41 pas, comme on peut le déduire du n°. 302, Liv. IV. Concluons que ce n'est pas ici le lieu d'avoir recours aux observations des éclipses.

327. J'ai expliqué ce qui a rapport à la construction du grand

grand quart-de-cercle, à ſon uſage, & aux obſervations, pour leſquelles il a ſervi, dans la meſure du dégré : il eſt tems de dire un mot de notre petit quart-de-cercle, & de l'uſage que nous en avons fait, pour corriger la carte géographique. Cet inſtrument n'a rien de particulier : il y avoit deux lunettes, l'une fixe & double, l'autre mobile & appliquée ſur l'alidade ; & au moyen des tranſverſales, on y diſtinguoit aiſément les minutes ; ce qui ſuffit, & au-delà, pour corriger des cartes de géographie. Nous nous en ſervions pour prendre les angles, de la même maniere que nous avons pris, avec le grand quart-de-cercle, les angles du polygone ; & de même que par une chaîne de triangles non interrompue, nous ſommes arrivés du dôme de *St Pierre* à *Rimini ;* ainſi avec notre petit quart-de-cercle nous avons parcouru tous les états du Pape, & nous avons lié preſque toutes les villes, & un grand nombre de châteaux, bourgs & villages à notre polygone.

Du petit quart-de-cercle.

328. Il y auroit quelque choſe à dire ſur les méthodes qui nous ont ſervi, ou qui peuvent être de quelque utilité dans cette eſpece d'opération ; mais ce chapitre eſt déja plus long que je n'aurois voulu ; ainſi je me contente de toucher légerement un ou deux points.

Ce qu'on omet ici ; & pourquoi.

329. On trouve, Liv. III, n. 17 & ſuiv., un moyen de connoître la poſition d'un lieu, d'où l'on voit trois autres lieux connus, quoiqu'on ne le découvre lui-même d'aucun de ces points. On peut ſans calcul réſoudre ce problême, avec beaucoup plus de facilité, & ſans craindre aucune erreur ſenſible, par une conſtruction qui eſt en uſage dans la conſtruction des cartes. En effet, puiſque ces trois lieux ſont connus, on pourra mener de celui du milieu aux deux autres deux lignes droites, ſur leſquelles on décrira deux ſegmens de cercle, qui répondent aux angles ſous leſquels ces lignes ont paru du lieu de l'obſervation ; & le point d'interſection des circonférences de ces ſegmens, ſera le lieu de l'obſervation, qui par-là ſera connu dans la conſtruction même ; d'où il ſera aiſé de le tranſporter ſur la carte.

Connoître un lieu qui n'eſt vu d'aucun autre.

330. Cette méthode eſt d'un grand uſage, lorſqu'on a à

En quel cas cette méthode est très utile.

obſerver ſur une montagne, où il n'y a aucun terme fixe, aucun objet diſtinct, qu'on puiſſe prendre pour ſignal. Car on peut alors par cette méthode même trouver la poſition du lieu où ſe fait l'obſervation ; d'où tirant des lignes à tous les objets qu'on découvre de ce point, on a d'abord une direction de ces objets par rapport à ce point, laquelle, ajoutée à quelqu'autre direction relative à un autre point quelconque connu, détermine la poſition de ces objets mêmes.

Connoître un lieu vu de deux lieux connus.

331. La maniere ordinaire de déterminer la poſition des lieux, conforme à celle dont on s'eſt ſervi dans le polygone pour aller d'un triangle à l'autre, conſiſte à obſerver un lieu inconnu de deux lieux connus, qui ſervent à déterminer les lignes qui paſſent par ces mêmes lieux. On abrege encore ici par la conſtruction ; mais le calcul eſt bien plus exact : & il n'eſt pas difficile de trouver la poſition par rapport à la méridienne, par deux obſervations de cette eſpece, ſoit qu'on cherche la diſtance d'un objet à une méridienne exacte donnée ; ce qui donne la différence de la longitude de ce lieu à celle de quelques autres lieux connus, ſoit qu'on cherche le point de la méridienne auquel il répond, ce qui donne la différence de ſa latitude. C'eſt ce qu'on peut faire par la méthode dont on s'eſt ſervi pour réduire les côtés du polygone en ſegmens de la méridienne, & ſi les hauteurs ou dépreſſions du moins reſpectives des objets, ſont peu conſidérables, on pourra ſe diſpenſer de réduire les angles à l'horizon, ces petites différences de hauteurs ou dépreſſions n'apportant dans ces angles, comme dans ceux du polygone, qu'une différence de quelques ſecondes, très rarement de quelques minutes ou dégrés.

Que la bouſſole induit ſouvent en erreur.

332. Il y a pluſieurs moyens de ſuppléer au défaut de cette direction. On ſe ſert communément pour cela d'une bouſſole qui marque en dégrés & minutes la différence de direction de deux lieux. Mais cette méthode en impoſe ſouvent au commun des Arpenteurs. Car la déclinaiſon de la bouſſole ne varie pas ſeulement d'année en année, ou de mois en mois, mais quelquefois même de jours en jours, & d'une heure à l'autre. Il lui arrive ſouvent de varier en un ſeul jour de

plusieurs minutes (1); ce qui ne peut manquer de troubler l'observation, & de jetter des erreurs dans les résultats, surtout lorsqu'on met un long intervalle de tems entre les observations de divers postes. C'est pour cela que nous ne nous sommes point servis de bousſole, & nous avons toujours pris avec le quart-de-cercle l'une & l'autre direction.

On y supplée par les observations du soleil.

333. Nous avons souvent suppléé à la position des lieux d'où nous avions observé, en mesurant au coucher du soleil, ou à une heure donnée quelconque où l'on a l'azimuth du soleil, & du lieu même dont nous cherchions la position, l'angle formé par une ligne dirigée à quelque lieu connu, avec la ligne qui aboutissoit au soleil, ou au côté opposé désigné par l'ombre. Car on en tire d'abord l'angle de position de l'objet connu vu de l'inconnu, au moyen de quoi on a ensuite, par la méthode du n°. 277, l'angle de position du lieu cherché vu du connu, & par conséquent la droite qui joint le lieu connu à ce même lieu, de la même maniere que deux lignes déterminent dans leur point d'intersection la position de ce lieu.

De l'observation faite à un lieu inconnu.

334. L'observation faite au lieu inconnu peut suppléer à celle d'un des lieux connus. Car si l'on imagine un triangle terminé à deux lieux connus & à un inconnu, & qu'on mesure l'angle formé à un des lieux connus, & ensuite l'angle formé au lieu inconnu, on aura le troisieme angle formé à l'autre lieu connu, & par-là même la seconde direction, dont l'intersection avec la premiere déterminera la position du lieu. De cette sorte la cime d'une montagne, quelque escarpée, quelque inaccessible qu'elle soit, n'en sera pas moins utile: il suffira pour cela d'en faire le tour, & de la joindre successivement par des lignes à tous les lieux circonvoisins, qu'on

(1) Il paroît bien par des observations très exactes de feu M. *Graham*, que l'aiguille de bousſole varie dans un jour, ou qu'elle a des especes de balancemens: mais les variations dont parle ici le P. *Boscovich* viennent plutôt de l'imperfection des bousſoles dont les Arpenteurs se servent, ces bousſoles n'étant point assez exactes, ni leur aiguille assez mobile pour ne donner que des différences semblables à celles que M. *Graham* a observées.

joindra eux-mêmes à quelqu'un des précédens.

Signaux des lieux inacceſſibles.

335. Si deux contrées ſe trouvent ſéparées par une haute montagne, comme la Campanie l'eſt de la côte maritime du pays latin, on peut d'ordinaire y choiſir deux pointes qui puiſſent s'appercevoir des deux côtés, & les joindre de part & d'autre à deux lieux par des obſervations faites dans ces lieux mêmes; après quoi il ne ſera pas difficile de lier les deux premiers lieux aux deux derniers. L'uſage donne pluſieurs autres moyens d'abréger; mais je ne me ſuis pas propoſé d'épuiſer la matiere.

CHAPITRE III.

Des Inſtrumens employés à la meſure de la baſe.

Sujet de ce chapitre.

336. JE traite dans ce chapitre de la conſtruction & de l'uſage des inſtrumens qui ont rapport à la meſure de la baſe. Il y en a pluſieurs; mais il y a peu de choſes à dire ſur chacun. J'en ai déja parlé au Liv. I, n°. 110 & ſuiv., où je me ſuis un peu étendu ſur ce qui concerne ces inſtrumens, & la maniere de s'en ſervir. Je mettrai ici des figures pour éclaircir ce qui m'en reſte à dire, & je tâcherai de n'être pas moins exact que dans les deux chapitres précédens, à marquer tout ce qui me paroîtra mériter attention.

Deſcription des tables à trois pieds. Pl. III. fig. 17.

337. La figure 17, planche III, (ce nombre eſt marqué au commencement & à la fin de la figure qui occupe toute la longueur de la planche) repréſente les ſupports ou trépieds & les perches employées à meſurer la baſe. Nous avons parlé des ſupports (Liv. I, n°. 111.): leur conſtruction ſe voit dans la figure. Dans le premier ſupport, CD eſt une tringle de bois quarrée, qui paſſe dans des ouvertures preſque égales A & B pratiquées dans deux plans horizontaux, & à travers leſquelles elle gliſſe librement, pour qu'on puiſſe l'élever ou l'abaiſſer à volonté. Elle porte en C une table horizontale E*e*, & elle eſt ſerrée en A par une vis de fer placée ſur un côté de

cette ouverture, & qui l'applique contre le côté opposé, tandis que les côtés de l'ouverture B la tiennent en respect, & l'empêchent de s'incliner de part ni d'autre. Ainsi l'on a jugé qu'il falloit deux plans horizontaux dans le support pour arrêter la tringle CD, & la table Ee à la hauteur qui leur convient, & les fixer invariablement dans cette position.

Dimension de chaque partie.

338. La table Ee a un pied en longueur, un peu moins en largeur, & un pouce d'épaisseur. La hauteur de la tringle CD, & de tout le support est d'environ trois pieds. L'intervalle AB est d'un demi-pied seulement, afin qu'on puisse élever de deux pieds la table Ee au-dessus du plan B, & l'arrêter en même tems avec la vis qui est en A, & que les deux observateurs, ou du moins le plus grand puisse voir le côté supérieur de la perche. La tringle a un peu plus de deux pouces d'épaisseur; mais ces dimensions sont arbitraires. Les pieds sont armés à leur extrémité d'une longue pointe de fer, qui est surtout commode au rivage de la mer, pour les enfoncer plus ou moins dans le sable, & placer la table Ee dans une situation horizontale. Lorsque dans la base de *Rome* nous rencontrions quelque terrein pierreux, nous mettions des coins sous les pointes, pour leur donner le dégré d'élévation qui convenoit.

Des perches.

339. FG est une des perches dont il est parlé, n°. 110, Liv. I; elle a trois pouces de hauteur, deux d'épaisseur, & 27 palmes en longueur. F, H, I, G sont les quatre lames de cuivre dont il est fait mention au même endroit: sur celles du milieu I, H, étoient marqués de petits points qui partageoient la longueur de la perche en trois intervalles de 9 palmes. Nous nous étions d'abord proposé de faire joindre les têtes des perches, en C″; mais dès le premier essai que nous fîmes à la maison, il nous parut qu'il falloit beaucoup de tems pour les joindre exactement, & d'une main assez légere pour ne pas craindre de déranger le moins du monde la premiere perche: ainsi nous marquâmes aussi sur les lames G, F de petits points, d'où nous transportâmes sur celles du milieu les intervalles de 9 palmes. Nous avons plusieurs fois mesuré ces intervalles de deux points avec beaucoup d'attention, en nous servant d'une loupe, pour nous assurer, à la plus petite différence près, de leur longueur précise.

De l'intervalle des perches.

340. Les perches placées de la maniere que je l'ai expliqué (Liv. I, n°. 112.), c'eſt-à-dire dans la direction de la baſe, & dans une poſition horizontale, nous prenions, avec les petites pointes d'un compas, l'intervalle des points G, F′, que nous tranſportions ſur une petite échelle, & d'où nous retranchions les intervalles des deux points de la lame I, & des deux points de la lame H, déterminés par la même échelle, parceque ces intervalles étoient les complémens des intervalles du point de la lame G, au point de la lame I le plus voiſin, & du point de la lame F′ au point le plus voiſin de la lame H′: le reſte étoit l'excès de l'intervalle IH′ ſur deux intervalles de 9 palmes. La même choſe ſe pratiquoit toujours d'une perche à l'autre; ce qui donnoit autant de reſtes, qu'on portoit ſur le régiſtre, & dont on faiſoit une ſomme qui devoit être ajoutée au nombre entier de meſures, de perches & de palmes, qui s'étoit trouvé dans la meſure de la baſe.

Remarque ſur l'intervalle des perches.

341. Le moyen de s'épargner la peine d'écrire & de ſouſtraire tant de nombres, eſt de faire toucher les têtes des perches, & c'eſt l'unique parti qu'eût à prendre un obſervateur, s'il étoit ſujet à ſe tromper, en écrivant des nombres; mais dans ce cas-là, je ne lui conſeillerois pas de s'engager dans de pareilles opérations, où l'on ne peut éviter d'avoir une multitude de nombres à écrire. Pour nous, nous avons apporté une attention ſcrupuleuſe à éviter toute erreur, tant dans la conſtruction de notre régiſtre, que dans l'addition des reſtes. Nous nous fuſſions encore épargné une partie de la peine & de l'ennui, en donnant un peu plus de longueur aux perches, pour n'avoir pas beſoin de doubler les points dans les lames du milieu, ni d'en ſouſtraire les intervalles, & pour pouvoir graver ſur chaque lame des points uniques à égales diſtances: car il eſt bien plus facile de prendre avec les petites pointes d'un compas la diſtance d'un de ces points à l'autre, que celle qui ſe trouve entre les bords de deux lames: c'eſt ce que nous avons éprouvé plus d'une fois, & c'eſt pour cela que nous avons auſſi marqué ſur les lames G, F de petits points, dont nous avons meſuré les diſtances, & non point la diſtance entre les extrémités des lames. Ces lames étoient déja placées de ſorte, que le bord extérieur de la lame G étoit

éloigné préciſément de 9 palmes du point du milieu de la lame I : il n'étoit donc plus poſſible de marquer ſur les lames G, F′ des points qui fuſſent à cette diſtance de ces points du milieu.

Remédier à l'inégalité du terrein.

342. Malgré l'inégalité du terrein, on pouvoit ordinairement mettre les tables E*e*, E′*e*′, E″*e*″ de niveau, en les élevant à proportion que le terrein s'abaiſſoit, comme on le voit dans la figure, où il y a une deſcente ſur la droite, & où la troiſieme table eſt plus élevée ſur ſon ſupport que la ſeconde, & celle-ci plus que la premiere. Mais lorſque le terrein s'abaiſſe au point que la longueur de la tringle qui ſoutient la table, ne peut plus y ſuffire, pour lors on n'appuie plus les têtes des perches ſur le milieu des tables, mais on les place en avant, comme en I & L; & parceque le point L étoit plus bas que le point I, nous ſuſpendions un fil à plomb très délié IK, qui effleuroit l'extrémité I de la lame, & ſur lequel nous amenions la perche ſuivante, juſqu'à ce qu'il la touchât, auquel cas nous marquions dans le régiſtre *o* : plus ſouvent encore, pour éviter l'embarras d'amener cette perche préciſément à ce point de contact, nous prenions la diſtance du point de ſa premiere lame, au côté du fil qui regardoit la perche précédente, pour y faire entrer juſqu'à l'épaiſſeur du fil, tout délié qu'il étoit; & l'excès de cet intervalle ſur celui des deux points de la lame Z, étoit conſigné dans le régiſtre. Dans les montées, la nouvelle table étoit au contraire plus élevée que la précédente, comme ſi, dans la même figure, on alloit de droite à gauche.

De l'allongement & raccourciſſement des perches.

343. J'en ai dit aſſez, au Liv. I, ſur les moyens de placer les perches dans la direction de la baſe, & dans une poſition horizontale; il reſte à parler des erreurs que peut produire ce défaut de poſition & de direction. Mais je dirai auparavant ce qui a rapport à la vérification des perches, à commencer par celle des intervalles de 9 palmes, qui ſont au nombre de trois dans chaque perche. Nous avons eu ſoin dès le commencement de les rendre égaux à 9 palmes romains, pris ſur l'étalon du Capitole, qui conſiſte en dix palmes gravés ſur la pierre; & nous avons marqué cette diſtance par de petits points ſur une verge de fer, que nous portions toujours avec

nous, & auprès de laquelle nous mettions un thermometre de M. de *Reaumur*. Quoique les perches fussent prises d'un vieux bois, qui avoit long-tems servi de mât, la chaleur ou le froid, & l'humidité changeoient ces intervalles ; & j'ai peine à croire qu'il y ait des bois dans qui la chaleur & l'humidité ne fassent aucun changement. Ainsi nous examinions, trois ou quatre fois le jour, l'état des perches.

Moyen de les évaluer.

344. Nous avions un compas à verge, qui consistoit en une regle & deux pointes, l'une desquelles est mobile à volonté. S'il y avoit eu une vis pour faire avancer cette pointe, avec un index, pour marquer le mouvement, rien n'eût été plus facile que cet examen. Les pointes du compas placées à la distance des points de la verge de fer, & la pointe immobile appliquée à l'une des extrémités des intervalles FG, HI ou IG, nous eussions amené avec la vis l'autre pointe à l'autre extrémité, & le mouvement de l'index eût donné la différence. Que s'il y avoit eu de part & d'autre de l'un des points de la verge de fer une échelle avec des transversales, on auroit pu y porter avec ce compas tous les intervalles de chaque perche, & en remarquer la différence au moyen de cette échelle. Mais comme nous n'avions rien de tout cela, je m'y suis pris d'une autre maniere, qui n'est ni moins aisée, ni moins précise.

Moyen dont on s'est servi. Pl. III. fig. 17. 18.

345. TV (fig. 18.) représente une lame, les points H, I sont les mêmes que dans la figure 17. Du point I, comme centre, & avec le rayon IH, je décris sur la lame l'arc RQ. Ensuite ayant placé une pointe du compas au milieu de cet arc en H, je prends avec l'autre pointe le point *i*, à une distance donnée de I; & du point *i*, comme centre, je décris avec la même ouverture de compas l'arc *r*H*q*: je fais la même chose sur les points des autres lames. Cela supposé, nous prenions avec ce même compas sur la verge de fer l'intervalle de 9 palmes, & comme les deux instrumens étoient de même métal, & qu'ils recevoient par conséquent les mêmes impressions de la chaleur, dès que le compas étoit à cette ouverture, il la conservoit long-tems : ensuite appliquant l'une des pointes du compas sur l'une des extrémités de l'intervalle que nous voulions vérifier, comme en I, l'autre pointe pouvoit

pouvoit parcourir tout l'arc RHQ, dans le cas où cet intervalle n'eût point changé : pour peu qu'il y eût de changement, cette pointe devoit couper l'arc *r*H*q*, en-delà ou en-deçà de l'arc RHQ, comme en *s* ou *s'*, du côté de *i*, ou du côté opposé, selon que l'intervalle étoit raccourci ou allongé. On prenoit avec un compas & une petite échelle l'intervalle H*s*, au moyen de quoi on déterminoit la diminution ou augmentation de l'intervalle IH de la maniere suivante.

346. D'abord la ligne I*s* ou I*s'* rencontrant l'arc RHQ en S ou S'; S*s* ou S'*s'* sera la diminution ou augmentation de l'intervalle. Or les tangentes au point H des arcs RHQ, *r*H*q*, étant perpendiculaires aux rayons HI, H*i*, elles doivent être autant inclinées l'une sur l'autre que ces rayons. De plus, les cordes des arcs HS, H*s*, ou HS', H*s'* étant à peu près égales, elles feront avec les tangentes des angles égaux; d'où il suit qu'elles seront autant inclinées l'une sur l'autre que les tangentes, c'est-à-dire autant que les rayons. Ainsi les angles SH*s*, S'H*s'* sont à peu près égaux à l'angle IH*i*, & les triangles SH*s*, S'H*s'* semblables au triangle isocele IH*i*. Donc IH est à I*i*, comme H*s* ou H*s'* à S*s* ou S'*s'*. Or il suit de-là premierement, que connoissant les trois premiers termes, on a le quatrieme qui est la valeur cherchée : secondement, qu'en faisant I*i* très petite en comparaison de HI, la valeur cherchée S*s* ou S'*s'* est très petite par rapport à H*s* ou H*s'*, que par conséquent on aura une grande échelle pour les plus petites différences : troisiemement, que HI & I*i* étant constantes, S*s* ou S'*s'* est en raison de H*s* ou H*s'*; d'où il suit que connoissant S*s* ou S'*s'* pour une distance donnée H*s* ou H*s'*, on trouvera les différences pour toutes les autres distances, & qu'on en pourra dresser des tables. C'est ce que nous avons fait; & de-là nous n'avions pas besoin de beaucoup de tems pour vérifier les 9 intervalles, & pour connoître ce qu'il falloit en conséquence ajouter ou retrancher de la mesure.

Suite.

347. Or il est arrivé à ce sujet ce que j'ai déja remarqué (n°. 156. Liv. I.), savoir que parmi les différentes parties d'une même perche, ou les différens intervalles de ses points, l'un s'allongeoit tandis que l'autre se raccourcissoit. J'en

Variations bizarres. Pl. I. fig. 1.

donnerai pour exemple les différences que nous trouvâmes le 15 décembre en mesurant la base de *Rimini*. Je les désignerai ici par des nombres qui expriment les distances H*s'* ou H*s*, proportionnelles à leur raccourcissement ou allongement, & qui sont affectées du signe — dans le premier cas, du signe + dans le second. A la premiere vérification de la premiere perche, ces trois intervalles furent trouvés + 8, 0, + 4, à la seconde 0, — 8, + 1; jusqu'ici tous avoient diminué, le troisieme moins que les précédens; mais à la troisieme on trouva + 4, — 11 $\frac{1}{2}$, + 1: voilà maintenant le premier intervalle qui augmente; le second va toujours en décroissant; le troisieme reste dans le même état. La premiere vérification de la seconde perche donna + 7, + 4, + 8, la seconde + 4, + 3, — 7; la troisieme + 2, 0, + 5: d'abord tous les intervalles ont décrû, mais fort inégalement; ensuite les deux premiers ont continué à décroître toujours inégalement, tandis que le troisieme s'est considérablement accrû: il en est arrivé autant le même jour dans la troisieme perche; & les autres jours nous ne manquâmes pas d'exemples d'une telle bigarrure.

Rectification de la courbure des perches. Pl. III. fig 17. 19.

348. Venons maintenant à la rectification de la courbure des perches. Pour la connoître nous tendions un fil de F en G (fig. 17.), & nous prenions les distances horizontales des points H & I, au plan vertical, qui passoit par le fil & la perche, & les distances verticales du fil au plan de la perche. Les points F, H, I, G (fig. 19.) sont les mêmes que dans la figure 17, FG le fil tendu, divisé également par les points *h*, *i*, auxquels répondent perpendiculairement, sur le plan de la perche, les points T, V éloignés horizontalement des points H, I. Ayant placé horizontalement une échelle sur la premiere perche, nous observions du point O, beaucoup plus élevé au-dessus du fil qu'il ne paroît dans la figure, la distance horizontale HT; ensuite nous placions l'échelle verticalement pour observer la distance T*h* du fil à la perche: nous mesurions de même les distances IV, *i*V. Cela fait, nous en tirions l'excès de FH, HI, IG, sur FT, TV, VG, & de FT, TV, VG, sur F*h*, *hi*, *i*G, de la façon que nous allons dire.

349. La géométrie de l'infini donne un théorème qu'on

peut appliquer ſurement à de petites quantités, ſavoir qu'*en tout triangle rectangle, dont l'un des angles eſt infiniment petit, on trouve la différence de l'hypoténuſe au grand côté, en diviſant le quarré du petit par le double de l'hypoténuſe.* Soit (fig. 20.) le triangle rectangle FT*h*, dont l'angle en F ſoit infiniment petit, ou très petit; du point F comme centre, & avec le rayon F*h*, je décris un demi-cercle qui coupe FT prolongé dans les points X, *x*; TX eſt la différence de l'hypoténuſe F*h*, ou FX, au grand côté FT, & le petit côté T*h* eſt moyen proportionnel entre *x*T & TX. Donc on aura TX en diviſant le quarré de T*h* par *x*T, ou, ce qui eſt à peu près le même, par *x*X double de FX, ou F*h*. C. Q. F. D. Théorème général.

350. Cela poſé, pour avoir (fig. 19.) la différence de FT à F*h*, il ſuffit de diviſer le quarré de T*h* par le double de FT, ou, ce qui eſt à peu près le même, par le double de FH, c'eſt-à-dire par 18 palmes: de même pour avoir la différence de FH à FT, il ſuffit de diviſer le quarré de HT par la même quantité. Les quarrés de VI, & V*i* diviſés par 18 palmes, donneront également les différences de GV à G*i*, & de GI à GV; & ſi du point T on tire des paralleles à HI, *hi*, qui rencontrent V*i*, VI en *a* & *b*, enſorte que V*a* ſoit la différence de V*i* & T*h*, & que V*b* ſoit la différence de VI & TH, lorſqu'ils ſont du même côté du fil, comme dans la figure, & leur ſomme, lorſqu'ils ſont d'un côté oppoſé; les quarrés de V*a*, V*b* diviſés par 18 palmes, donneront encore les différences de TV à T*a*, ou *hi*, & de T*b*, ou HI à TV. Son uſage. Pl. III. fig. 19.

351. Il ſuffira donc de diviſer par 18 palmes la ſomme des quarrés de toutes les lignes, telles que TH, T*h*, VI, V*i*, V*b*, V*a*, pour avoir tout d'un coup la différence de toutes les perches, provenante de la courbure. Pour cela il eſt à propos de conſtruire une table des différences relatives à diverſes grandeurs de TH, T*h*, &c. ce qui ſe fait en cherchant une troiſieme proportionnelle à 18 palmes, & à une valeur déterminée quelconque, plus grande que ne peuvent être des lignes telles que TH, T*h*, &c. & en diminuant cette proportionnelle, pour les autres différences, en raiſon doublée de ces mêmes lignes. C'eſt ce que nous avons fait auſſi. Nous euſſions encore abrégé de moitié pour les intervalles FH, GI, Somme des corrections. Autre méthode.

en prenant immédiatement les distances des points H, I au fil FG, & en divisant leurs quarrés par 18 palmes: en effet, ces distances sont des perpendiculaires au fil FG, terminées à deux points de ce fil, comme en *h* & *i*; d'où il s'ensuit que F*h*H, G*i*I sont des triangles rectangles. Mais à l'égard de l'intervalle HI, cette méthode ne peut avoir lieu, parceque les lignes H*h*, I*i* ne sont point dans le même plan, & qu'elles ont des directions fort différentes, surtout lorsque H & I ne sont pas du même côté du fil; d'où il s'ensuit que si l'on tiroit du point H une parallele à *hi*, elle ne rencontreroit point I*i*.

Total de ces divers effets.

352. On prenoit le milieu entre deux vérifications des intervalles de 9 palmes, & on l'ajoutoit ou retranchoit de chacune des mesures qui se trouvoient de l'une à l'autre. Le changement étoit fréquent & assez considérable dans les intervalles de 9 palmes: celui de la courbure étoit moins bizarre & plus léger. Dans la premiere mesure de la base de *Rimini*, le raccourcissement total excédoit à peine un palme, & l'allongement total fut d'un palme, & un peu plus d'un tiers. Dans la seconde mesure, le raccourcissement fut d'un peu plus de deux palmes, sans allongement. La rectification de la courbure des perches dans l'une & l'autre mesure, donna un peu plus d'un demi-palme, savoir dans la premiere $\frac{51}{100}$, & dans la seconde $\frac{57}{100}$. Cette différence doit être retranchée du nombre de palmes qu'on a comptés dans la mesure de la base, puisque le raccourcissement des perches fait qu'on y en compte plus qu'il n'y en a.

Correction des erreurs.

353. Nous avons encore vérifié, dans la base de *Rome*, les intervalles de 9 palmes; mais nous n'y avons pas tenu compte de la courbure, qui ne devoit produire qu'une très légere différence. En effet, le demi-palme que nous trouvâmes à *Rimini*, ne produit pas dans le dégré une différence de 5 palmes, ou 4 pieds, cette base faisant plus de la dixieme partie d'un dégré. Il y eut sans doute aussi quelque différence de courbure dans la base de *Rome*; mais elle n'étoit pas de conséquence.

354. Une correction bien plus importante que celle de la courbure, ou de l'allongement & raccourcissement des perches,

c'eſt celle qu'on doit faire pour les différens dégrés de chaleur. La verge de fer à laquelle nous rapportons les intervalles des perches, eſt dilatée par la chaleur, & condenſée par le froid. Par conſéquent le nombre des meſures priſes ſur la verge de fer, doit être, dans la même baſe, plus petit, ou plus grand, ſuivant que la chaleur eſt plus ou moins forte. Le mieux eſt de prendre d'abord un certain dégré de chaleur moyenne, par exemple le quatorzieme dégré du thermometre de M. de *Reaumur;* c'eſt celui qu'a preſque toujours trouvé M. de *Thury*, dans les cinq meſures de la baſe principale, d'où il a tiré les dégrés de France, meſures dont le parfait accord prouve la juſteſſe; c'eſt encore à peu près celui des environs de Quito, où MM. *Bouguer* & de la *Condamine* ont meſuré une de leurs baſes; & l'on ajoutera ou l'on retranchera la différence relative au dégré de chaleur, ſelon que ce dégré ſera au-deſſus ou au-deſſous du quatorzieme.

Dilatation de la regle de fer par la chaleur.

355. Rien de mieux imaginé que le moyen dont ſe ſert M. de la *Condamine* pour meſurer l'effet de la chaleur ſur les métaux. Cette méthode, auſſi ingénieuſe qu'elle eſt exacte, conſiſte à ſuſpendre une verge de fer de la longueur d'une toiſe, & à compter le nombre d'oſcillations qui répond en 24 heures aux divers dégrés du thermometre de M. de *Reaumur;* d'où il eſt aiſé de déduire la différence de hauteur du centre d'oſcillation & l'allongement de la toiſe. Or M. de la *Condamine* a trouvé qu'à chaque dégré de ce thermometre répond $\frac{1}{87}$ de ligne; ou bien, la toiſe contenant 6×144, ou 864 lignes, qu'à chaque dégré répond $\frac{1}{87 \times 864}$, ou $\frac{1}{75168}$ du tout. De-là prenant un milieu entre deux nombres de dégrés obſervés le même jour, on aura cette proportion: 75168 eſt à ce nombre moyen, comme le nombre de palmes, ou de pieds & de toiſes, qu'on a trouvé dans cet intervalle de tems, à un quatrieme terme, qui fera connoître la différence qu'on cherche, & qu'il faudra ajouter ou retrancher du total des palmes ou des toiſes, ſuivant que ce nombre moyen ſera au-deſſus ou au-deſſous de 14 dégrés. Nous avons meſuré la baſe de *Rome* au printems, & nous avons preſque toujours eu plus de 14 dégrés de chaleur, & le dégré moyen étoit 17. Celle de *Rimini*

Méthode ingénieuſe de M. *de la Condamine.*

a été mesurée en hyver; aussi nous avons eu beaucoup moins de dégrés: le dégré moyen étoit 5, & il a été si constant, qu'à peine a-t-il augmenté ou diminué de deux dégrés. La différence qui en est résultée pour la base de *Rome*, alloit à peine au-delà de deux palmes, qu'il a fallu ajouter; & celle de *Rimini* excédoit à peine 6 palmes qu'il a fallu retrancher.

Apprécier l'erreur de la base.

356. Voyons maintenent à quoi peuvent monter les erreurs d'une base mesurée avec ces instrumens. Nous trouvâmes dans la premiere base de *Rome*, toute correction faite, la valeur de 8034.67 pas, dans la seconde de *Rimini* 7901.14, la premiere contenant 656 $\frac{2}{3}$ de mesures composées de trois perches chacune, ou de 9 intervalles de 9 palmes, & la seconde de 646 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire que ni l'une ni l'autre n'alloit à 2000 perches. Or il a pu se glisser quelque erreur dans la rectification de la longueur & de la direction; mais ce ne peut être qu'une erreur très légere, cette rectification ne s'étant point faite immédiatement, mais au moyen d'une échelle qui augmente considérablement les objets, & diminue d'autant plus les erreurs; de sorte qu'il seroit aisé de démontrer que la somme de toutes les erreurs possibles, dans toute la longueur de la base, est presque absolument insensible. La correction pour la chaleur ne peut être non plus sujette à une erreur de conséquence, puisque cette correction même ne donne en total qu'une valeur légere, & qu'il n'y a rien de plus facile que d'observer le dégré de la chaleur. Ajoutons que ces erreurs ne sont pas toutes à beaucoup près du même côté, & qu'elles s'effacent mutuellement; ce qui rend incomparablement moindre l'erreur totale.

De l'erreur dans la distance des perches;

357. Comme nous ne faisons pas joindre les têtes des perches, on pourroit encore se tromper de quelque chose dans la mesure des intervalles qui les séparent, & ces erreurs pourroient s'accumuler. Mais au moyen d'un compas, dont les pointes sont très déliées, & d'une échelle petite, & en même tems distincte, on évite sans peine une erreur de $\frac{1}{200}$ de pouce, en supposant le palme divisé en 12 pouces romains, & à plus forte raison de $\frac{1}{2000}$ de palme. Or le nombre de ces intervalles ne va pas en tout à 2000, puisqu'il est égal à celui des perches, moins un. Donc quand même les erreurs seroient

toutes du même côté, on pourroit facilement éviter l'erreur d'un palme.

Dans la position du fil à plomb ;

358. Le vent peut cauſer quelque dérangement dans le fil à plomb, dont on ſe ſert quand on veut interrompre & reprendre l'ouvrage, ou lorſqu'on doit élever ou abaiſſer les perches. Mais outre que ces erreurs ſont en très petit nombre, & qu'elles s'effacent en grande partie ; avec un peu d'attention on les réduira preſqu'à rien. Je ne mettrois pas ici un pouce d'erreur ſur toute la baſe.

Dans la position des perches.

359. Les erreurs provenantes de l'inclinaiſon des perches au plan horizontal, ou à la direction de la baſe, ſemblent d'abord tirer plus à conſéquence, parcequ'elles ſont toutes du même côté, & qu'elles augmentent le nombre des meſures, puiſqu'une perche inclinée ſur une baſe rectiligne eſt plus longue que le ſegment de la baſe auquel elle répond : voyons donc à quoi elles peuvent aller. Soit (fig. 20) F*h* une perche placée obliquement, *h*T la diſtance à la juſte poſition ; on aura ici, comme au n°. 349, TX troiſieme proportionnelle à *x*T, qui eſt à peu près double de F*h*, & à cette diſtance T*h*. De plus, chaque perche eſt de 27 palmes, qui font 324 pouces romains, ou douziemes de palme. Or il eſt très aiſé, dans la poſition de la perche, de diſtinguer une différence d'un tiers de pouce. On aura donc cette analogie : 648 pouces, ou le double de F*h*, eſt à $\frac{1}{3}$, comme $\frac{1}{3}$ eſt à l'erreur, qui ſe trouve $\frac{1}{5832}$. Cela ſuppoſé, le nombre des poſitions des perches eſt au-deſſous de 2000, & comme en chaque poſition on peut commettre une double erreur, le nombre des erreurs ne montera pas à 4000. Ainſi le total de l'erreur, dans la baſe, n'ira pas à un palme, & parceque la baſe eſt plus de la dixieme partie du dégré, l'erreur du dégré ne ſera pas de dix palmes, ni même d'une toiſe.

Effet de cette erreur. Accord des meſures.

360. Ajoutons que cette erreur même augmente la meſure de l'intervalle qui ſert à déterminer la valeur du dégré, & que ſi l'on veut y avoir égard, notre dégré en ſera un peu plus petit. Or il eſt déja moindre que le plus méridional de France, meſuré par M. *Caſſini*, & dans la même latitude. Tout ceci prouve ce que j'ai avancé (Liv. 1, n°. 157) ; & pour peu qu'on faſſe d'attention à ce que nous venons de dire, on ne

sera pas surpris de l'accord parfait qui s'est trouvé entre les deux mesures de cette base. Car cette derniere erreur augmente l'une & l'autre base ; & toutes les autres erreurs dont nous avons fait mention, sans parler de celles qui pourroient provenir de la négligence d'un observateur peu attentif, peuvent augmenter la mesure d'une base & diminuer celle de l'autre, mais de si peu de chose, qu'à moins que l'observateur ne se néglige trop, on y trouvera à peine quelque différence.

De l'erreur dans la largeur d'une riviere.

361. Il y a dans notre base de *Rimini* deux autres sources d'une erreur qu'on ne pourroit découvrir, quelque grande qu'elle fût, par la comparaison des deux mesures de cette base, parce-qu'elle affecte également les deux mesures. La premiere source d'erreur, c'est la riviere qui se trouve sur ce passage. Nous n'avons pu mesurer immédiatement cet intervalle ; mais nous l'avons déterminé par un triangle presque équilatéral, dont nous avons mesuré les angles & un côté presque égal à l'intervalle cherché. L'erreur que nous avons pu commettre dans la mesure de ce côté, est la même que celle qui se seroit glissée dans la mesure de l'intervalle même. Quant à l'erreur des angles, elle ne peut apporter dans la distance une différence d'un demi-pouce, ni même de trois lignes. Car dans une si petite distance, la différence d'un demi-pouce paroissoit dans la lunette de notre petit quart-de-de-cercle, une différence énorme ; & nous avons eu grand soin de placer le centre de l'instrument dans les deux points qui terminent le côté que nous avions choisi & mesuré, pour en tirer la mesure de cet intervalle.

Moyens de l'éviter.

362. Nous avons mesuré ce côté avec une scrupuleuse attention ; les angles ont été pris à diverses repriſes, & toujours avec une conformité entiere ; nous avons laissé pour marque, des bois enfoncés dans la terre, que nous avons trouvés au retour à la même place ; & la même mesure nous a servi dans l'aller & le retour.

De l'erreur produite par le coude de la base. Pl. I, fig. 1.

363. L'autre source d'erreur est le coude que fait notre base (Liv. 1, n°. 155, & Liv. 2, n°. 18.), & qui est représenté dans la figure 1, planche I. Mais ce n'est pas-là de ces erreurs dont on soit obligé de tenir compte. Car nous avons mesuré fort exactement avec le grand quart-de-cercle les angles A

&

& C. Nous avons placé perpendiculairement de groſſes pieces de bois aux points A, B, C, ſur leſquelles étoient poſées en travers, & dans un plan vertical, de petites planchettes enduites de chaux, & qui nous ſervoient de but. Nous avons pris avec ſoin la diſtance du centre du quart-de-cercle aux points A & C, pour corriger la petite erreur qui en réſulte, & nous avons trouvé que les ſinus de ces angles étoient exactement proportionnels aux côtés oppoſés BC, AB, que nous avions meſurés immédiatement: enfin nous avons trouvé les ſegmens AD, DC, par cette analogie: le rayon eſt au coſinus de l'angle A, ou de l'angle C, comme AB, ou BC, à AD, ou CD.

Cette erreur n'eſt pas ſenſible.

364. Suppoſons maintenant, ce qui n'eſt certainement pas à préſumer, qu'il y ait une erreur de 20″ dans l'angle A, on trouve le ſegment AD par cette analogie: le rayon eſt au ſinus de l'angle ABD, comme AB à AD. Ainſi le rayon & le côté AB étant le même, & l'angle ABD changeant auſſi de 20″, on aura par le n°. 317 cette proportion: la tangente de l'angle ABD, ou la co-tangente de l'angle A eſt au ſinus de 20″, comme AD eſt à l'erreur de ce ſegment. Or l'angle ABD eſt le complément de l'angle A, qui, n°. 18, Liv. 2, eſt de 4°, 10′, 45″, & dont la co-tangente eſt moindre que 1378206, pour le rayon 100000, qui donne 10 pour le ſinus de 20″. Donc l'erreur de ce ſegment n'eſt pas $\frac{10}{1378206}$ du tout. Ce ſegment a été trouvé par le calcul de 28569.6 palmes; l'erreur eſt donc moindre que $\frac{285696}{1378206}$, c'eſt-à-dire moindre qu'un quart de palme, & l'erreur du ſegment CD ſeroit à peu près la même; d'où il s'enſuit que l'erreur de toute la baſe ſeroit bien au-deſſous d'un demi-palme, & celle du dégré bien au-deſſous de 5 palmes, au-deſſous même d'une demi-toiſe; & à meſure qu'on diminue l'erreur de l'angle, celle du dégré diminue à peu près dans la même raiſon, & par-là elle devient preſque abſolument inſenſible.

Autre erreur dont on ne doit pas tenir compte.

365. Il y a une autre petite erreur dans la baſe de *Rome*, mais ſi petite, qu'elle ne mérite pas d'être comptée. Cette erreur vient de ce que la baſe n'eſt pas toute ſur une ſeule ligne, ni dans un ſeul plan horizontal, mais qu'elle eſt tantôt plus haute, tantôt plus baſſe. Nous avons toujours gardé le

niveau, en obſervant de placer les perches, tantôt plus haut, tantôt plus bas, & en nous ſervant pour cela d'un fil à plomb. On ſait que l'intervalle de deux fils à plomb eſt plus ou moins grand, ſuivant qu'il eſt plus ou moins élevé au-deſſus du niveau de la mer. Mais le terrein, fût-il fort inégal, l'erreur n'eſt jamais ſenſible; & dans le cas préſent, où le terrein étoit aſſez uni, on peut la regarder comme nulle.

Autre erreur inſenſible.

366. On ne doit pas plus tenir compte de l'erreur qu'on auroit pu commettre en réduiſant la baſe de la direction horizontale à l'oblique, les points extrêmes n'étant pas de niveau. Cette réduction n'a pas lieu dans la baſe de *Rimini*, dont les deux extrémités ſont au bord de la mer, & par conſéquent à même hauteur. Mais dans la baſe de *Rome* il y avoit un demi-dégré de différence. Ainſi pour réduire la baſe horizontale à l'oblique, il faut ſe ſervir de cette analogie: le ſinus du complément d'un demi-dégré eſt au rayon, ou bien le rayon eſt à la ſécante d'un demi-dégré, comme la baſe horizontale eſt à l'oblique; d'où il ſuit que le rayon eſt à l'excès de la ſécante ſur le rayon, ou que 1000000 eſt à 38, comme la baſe horizontale, qui, ſuivant le n°. 19 du Liv. II, eſt de 8034.37 pas, eſt à la quantité qui lui doit être ajoutée pour la réduire à l'oblique, & qu'on trouvera 0.30. Donc la baſe oblique eſt 8034.67; c'eſt la valeur qu'on lui aſſigne à l'endroit cité. Or eût-on commis dans cet angle une erreur de trois minutes, il n'en réſulteroit pas dans la baſe une différence de $\frac{1}{10}$ de pas. Car ſi l'angle n'eût été que de 27′, l'excès de la ſécante eût été 31, & la réduction 0.25, qui ne differe de la premiere que de 0.05. Par où l'on voit qu'il n'y a rien à craindre du tout de ces ſortes d'erreurs.

De la meſure qu'on a employée.

367. De cette ſorte on a la meſure des baſes en palmes romains, dont nous en avons pris 9 ſur l'étalon du Capitole, & qu'il eſt aiſé de réduire en pas. Car chaque pas contient cinq pieds; & chaque pied, (j'entends ceux qui compoſent aujourd'hui les milles d'Italie, & dont on ſe ſert pour placer les pierres à cette diſtance ſur les chemins publics), contient ſeize douziemes de palmes, de ſorte qu'il y a dans un mille 6666 $\frac{2}{3}$ palmes. Comme nous n'avions pas encore reçu la toiſe qu'on nous envoyoit de *Paris*, & que nous voulions

une mesure fixe, & qui fût en usage du moins à *Rome*, nous avons pris pour cela un intervalle de 9 palmes, qui ne surpasse la toise que d'environ deux pouces; le pied-de-roi contenant près d'un palme & demi.

Comparaison de cette mesure à la toise.

368. Nous reçûmes enfin la toise de M. *de Mairan*, & nous la comparâmes à notre mesure. D'abord avec un compas à verge nous avons pris l'intervalle de la toise, & nous l'avons transporté sur la verge de fer, où nous avions marqué avec de petits points l'intervalle de 9 palmes, en plaçant l'une des pointes du compas sur l'un de ces points, & en marquant avec l'autre pointe sur un papier collé en cet endroit, un autre point sur la même ligne; ce que nous connoissions en tendant un fil d'une extrémité de l'intervalle de 9 palmes à l'autre. La toise s'est trouvée un peu plus petite. Nous avons cherché de plusieurs façons ce rapport, d'où dépendent tous les autres.

Rapport de la toise à neuf palmes.

369. Premierement nous avons porté cette différence sur l'échelle que le sieur *Langlois* avoit gravée sur cette même toise; & après avoir répété plusieurs fois cette opération, qui nous donnoit constamment la même valeur, nous l'avons trouvé de 2 pouces, 3.31 lignes. Ensuite portant cette même différence sur notre mesure, en suivant la direction du fil, nous avons trouvé qu'elle y étoit contenue trente-deux fois, & qu'il restoit outre cela un segment qui, transporté sur l'échelle du sieur *Langlois*, s'est trouvé de 1 pouce 6.06 lignes. Nous avons aussi répété plusieurs fois cette opération qui donnoit toujours le même résultat. Comme la toise contient 72 pouces, ou 864 lignes, & que, suivant la premiere opération, notre mesure a 27.31 lignes de plus; cette mesure comprend 891.31 lignes. A l'égard de la seconde opération, si l'on retranche de la toise le segment qui est resté, savoir 18.06 lignes, il reste pour les 31 parties égales 845.94 lignes, la 32$^{me.}$ partie étant l'excès de notre mesure sur la toise. Ayant donc divisé 845.94 par 31, on a 27.29, pour cette différence qu'on avoit trouvée immédiatement de 27.31 lignes, à cause de quelque petite erreur dans l'opération, jointe à quelque erreur semblable de la division du sieur *Langlois*. Prenant donc un milieu, notre mesure de 9 palmes se trouvera de 891.30 lignes, & le rapport de la toise à notre mesure sera celui de 86400 à 89130, ou de 8640 à 8913.

De l'erreur qui en peut réſulter.

370. Nous nous ſommes ſervis, dans le premier & le ſecond Livre, de cette réduction, que nous ne croyons pas s'écarter de la vraie de $\frac{1}{86400}$ du total; ſoit parceque les réſultats des deux opérations ne different pas plus du réſultat moyen, ſoit parceque les autres méthodes que nous avons employées pour trouver ce rapport, nous donnoient à peu près la même choſe. Or une erreur de cette nature ne peut produire dans le dégré, qui eſt au-deſſous de 57000 toiſes, une erreur d'une toiſe. On voit que de ce premier rapport ſuivent aiſément tous les autres.

Le pied-de-roi comparé à l'ancien & au nouveau pied romain.

371. Car en premier lieu le palme contient $\frac{891.30}{9}$, ou $99\frac{1}{30}$ lignes de pied de *Paris*; & comme le pied romain, en uſage aujourd'hui, contient $\frac{16}{12}$ de palme, on aura cette proportion: 3 eſt à 4, comme $99\frac{1}{30}$ à un quatrieme terme qui ſe trouve $132\frac{2}{45}$, & qui excede d'environ une ligne l'ancien pied romain. Nous en avons quatre modeles au Capitole: le Statilien, le Colutien, l'Ebuſien & le Capponien. Le P. Ab. *Revillas* les a exactement réduits en pieds de *Paris*, comme on le peut voir dans les Diſſertations de *Cortone*, Tom. 3, Diſſert. 4. Il leur a trouvé en dixiemes de ligne $1310\frac{5}{6}$, $1307\frac{1}{2}$, $1314\frac{1}{8}$, $1309\frac{5}{12}$; & prenant un milieu, on a $1310\frac{1}{2}$; ce qui revient, à très peuprès à la valeur qui lui eſt aſſignée dans une lettre de M. *Stuart*, imprimée à la fin de l'ouvrage du P. *Bandini*, ſur l'obéliſque nouvellement découvert au champ de Mars. Après le départ de M. *Stuart* pour la Grece, je tirai cette lettre de quelques papiers qu'il avoit laiſſés ici (à Rome): je la rédigeai, je la mis en italien & en latin, avec des notes propres à éclaircir le texte, ou à confirmer les heureuſes découvertes de cet habile homme. On y voit la meſure du pied romain tirée de la dimenſion de cet obéliſque, & d'un paſſage de *Pline* qui en marque la hauteur: cette meſure eſt de 131 lignes, ou à peu près; ce qui s'accorde très bien, & à une très petite différence près, avec celle du P. *Revillas*.

Accord de deux meſures. L'ancien pied comparé au nouveau.

372. Il s'enſuit que notre pied romain d'aujourd'hui, peu différent de l'ancien, eſt tant ſoit peu plus long; & le P. *Revillas* l'a trouvé tel: cependant cet Auteur fait le mille de 6680 palmes, c'eſt-à-dire plus long que le nôtre de $3\frac{1}{3}$ palmes. Malgré cela il trouve le même rapport que nous entre

le pied de *Paris* & le palme, qu'il a pris sur l'étalon de dix palmes du Capitole; car il donne au palme en dixiemes de ligne 990 $\frac{3}{10}$, & nous lui en donnons 990 $\frac{3}{9}$, ce qui fait pour lui 99 $\frac{3}{100}$ lignes, & pour nous 99 $\frac{1}{30}$: la différence est $\frac{1}{300}$ de ligne; différence qui ne peut être apperçue par observation. Il est étonnant qu'avec un étalon terminé par des angles & par des arrêtes aussi grossierement tracés, on puisse se rencontrer de si près. Du reste, on ne doit pas trouver extraordinaire que le pied antique soit plus court: ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on a remarqué que les mesures deviennent plus longues à mesure qu'on les prend successivement les unes sur les autres, soit parceque la rouille ajoute une petite croute aux métaux dont elles sont composées pour la plupart, soit parceque les ouvriers les font plutôt trop longues que trop courtes, à cause qu'il leur est aisé avec une lime de les raccourcir, au lieu que si elles sont trop courtes, il n'y a plus de remede.

373. Quoi qu'il en soit, l'objet de notre recherche n'en souffre point. Car pour pouvoir comparer notre dégré avec les autres, il suffit d'avoir le rapport de la toise qui a servi à mesurer les autres dégrés, à la mesure dont nous nous sommes nous-mêmes servis; & il n'importe que cette mesure contienne exactement, ou non, un certain nombre de palmes, ou de pieds romains. Or ayant reçu la toise que M. de *Mairan* a comparée si exactement avec la sienne, d'où le même artiste (le sieur *Langlois*) avoit déja tiré les toises qui ont servi dans la mesure des autres dégrés, il ne nous étoit pas difficile de la comparer à notre mesure; & c'est ce que nous avons fait avec une telle précision, que la plus grande erreur possible n'apporteroit pas dans le dégré entier une différence d'une toise. En prenant donc pour le palme & le pied romain les valeurs que nous leur avons trouvées, savoir pour le palme 99 $\frac{1}{30}$ lignes, & pour le pied 132 $\frac{2}{45}$, on trouve par le calcul les rapports suivans des mesures de *Rome* à celles de France.

Rapport des mesures de *Rome* à celles de *Paris*.

Mesures romaines	Au pied de *Paris*,	A la toise.
Le palme	Comme 2971 à 4320	Comme 2971 à 25920
Le pied	Comme 2971 à 3240	Comme 2971 à 19440
Le pas	Comme 2971 à 648	Comme 2971 à 3888

Plusieurs mesures exprimées en toises.

374. De-là par le calcul des nombres ou de leurs logarithmes, toutes les mesures énoncées en pas ou en palmes dans le Livre second, peuvent aisément se réduire en toises. La base de *Rimini* (n°. 19, Liv. 2.) est de 52674.3 palmes, qui, multipliés par $\frac{3}{4}$, donnent le nombre de pieds romains, & multipliés par $\frac{3}{4\times 5}$, ou $\frac{3}{20}$, ou 0.15 donnent 7901.14 pas, qu'on réduira en toises par cette analogie: 3888 est à 2971, comme 7901.14 à un quatrieme terme qui se trouve 6037.62. Ce nombre est celui des toises compriſes dans cette base. De même on a trouvé à la base de *Rome* 8034.67 pas qui se réduisent à 6139.66 toises.

Déterminer les côtés & la longueur du polygone.

375. Des bases ainsi réduites, on tire tous les côtés du polygone; & connoissant les côtés & la position du polygone, on en déduit l'intervalle intercepté par les paralleles qui passent par les lieux où se sont faites les observations astronomiques, c'est-à-dire par la salle du college romain, & par la maison de M. *Garampi* à *Rimini*. Nous avons suivi cet ordre dans le chapitre II, & nous avons donné (n°. 268) une méthode pour déduire de-là même tous les côtés rectilignes du polygone. Le P. *Maire* a donné (Liv. II, n°. 21,) une liste de ces côtés, tels qu'on les tire de la base de *Rimini*; & à la fin de cette table, la base de *Rome* se trouve de 8033.4 pas, ou d'un pas trop courte. Si on avoit commencé le calcul par cette base, chaque côté du polygone, & chaque portion du méridien, celle surtout qu'on a trouvée, toute réduction faite, entre le dôme de *St Pierre* & l'embouchure de l'*Ausa*, eussent été plus grands en raison de 8034.67 à 8033.4. Donc pour connoître ce qui résulte de la base de *Rome*, il suffit, après toutes les réductions, d'augmenter cet intervalle suivant ce rapport.

376. Or cet intervalle même, après les deux sortes de réductions qu'on y a faites (n°. 294 & 295), eſt, ſuivant les obſervations de *Rome* ſur la poſition du polygone, la différence de 5.7 pas à 161127.9, c'eſt-à-dire 161122.2 pas; ſuivant celles de *Rimini*, il eſt de trois pas plus long, par le n°. 302; ce qui donne 161125.2: & ſi l'on veut prendre un milieu, il vient 161123.7. La baſe de *Rome* eût donné un intervalle plus long dans la raiſon de 803467 à 803340.

Diſtances des paralleles du polygone.

377. Cet intervalle ſera égal (n°. 295) à celui qui eſt intercepté par les paralleles de la ſalle du college romain & de la maiſon de M. *Garampi*, ſi on lui ajoute 269 pas, & qu'on en retranche 139.1, ou ce qui revient au même, ſi on y ajoute la différence de ces deux nombres, ſavoir 129.9. De-là l'intervalle de 161123.7, provenant de la baſe de *Rimini*, devient 161253.6 pas, qui, par le rapport que nous avons trouvé entre le pas & la toiſe, ſe réduiſent à 123221.3 toiſes, comme il eſt dit, n°. 204, Liv. I. La baſe de *Rome* l'eût fait plus long ſuivant le même rapport des baſes, non pas abſolument, à cauſe qu'il a fallu ajouter près de 130 pas qui ne dépendent nullement de ces baſes, mais à très peu près, puiſque la différence de la baſe déduite à la baſe actuellement meſurée, n'apporte pas dans ce nombre même de 130 une différence de $\frac{1}{10}$ de pas. Ainſi dès qu'on aura déduit le dégré de la baſe de *Rimini*, il ſuffira, pour avoir celui que donneroit la baſe de *Rome*, de l'augmenter dans la raiſon que nous avons dite.

Diſtances des paralleles des obſervations.

378. Or par le n°. 166, Liv. IV, on a pour réſultat moyen de ſix déterminations moyennes de l'arc céleſte intercepté par les zéniths de la ſalle du college romain & de la maiſon de M. *Garampi*, 2°, 9′, 47″, ou 7787″, qui differe à peine d'une ſeconde de chaque détermination. On aura donc cette analogie: 7787″ eſt à 3600″, que comprend le dégré, comme 123221.3 toiſes à un quatrieme terme, ſavoir 56966.3, qui eſt le nombre de toiſes du dégré moyen de cet intervalle. C'eſt la valeur qu'on lui a déja trouvée, Liv. I, n°. 204.

Valeur du dégré.

379. Cette meſure eſt plutôt trop longue que trop courte, puiſqu'elle eſt tirée de la poſition du polygone, déterminée par les obſervations de *Rome* & de *Rimini*, au lieu qu'on doit

Des corrections à faire au dégré.

faire plus de fond sur celles de *Rome*, qui ont donné un intervalle plus petit ; mais comme la correction faite aux observations de *Rome* par celles de *Rimini*, n'ajoute à l'intervalle entier, qui est de plus de deux dégrés, qu'une différence d'un pas & demi, il n'en revient pas à chaque dégré la valeur d'une demi-toise. Mais nous avons donné quelque chose de plus à notre dégré pour trois raisons que nous avons dites, Liv. I, n. 204.

Premiere correction.

380. La premiere est la différence de la base de *Rome*, qui est un peu plus grande que celle qu'on tire par le calcul de la base de *Rimini*. La base de *Rome*, actuellement mesurée, donne un dégré plus grand que celle de *Rimini*, en raison de 8034.67, à 8033.4; ce qui donne cette analogie: 8033.4, est à 1.27, différence de ces nombres, comme 56966.3 toises, qu'on a trouvées dans le dégré à un quatrieme terme, savoir 9.0 toises dont ce dégré est augmenté par la base de *Rome*.

Seconde correction.

381. La seconde raison est la différence du côté du polygone terminé au dôme de *St Pierre* & au mont *Genarro*. La réduction des angles (n°. 324) fait monter ce côté à 22935.6 pas, & par une réduction immédiate, il s'est trouvé plus grand de 3.6 pas. Si l'erreur des autres côtés étoit dans la même raison, le dégré augmenteroit d'une quantité qu'on trouve par cette analogie: 22935.6 est à 3.6, comme 56966.3 toises qu'on a trouvées dans le dégré, à 8.9 toises qu'il faudroit ajouter dans cette supposition.

Troisieme correction.

382. La troisieme est que dans la mesure de l'arc céleste on doit faire plus de fond sur les premieres observations de *Rome* de l'étoile α du cygne, comparées à celles de *Rimini*. Il en résulteroit (n°. 165, Liv. IV,) pour l'arc céleste 2°, 9′, 46″, ou 7786″.1, au lieu que toutes les observations ensemble lui donnent 2°, 9′, 47″. Ainsi le dégré augmenteroit en raison de 7787 à 7786.1, & on auroit cette différence par cette analogie: 7786.1 est à 0.9, différence de ces nombres, comme 56966.3 toises, qu'on a trouvé au dégré, à 6.6 toises qu'il faudroit lui ajouter.

Le dégré corrigé.

383. Si nous voulons ne nous en rapporter qu'à cette seule étoile, & retenir le total de l'augmentation 6.6 avec le tiers de celle qui provient de la différence des bases, celle de *Rome* n'ayant

n'ayant été mesurée qu'une fois, & celle de *Rimini* deux fois, & le tiers de celle qui provient de la réduction des côtés, car le côté en question est le dernier, & l'erreur des précédens doit être moindre, étant formée par l'assemblage d'un plus petit nombre d'erreurs; nous aurons par les bases 3.0, par les côtés 3.0, par l'étoile 6.6; le total est 12.6, qui, ajouté à 56966.3 toises, qu'on a déja trouvé dans le dégré, le fait monter à 56979, mesure à peu près exacte.

384. Je dis à peu près, car je suis persuadé qu'on en devroit retrancher quelques toises. La base de *Rimini* est sur un terrein bien plus égal; elle a été mesurée deux fois, & le parfait accord de ces mesures en prouve la justesse: j'y compte deux fois plus que sur celle de *Rome*, pour le moins. J'ai quelque soupçon sur cette hauteur du mont *Genarro*, vu du dôme de *St Pierre*, & je lui attribue la meilleure partie de la différence de ce côté: & ce qui est le principal, j'aimerois beaucoup mieux prendre un milieu entre un si grand nombre de mesures de l'arc céleste, que de m'en rapporter à une seule mesure & à une seule étoile; & si on prend ce milieu, selon l'usage, il arrive que du nombre de toises qu'on voudroit ajouter, on en retranche d'un seul coup près de sept.

Qu'il péche plutôt par trop de longueur.

385. On ne peut soupçonner dans ce dégré, de la part des observations astronomiques, une erreur plus grande que celle qu'y produiroit une erreur d'une seconde qu'on auroit commise dans ces observations, laquelle s'évalue à 7 toises; ni de la part de la base une erreur de plus d'un ou deux pieds, y ayant à peine entre les deux mesures de la base de *Rimini* une différence de deux pouces, & cette base étant plus de la dixieme partie du dégré; d'où il s'ensuit que l'erreur du dégré n'est pas dix fois l'erreur de la base. Du côté des angles du polygone, on n'a pas lieu de craindre une erreur plus grande que celle qui provient de la différence de la base de *Rome* calculée, à cette même base actuellement mesurée; & nous avons vu que cette erreur est au plus de 8.5 toises. Enfin la réduction du polygone à un plan horizontal, ne peut produire dans le dégré une erreur plus grande que la différence qu'y apporte la réduction immédiate du dernier côté, savoir 8.9 toises; & l'erreur commise dans la position du polygone, ne produit

Limites des erreurs.

dans le dégré qu'une erreur d'une toiſe; je ne dis rien de ces autres petites erreurs dont nous avons traité au long, & qui ſont à peine ſenſibles, par exemple l'erreur provenante de la courbure de la baſe de *Rome* (n°. 353) qui ne diminueroit pas le dégré de $\frac{2}{3}$ de toiſe, & autres erreurs ſemblables. Bien plus, les erreurs ci-deſſus mentionnées n'influent qu'en partie dans la meſure du dégré, & on en a tenu compte preſqu'en entier dans la correction qu'on vient de faire; & dans cette correction même, on a plutôt donné plus que moins à la meſure du dégré. Tout cela prouve du moins que notre dégré n'eſt pas au-deſſus de 56979 toiſes, & qu'il en approche aſſez.

386. On peut réduire ces toiſes en pas, ſuivant le rapport du n°. 374, en multipliant par 3888, & diviſant par 2971, ce qui donne 74565; c'eſt-à-dire que ce dégré a un peu plus de 74 $\frac{1}{2}$ milles d'Italie. Or les milles géographiques ſont de 60 au dégré, beaucoup plus grands par conſéquent que ceux d'Italie, juſques-là qu'il faut près de 5 milles d'Italie pour faire 4 milles géographiques. Quant aux lieues de France qui ſont de 25 au dégré, on voit qu'elles ſont à peu près de 3 milles d'Italie. Or on peut tirer de-là la valeur approchée du diametre de la terre pour s'en ſervir aux fins que nous avons dit n°. 295. Car en multipliant le dégré par 180, on aura pour la moitié de la circonférence 13421700 pas; & l'on trouvera le demi-diametre par cette proportion: 355 eſt à 113, comme ce nombre de pas à un quatrieme terme qui ſe trouve 4272260. Donc le diametre eſt 8544520; diametre véritablement approché, ou moyen, puiſqu'il eſt déduit d'un moyen dégré (1).

Le mille romain.

Diametre de la terre.

387. En voilà aſſez ſur la meſure du dégré dont nous ne parlons ici qu'à l'occaſion des inſtrumens qui nous ont ſervi, & dont l'uſage devoit ſe terminer à cette meſure. A l'égard de leur conſtruction, quoique j'aie ſuggéré pluſieurs choſes

Addition ſur les inſtrumens.

(1) On approcheroit encore davantage du diametre moyen, en prenant un milieu entre les dégrés qui ont été meſurés dans la latitude d'environ 45 dégrés. Voyez la note ſur le n°. 65, Liv. I.

à notre artiſte M. *Rufo*, & que je lui aie toujours donné une idée de ce que je ſouhaitois qu'il fît, il a lui-même imaginé avec ſagacité beaucoup de choſes, ſurtout en ce qui concerne le pied du quart-de-cercle, & la facilité de le mouvoir en tout ſens. J'eſpere que d'autres ajouteront beaucoup à la perfection de ces inſtrumens, & qu'ils les rendront très utiles en aſtronomie.

Addition ſur la carte geographique.

388. Je finis en obſervant que, pour dreſſer la carte géographique, nous avons ſouvent meſuré d'autres baſes, mais par une méthode beaucoup plus ſimple & plus que ſuffiſante à cet égard. Elle conſiſtoit à marcher d'un pas modéré, en comptant juſqu'à deux milles pas. Nous ſavions qu'à un très petit nombre de pas près, ce nombre de nos pas revenoit à un mille d'Italie: & ayant pris les angles avec un petit inſtrument de bois, aux deux extrémités de cette baſe, nous déterminions d'une maniere aſſez juſte la poſition des lieux voiſins. J'ai touché ce point à l'occaſion des baſes: il eſt tems de paſſer au cinquieme Livre.

Fin du Livre IV.

LIVRE CINQUIEME.

Recherches sur la figure de la Terre, déterminée par les loix de l'équilibre, & par la mesure des dégrés.

Sujet de ce Livre.

1. TOUS nos travaux ont eu pour objet principal la mesure exacte du dégré du méridien. Cette mesure, comme je l'ai suffisamment expliqué dans le premier Livre, a pour but la détermination de la figure de la Terre; & c'est la recherche de cette même figure qui a donné lieu à toutes ces sortes d'opérations. Je traiterai donc ici de la figure de la Terre, en tant qu'on la peut déduire, ou des loix de l'équilibre des fluides, ou de la mesure même des dégrés.

Sa matiere & sa méthode.

2. Ce sujet fourniroit la matiere d'un long traité. Le volume le plus ample pourroit à peine contenir tout ce que les plus savans Auteurs ont découvert & publié sur cette matiere, quand je ne ferois que le recueillir, sans y rien ajouter du mien. Mais sans m'arrêter à plusieurs spéculations, qui sont de peu d'usage, je ne m'attacherai qu'à quelques points principaux qui ont plus de rapport à mon sujet; & je tâcherai de résoudre par la simple géométrie des difficultés qui sembleroient ne pouvoir être éclaircies qu'avec le secours du calcul intégral.

Sa division en deux parties.

3. L'ouvrage est divisé en deux chapitres. Le premier comprend ce qui a rapport à l'équilibre, & le second, ce qu'on peut déduire de la mesure des dégrés. On trouvera dans l'un & dans l'autre quelques constructions & quelques réflexions

que j'inférai il y a plusieurs années dans d'autres dissertations que j'ai données au public. Mais comme on n'en avoit imprimé qu'un très petit nombre d'exemplaires, qui même se sont égarés pour la plupart, ayant été distribués à l'occasion d'un exercice public vers la fin de l'année scholastique; il ne sera pas inutile de les rappeller ici.

Sujet du chapitre I.

4. Dans le premier chapitre je détermine la figure requise pour conserver l'équilibre dans la Terre, soit immobile, soit tournant sur son axe, dès là que les forces se dirigent à un centre commun, quelque variation qu'on suppose dans les forces, dans les distances, & suivant une loi donnée quelconque: problême beaucoup plus général que celui qui est proposé par M. *Huygens*, pour déterminer la figure de la Terre, dans l'hypothese de *Galilée*, d'une gravité croissante ou décroissante en raison quelconque directe ou inverse doublée, triplée &c. des distances au centre. J'indiquerai en même tems la figure qui résulte d'une gravité dirigée à deux centres, puis d'une gravité dirigée suivant des lignes données, à un point donné; & après avoir passé légerement sur ces deux articles, je traiterai enfin de la figure que donne non plus une gravité dirigée à un centre commun, mais celle qui résulte de la gravité mutuelle de toutes les particules du globe agissantes les unes sur les autres, en raison inverse des quarrés de leurs distances respectives; gravité que *Newton* a si heureusement déduite de l'accord parfait qu'il lui a trouvé avec tant de phénomenes celestes, & d'où il a conclu tant d'autres choses qui s'accordent parfaitement avec les nouveaux phénomenes. J'expliquerai ce qui concerne cette loi de gravité dans l'hypothese de l'homogénéité de la Terre, sujet qui a déja été manié heureusement par M. *Mac-Laurin*; dans celle d'une densité variable, suivant la différence des distances, & dans cette partie j'abandonne d'illustres Auteurs de notre siecle, dont les calculs me paroissent défectueux, puisqu'en prenant la simple géométrie pour guide, j'arrive à des conséquences entierement opposées aux leurs. Je toucherai au même endroit quelques points qui ont rapport à l'irrégularité du tissu des parties.

5. Voilà pour ce qui regarde l'équilibre & la matiere du

Sujet du chapitre II.

premier chapitre. Dans le second j'expose les conséquences qui suivent de la mesure des dégrés: j'y détermine ce qui résulte de la comparaison de deux dégrés, soit d'un méridien, soit d'un parallele quelconque, premierement dans l'hypothese d'un sphéroïde elliptique, & en second lieu dans la supposition que la Terre soit tellement applatie, que non seulement ses méridiens, mais ses paralleles mêmes s'écartent de la figure circulaire. Enfin j'examine la figure & la grandeur qu'on peut donner à la Terre, connoissant tous les dégrés d'un méridien, & faisant abstraction de toute hypothese. Ces problêmes amenent naturellement d'autres considérations de même genre, que je développerai dans l'occasion. Entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De la figure de la Terre, déduite des loix de l'équilibre.

Qu'on peut chercher la figure de la terre par l'équilibre.

6. SI notre globe n'étoit composé que de parties solides, ou si les parties fluides de sa surface n'avoient entre elles aucune communication, on ne pourroit connoître sa figure par l'équilibre: j'entends cet équilibre qui ne dépend que de la gravité. Car de quelque maniere que les parties de la matiere agissent les unes sur les autres, & quelque soit le lien qui les unit, tout solide est en équilibre. Mais puisqu'une grande partie de la surface de la Terre est couverte d'un fluide qui suit librement sa pente, de quelque côté que la gravité détermine son cours; & que plusieurs portions de ce fluide s'insinuent en tout sens dans l'intérieur de la terre, & communiquent entre elles par des canaux souterreins; de là vient que son équilibre doit lui donner une certaine figure qui doit être à peu près celle de la Terre, puisque les parties solides qui s'élevent au-dessus de sa surface, & les montagnes mêmes, eu égard à la grandeur du globe, sont très peu au-dessus de son niveau.

Deux méthodes pour cela.

7. Or la figure qui résulte de l'équilibre peut se trouver de deux manieres; premierement par la direction des graves à

la surface du fluide, direction qui doit toujours être perpendiculaire à cette surface : car s'il en étoit autrement, & si la direction prolongée au-dessous de la superficie faisoit avec elle un angle aigu, le fluide emporté par sa pente naturelle couleroit du même côté, comme sur un plan incliné. La seconde maniere est de considérer deux canaux continués dans l'intérieur de la terre, remplis d'un fluide qui communique de l'un à l'autre, & tellement en équilibre, que le point le plus bas soit chargé de part & d'autre d'un poids égal.

Suite.

8. Il est reconnu aujourd'hui qu'il y a telle hypothese de gravité, dans laquelle, quoique les canaux puissent être comme en équilibre, les directions des graves ne seroient point perpendiculaires à la surface; auquel cas le fluide ne seroit point en repos, ou dans un état permanent, mais dans une perpétuelle agitation. Ceci n'arrive néanmoins que dans les hypotheses où la gravité dépend non seulement de la distance, mais encore de la position. Car dans celle où les graves sont dirigés à un centre unique, ou à un nombre de centres quelconques, les deux méthodes s'accordent parfaitement.

De la méthode qu'on emploie ici pour une gravité tendante à un centre donné, ou à une courbe aussi donnée.

9. Je ne m'arrêterai point à démontrer ce théorème. Je n'emploirai cependant pas l'une & l'autre méthode par la simple géométrie, mais seulement celle des canaux terminés au centre, pour ces hypotheses de gravité, qui dirigent les graves à un centre unique, puis à deux; & je n'emploirai que celle de la direction perpendiculaire à la superficie, pour l'hypothese d'une gravité dirigée par les tangentes d'une courbe donnée. Car je ne crois pas devoir m'étendre beaucoup sur des hypotheses qui n'ont aucun fondement dans la nature : fussent-elles réelles, il ne s'agit ici que de la figure de la Terre, qui est toute en équilibre; car on doit compter pour rien le dérangement causé dans l'équilibre par de petits mouvemens, tels que le flux & le reflux de la mer, & les courans qu'on y voit en quelques endroits, mouvemens qui se rapportent même à des causes extérieures qu'il est aisé d'appercevoir. Il suffira donc d'une seule méthode. Car s'il y a équilibre, il doit se trouver, & dans le poids des canaux, & dans la direction de la perpendiculaire à la superficie. Ainsi en établissant ce qui est requis pour l'un ou l'autre de ces deux points, on devra

en appliquer le réſultat à la figure de la Terre. Cependant comme l'analyſe fournit, pour une gravité tendante à un centre donné, une ſolution très ſimple qui s'accorde parfaitement avec celle qu'on tire des canaux par la ſimple géométrie, je propoſerai auſſi cette ſolution.

De la gravité neutonienne,

10. Mais dès qu'il s'agira de la gravité mutuelle, par laquelle toutes les parties de la matiere peſent les unes ſur les autres, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, pour lors je démontrerai en général, du moins pour l'hypotheſe des parties homogênes, qu'il y a équilibre en tout ſens. Je ferai voir de plus qu'il ſuffit de démontrer en général que les canaux rectilignes, terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la maſſe, peſent également ſur ce point, quelque direction qu'on leur ſuppoſe, pour démontrer par-là même que cela doit arriver dans les canaux courbes, & qu'à l'extrémité ſupérieure de tous ces canaux, la direction de la gravité eſt perpendiculaire à la ſuperficie.

Du mouvement de la terre. Théorie de l'Auteur.

11. Il faut maintenant conſidérer la Terre, premierement comme immobile, enſuite avec ſon mouvement diurne, ou même, ſi l'on veut, ſon mouvement annuel, afin de déterminer dans l'un & l'autre cas la figure qui réſulte de l'équilibre. Or quand je dis une Terre immobile, ou en mouvement, je parle d'un mouvement ou d'un repos relatif à un certain eſpace dans lequel nous ſommes renfermés avec tous les corps qui tombent ſous nos ſens. Je conçois dans tous les corps, relativement à cet eſpace, une force d'inertie, ou une détermination à demeurer dans le repos, ou à être mûs uniformement en ligne droite; ſoit que cet eſpace ſoit immobile, ſoit qu'il ſoit tranſporté par un mouvement quelconque. S'il eſt immobile, la Terre & tous les corps qu'il contient ſeront en mouvement. S'il a un mouvement contraire & égal au mouvement de la Terre, ou de Jupiter, ou de quelqu'autre portion de matiere, cette portion de matiere, ou Jupiter, ou la Terre ſeront immobiles; tous les autres corps auront un mouvement compoſé du mouvement de l'eſpace, & du mouvement qu'ils ont dans cet eſpace (1). Mais s'il a un mouvement

(1) Voici de quoi raſſurer ceux qui appréhendent que le double contraire

contraire à ceux de tous les corps qu'il renferme, tous ces corps auront un mouvement composé de leur mouvement propre dans l'espace, & du mouvement commun de cet espace. Dans tous ces cas, les mouvemens des corps renfermés dans cet espace, seront toujours les mêmes relativement à l'espace; & comme nous y sommes nous-mêmes renfermés, il nous est impossible de connoître par aucun phénomene, ni par aucun raisonnement humain, ce qu'on doit penser du repos ou du mouvement de l'espace.

Fondement de cette théorie.

12. Je commençai à faire part au public de cette théorie en 1748, dans une Dissertation sur le flux & le reflux de la mer. Je l'ai proposée & confirmée par de nouvelles preuves dans d'autres ouvrages. Mais je l'ai mise depuis peu dans un plus grand jour, dans les supplémens du Livre premier de la Philosophie composée en vers par M. *Benoit Stay*, ouvrage digne de l'immortalité. C'est là que traitant de la force d'inertie, j'ai expliqué cette théorie dans une Dissertation d'une juste longueur, où je crois avoir bien prouvé en particulier qu'on ne peut démontrer par aucun phénomene, ni par aucun principe métaphysique, l'existence d'une force absolue d'inertie, en vertu de laquelle toutes les portions de la matiere seroient déterminées à rester dans le repos, ou à se mouvoir uniformement en ligne droite, par rapport à un espace absolu, infini & immobile, & qu'on ne peut supposer qu'une force relative d'inertie, par rapport à l'espace où nous sommes renfermés. Car cette force supposée, on explique sans peine tous les phénomenes connus, & on en prédit d'autres avec succès: ce qui est, en tout genre de système, la preuve la plus convaincante. Mais il me suffit ici d'avoir proposé sommairement mon opinion. Dans la suite je paroîtrai si peu m'écarter du sentiment commun des Philosophes de notre tems, que j'adopterai jusqu'à leur langage & à leurs expressions.

13. Or si la Terre est immobile & homogêne, elle doit

---

mouvement de la terre, dans les systêmes de *Copernic* & de *Newton*, ne soit opposé au sens littéral de l'Ecriture sainte. Rien ne les empêche de supposer la terre immobile, sans rien déranger à l'économie de ces systêmes.

Figure d'une terre immobile & homogêne.

être dans un équilibre parfait, ſoit que la gravité ſe dirige au centre, & quel que ſoit le rapport de la gravité à la diſtance, ſoit que toutes les parties de la matiere peſent les unes ſur les autres, en raiſon quelconque directe ou inverſe des diſtances. Car puiſque les deux hémiſpheres, quelque part qu'on les prenne, ſont parfaitement égaux & ſemblables, chaque portion de matiere, même dans l'hypotheſe de la gravité newtonienne, tendra au centre, & péſera également à égales diſtances du centre. Ainſi toute portion de matiere placée à la ſurface du globe, aura une direction de gravité perpendiculaire à la ſurface: car dans la ſphere, toute ligne droite tirée de la ſurface au centre, eſt perpendiculaire à la ſurface. Si donc on prend deux canaux parfaitement égaux, & qui communiquent au centre, quelle que ſoit leur direction, chaque canal aura le même poids, le centre ſera également chargé de part & d'autre, & les deux colonnes du fluide ſe ſoutiendront mutuellement.

Même figure déduite de l'équilibre des canaux.

14. En effet, la force d'inertie les conſervera dans le repos, où elles ſeront une fois parvenues, à moins que quelque nouvelle cauſe ne les détermine au mouvement. Or il n'y en aura aucune, puiſque nous ſuppoſons que la gravité eſt la ſeule force qui agiſſe ſur ces colonnes, & que cette gravité agit en ſens contraire, & avec des efforts égaux qui doivent par conſéquent ſe détruire les uns les autres. Imaginons un globe tout compoſé de parties fluides; ſuivant ce que nous avons dit, elles ſeront dans un parfait équilibre. Suppoſons qu'une partie de ce globe devienne ſolide, ſa figure ne doit point changer pour cela, puiſque cette ſolidité ne peut troubler le repos des parties fluides. De plus, dans le cas où la gravité ne dépend point de l'action mutuelle des parties, mais qu'elle eſt toute dirigée à un centre unique, il n'arrivera aucun changement dans la figure, ſuppoſé même que la partie ſolide ſe condenſe, quelque part que ce ſoit, en-deçà & au-delà du centre également, puiſque cette condenſation n'affecte en rien les parties fluides, & ne leur communique aucun mouvement.

Figure d'une terre qui a un mouvement uniforme & parallele.

15. Telle eſt cette démonſtration ſi connue de la ſphéricité de la Terre ſuppoſée immobile, tirée de l'équilibre, & employée autrefois par *Archimede*, & par d'autres Mathématiciens

qui ſont venus après lui. Mais ici de preuve négative qu'elle étoit, nous en avons fait une preuve poſitive. Nous lui avons même donné plus de force & plus d'étendue. De plus, elle ſubſiſte en ſon entier, dans le cas même où la Terre ſeroit emportée d'un mouvement uniforme & parallele, en vertu duquel toutes les parties continueroient à ſe mouvoir uniformement, & également en ligne droite: car il n'y a alors aucune cauſe qui puiſſe ajouter un ſecond mouvement au premier: d'où il ſuit qu'il n'arrivera aucun changement dans la diſtance reſpective des parties, ni par conſéquent dans la figure, ce changement de figure dépendant néceſſairement de celui de la diſtance. Or tel eſt à peu près le mouvement annuel de la Terre: il differe peu d'un mouvement parallele. Cette légere différence ne laiſſe pas pourtant de cauſer une petite aberration dont nous aurons peut-être occaſion de parler.

Figure d'une terre mue autour de ſon axe, dans l'hypotheſe d'une gravité tendante à un centre donné.

16. En attendant il nous faut voir ce qui doit arriver dans le cas où la Terre tourne ſur ſon axe, & où la gravité tend à un centre donné en raiſon quelconque des diſtances, ou ſuivant une loi conſtante quelconque, dépendante uniquement des diſtances. Pour cela il faut d'abord ſuppoſer un principe connu, ſavoir que par la force d'inertie, tout corps mû circulairement fait effort pour s'écarter par la tangente, & par-là même pour s'éloigner du centre. L'effort qu'il fait pour s'éloigner du centre s'appelle force centrifuge, ſur laquelle je vais propoſer deux lemmes qui nous ſerviront à déterminer la figure de la terre.

Des forces centrales. Lemme.

17. Lemme I. *Si les circonférences des cercles ſont parcourues en tems égaux, la force centrifuge eſt proportionnelle aux rayons.* C'eſt un théorème fort connu; il fut propoſé autrefois par M. *Huygens*, & il ſe trouve démontré dans pluſieurs élémens de méchanique.

Autre lemme. Pl. IV. fig. 1.

18. Lemme II. *Si le quart-de-cercle IMD (pl. IV. fig. 1.) tourne autour du rayon CD, & que la force centrifuge en I ſoit exprimée par la ligne IH; la force centrifuge en M, par laquelle le point M tâche de s'éloigner du point P centre de ſon mouvement, exprimée par la droite MO, ſuivant la direction de PM; & qu'enfin cette derniere force ſoit décompoſée & repréſentée par deux autres lignes, ſavoir ON perpendiculaire*

à CM prolongée, & MN suivant la direction de CM; la force centrifuge en I suivant la direction de CI, sera à la force centrifuge en M suivant la direction de CM, comme CM^2 *à* MP^2. Car le lemme I donnera cette analogie : IC ou CM : MP :: HI : MO. Et à cause des triangles rectangles semblables CMP, ONM; on aura encore CM : MP :: MO : MN. Donc en rapport composé $CM^2 : MP^2 :: IH : MN$.

Conditions du problême.

19. Ceci supposé, nous pouvons déterminer généralement la courbe par la méthode des canaux. Soit FCE (même fig.) la quatrieme partie d'une section de la terre, faite par l'axe; CE la moitié de cet axe, autour duquel tourne la Terre, qu'on suppose toute composée de parties fluides. Soient encore deux canaux CF, CL, le premier perpendiculaire à l'axe, dans le plan de l'équateur, le second incliné à volonté. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que le centre C soit chargé également par l'un & l'autre canal, ensorte que les canaux soient égaux en poids.

Expressions en lignes des forces centrifuges & de la loi de gravité.

20. Supposons que des ordonnées comme KQ à une courbe quelconque VQG, expriment la force de la gravité pour les distances correspondantes CK, prises dans le demi-diametre CF de l'équateur. L'ordonnée FV exprimera la force de la gravité au point F de l'équateur. Prenez FR de telle grandeur, qu'il y ait même rapport de RF à VF, que de la force centrifuge à la gravité pour ce même point F. Sur le diametre RF soit décrit un demi-cercle RBF. Soit la corde RB parallele à CL, B*r* perpendiculaire à RF. Menez RC & *r*C; & après avoir pris CK égal à CL, menez des points K & I des paralleles à FV, qui rencontreront la courbe VG en Q & en A, la droite CR en S & en T, & la droite C*r* en *s* & en *t*.

Démonstration.

21. Remarquez d'abord que I*t* exprime la force centrifuge en M, réduite à la direction de CM. En effet, par le lemme I (n. 17), la force centrifuge absolue en F est à la force absolue en I, comme FC à CI, ou comme FR à IT. Or par le lemme II (n. 18), cette force absolue en I est à la force relative en M, comme CM^2 à MP^2; ou bien à cause des triangles semblables CPM, FBR, qui outre qu'ils ont chacun un angle droit, ont encore les angles en R & C égaux,

les lignes CL & RB étant paralleles, comme FR^2 à FB^2; ou bien encore, à cauſe que FR, FB, F*r* ſont dans le demi-cercle en proportion continue, comme FR à F*r*, ou enfin comme IT à I*t*. D'où il ſuit que puiſque FR exprime la force abſolue en F, IT repréſentera la force abſolue en I, & I*t* la force relative en M.

22. De là la gravité abſolue en M, c'eſt-à-dire l'excès de la gravité primitive ſur la force centrifuge au point M, ſera exprimée par A*t*, & la gravité abſolue en I par AT. Par conſéquent tout le poids du canal CL ſera exprimé par l'aire Q*s*CG; de même tout le poids du canal CF ſera exprimé par l'aire VRCG; & puiſque les poids doivent être égaux, les aires le ſeront auſſi. Poids des canaux exprimés par des aires.

23. On trouvera cette égalité par la quadrature des courbes en cette maniere. Soient (fig. 2) les mêmes choſes que dans la premiere figure, depuis CF vers V; & que la courbe C*qu*, placée de l'autre côté, pour éviter la confuſion, ſoit la quadratrice de la courbe GQV rapportée à CF comme à ſon axe; enſorte que F*u* ſoit égale à l'aire VFCG diviſée par CF, de même K*q*, I*a* aux aires QKCG, AICG diviſées pareillement par CF. Quadratrice de la courbe des forces. Pl. IV. fig. 1. 2.

24. Cette courbe préparée; ſoit dans la figure 1 une ligne droite indéfinie C*l*, faiſant avec CE un angle quelconque; & dans la figure 2 l'angle FRB égal à l'angle EC*l* de la figure 1. Enſuite ayant abaiſſé la perpendiculaire B*r* ſur FR, prenez du point *u* en allant vers F les lignes *u*V', *u*X moitiés des lignes FR, F*r*; & ſur chaque ligne, comme *q*K, *a*I, prenez, du côté de KI, les parties *q*Z, *a*Y qui ſoient avec *u*X en même raiſon que les quarrés de CK, & de CI au quarré de CF. Que la courbe CYX ainſi décrite ſoit coupée en Z par la droite V'Z parallele à FC. Soit enfin ZK parallele à FV. Si dans la figure 1 on prend ſur C*l* la partie CL égale à la ligne CK de la figure 2, je dis que le point L ſera à la courbe cherchée. Trouver un point de la courbe ſur une ligne droite tirée du centre.

25. Car puiſque dans la figure 2 les triangles RCF, *r*CF ſont la moitié des rectangles ſur CF & RF, & ſur CF & *r*F, ces triangles diviſés par CF vaudront la moitié des lignes RF, *r*F, ou les lignes entieres V'*u*, X*u*. Et puiſque les triangles Démonſtration.

*r*CF, *s*KC, à cauſe qu'ils ſont ſemblables, & les droites X*u*, Z*q* par la conſtruction, ſont entre eux comme les quarrés de CF, CK; l'on aura auſſi le triangle *s*KC diviſé par CF égal à Z*q*. Ainſi le ſurplus des aires, ſavoir les eſpaces VRCG, Q*s*CG, diviſés par CF, vaudront les reſtes FV′, KZ qui ſont égaux. Donc les aires VRCG, Q*s*CG ſont égales. Donc les poids des colonnes CF, CL ſont égaux, & l'on a l'équilibre qu'on cherchoit.

Demi-diametre de l'équateur, & demi-axe.

26. Lorſque CL (fig. 1) tombe ſur CF, l'angle FC*l* s'évanouit, & par conſéquent auſſi l'angle RFB de la figure 2; B & *r* retombent ſur R, & par conſéquent X & Z ſur V′, & K ſur F, puiſque par la ſuppoſition le point L (fig. 1) tombe ſur F. Mais lorſque C*l* (fig. 1) tombe ſur CE, B & *r* de la figure 2 retombent ſur F, & par conſéquent X ſur *u*, & la courbe CYZX ſur C*aqu*; & ſans qu'il ſoit beſoin de conſtruire une nouvelle courbe CYZ, la ligne V′Z′, parallele à FC, rencontrant la premiere courbe C*au* au point Z′, déterminera V′Z′, ou FK′, différence de la moitié de l'axe au demi-diametre de l'équateur.

Principes d'une conſtruction plus ſimple.

27. Je propoſai cette conſtruction en 1739, dans une Diſſertation ſur la figure de la Terre. Mais on peut l'abréger beaucoup en pouſſant plus loin notre analyſe, & en cherchant le rapport de CL (fig. 1) non à l'angle EC*l*, mais à l'ordonnée LY perpendiculire à l'axe CE. On ſe contente pour lors de décrire dans la figure 2 la ſeule quadratrice C*qu*; & ayant pris une diſtance CK égale à la ligne CL (fig. 1) qui fait avec CE un angle inconnu, par le point K de la figure 2 on mene Q*Kq*, & l'on imagine dans l'une & l'autre figure un angle FRB égal à l'angle inconnu EC*l* (fig. 1). Enfin ayant tiré comme ci-devant B*r* & C*sr*, l'aire Q*s*CG devra égaler l'aire VRCG à cauſe de l'équilibre. Maintenant ſi l'on prend V′*u* du côté de F, égale à $\frac{1}{2}$ FR, & qu'on tire V′Z, qui rencontrera K*q* en Z, on s'appercevra aiſément que Z*q* eſt égale à l'aire du triangle *s*KC diviſée par CF. En effet, par la conſtruction, F*u* eſt égale à l'aire VFCG diviſée par CF; & par la nature du triangle, V′*u* moitié de RF, eſt égale à l'aire RFC diviſée par la même CF. Par conſéquent FV′ eſt égale à VRCG pareillement diviſée.

Ainſi puiſque KZ eſt égale à FV, & l'aire Q*s*CG à l'aire VRCG, on aura KZ égale à l'aire Q*s*CG diviſée par CF, & par conſéquent Z*q* égale à l'aire *s*KC diviſée par CF.

28. L'on a encore (fig. 1) cette analogie $CF^2 : CK^2 ::$ RFC : SKC ; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables LYC, FBR, CK^2 ou $CL^2 : LY^2 :: RF^2 : FB^2$. De plus $RF^2 : FB^2 ::$ RF : F*r* :: SK : K*s* :: SKC : *s*KC. Donc CK^2 ou $CL^2 : LY^2 ::$ SKC : *s*KC. Et rapprochant cette derniere proportion de la premiere, on aura par égalité ordonnée $CF^2 : LY^2 ::$ RFC : *s*KC. Et parceque ces triangles RFC, *s*KC diviſés par CF ſont égaux à V′*u*, & Z*q* (fig. 2), on aura encore $CF^2 : LY^2 ::$ V′*u* : Z*q*. C'eſt-à-dire que CF eſt à LY (fig. 1) en raiſon ſous-doublée de V′*u* à Z*q* (fig. 2). Suite.

29. Ceci nous donne une conſtruction bien plus facile. Etant donnée la courbe VQG, décrivez la ſeule quadratrice *u*q*q*C; & ayant pris *u*V′ du côté de F égale à $\frac{1}{2}$FR, menez V′Z parallele à FC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne Q*q* en Z. Prenez (fig. 1) la partie CI′ du côté de F, telle que CI′ ſoit à CF en raiſon ſous-doublée de Z*q* à V′*u* (fig. 2); & ayant mené la ligne indéfinie I′L*i*′ perpendiculaire à CF, du point C comme centre, & à l'intervalle CK pris dans la figure 2, vous trouverez ſur I′*i*′ le point L, qui ſera à la courbe cherchée. Car on aura LY = CI′, & on connoîtra le rapport de CL à LY. Conſtruction.

30. Il eſt clair que l'origine de cette courbe eſt en F. Car lorſque (fig. 2) le point K tombe ſur le point F, la ligne Z*q* ſe confond avec la ligne V′*u*, & elle a avec elle un rapport d'égalité. Par conſéquent CL (fig. 1) devient égale à CI′, & les points L & I′ tombent ſur F. Mais ſi V′Z (fig. 2) rencontre la quadratrice C*qu* en Z′, & qu'on tire Z′K′ perpendiculaire à CF, on aura CK′ égal à CE moitié de l'axe. Car lorſque le point K tombe en K′, Z*q* devient nulle, ou zéro, les points Z & *q* tombant ſur Z′. Ainſi (fig. 1) CI′ ou LY devient nulle, CL tombe ſur CE, l'angle FCL eſt droit, & l'angle LCY s'évanouit. Demi-diametre de l'équateur & demi-axe.

31. Tout point comme K (fig. 2) pris entre F & K′, donnera toujours deux points comme L (fig. 1), l'un à droite,

Ce qui arrive dans tous les cas de grande, moyenne & petite distance.

l'autre à gauche, & à égale distance de CF; puisque le cercle décrit du centre C avec le rayon CK, doit couper I′*i*′ de part & d'autre du point I′, & à même distance, à moins que la raison sous-doublée de Z*q* à V′*u* ne fût égale, ou plus grande que celle de CK à CF. Car dans le premier cas CI′ (fig. 1) deviendroit égale à CK, l'un & l'autre point L tomberoit sur I′, & la courbe arriveroit sur CF; & dans le second CI′ deviendroit plus grande que CK, & le rayon CK ne pourroit du centre C atteindre à la droite I′*i*′. Ainsi cette ligne prolongée à l'infini ne rencontreroit nulle part la courbe. D'où il suit que de part & d'autre de CF, cette courbe sera parfaitement semblable & égale à elle-même. Si le point K (fig. 2) tombe au-dessous de K′, comme l'aire va toujours en diminuant vers C, K*q* se confondant avec I*a* sera moindre que K′Z′, ou I*y* sur laquelle retombera KZ. C'est pourquoi Z*q* changera sa direction en *ya*, & deviendra négative. Par conséquent le quarré de LY (fig. 1), qui, à cause que V′*u* & CF (fig. 2) sont constantes, est dans la même raison que Z*q*, deviendra négatif, & la racine LY (fig. 1) imaginaire. D'où il suit que la courbe ne descendra pas au-dessous de CE. Mais elle pourra faire au-dessus de F différentes sinuosités, selon la nature de la courbe GQV, & de sa quadratrice C*qu* (fig. 2); & prolongeant cette quadratrice & la droite *y*ZV′ au-dessus de V′*u*, on aura pour chaque point de CF aussi prolongée, deux points, l'un à droite, l'autre à gauche de CF, & à égale distance, qui seront à la courbe requise pour l'équilibre; ou un point unique, la courbe tombant de part & d'autre sur CF; ou enfin un point nul ou imaginaire: tout cela selon que la raison sous-doublée de Z*q* à V′*u* (fig. 2) sera plus petite, égale, ou plus grande que celle de CK à CF.

Applatissement vers les pôles.

32. Dans tous ces cas il est évident que la figure sera applatie au pôle E & au pôle opposé, & que cet applatissement se fera sentir dans tout arc de la courbe tracée au-dessous de C; de plus, que la différence du demi-axe CE au demi-diametre de l'équateur sera égale à la ligne V′Z′ (fig. 2) déterminée par la quadratrice, & dont nous donnerons bientôt une expression générale.

33.

33. Si la gravité primitive eſt dans une raiſon directe quelconque des diſtances, la courbe VQA (fig. 1 & 2) ſe termine au point C, & ce point eſt l'origine de la quadratrice *aqu*. La quadratrice a encore ſon origine en C toutes les fois que la courbe de gravité VQA ſe termine à quelque point G de la ligne CG. Que ſi la gravité eſt dans une raiſon inverſe quelconque des diſtances, la courbe VQA devient infinie, & CG eſt ſon aſymptote. Pour lors ſi, tandis qu'on approche du centre à l'infini, la gravité augmente infiniment moins que dans une raiſon ſimple inverſe des diſtances, l'eſpace compris entre la courbe & ſon aſymptote ſera fini, & la quadratrice *aqu* prendra encore ſon origine en C.

En quel cas l'origine de la quadratrice eſt au centre.

34. Si l'on ſuppoſe que la gravité augmente dans cette raiſon ſimple inverſe des diſtances, ou même davantage, ces eſpaces ſeront infinis, & le point C ne pourra être l'origine de la quadratrice. Dans ce cas il eſt néceſſaire que la quadratrice commence à quelque point I (fig. 2) de la ligne CF, enſorte que les ordonnées comme K*q*, placées au-deſſus de ce point, & du côté de *u*, expriment les aires correſpondantes, comme QKIA, terminées par l'ordonnée IA; & que les ordonnées placées au-deſſous, & du côté oppoſé, expriment les aires qui leur répondent au-deſſous de IA. La quadratrice *uqa* ira de ce côté à l'infini, la courbe XZY tout de même, & aura CG pour aſymptote. La conſtruction ſera pourtant la même, & on s'y ſervira de la même quadratrice, qui eſt unique ſuivant la derniere ſolution, & double ſuivant la premiere. Cette conſtruction ſe trouvera toujours, ſi l'on a égard à la transformation des lieux géométriques, dont j'ai expliqué les regles aſſez au long dans une diſſertation que j'ajoutai l'année derniere aux élémens des ſections coniques, dans le troiſieme tome de mes Elémens.

Quels ſont ceux où la quadratrice eſt aſſymptotique.

35. Si la gravité eſt exactement dans un rapport quelconque direct, ou inverſe des diſtances, ou comme une puiſſance quelconque *m* de la diſtance, la courbe VQA ſera toujours du genre des paraboles ou des hyperboles; ſavoir des premieres, ſi *m* eſt un nombre poſitif, & que la gravité ſoit en raiſon directe des diſtances; & du genre des hyperboles, ſi *m* eſt un nombre négatif, & que la gravité ſoit en raiſon

Des courbes qui expriment une loi de gravité en raiſon quelconque des diſtances.

inverse des distances : exceptez lorsqu'on aura $m=0$, ou $m=1$, deux cas dont le premier est celui d'une gravité constante, & le second d'une gravité qui augmente en raison directe des distances. Nous parlerons bientôt de l'une & de l'autre. Dans le premier VQA devient une ligne droite parallele à FC, & dans le second c'est une droite allant de V en C.

Leurs quadratrices.

36. Dans le cas où l'ordonnée IA est en raison de CI^m, l'aire terminée par cette ordonnée est généralement au rectangle sous CI & IA, comme 1 à $m+1$; ce qui peut se démontrer par la Géométrie ordinaire, & fait en même tems partie de la Géométrie de l'infini & des courbes qui paroîtront bientôt, comme je l'espere, dans le quatrieme tome de mes Elémens. Ainsi cette aire sera $\frac{1}{m+1} \times CI \times IA$. Par conséquent I$a$, qui est proportionnelle à cette aire, sera dans la raison de $CI \times IA$, ou de CI^{m+1} (1); & dans tous ces cas la quadratrice uqa sera toujours dans le genre des paraboles, ou dans celui des hyperboles ; exceptez le cas où $m=0$, dans lequel la gravité est constante ; car alors $m+1=1$, & uqa devient une ligne droite tendante au point F; & celui où $m=-1$, dans lequel la gravité est en raison inverse des distances, & la courbe VQA devient une hyperbole du premier genre, dont on ne peut avoir la quadrature que par les logarithmes.

Quantité de l'applatissement.

37. De là on peut aisément déterminer en général, pour ce dernier cas, la quantité de l'applatissement. Car on aura cette proportion $K'C^{m+1} : FC^{m+1} :: K'Z'$ ou $FV' : Fu$. Par conséquent si entre FV' & Fu on prend un nombre m de moyennes proportionnelles géométriques, dont la derniere soit FX, on aura $K'C : FC :: FX : Fu$. Par la même raison l'on aura $FV' : Fu :: FX^{m+1} : Fu^{m+1}$. Et si outre cela la ligne V'u est une petite quantité par rapport à Fu, les différences des quantités, que nous avons vues plus haut en pro-

(1) Parceque IA est par la supposition en raison de CI^m, & que $CI \times CI^m = CI^{m+1}$.

portion continue, seront à très peu près égales entre elles. Donc $Xu = \frac{1}{m+1} V'u$ (1), & puisque $V'u = \frac{1}{2} FR$, on aura $Xu = \frac{1}{2m+2} FR$. Mais parceque toute l'aire est égale à $\frac{1}{m+1} \times FC \times FV$, & que par conséquent cette aire divisée par FC, ou ce qui est la même chose, Fu est égale à $\frac{1}{m+1} FV$; Fu sera à uX, ou FC à FK', comme $\frac{1}{m+1} FV$ à $\frac{1}{2m+2} FR$, ou comme FV à $\frac{1}{2} FR$. C'est-à-dire que le demi-diametre de l'équateur sera à sa différence à la moitié de l'axe, comme sous l'équateur la gravité primitive est à la moitié de la force centrifuge.

Rapport de la diminution de la distance.

38. Or ce théorème est général dès qu'il n'est question que d'un petit applatissement dans une hypothese quelconque de gravité dirigée à un centre donné ; & l'on aura encore cet autre théorème : la diminution de la distance, depuis l'équateur jusqu'au pôle, est à très peu près dans la même raison, que le quarré du sinus droit de la latitude du lieu, ou que le sinus verse d'une latitude double. L'un & l'autre se démontre aisément par la figure 2. Car en premier lieu, puisque l'aire VRCG doit égaler l'aire Q*s*CG, si on en retranche ce qu'elles ont de commun, savoir QSCG, & qu'on leur ajoute RS*sr*; on aura V*rs*Q = R*r*C. Mais si FR est très petite par rapport à FV, l'aire V*rs*Q sera à peu près égale à l'aire VFKQ, & elle lui sera exactement égale lorsque le point K tombant sur K', le point *r* tombe sur F. Or on peut regarder l'aire VFCQ comme un rectangle sous KF & FV, & les triangles RCF, RC*r* sont égaux, le premier à $\frac{1}{2}$ RF×FC, le second à $\frac{1}{2}$ R*r*×FC. C'est pourquoi le point K tombant

(1) Puisque les moyennes proportionnelles sont entre FV' & F*u*, le total des différences sera V'*u*; & le nombre des moyennes proportionnelles étant *m*, le nombre des différences sera *m* + 1 ; enfin puisque FX est la derniere moyenne proportionnelle, X*u* sera une de ces différences qu'on suppose égales. Or dans le cas de différences égales, une différence quelconque est égale au total des différences divisé par leur nombre. Donc $Xu = \frac{V'u}{m+1}$.

en K′: on aura $\frac{1}{2}RF \times FC = FK' \times FV$; ce qui donne cette analogie: $FC : FK' :: FV : \frac{1}{2}FR$. En second lieu on aura en général $FK \times FV = \frac{1}{2}Rr \times FC$. Par conséquent FK, qui est la diminution de la distance, est dans la raison de Rr sinus verse de l'arc RB, dont la moitié est la mesure de l'angle RFB, ou de l'angle FCL (fig. 1), qui marque à peu près la distance du lieu à l'équateur, ou la latitude du lieu. Et il est démontré d'ailleurs par la trigonométrie que le sinus verse d'un arc quelconque est dans la même raison que le quarré de la corde dont la moitié est le sinus droit de la moitié de cet arc.

Deux loix de gravité.

39. Toutes ces vérités se déduisent ici de principes généraux, & d'une maniere très générale. Mais dans ma Dissertation sur la figure de la Terre, dont j'ai parlé plus haut (n. 27), j'avois déja donné deux constructions conformes à la construction générale proposée dans cet ouvrage, depuis le n. 19, lesquelles devoient servir pour deux cas de gravité, l'une constante, & c'est celle qu'avoit en vue *Galilée*, & après lui M. *Huygens*, dans la recherche de la figure de la Terre; l'autre augmentant dans la raison simple des distances, & c'est celle qui est supposée par M. *Herman*. J'avois déduit pour l'un & l'autre cas des équations à la courbe. La premiere équation est conforme à celle de M. *Huygens*; & la seconde est à une ellipse du premier genre, qui avoit déja été trouvée par M. *Herman* pour ce cas particulier. Nous allons d'abord les réduire à une plus grande simplicité, pour faire voir qu'elles sont contenues dans la proposition générale, & nous en déduirons ensuite quelques autres propositions qui, par leur simplicité & leur beauté, nous ont paru mériter la préférence. Rien de plus beau dans la Géométrie que l'enchaînement de plusieurs vérités exposées dans cet ordre naturel que la Géométrie elle-même nous indique.

Construction pour une gravité constante. Pl. IV. fig. 2.

40. Si la gravité est constante, telle que l'a supposé *Galilée* dans tout le cours de sa méchanique, & M. *Huygens* dans ses recherches sur cette matiere; la premiere construction générale, que j'ai proposée depuis le n. 19, devient beaucoup plus simple. On a alors (fig. 2) $Fu = FV$, Cau devient une ligne droite, CYX une parabole du premier genre,

dont le diametre eſt CG, C*u* la tangente, & le parametre de ce diametre ſera une troiſieme proportionnelle à *u*X & C*u*. Car alors VQAG eſt une ligne droite parallele à FC, le rectangle VFCG diviſé par FC eſt égal à FV, & les aires correſpondantes aux abciſſes CK, CI ſont dans la même raiſon que ces abciſſes. Par conſéquent K*q*, I*a* ont entre elles le rapport de CK à CI; telle eſt la propriété de la ligne droite: & *q*Z, *a*Y qui ſont comme les quarrés de CK, CI, ſont à *u*X, comme les quarrés de C*q*, C*a*; telle eſt la propriété de cette parabole. Surtout il ſera fort aiſé de trouver la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur, ſavoir V'Z'. Car on aura CF : V'Z' :: F*u* : *u*V'. Et ſubſtituant à ces deux derniers termes les quantités FV & $\frac{1}{2}$ FR, qui leur ſont égales, CF : V'Z' :: FV : $\frac{1}{2}$ FR. C'eſt-à-dire que CF eſt à V'Z', comme ſous l'équateur la gravité eſt à la moitié de la force centrifuge. On pourra enſuite déterminer les autres points de la courbe, avec la regle & le compas; ce qui peut toujours ſe faire, dès qu'il n'eſt queſtion que de trouver le point de concours d'une ligne droite avec une ſection conique.

41. On peut même dans cette hypotheſe de gravité, qui eſt ſi ſimple, ſe diſpenſer d'employer la parabole, & trouver une conſtruction beaucoup plus facile en cette maniere. Ayant pris (fig. 3) FV, FR comme auparavant, décrit le demi-cercle FBR, mené RB parallele à C*l*, & abaiſſé la perpendiculaire B*r*, achevez le rectangle VFCG; tirez G*r* qui rencontrera en X la ligne RX parallele à FC; par les points C & *r*, menez une ligne qui rencontre la ligne GV prolongée au point T, & par le point X la ligne XY' parallele à FV, qui rencontrera la même ligne GV en Y'. Enfin ayant pris TQ, moyenne proportionnelle géométrique entre TV & TY', faites CL égale à GQ, le point L ſera à la courbe cherchée.

Autre conſtruction plus facile. Pl. IV. fig. 3.

42. Car on aura R*r* : *r*V :: RX ou VY' : VG ou FC. Donc les triangles RC*r*, VY'*r* ont leurs baſes R*r*, *r*V réciproques à leurs hauteurs FC, VY'. Donc ils ſont égaux. Or les triangles TY'*r*, TV*r* ayant leur ſommet en *r*, ſont en raiſon de leurs baſes TY', TV, ou en raiſon doublée de TQ à TV; car TY', TQ, TV ſont en proportion continue; ou encore

Démonſtration.

(la ligne KQ parallele à VF rencontrant CR, C*r* en S, & *s*) en raiſon de TQ*s* à TV*r*, à cauſe de la reſſemblance de ces triangles. Ainſi les triangles TY′*r*, TQ*s* ayant même rapport au triangle TV*r*, ils ſont égaux. Si donc on en retranche TV*r* qui leur eſt commun, il reſtera le trapeze V*rs*Q égal au triangle V*r*Y′, & par conſéquent au triangle RC*r*. D'où ôtant encore ce qu'ils ont de commun, ſavoir le trapeze RS*sr*, & leur ajoutant l'eſpace QSCG; l'aire VRCG qui exprime le poids de CF, égalera l'aire Q*s*CG qui exprime celui de CL; & l'on aura l'équilibre cherché.

Applatiſſement de la figure.

43. Lorſque CL tombe ſur CE, les points B & *r* ſe confondent avec le point F, & le point T remonte à l'infini. En ce cas le rapport de VQ à QY′, qui eſt le même que celui de TV à TQ, devient un rapport d'égalité. Mais comme on a toujours VG : VY′ ou RX :: V*r* : *r*R, le point *r* tombant pour lors ſur F, ce rapport devient celui de VF à RF, ou celui de la gravité à la force centrifuge. Ainſi GV ſera à VQ, ou CF à FK, moitié de RX; c'eſt-à-dire le demi-diametre de l'équateur ſera à ſa différence au demi-axe, comme la gravité VF à la moitié de la force centrifuge RF, comme auparavant, n. 27.

Diminution de la diſtance, & augmentation de la gravité.

44. Cette force centrifuge, ainſi que nous le verrons bientôt, eſt très peu de choſe en comparaiſon de la gravité. D'où il ſuit que FR ſera toujours très petite par rapport à FV. Par conſéquent le point T ſera très éloigné; & VQ ſera à très peu près la moitié de VY′, ou RX. Mais RX, qui aura avec R*r* le rapport de VG à V*r*, le même à peu près que celui de VG à VR, ſera preſque dans la raiſon de R*r* ſinus verſe de l'arc RB, (la moitié de cet arc meſure l'angle RFB égal à l'angle FCL, qui marque à peu près la latitude du lieu), & qui eſt en raiſon du quarré de RB : & prenant RF pour le rayon, RB eſt le ſinus de l'angle RFB, ou à peu près de la latitude. De plus, comme dans la même hypotheſe on peut, à cauſe de la petiteſſe de RF, regarder RS, VG comme paralleles; Q*s* ſera à peu près égale à V*r*, & la ligne R*r* ſera l'excès de la gravité abſolue Q*s* pour le lieu L, ſur la gravité abſolue pour l'équateur en F. De là on a encore pour cette hypotheſe de gravité le théorème ſuivant: *les différences des diſtances au centre, & de la gravité que nous*

éprouvons, ſont à peu près comme les ſinus verſes d'une latitude double, ou en raiſon doublée du ſinus de la latitude.

45. Si la gravité eſt en raiſon directe de la diſtance au centre, la ligne VQG (fig. 1) deviendra une ligne droite allant de V en C. Car GC deviendra nulle, & IA ſera en raiſon de CI. Dans ce cas, & la quadratrice C*au* (fig. 2), & CYX ſont des paraboles d'*Apollonius*, dont l'axe commun eſt CG prolongée, & CF la tangente. Car I*a* ſera en raiſon doublée de CI, auſſi bien que *a*Y, & par conſéquent IY. Donc le point Z peut ſe déterminer avec la regle & le compas. Mais on peut même en ce cas ſe diſpenſer d'avoir recours à une ſection conique, & employer une conſtruction bien plus ſimple, comme on va le voir.

Cas d'une gravité en raiſon directe de la diſtance. Pl. IV, fig. 1, 2.

46. Soient (fig. 4) les mêmes choſes que ci-deſſus, excepté que du point V on mene la droite VC, & du point R ſa parallele RP, qui rencontre C*r* en P, enſuite PO parallele à RF, & ayant pris CK, moyenne proportionnelle géométrique entre CO & CF, faites CL = CK. Le point L ſera à la courbe requiſe pour l'équilibre. Car on aura V*r*C : VRC :: V*r* : VR :: C*r* : CP :: CF : CO, en raiſon doublée de CF à CK, ou de C*r* à C*s*, ou en raiſon du triangle V*r*C au triangle Q*s*C. Donc VRC, qui exprime le poids CF, ſera égal à Q*s*C, expreſſion du poids CL.

Conſtruction & démonſtration. Pl. IV, fig. 4.

47. Mais parcequ'on a auſſi (même figure) CF : FO :: C*r* : *r*P :: V*r* : *r*R, & que lorſque CL tombe ſur CE, & les points *r* & B en F, ce rapport devient celui de VF à RF, c'eſt-à-dire de la gravité à la force centrifuge ſous l'équateur; & parcequ'enfin, à cauſe que RF eſt très petite par rapport à FV, les lignes FK, KO ſont à peu près égales; on a ici d'une maniere approchée ce qui ſe vérifie exactement dans la courbe de M. *Huygens*, ſavoir que ſous l'équateur la gravité eſt à la moité de la force centrifuge, comme le demi-diametre de l'équateur eſt à ſa différence à la moitié de l'axe. Par conſéquent l'applatiſſement eſt de part & d'autre ſenſiblement le même.

Même applatiſſement.

48. De plus, comme on a V*r* : R*r* :: C*r* : *r*P :: CF : FO, on aura en raiſon alterne cette proportion V*r* : CF :: R*r* : FO, dont le premier terme V*r* eſt preſque conſtant, & le ſecond

Mêmes variations dans la diſtance & la gravité.

CF conſtant. D'où il ſuit que FO, & FK qui eſt à peu près ſa moitié, ſont l'un & l'autre dans la raiſon de R*r*; & ſi RP rencontre QS en *i*, la différence *is* des gravités VR & Q*s* ſera à peu près la moitié de R*r*. Ainſi il eſt encore vrai dans le cas préſent que les diminutions des diſtances au centre, & les augmentations de la gravité depuis l'équateur juſqu'au pôle, ſont à peu près dans la même raiſon que le ſinus verſe d'une latitude double, ou en raiſon doublée du ſinus de la latitude.

Gravités abſolues & gravités primitives.

49. Enfin puiſque les triangles VCR, QC*s* ſont égaux, leurs baſes VR, Q*s* doivent être réciproques à leurs hauteurs CF, CK. Ainſi comme ces baſes expriment les gravités abſolues, & ces hauteurs les diſtances CF, CL, dans leſquelles on a ces gravités mêmes; les gravités abſolues à la ſuperficie de ce ſolide, ſeront exactement en raiſon inverſe des diſtances au centre : ce qui peut paroître ſurprenant, puiſque les gravités primitives ſont là même en raiſon directe de ces diſtances.

Méthodes dont on va ſe ſervir.

50. Dans ce ſecond cas, la courbe eſt une ellipſe du premier genre, & dans le premier c'eſt la courbe déterminée par M. *Huygens*. Celui-ci ne peut ſe démontrer ſans calcul, puiſque *Huygens* exprime la nature de cette courbe par une équation algébrique. A l'égard de l'ellipſe du premier genre, on peut ſe contenter de la ſyntheſe, & de la pure Géométrie, en ſe ſervant même de mon ancienne conſtruction, que j'ai placée ici la premiere. Mais alors le circuit devient plus embarraſſant & plus long. C'eſt pourquoi nous commencerons ici par propoſer des formules analytiques pour ces deux cas. Nous tirerons enſuite de la ſeconde conſtruction, qui eſt la plus ſimple, des conſtructions pour chaque formule. Celle de la premiere formule ſera également très ſimple; mais celle de la ſeconde donnera bien plus de facilité à démontrer par la ſimple Géométrie que la courbe en queſtion eſt exactement une ellipſe du premier genre.

Equation pour la gravité conſtante; Pl. IV. fig. 3.

51. Soit pour le premier cas (fig. 3) CF = *a*, LY perpendiculaire à l'axe CE, CY = *x*, LY = *y*, la gravité conſtante FV = *m*, la force centrifuge en F, à ſavoir FR = *n*. On aura $CL^2 (x^2+y^2) : LY^2 (y^2) :: FR^2 : FB^2 :: FR (n) :$

Fr

$Fr\left(\frac{ny^2}{xx+yy}\right)$. De plus, $FC^2\ (a^2) : CK^2$ ou $CL^2\ (x^2+y^2) ::$ $CFr\left(\frac{1}{2}\times\frac{nay^2}{xx+yy}\right) : CKs\left(\frac{ny^2}{2a}\right)$. Et puiſqu'on a $CKQG=$ $CK\times FV=m(xx+yy)^{\frac{1}{2}}$, on aura $QsCG=m(xx+yy)^{\frac{1}{2}}-\frac{ny^2}{2a}$. Or $GVFC=ma$, $RFC=\frac{1}{2}na$; & par conſéquent $GVRC=ma-\frac{1}{2}na$. Donc puiſque les aires $VRCG$, $QsCG$ ſont égales, on aura $m(xx+yy)^{\frac{1}{2}}-\frac{ny^2}{2a}=ma-\frac{1}{2}na$, qui ſe réduit, en ſuppoſant $\frac{ma}{n}=f$, à l'équation trouvée par M. *Huygens*, ſavoir : $y^4+(4af-4ff-2aa)yy-4ffxx+4aaff-4a^3f+a^4=0$.

52. Pour le ſecond cas, ſoient (fig. 4) les mêmes choſes que ci-deſſus. Soit m, non une gravité conſtante, mais celle qui répond à la diſtance CF, on aura comme auparavant $CKs=\frac{ny^2}{2a}$. De plus, $CFV=\frac{1}{2}ma$, & $CF^2\ (a^2) : CK^2\ (x^2+y^2) :: CFV\ (\frac{1}{2}ma) : CKQ\left(\frac{mx^2+my^2}{2a}\right)$. Ainſi $CsQ=\frac{mx^2+my^2}{2a}-\frac{ny^2}{2a}$; & ſuppoſant ſous l'équateur l'excès de la gravité ſur la force centrifuge, ſavoir $m-n=p$, on aura $CsQ=\frac{mx^2+py^2}{2a}$. Or on a $VR=m-n=p$, & $FC=a$, & par conſéquent $VCR=\frac{1}{2}ap$. Donc on aura auſſi cette équation, qui eſt très ſimple, $\frac{mx^2+py^2}{2a}=\frac{1}{2}ap$, ou bien $\frac{m}{p}x^2+y^2=a^2$, équation à l'ellipſe, dont le demi-axe eſt $CF=a$, & ſon conjugué eſt avec lui en raiſon ſous-doublée de p à m. Car faiſant $y=0$, x repréſente le demi-axe conjugué, & l'on a $\frac{mx^2}{p}=a^2$, & par conſéquent $p:m :: x^2 : a^2$.

Pour la gravité proportionnelle aux diſtances, F. 4.

53. Dans toute autre hypotheſe de gravité, il eſt également facile de trouver l'équation à la courbe dans la figure premiere, pourvu toutefois qu'on ait la quadrature de

Pour toute autre gravité. Pl. IV. fig. 1.

la courbe VQG qui exprime cette hypothèse. Car ôtant de l'aire QKCG, que l'on trouvera par cette quadrature, le triangle K*s*C, dont la valeur est la même que celle que nous lui avons trouvée plus haut, il restera Q*s*CG; & ôtant pareillement de l'aire VFCG le triangle RFC, on aura VRCG, qui étant supposé égal à Q*s*CG donnera une équation à la courbe. Or dès que la gravité est en raison des distances, multipliée par un nombre rationnel quelconque positif ou négatif, on a toujours une quadrature algébrique de la courbe qui exprime cette loi de gravité; excepté seulement le cas d'une gravité diminuant en raison inverse simple, auquel cas cette courbe, qui est ordinairement une parabole ou hyperbole d'un genre plus élevé, comme nous l'avons vu ci-dessus, devient une hyperbole du premier genre, dont on ne peut avoir la quadrature que par les logarithmes. Ainsi dans tous ces cas, la courbe de l'équilibre sera une courbe algébrique, à l'exception du dernier, où elle ne se détermine que par les logarithmes.

Construction plus facile pour une gravité constante. Pl. IV. fig. 5.

54. Tout ceci se déduit de ma premiere construction proposée (n. 19 & suiv.). Nous allons maintenant tirer de la seconde, qui est beaucoup plus simple, & dont j'ai commencé à parler (n. 17), une construction incomparablement plus aisée. Soit (fig. 5) la gravité constante exprimée par des lignes, comme KQ perpendiculaires à FC, & terminées par une autre ligne VG parallele à la premiere FC. Ayant pris VV′ du côté de F, telle qu'il y ait même rapport de FV à VV′ que de cette gravité constante à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur en F; menez V′Z parallele à FC, & qui rencontrera QK en Z; puis VC qui rencontrera VZ prolongée, & KQ en Z′ & *q*. Faites Z′*i* moyenne proportionnelle géométrique entre Z′Z, & Z′V′ du côté de V′. Menez la droite V*i* jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne FC au point I′, par lequel vous tirerez I′*i*′ parallele à CE. Du point C comme centre, & à la distance de CK, vous trouverez sur cette ligne I′*i*′, de part & d'autre du point I′, un point L, qui sera à la courbe cherchée.

55. Car FV & VV′ sont les mêmes que F*u*, *u*V′ de la figure 2; & la droite CV est la quadratrice de VG, puisque

l'aire VFCG divisée par CF donne au quotient FV, & que QKCG est à VFCG, comme KC est à FC, ou comme qK est à VF; d'où il suit que qK est aussi égale à l'aire QKCG divisée par CF. Les points ZZ′ seront donc les mêmes que dans la figure 2, & il faudra prendre CI′ de telle grandeur qu'elle soit à CF en raison sous-doublée de qZ à VV′, ou de ZZ′ à Z′V′, comme dans la figure 1 on l'a pris en raison sous-doublée de qZ à uV' de la figure 2, suivant ce qui a été dit (n. 29). Or c'est ce qu'on a fait en prenant Z′i moyenne proportionnelle entre ZZ′ & Z′V′, & en tirant la ligne ViI′. Car Z′i est à Z′V′ dans cette raison sous-doublée de Z′Z à Z′V′, & CI′ est à CF, comme Z′i est à Z′V′.

Démonstration. Pl. IV. fig. 1. 2. 4.

56. Quant au second cas, qui est celui d'une force augmentant en raison simple des distances, la construction n'est point tout à fait si simple; mais elle n'est pourtant guere plus embarrassée. Soit prise (fig. 6) la ligne FV de telle grandeur qu'on voudra, divisée en deux parties égales au point u; & du côté de F la ligne uV' qui soit à uF en raison de la force centrifuge à la gravité pour le point F. Ayant mené une ligne quelconque KQ parallele à FV, qui rencontrera CV, Cu en Q, Q′; prenez sa partie Kq troisieme proportionnelle à Fu & KQ′, & du côté de Q. Prenez encore CI′ du côté de F, telle que CI′ soit à CF en raison sous-doublée de qZ à uV'. Tirez I′i′ perpendiculaire à CF. Du point C comme centre, & à la distance de CK, vous trouverez sur I′i′ le point L, qui sera à la courbe cherchée.

Pour une gravité proportionnelle aux distances. Fig. 6.

57. Car puisque FV exprime la gravité en F, KQ l'exprimera pour le point K, KQ ayant à FV le même rapport que CK à CF, qui exprime le rapport simple des distances. D'où il suit que VC sera le lieu de la gravité. Mais puisque Fu est la moitié de FV, elle sera égale à l'aire VFC divisée par CF. De plus, on a Fu : Kq :: Fu^2 : Q′K^2 :: FV^2 : QK^2 :: VCF : QCK. Donc Kq est égale à QCK divisé par CF. Donc le point q est à la quadratrice. Et c'est pourquoi il a fallu faire que CI′ fût à CF en raison sous-doublée de Zq à V′u.

Démonstration.

58. Or la quadratrice uqC sera une parabole du premier genre, dont l'axe sera EC prolongée, CF la tangente, puisque chaque ordonnée comme Kq doit être en même raison que

Applatissement de la figure.

l'aire QKC, ou le quarré de CK. D'autre part, si du point V' on mene V'Z' parallele à FC, on pourra trouver sur cette ligne le point Z' où elle rencontre la quadratrice, sans qu'il soit besoin de décrire cette courbe. Car on aura en cet endroit K'Z' = FV'; & K'C sera à CF², comme K'Z' à F*u*. Donc si l'on coupe F*t* moyenne proportionnelle géométrique entre FV' & F*u*; & qu'on fasse CK' à CF, comme F*t* à F*u*; on aura le point K' qu'on cherchoit. Car K'C² sera à CF², comme FV' à F*u*.

Théorème pour cette gravité. Pl. IV. fig. 6, 5.

59. Mais parceque dans le cas où V'*u* sera très petite, les lignes V'*t*, *tu* sont à peu près égales; on pourra encore avoir ici le théorème suivant: *le demi-diametre de l'équateur est à peu près à sa différence au demi-axe, comme la gravité sous l'équateur est à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur même*; ce qui sera exactement vrai dans l'hypothese de Galilée d'une gravité constante. Car puisqu'on a ici CK' : CF :: F*t* : F*u*, on aura en divisant FK' : CF :: *ut* : F*u*. Or *u*V' est à F*u* en raison de cette force centrifuge à cette gravité, & *ut* est à peu près la moitié de V'*u*. Mais dans la figure 5, V'Z' est à FC, comme VV' à FV; c'est-à-dire suivant la construction de cette figure, comme la moitié de la force centrifuge à la gravité. Ainsi ce qui a été dit en général (n. 33 & suivans) se vérifie dans tous ces cas particuliers.

Que la courbe dans le second cas est une ellipse. Fig. 6.

60. Or dans cette hypothese d'une gravité en raison directe des distances, l'on prouve aisément, sans le secours du calcul, que la courbe FLE est une ellipse d'*Apollonius*, ou du premier genre. Soit C*e* = CE, de l'autre côté du point C. Abaissez LY perpendiculaire à CE. Puisque FK' est la différence de CE & CF, on aura CK' = CE. Or les lignes K'Z' ou KZ, ou FV', K*q*, & F*u* sont en même raison que les quarrés de CK', CK ou CL, & CF. Donc la différence des quarrés de CF, CE, est à la différence des quarrés de CE & CL, comme V'*u* est à Z*q*, ou par la construction comme FC² est à I'C². Et en raison alterne CF² — CE² : FC² :: CL² — CE² : I'C²; ou en renversant FC² : CF² — CE² :: I'C² : CL² — CE²; & par conversion de raison FC² : CE² :: I'C² : I'C² — CL² + CE². Or I'C² — CL² = — I'L². Donc le quarré de FC est au quarré de CE, comme le quarré de CI'

ou de YL est à la différence des quarrés de CE & CY, ou au rectangle sous eY, YE; ce qui est une propriété de l'ellipse du premier genre, dont le demi-axe est CF, & CE son conjugué.

Plusieurs points qu'on peut démontrer par la Géométrie.

61. De cette construction générale, on pourroit encore, par la simple Géométrie, démontrer cet autre point, savoir qu'à la superficie de cette figure la gravité composée de la force centrifuge & de la gravité primitive, ou la gravité absolue, a une direction perpendiculaire. Bien plus, on pourroit avec la seule Géométrie parvenir de cette hypothese de direction à la construction de la courbe. Mais le chemin seroit long, & on peut se dispenser de s'y engager, suivant ce que nous avons dit (n. 8). Cependant comme il est très facile de démontrer la même chose par les premiers élémens du calcul infinitésimal, & par la méthode dont je m'étois servi dans la Dissertation dont j'ai parlé plus haut, & que cette nouvelle démonstration conduit également à la seconde construction du n. 29, nous l'ajouterons ici.

Usage du calcul. Pl. IV. fig. 7.

62. La ligne LN (fig. 7.) exprime la gravité primitive dirigée au centre C, LO la force centrifuge. Ayant achevé le parallélograme MOLN, les graves feront dirigés par LM au point P du demi-diametre CF, non au centre C; & LP sera la perpendiculaire à la courbe FLE. Il faut donc se servir ici de la formule des sous-normales. Tirez LI' perpendiculaire à CF; PI' sera la sous-normale, qui, suivant les formules élémentaires du calcul infinitésimal, doit être $\frac{-x\,dx}{dy}$, supposant comme ci-dessus $CY = I'L = x$, $LY = CI' = y$.

Suite.

63. Faisons comme ci-devant $CF = a$, la force centrifuge en $F = n$. Soit encore CL, ou $\sqrt{xx+yy} = z$; la gravité LN, à la distance de CL, $= u$, qu'on connoîtra par la distance z. On aura par le n. 17 CF (a) : LY (y) :: n : LO ou MN $\left(\frac{ny}{a}\right)$. De plus, LN ($u$) : MN $\left(\frac{ny}{a}\right)$ :: LC (z) : CP $\left(\frac{nyz}{au}\right)$. Donc $PI' = y - \frac{nyz}{au} = \frac{-x\,dx}{dy}$, ou $y\,dy - \frac{nzy\,dy}{au} = -x\,dx$, ou $y\,dy + x\,dx = \frac{nzy\,dy}{au}$. Mais parceque $zz =$

$xx+yy$, on a $z\,dz=x\,dx+y\,dy$. On aura donc $z\,dz=\frac{nzy\,dy}{au}$, & $au\,dz=ny\,dy$, dont l'intégrale eſt $a\,S.\,u\,dz=\frac{1}{2}nyy+B$. B eſt une quantité conſtante qu'on ajoute à l'intégrale, & qui doit être déterminée ſuivant la nature du problême.

Même ſujet. Pl. IV. fig. 1. 2.

64. Car dans la figure 2 la diſtance $z=CK$, & la gravité correſpondante $u=KQ$. Ainſi l'aire $GCKQ=S.\,u\,dz$, comme Kq eſt égale à cette aire diviſée par $CF=a$. Soit $Kq=r$, on aura $GCKQ=ar$, & l'équation précédente ſe changera en celle-ci $aar=\frac{1}{2}nyy+B$. Soit encore $Fu=c$. Lorſque le point L (fig. 1) tombe en F, CL & LY ſe confondent avec CF, & l'on a $z=y=a$; le point K (fig. 2) retombe ſur F, & Kq ſur Fu. Donc $r=c$, & l'équation ſera, pour ce point, $aac=\frac{1}{2}naa+B$, & $B=aac-\frac{1}{2}aan$. Donc l'équation à la courbe eſt $aar=\frac{1}{2}nyy+aac-\frac{1}{2}aan$, ou bien $yy=aa\times\frac{r-c+\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n}$

Conſtruction.

65. De là on tire une conſtruction très ſimple de la courbe cherchée. Soit tracée (fig. 2) la ſeule quadratrice Cqu; & ſans qu'il ſoit beſoin des lignes CR, Cr, ni du demi-cercle RBF; coupez, du côté de F, $uV'=\frac{1}{2}RF$. Enſuite ayant mené d'un point quelconque K l'ordonnée Kq à la quadratrice, menez $V'y$ parallele à FC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la quadratrice en quelque point Z'. Prenez CI' (fig. 1) de telle grandeur qu'elle ſoit avec CF en raiſon ſous-doublée de Zq à $V'u$ (fig. 2); & ayant mené par le point I' la ligne indéfinie $I'i'$, du point C comme centre, & à l'intervalle de CK pris dans la figure 2, vous trouverez ſur $I'i'$ (fig. 1) le point L, qui ſera à la courbe cherchée. Car on aura (fig. 2) $KZ=FV'=c-\frac{1}{2}n$. Donc $qZ=qK-KZ=r-c+\frac{1}{2}n$, & $V'u\ (\frac{1}{2}n) : Zq\ (r-c+\frac{1}{2}n) :: CF^2\ (aa) : I'C^2=yy=aa\times\frac{r-c+\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n}$. Et comme on a pris CI' de cette grandeur dans la premiere figure, on a la conſtruction qu'on demandoit.

66. Cette conſtruction eſt abſolument la même que celle

que nous avons déduite par la Géométrie ſimple (n. 29) de l'équilibre des canaux, dont nous avons donné la conſtruction (n. 23). La ſeconde conſtruction s'accorde parfaitement avec la premiere. M. *Huygens* en a tiré ſon équation, M. *Herman* ſon ellipſe; & nous les pourrions tirer ici avec la même facilité. Il nous reſte à voir quelle ſera dans ces hypotheſes de gravité l'élévation ſous l'équateur. C'eſt ce qu'on pourra connoître par ce qui a été dit (n. 37), ſi l'on ſait le rapport de la force centrifuge à la gravité ſous l'équateur, & la grandeur du moins approchée du demi-diametre de ce cercle. Car quoiqu'on ne la connoiſſe pas axactement, l'axe n'ayant avec le diametre qu'une petite différence, l'erreur qui en réſultera ſera elle-même très petite.

La même qu'on a par la Géométrie. Applatiſſement.

67. Le rapport de la force centrifuge à la gravité ſous l'équateur peut ſe déterminer avec plus de préciſion, depuis que ſous l'équateur même on a obſervé immédiatement l'effet de la gravité par les oſcillations du pendule. MM. *Huygens* & *Newton* ont eu beſoin de pluſieurs réductions pour trouver ce rapport, n'ayant employé que les obſervations du pendule faites en Europe. Cependant comme la réduction même ne donne que de petites différences, ils n'ont commis aucune erreur ſenſible. Or il nous faut examiner en premier lieu quel eſpace parcourroit ſous l'équateur, en un tems donné, un grave dont la chute ne ſeroit pas même retardée par la réſiſtance de l'air. Nous verrons enſuite quel effet produit ſous l'équateur la force centrifuge. L'un ſe détermine par la longueur du pendule à ſeconde, réglé ſur le tems moyen; l'autre par la connoiſſance que nous pouvons avoir de la grandeur de la Terre, & de la viteſſe de ſon mouvement diurne.

Rapport de la force centrifuge à la gravité.

68. A l'égard du premier article, M. *Bouguer* l'a déterminé ſur les obſervations qu'il a faites ſous l'équateur, leſquelles s'accordent à très peu de choſes près avec les obſervations de M. *de la Condamine* & celles de M. *Godin* (1). Après avoir fait les corrections néceſſaires pour la chaleur, & pour la gravité de l'air, M. *Bouguer* a trouvé que la longueur du pendule à ſecondes, ſous l'équateur, au niveau de la mer,

La gravité ſous l'équateur.

(1) Elles n'en different pas de deux centiemes de ligne.

& dans un espace vuide d'air, étoit exactement de 3 pieds, 7 lignes, & $\frac{21}{100}$ de lignes; ce qui donne le nombre de 439.21 en réduisant tout en lignes. Or il est démontré dans les premiers élémens de la méchanique, que le quarré du diametre est au quarré de la moitié de la circonférence, ou que 226×226 est à 355×355, comme le double de la longueur du pendule est à l'espace qui seroit parcouru par une chute libre dans le tems d'une oscillation. On trouve par le calcul que cet espace est de 2167.41 de lignes, ou de 15 pieds, & 7.41 de lignes.

Force centrifuge sous l'équateur.

69. L'espace qui exprime l'effet de la force centrifuge, est à peu de choses près le sinus verse de l'arc décrit dans une seconde de tems, ou d'un arc de 15″. Il est certes bien fâcheux qu'on n'ait pas mesuré la grandeur d'un dégré de l'équateur, grandeur dont nous n'aurons peut-être jamais, ni par les observations, ni par la théorie aucune connoissance assez certaine, à cause du tissu irrégulier des parties de la Terre. Mais comme l'erreur qu'on a pu commettre en la déterminant par la théorie, ne peut causer dans un sinus verse fort petit qu'une erreur de peu de conséquence, je supposerai le dégré de l'équateur de la longueur que lui a trouvée M. *Bouguer* par sa théorie, savoir de 57264 toises.

Même sujet.

70. Dans cette supposition, un arc de 15″ est de 206150 lignes, & l'on a d'abord l'analogie suivante: comme le diametre 2000000000 est au sinus de 15″, à savoir 72722, ainsi cet arc de 15″, qui est de 206150 lignes, est au sinus verse, qu'on trouvera de 7.49 lignes. Tel seroit, dis-je, le sinus verse, si la Terre tournoit sur son axe en 24 heures solaires. Mais comme son mouvement diurne s'acheve près de 4 minutes plutôt, différence qui se trouve entre la révolution apparente du soleil & celle des étoiles, qui est plus courte; l'arc décrit sur l'équateur par le mouvement diurne, sera plus grand presqu'en raison inverse de 24 heures, ou de 1440 minutes à 1436, ou de 360 à 359. Or les sinus verses sont en raison doublée des sous-tendantes, ou des cordes, pour lesquelles on peut prendre les arcs mêmes, lorsqu'ils sont fort petits. Il faudra donc corriger l'erreur précédente par cette analogie: comme le quarré de 359 est à celui de 360, ou ce qui revient

à

à peu près au même, comme 358 est à 360, ainsi 7.49 est à un quatrieme terme, qu'on trouvera de 7.53 lignes pour le sinus verse cherché.

Rapport de la force centrifuge à la gravité.

71. La force centrifuge sera donc sous l'équateur à la gravité absolue, comme 7.53 à 2167.41, ou à peu près comme 1 à 288; & elle aura à la gravité primitive le rapport de 1 à 289; ce qui s'accorde avec le sentiment d'*Huygens* & de *Newton*. Si le dégré de l'équateur étoit plus long ou plus court; le sinus verse d'un arc semblable, & par conséquent la force centrifuge, seroit plus grande ou plus petite en raison doublée de la longueur du dégré. D'où il suit qu'il faudroit augmenter ou diminuer le dernier terme de la proportion, suivant cette raison doublée.

Elévation de la Terre sous l'équateur, pour diverses hypotheses.

72. De là il est évident que dans toute hypothese de gravité dirigée à un centre unique, si la force centrifuge est très petite, le demi-diametre de l'équateur est au demi-axe, comme 289 est à 288, ou qu'ils ne different que de $\frac{1}{577}$ de leur tout. Or en supposant au dégré de l'équateur la même grandeur que ci-dessus, on trouvera que son demi-diametre est à peu près de 4300 milles d'Italie. D'où il suit qu'il ne surpassera le demi-axe que d'environ 7 milles; différence peu sensible.

Même sujet. Pl. IV. fig. 2.

73. Dans toutes ces hypotheses de gravité, si la Terre est immobile, sa figure doit être sphérique; si elle tourne sur son axe, c'est un sphéroïde applati; & si la force centrifuge est fort petite, comparée à la gravité sous l'équateur, l'applatissement sera tel que nous l'avons déja déterminé, savoir que le demi-diametre de l'équateur sera à sa différence au demi-axe, comme sous l'équateur la gravité est à la moitié de la force centrifuge; & la diminution des distances depuis l'équateur jusqu'au pôle, sera comme le quarré du sinus de la latitude. Or pour que la force centrifuge soit censée fort petite, il faut que FK', qui en dépend pour sa longueur, soit si petite, que l'aire VFKQ (fig. 2) puisse dans tous les points, & lors même que K tombe en K', être prise pour un rectangle; c'est-à-dire qu'ayant abaissé sur KQ la perpendiculaire VD, le triangle mixtiligne VQD soit extrêmement petit, par rapport à l'aire VFKD. Ce qui dépend aussi de la nature de la courbe VQG, dont les ordonnées mesurent

les gravités. Car elle pourroit être telle, que quoique FR fût fort petite par rapport à FV, comme FK′ par rapport à FC, ce triangle ne fût pas pour cela des plus petits, en comparaison du rectangle VFKD.

Solution d'un problême très général.

74. On pourroit encore résoudre ce problême (1) : trouver une hypothese de gravité dirigée à un centre unique, telle que l'applatissement soit d'une grandeur quelconque donnée, & que la diminution de la distance depuis l'équateur soit en raison quelconque, quel que soit le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur. Car ayant pris F*u* & V′*u* de sorte qu'elles aient entre elles le même rapport, que la gravité à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur ; puis FK′ de telle grandeur qu'on voudra, & K′Z′ parallele à F*u*, jusqu'à ce qu'elle rencontre V′*y* parallele à FC en un point Z′ ; si par les points CZ′*u* on trace une courbe, dont les ordonnées augmentent à mesure qu'elles s'éloignent du point C, & qu'on décrive la courbe VQG, dont la quadratrice soit *u*Z′C (je donnerai pour cela une méthode générale, où l'on n'emploie que la Géométrie de l'infini, dans le quatrieme tome de mes Elémens), l'hypothese de gravité sera exprimée par cette courbe VQG, qui représentera également l'applatissement donné FK′. Or ayant pris FR quatrieme proportionnelle à *u*F, 2*u*V′, & FV, & fait un angle quelconque FRB dans le demi-cercle, je tire B*r*, C*r*, & je prends chaque diminution FK de la distance CK correspondante à l'angle FRB. Je fais encore $uX = \frac{1}{2}Fr$; & ayant mené KZ parallele à F*u*, je coupe Z*q* de telle grandeur qu'elle soit à X*u* en raison doublée de CK à CF. J'aurai par ce moyen tout l'arc Z′*qu* de la quadratrice, & par-là même l'arc correspondant de la courbe des gravités, laquelle représentera les diminutions des distances pour chacun des angles, comme il sera aisé de s'en convaincre en remontant par la construction que nous avons commencé de donner au n. 23.

75. En voilà assez pour ce qui regarde l'hypothese d'une gravité tendante à un centre unique, toujours égale à égales dis-

(1) Pour comprendre la solution de ce problême, il faut se rappeller ce qui a été dit depuis le n°. 20 de ce Livre jusqu'au n°. 25.

tances du centre en tout sens, & augmentant ou diminuant en raison quelconque, suivant la différence des distances. Nous résoudrons encore ci-après quelques autres problêmes qui ont rapport à ce genre de gravité, par exemple: trouver une hypothese de gravité dirigée à un centre unique, telle qu'il y ait un rapport quelconque donné, non entre les diminutions des distances, mais entre les accroissemens de la gravité absolue depuis l'équateur jusqu'aux pôles. Mais pour le présent nous allons passer à d'autres hypotheses de gravité; & nous commencerons par cette hypothese si connue, si simple & si belle, dans laquelle la Terre, soit immobile, soit mue autour de son axe, pourroit être un sphéroïde oblong. Soit la gravité (fig. 8) dirigée à deux points E & F, ensorte qu'elle soit composée de deux gravités égales, constantes & dirigées toujours au même point. Si le fluide a la figure d'une ellipse ABD, ayant ces points pour foyers, pour grand axe AD, pour demi-axe conjugué CB, & qu'il soit immobile, il sera en équilibre. Car en quelque point que ce soit, comme G, la gravité composée des gravités GH, GI, sera dirigée par GK diagonale du rombe GHKI, laquelle divise l'angle HGI, ou EGF en deux parties égales: d'où il suit qu'elle est perpendiculaire à la superficie, comme il est requis pour l'équilibre. Or dans les points D & A, la gravité composée sera la somme de ces deux gravités. Dans tout autre point G, la diagonale GK n'égalera pas la somme des côtés GI, GH, puisqu'elle sera moindre que celle de GI, IK. Elle sera même d'autant moindre, comme on pourroit aisément le démontrer s'il étoit nécessaire, que l'angle HGI sera plus grand. Or dans l'ellipse cet angle est d'autant plus grand, que le point G approche plus du point B. Ainsi dans cette hypothese de gravité, la Terre supposée même immobile sera un sphéroïde oblong, quoique la gravité aille toujours en diminuant du pôle à l'équateur.

Hypothese d'une gravité constante dirigée à deux centres. Pl. IV. fig. 8.

76. Ceci peut paroître d'abord incroyable, puisqu'il semble au contraire que pour compenser l'excès de la gravité & de la pesanteur au point D sur celle du point B, le canal CD devroit être le moindre en hauteur. Mais il est aisé de répondre à l'objection. Car dans le canal BC, tous les points

Equilibre des canaux.

pesent sur le centre C, & leur pesanteur est composée des deux gravités compriſes dans l'hypotheſe, quelque obliques qu'elles ſoient. Il eſt vrai qu'à meſure qu'on approche du centre C, cette obliquité augmente, ainſi que l'oppoſition des forces, qui enfin deviennent entierement contraires au point C; mais la gravité n'eſt jamais nulle qu'au point C: au lieu qu'en DC la gravité compoſée eſt à la vérité conſtante, depuis D juſqu'en F; mais de F en C, elle ſe trouve détruite par des directions contraires, & il eſt aiſé de démontrer que la ſomme de tous les points peſans en BC doit ſurpaſſer celle de tous les points en FD.

Ce qui arrive dans le cas du mouvement de rotation.

77. Maintenant ſi ce ſolide tourne autour de l'axe AD, il eſt évident que la force centrifuge diminuera le poids de tout le canal CB, ce qui rompra l'équilibre, qui ne pourra être recouvré, à moins que le fluide ne s'éleve en B, ou qu'on n'y répande une nouvelle couche de matiere liquide capable de compenſer la diminution occaſionnée par la force centrifuge. Si le mouvement de rotation eſt lent, l'élévation en B ſera peu ſenſible, & la figure ſera toujours allongée. S'il devient plus rapide, il pourroit augmenter la force centrifuge au point, que pour conſerver l'équilibre il ſeroit néceſſaire que CB fût égal, ou même plus grand que CD.

Loi de gravité de M. de *Mairan*.

Pl. IV. fig. 9.

78. M. *de Mairan*, par une méthode fort ingénieuſe, & beaucoup plus générale, nous apprend à trouver pour une Terre mobile ou immobile, une figure plus ou moins applatie ou allongée. Soit la courbe FGHI (fig. 9) compoſée de quatre arcs ſemblables, & également placés autour du centre C, auquel ils ſont adoſſés. Suppoſons encore qu'elle ſoit la développée de la courbe ABDE, de ſorte que le fil qui enveloppe ou entoure l'arc GKF, & qui eſt étendu le long de ſa tangente depuis F juſqu'en A, décrive par ſon extrémité A l'arc ALB, tandis que la courbe FKG ſe développe; qu'enſuite le fil qui entoure l'arc GH décrive l'arc DB; & que pareillement les arcs DE, EA ſoient décrits par le développement des arcs HI & IF. Si l'on a un fluide de la figure de ABDE, dans lequel la gravité ſuive toujours la direction du fil LK, & tende continuellement au point K, où le fil touche ſucceſſivement chaque point de la développée, tandis qu'on

l'appliqué à cette courbe, ou qu'on l'en ſépare; la direction ſera dans chaque point L perpendiculaire à la ſuperficie. Car c'eſt une propriété générale des courbes qui ſe décrivent par le développement d'autres courbes, que le rayon oſculateur ou le fil ſoit, dans chaque poſition, tangente de la développée, & perpendiculaire à la courbe décrite.

De l'équilibre.

79. On aura donc dans ce fluide cette ſorte d'équilibre; & ſi outre cela il y a tel dégré de gravité dans les parties intérieures, que l'égalité des poids, dans les canaux qui communiquent de l'un à l'autre, n'en ſoit aucunement troublée, le fluide ſera parfaitement en équilibre.

Du mouvement de rotation.

80. On démontre aiſément que AD eſt plus grand que EB. Par conſéquent ſi le fluide tourne autour de l'axe BE, il ſera applati, & cet applatiſſement ſera encore augmenté par la force centrifuge. Mais s'il tourne autour de DA, il ſera allongé, quoiqu'un peu moins que dans la figure, ou ſphérique, ou même raccourci, ſuivant le dégré de viteſſe de la rotation, & de la force centrifuge qui en eſt une ſuite.

Que la gravité neutonienne eſt la ſeule qui exiſte dans la nature.

81. En voilà aſſez ſur ces ſortes d'hypotheſes que nous avons choiſies parmi pluſieurs autres qu'on auroit pu propoſer. Il paroît certain que la gravité n'eſt dirigée ni à un, ni à deux points. Cela ſeroit entierement contraire à cette gravitation générale, ſuivant laquelle tous les corps céleſtes peſent les uns ſur les autres, ſinon exactement, du moins à fort peu de choſes près, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; gravitation par laquelle le grand *Newton* a découvert aux Phyſiciens le ſyſtême de l'univers, & de laquelle ſeule dépendent un ſi grand nombre de phénomenes, dont elle fournit de ſi heureuſes explications, qu'on peut s'en ſervir pour prédire de nouveaux phénomenes, ſans crainte de ſe tromper. Or on en conclut par analogie, que toutes les parties de la matiere peſent les unes ſur les autres (1), par une certaine action mutuelle, qui à la vérité ne me paroît être nulle part exactement en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, comme je l'ai expliqué dernierement dans une Diſſertation ſur la loi des forces qui exiſtent dans la nature; mais qui, à de grandes

(1) L'Auteur en donne une nouvelle preuve dans la ſuite de cet ouvrage.

distances, en approche de si près, qu'on n'y peut appercevoir aucune différence sensible.

Les gravités précédentes n'y existent pas; & pourquoi.

82. Ajoutons que dans ces premieres hypotheses d'une gravité proportionnelle à la puissance des distances, la Terre seroit trop peu applatie, & qu'on connoît par la mesure des dégrés, ainsi que nous le ferons voir au chapitre second, qu'elle doit l'être davantage; & que dans l'hypothese d'une gravité constante, la différence de la gravité sous l'équateur à celle qu'on éprouve dans les pays septentrionaux, seroit beaucoup au-dessous de celle qu'on y a découverte par les oscillations du pendule.

Suite.

83. Enfin la théorie de M. *de Mairan*, que nous venons de proposer, explique bien à la vérité la direction de la gravité primitive, c'est-à-dire d'une gravité qui n'est point diminuée par la force centrifuge, & qui est dirigée, non à un centre, mais à une certaine courbe; mais cette direction même ne dépend point de cette courbe, & ne se termine point à une courbe constante. Car qu'il survienne quelque changement dans la disposition des parties, ce qui ne peut manquer d'arriver par le retardement ou l'accélération du mouvement diurne; il y aura aussi du changement dans la courbe, dont les tangentes marquent la direction de la gravité. Ainsi cette courbe n'étant point donnée, avant la détermination de la figure, elle ne peut servir à déterminer une figure qui devroit auparavant la déterminer elle-même.

Trouver la figure de la Terre dans cette hypothese. Solution de M. *Mac-Laurin* simplifiée.

84. Il nous reste donc à examiner quelle sera la figure de la Terre, mue autour de son axe, dans l'hypothese de la gravité newtonienne. M. *Mac-Laurin*, dans sa Dissertation sur la cause physique des marées, qui fut couronnée avec trois autres en 1740 par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, propose une solution que je tâcherai d'abord ici d'expliquer; & je ne me servirai que de la simple Géométrie pour développer ce qu'elle renferme de plus important, en y faisant quelques additions & quelques changemens, suivant qu'il paroîtra convenir davantage à mon sujet. Mais il faut préalablement éclaircir quelques points nécessaires pour cette solution.

85. Soient (fig. 10 & 11) deux ellipses semblables, ayant

un centre commun C, & leurs axes homologues dans la même position. Soient N V *n* ordonnée de l'ellipse intérieure à l'axe D *d*, & I D P perpendiculaire à l'axe D *d*, & qui rencontre l'ellipse extérieure en I & P. Joignez D N, D *n*, & menez-leur les paralleles P M, P *m*, qui rencontrent l'ellipse extérieure en M & *m*. Menez encore P H parallele à l'axe D *d*, sur laquelle vous abaisserez les perpendiculaires M Q, *m q*. La somme des lignes P Q, P *q* de la premiere figure, dans laquelle les points M *m* sont du même côté de P I, & leur différence dans la seconde, dans laquelle ces points sont l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sera égale au double de D V. Théorème. Pl. IV. fig. 10. 11.

86. Car si l'on tire la corde H E parallele à P *m*, & leur diametre commun G *g*, dans l'ellipse extérieure, qui le sera aussi de la corde D *n* dans l'ellipse intérieure, & qui par conséquent coupera toutes ces cordes en deux parties égales, aux points T, F, L, & que ce diametre coupe en quelque point O la ligne P H; les triangles T P O, F H O, L D C seront semblables, étant formés par des paralleles. Ainsi l'on aura P T : P O :: H F : H O :: D L : D C. Et prenant dans la figure 10 les sommes, & dans la figure 11 les différences des antécédens & des conséquens, on aura pour le premier cas la somme, & pour le second la différence de P T, H F à P H, comme L D est à D C, ou comme *n* D à *d* D (1). Démonstration.

87. Mais parceque l'ordonnée à l'ellipse extérieure, tirée du point *d*, doit être parallele & égale à D P, & par conséquent aboutir au point H, où la ligne P H rencontre l'ellipse extérieure, on aura P H = D *d*. Ainsi la somme de T P, H F dans le premier cas, & leur différence dans le second, sera égale à D *n*. Suite.

88. Maintenant comme *n* N est coupée également, & à angles droits au point V, les angles N D V, V D *n* sont égaux, & par conséquent l'angle M P H est égal à l'angle *m* P H (2), ou à son alterne P H E. D'où il arrive que si l'ellipse fait une Suite.

(1) *n* D & *d* D sont doubles de L D & D C, par conséquent elles sont entre elles dans la même raison que L D & D C.

(2) Dans la figure 11, au lieu de *m* P H, c'est *m* P O, ou l'angle de même côté P H E.

distances, en approche de si près, qu'on n'y peut appercevoir aucune différence sensible.

Les gravités précédentes n'y existent pas; & pourquoi.

82. Ajoutons que dans ces premieres hypotheses d'une gravité proportionnelle à la puissance des distances, la Terre seroit trop peu applatie, & qu'on connoît par la mesure des dégrés, ainsi que nous le ferons voir au chapitre second, qu'elle doit l'être davantage; & que dans l'hypothese d'une gravité constante, la différence de la gravité sous l'équateur à celle qu'on éprouve dans les pays septentrionaux, seroit beaucoup au-dessous de celle qu'on y a découverte par les oscillations du pendule.

Suite.

83. Enfin la théorie de M. *de Mairan*, que nous venons de proposer, explique bien à la vérité la direction de la gravité primitive, c'est-à-dire d'une gravité qui n'est point diminuée par la force centrifuge, & qui est dirigée, non à un centre, mais à une certaine courbe; mais cette direction même ne dépend point de cette courbe, & ne se termine point à une courbe constante. Car qu'il survienne quelque changement dans la disposition des parties, ce qui ne peut manquer d'arriver par le retardement ou l'accélération du mouvement diurne; il y aura aussi du changement dans la courbe, dont les tangentes marquent la direction de la gravité. Ainsi cette courbe n'étant point donnée, avant la détermination de la figure, elle ne peut servir à déterminer une figure qui devroit auparavant la déterminer elle-même.

Trouver la figure de la Terre dans cette hypothese. Solution de M. *Mac-Laurin* simplifiée.

84. Il nous reste donc à examiner quelle sera la figure de la Terre, mue autour de son axe, dans l'hypothese de la gravité newtonienne. M. *Mac-Laurin*, dans sa Dissertation sur la cause physique des marées, qui fut couronnée avec trois autres en 1740 par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, propose une solution que je tâcherai d'abord ici d'expliquer; & je ne me servirai que de la simple Géométrie pour développer ce qu'elle renferme de plus important, en y faisant quelques additions & quelques changemens, suivant qu'il paroîtra convenir davantage à mon sujet. Mais il faut préalablement éclaircir quelques points nécessaires pour cette solution.

85. Soient (fig. 10 & 11) deux ellipses semblables, ayant

un centre commun C, & leurs axes homologues dans la même position. Soient N V *n* ordonnée de l'ellipse intérieure à l'axe D *d*, & I D P perpendiculaire à l'axe D *d*, & qui rencontre l'ellipse extérieure en I & P. Joignez D N, D *n*, & menez-leur les paralleles P M, P *m*, qui rencontrent l'ellipse extérieure en M & *m*. Menez encore P H parallele à l'axe D *d*, sur laquelle vous abaisserez les perpendiculaires M Q, *m q*. La somme des lignes P Q, P *q* de la premiere figure, dans laquelle les points M *m* sont du même côté de P I, & leur différence dans la seconde, dans laquelle ces points sont l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sera égale au double de D V. Théorème. Pl. IV. fig. 10. 11.

86. Car si l'on tire la corde H E parallele à P *m*, & leur diametre commun G *g*, dans l'ellipse extérieure, qui le sera aussi de la corde D *n* dans l'ellipse intérieure, & qui par conséquent coupera toutes ces cordes en deux parties égales, aux points T, F, L, & que ce diametre coupe en quelque point O la ligne P H; les triangles T P O, F H O, L D C seront semblables, étant formés par des paralleles. Ainsi l'on aura P T : P O :: H F : H O :: D L : D C. Et prenant dans la figure 10 les sommes, & dans la figure 11 les différences des antécédens & des conséquens, on aura pour le premier cas la somme, & pour le second la différence de P T, H F à P H, comme L D est à D C, ou comme *n* D à *d* D (1). Démonstration.

87. Mais parceque l'ordonnée à l'ellipse extérieure, tirée du point *d*, doit être parallele & égale à D P, & par conséquent aboutir au point H, où la ligne P H rencontre l'ellipse extérieure, on aura P H = D *d*. Ainsi la somme de T P, H F dans le premier cas, & leur différence dans le second, sera égale à D *n*. Suite.

88. Maintenant comme *n* N est coupée également, & à angles droits au point V, les angles N D V, V D *n* sont égaux, & par conséquent l'angle M P H est égal à l'angle *m* P H (2), ou à son alterne P H E. D'où il arrive que si l'ellipse fait une Suite.

(1) *n* D & *d* D sont doubles de L D & D C, par conséquent elles sont entre elles dans la même raison que L D & D C.

(2) Dans la figure 11, au lieu de *m* P H, c'est *m* P O, ou l'angle de même côté P H E.

distances, en approche de si près, qu'on n'y peut appercevoir aucune différence sensible.

Les gravités précédentes n'y existent pas; & pourquoi.

82. Ajoutons que dans ces premieres hypotheses d'une gravité proportionnelle à la puissance des distances, la Terre seroit trop peu applatie, & qu'on connoît par la mesure des dégrés, ainsi que nous le ferons voir au chapitre second, qu'elle doit l'être davantage; & que dans l'hypothese d'une gravité constante, la différence de la gravité sous l'équateur à celle qu'on éprouve dans les pays septentrionaux, seroit beaucoup au-dessous de celle qu'on y a découverte par les oscillations du pendule.

Suite.

83. Enfin la théorie de M. *de Mairan*, que nous venons de proposer, explique bien à la vérité la direction de la gravité primitive, c'est-à-dire d'une gravité qui n'est point diminuée par la force centrifuge, & qui est dirigée, non à un centre, mais à une certaine courbe; mais cette direction même ne dépend point de cette courbe, & ne se termine point à une courbe constante. Car qu'il survienne quelque changement dans la disposition des parties, ce qui ne peut manquer d'arriver par le retardement ou l'accélération du mouvement diurne; il y aura aussi du changement dans la courbe, dont les tangentes marquent la direction de la gravité. Ainsi cette courbe n'étant point donnée, avant la détermination de la figure, elle ne peut servir à déterminer une figure qui devroit auparavant la déterminer elle-même.

Trouver la figure de la Terre dans cette hypothese. Solution de M. *Mac-Laurin* simplifiée.

84. Il nous reste donc à examiner quelle sera la figure de la Terre, mue autour de son axe, dans l'hypothese de la gravité newtonienne. M. *Mac-Laurin*, dans sa Dissertation sur la cause physique des marées, qui fut couronnée avec trois autres en 1740 par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, propose une solution que je tâcherai d'abord ici d'expliquer; & je ne me servirai que de la simple Géométrie pour développer ce qu'elle renferme de plus important, en y faisant quelques additions & quelques changemens, suivant qu'il paroîtra convenir davantage à mon sujet. Mais il faut préalablement éclaircir quelques points nécessaires pour cette solution.

85. Soient (fig. 10 & 11) deux ellipses semblables, ayant

un centre commun C, & leurs axes homologues dans la même position. Soient N V *n* ordonnée de l'ellipse intérieure à l'axe D *d*, & I D P perpendiculaire à l'axe D *d*, & qui rencontre l'ellipse extérieure en I & P. Joignez D N, D *n*, & menez-leur les paralleles P M, P *m*, qui rencontrent l'ellipse extérieure en M & *m*. Menez encore P H parallele à l'axe D *d*, sur laquelle vous abaisserez les perpendiculaires M Q, *m q*. La somme des lignes P Q, P *q* de la premiere figure, dans laquelle les points M *m* sont du même côté de P I, & leur différence dans la seconde, dans laquelle ces points sont l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sera égale au double de D V. Théorème. Pl. IV. fig. 10. 11.

86. Car si l'on tire la corde H E parallele à P *m*, & leur diametre commun G *g*, dans l'ellipse extérieure, qui le sera aussi de la corde D *n* dans l'ellipse intérieure, & qui par conséquent coupera toutes ces cordes en deux parties égales, aux points T, F, L, & que ce diametre coupe en quelque point O la ligne P H; les triangles T P O, F H O, L D C seront semblables, étant formés par des paralleles. Ainsi l'on aura P T : P O :: H F : H O :: D L : D C. Et prenant dans la figure 10 les sommes, & dans la figure 11 les différences des antécédens & des conséquens, on aura pour le premier cas la somme, & pour le second la différence de P T, H F à P H, comme L D est à D C, ou comme *n* D à *d* D (1). Démonstration.

87. Mais parceque l'ordonnée à l'ellipse extérieure, tirée du point *d*, doit être parallele & égale à D P, & par conséquent aboutir au point H, où la ligne P H rencontre l'ellipse extérieure, on aura P H = D *d*. Ainsi la somme de T P, H F dans le premier cas, & leur différence dans le second, sera égale à D *n*. Suite.

88. Maintenant comme *n* N est coupée également, & à angles droits au point V, les angles N D V, V D *n* sont égaux, & par conséquent l'angle M P H est égal à l'angle *m* P H (2), ou à son alterne P H E. D'où il arrive que si l'ellipse fait une Suite.

(1) *n* D & *d* D sont doubles de L D & D C, par conséquent elles sont entre elles dans la même raison que L D & D C.

(2) Dans la figure 11, au lieu de *m* P H, c'est *m* P O, ou l'angle de même côté P H E.

révolution autour de l'axe perpendiculaire à l'axe B*b*, le point H tombant en P, & le point P en H, PM doit prendre la place de HE, à laquelle elle devient par-là même égale, & double de HF. Donc puisque P*m* est aussi double de PT, on aura dans le premier cas la somme de PM, P*m*, & dans le second leur différence égale au double de D*n*.

Conclusion.

89. Enfin puisqu'à cause des triangles semblables, *m*qP, MQP, *n*VD, ces triangles ayant chacun, outre un angle droit, les angles en P & D égaux, on a MP : QP :: *m*P : *q*P :: D*n* : DV; on aura aussi la somme de PQ, P*q* dans le premier cas, & leur différence dans le second égale au double de DV. C. Q. F. D.

De la démonstration de M. *Mac-Laurin.*

90. Ce dernier article fait le quatrieme corollaire du lemme I de la Dissertation de M. *Mac-Laurin*, en faveur duquel il semble avoir proposé ce lemme, avec tous les corollaires précédens. Du moins n'y a-t-il que le quatrieme de nécessaire aux propositions qui suivent dans sa Dissertation. M. *Calendrini* de Genêve a démontré la même chose par le calcul, dans des notes qu'il a ajoutées à la Dissertation de M. *Mac-Laurin*, à la fin de la premiere partie du tome 3 des Commentaires composés par les PP. *Jaquier* & *Leseur* sur les principes de *Newton*. Mais la démonstration que je viens de donner de cette proposition si utile, me paroît plus simple & plus naturelle.

Autre lemme de M. *Mac-Laurin.*

91. Dans la même Dissertation, lemme IV, M. *Mac-Laurin* démontre qu'un petit corps placé successivement au sommet des pyramides, ou des cônes semblables & homogênes, & dont la gravité est composée de celle qu'il a sur chaque partie, en raison directe des masses, & en raison inverse des quarrés des distances, que ce corps, dis-je, a une gravité proportionnelle aux hauteurs, ou aux côtés homologues des cônes & des pyramides. La démonstration est facile. Car si on divise deux de ces pyramides ou cônes en un nombre égal de parties semblables, & semblablement posées, les masses partielles seront comme les masses totales, ou comme les cubes de leurs côtés homologues, & les quarrés des distances au sommet comme les quarrés des mêmes côtés. Ainsi ce corps pésera sur chacune de ces parties, en raison composée de la directe

directe des cubes, & de l'inverse des quarrés des côtés homologues ; c'est-à-dire en raison simple directe de ces côtés.

92. L'Auteur ajoute deux corrollaires ; le premier, que dans tous les points semblablement posés de tous les solides homogênes & semblables, la gravité est en raison des côtés homologues. Car on peut diviser ces solides en un nombre égal de pyramides semblables. Corollaire I.

93. Le second corollaire prouve que si une petite particule de matiere est placée dans une couche elliptique, terminée par deux sphéroïdes semblables & semblablement posés, elle sera en équilibre. Cette vérité a déja été démontrée par *Newton ;* & il est aisé de la déduire du corollaire précédent. Car il n'est pas difficile de prouver que les parties des pyramides opposées & semblables, qui passent par ce point, & qui sont plongées de part & d'autre dans ces mêmes couches, sont égales entre elles. Corollaire II.

94. De plus, si l'on a deux sphéroïdes elliptiques semblables, engendrés par la circonvolution de deux ellipses semblables ADBE, *adbe* (fig. 12) ayant un centre commun, & les axes homologues AB, *ab*, & DE, *de* dans la même position ; & que ces sphéroïdes soient coupés par un plan quelconque IOL, qui ne soit point perpendiculaire à l'axe AB de la révolution ; les deux sections seront deux ellipses semblables, qui auront même centre, & même position de leurs axes homologues. Théorème sur la section de deux ellipses semblables. Pl. IV. fig. 12.

95. En effet, si l'on fait passer par l'axe AB le plan AEBD perpendiculaire au plan de la section, & qui le coupe en IL, on voit que cette section AEBD du sphéroïde est elle-même l'ellipse génératrice. Supposons que IOL soit une partie de la commune section du plan IOL, prise de part ou d'autre de IL ; que le diametre MN soit parallele à cette ligne IL, & que par un point quelconque H, pris sur IL, on tire PQ perpendiculaire à AB. Imaginons encore un plan passant par PQ, & perpendiculaire à AEBD. Il est clair que son intersection avec le sphéroïde sera un cercle, dont le diametre est PQ ; & que son intersection HO avec le plan IOL, également perpendiculaire au même plan IEBD, sera perpendiculaire à ce plan, & par conséquent à PQ & IL tout ensemble. Démonstration.

Suite. 96. Par la nature du cercle $PH \times HQ = HO^2$. Par celle de l'ellipſe, comme on peut le voir dans le tome 3 de mes Elémens (n. 299), $IH \times HL : PH \times HQ :: MC \times CN$ ou $MC^2 : DC \times CE$ ou DC^2. Donc le rectangle ſur les parties IH, HL de la ligne IL, ſera conſtamment au quarré de HO perpendiculaire à cette ligne, & terminée par la ſection IOL, comme le quarré de MC, au quarré de CD. La ſection IOL ſera donc une ellipſe, dont l'un des axes ſera IL. On prouvera également, en ſubſtituant aux lettres majuſcules les petites lettres qui leur répondent, que *iol* eſt une ellipſe, dont l'axe eſt *il*, & que $iH \times Hl : Ho^2 :: mC^2 : Cd^2$.

Concluſion. 97. Maintenant puiſque les ellipſes ſemblables AEBD, *aebd* ont une même poſition, il eſt évident que les diametres conjugués des diametres MN, *mn* auront auſſi même poſition; que par conſéquent ils partageront également leurs ordonnées IL, *il* au même point G, qui, pour cette raiſon, ſera le centre commun des ellipſes IOL, *iol*. D'où il ſuit que ſi dans les ellipſes on éleve les demi-axes GF, *Gf* perpendiculaires à IL, *il*, on aura $IG \times GL$ ou $IG^2 : GF^2 :: MC^2 : CD^2$; & $iG \times Gl$ ou $iG^2 : Gf^2 :: mC^2 : Cd^2$; & qu'à cauſe que ces ellipſes IOL, *iol* ſont ſemblables, ces rapports ſeront tous égaux. Donc les demi-axes GI, GF, & *Gi*, *Gf* ſeront auſſi dans la même raiſon entre eux. Donc les axes IL, *il* ſeront enſemble, ou le premier, ou le ſecond axe, puiſqu'ils ſont homologues; & les axes homologues auront une même poſition. C. Q. F. D.

Corollaire I. 98. Il s'enſuit premierement que toutes les ſections de l'un & de l'autre ſolide, faites par des plans paralleles, ſont ſemblables; qu'elles ont toutes leurs centres ſur la ligne CG, & que leurs axes homologues ſeront paralleles. Ce qui eſt évident, puiſque toutes les interſections IL de ces plans ſeront paralleles entre elles, & par conſéquent auſſi au diametre MCN.

Corollaire II. 99. Il s'enſuit en ſecond lieu que IL, *il* ſeront chacun premier, ou ſecond axe, ſuivant que l'axe AB de la révolution ſera premier, ou ſecond, ou ce qui revient au même, ſuivant que les ſphéroïdes ſeront allongés ou applatis. Car dans le premier cas CD, *Cd* ſeront les demi-axes conjugués, & par conſéquent plus petits qu'aucun des demi-diametres

CM, C*m*. Dans le second cas ils seront les moitiés des premiers axes, & par conséquent plus grands. Ainsi GF, G*f* seront toujours plus petits dans le premier cas, & plus grands dans le second que GI, G*i*.

100. Il s'ensuit en troisieme lieu que si AEBD représentoit le plan de l'équateur du solide, dont l'axe fût perpendiculaire à ce plan, & qu'on fît passer une section quelconque, IL aussi perpendiculaire à ce même plan; la section seroit dans l'un & l'autre solide, une ellipse semblable à la génératrice du solide, ayant IL pour grand ou petit axe, suivant que l'axe de la révolution seroit au contraire le petit ou le grand axe de l'ellipse génératrice. Car en ce cas la section du solide faite par MN, & dont le plan passeroit par l'axe, & seroit par conséquent perpendiculaire au plan de l'équateur AEBD, seroit elle-même l'ellipse génératrice. Or la section faite par IL est parallele à celle-ci. D'où il suit, par le n. 98, qu'elles seront semblables. Corollaire III.

101. En quatrieme lieu, si le plan AEBD représente, ou une section quelconque faite par l'axe de révolution, ou le plan même de l'équateur perpendiculaire à cet axe; & que par l'extrémité *a* de l'axe du solide intérieur, ou d'un de ses diametres quelconque, on mene un plan perpendiculaire au premier, qui ne passe point par la tangente en *a* de la section *aebd;* ce plan coupera les deux sphéroïdes, de maniere que ce même point *a* sera l'extrémité de l'un des axes de la section intérieure. Corollaire IV.

102. Premierement, il coupera les deux sphéroïdes, parceque les plans qui touchent en *a* le sphéroïde intérieur, passent par les tangentes en *a;* tandis que tous les autres plans, qui passent par des points comme *a*, coupent ce sphéroïde; & que tout plan qui passe par ces points, pris dans l'intérieur du sphéroïde AEBD, le coupe nécessairement. En second lieu, le point *a* sera l'extrémité de l'un des axes de la section intérieure, parcequ'alors le point *i* tombe en *a*. Démonstration.

103. Supposons maintenant que le point P (fig. 10 & 11) pris en quelque endroit qu'on voudra de la surface du sphéroïde elliptique homogêne, pese sur toutes les parties égales du sphéroïde, en raison inverse des quarrés des distances;

Somme des forces qui agiſſent ſur un point placé à la ſuperficie d'un ſolide elliptique. Pl. IV. fig. 10. 11.

& qu'ayant coupé le ſphéroïde par le point P, & par l'axe de révolution, la ſection ſoit PB*gb*; & B*b*, qui eſt l'un des axes de la ſection, ſoit l'axe du ſolide, ou le diametre de ſon équateur. Ayant tiré la ligne PDI perpendiculaire à B*b*, imaginons un ſphéroïde intérieur ſemblable au premier, & ſemblablement poſé, dans le ſens que nous avons dit, paſſant par le point D, & dont la ſection faite par ce même plan ſoit DN*dn*. Si le point D peſe de la même maniere ſur les parties du ſphéroïde intérieur, & que toutes les gravités ſur chaque partie équivalent à deux, dont l'une ſuive la direction de l'axe B*b*, & l'autre une direction perpendiculaire à cet axe; la ſomme de toutes les gravités du point P, ſuivant la direction de B*b*, ſera égale à celles de toutes les gravités du point D, ſuivant la même direction.

Démonſtration.

104. Car ſuppoſons que le ſphéroïde ſoit coupé en D par un plan perpendiculaire à PI, & dont l'interſection avec le plan BI*b*P ſera B*b* auſſi perpendiculaire à PI; & qu'enſuite la ligne PDI auſſi bien que PQ, DV, reſtant immobiles, le plan PBI*b* tourne à droite, ou à gauche autour de PI, par un mouvement continu, juſqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan QPDV; ce plan coupera continuellement l'un & l'autre ſolide, par le n. 101, & les ſections BI*b*P, DN*dn*, ſeront toujours des ellipſes ſemblables, ayant un centre commun, & leurs axes homologues dans la même poſition, par le n. 94. Enfin le point D ſera l'extrémité de l'un des axes D*d* de la ſection intérieure, par le n. 101.

Suite.

105. Ceci poſé, ſoit une portion quelconque des deux ſolides, terminée par deux de ces plans; & que la portion du ſolide intérieur ſoit coupée par un nombre quelconque de plans DN, D*n*, pris deux à deux, infiniment proches les uns des autres, perpendiculaires au plan QPDV, & paſſant par les cordes DN, D*n*, également inclinées de part & d'autre ſur l'axe D*d*; & que la portion du ſolide extérieur ſoit coupée par autant de plans paralleles aux premiers.

Suite.

106. Il eſt clair que DN, D*n* ſeront égales, étant également inclinées ſur l'axe D*d* de la ſection, & ſur la ligne immobile DV. Car N*n* ſera perpendiculaire à D*d*, & parallele à PI; d'où il ſuit qu'elle ſera perpendiculaire au plan D*d*V.

Par conſéquent on pourra faire paſſer par cette ligne un plan perpendiculaire à DV, qui la coupera en quelque point V, auquel ayant tiré les lignes NV, *n*V, les angles NVD, *n*VD ſeront droits. Donc les triangles VDN, VD*n* ſeront égaux, & l'angle NDV égal à l'angle *n*DV.

107. Or les lignes PM, P*m* ſeront paralleles à DN, D*n*, & autant inclinées ſur PQ, que DN & D*n* ſur DV. Donc par le n. 88, la ſomme, ou la différence de MP, *m*P ſera égale au double de *n*D; & par la même raiſon, ayant abaiſſé les perpendiculaires MQ, *mq*, la ſomme, ou la différence de PQ, P*q* ſera égale au double de DV. Suite.

108. On voit de plus que les portions des ſolides ſeront par-là même diviſées en un nombre égal de pyramydes, priſes deux à deux, terminées par des plans paralleles, & par conſéquent ſemblables entre elles, dont les longueurs ſeront DN, D*n*, PM, P*m*, & dont les forces ſuivant les directions de PM, P*m*, DN, D*n*, compoſées des forces de chacune des parties, ſeront aux points D & P, par le n. 91, comme ces longueurs. Que ſi on décompoſe ces forces, & qu'on les réduiſe chacune à deux autres, dont l'une ſuive la direction DV, PQ, l'autre la direction perpendiculaire MQ, *mq*, *n*V, NV; ces gravités abſolues ſeront à celles qui agiſſent ſuivant les directions PQ, DV, comme ces longueurs à PQ, P*q*, & DV, DV. D'où il ſuit que les gravités étant ainſi réduites, celles qui viennent des pyramides MP, *m*P ſont à celles qui viennent des pyramides DN, D*n*, comme PQ, P*q* à DV, DV; c'eſt-à-dire comme la ſomme de PQ, P*q* lorſqu'elles ſe prennent du même côté (fig. 10), & leur différence quand elles ſont d'un côté oppoſé (fig. 11), eſt au double de DV; ce qui revient, par le n. 107, au rapport d'égalité. Suite.

109. Donc puiſque la même choſe arrive dans toutes les pyramides de chaque portion, priſes deux à deux, & dans toutes les portions engendrées par le mouvement du plan autour de PI; la ſomme de toutes les gravités du point P, ſuivant la direction de B*b*, eſt égale à la ſomme de toutes celles du point D, ſuivant la même direction. C. Q. F. D. Concluſion.

110. De là on doit conclure que la gravité, ſuivant la Corollaires.

direction de l'un des axes B*b* de l'ellipſe génératrice, dans les points également éloignés de l'autre axe, ou ce qui eſt le même dans des points quelconques *p*, pris ſur PDI perpendiculaire à B*b*, que cette gravité, dis-je, eſt toujours égale; & qu'elle eſt à la gravité du point placé en B, comme CD eſt à CB.

Démonſtration.

111. Car ſi l'on imagine un troiſieme ſphéroïde ſemblable, qui paſſe par *p*; toute la gravité de l'orbe extérieur devient nulle, par le n. 93. Quant au reſte de la gravité qui agit ſur ce ſphéroïde, on démontre, comme ci-deſſus, qu'elle eſt égale à la gravité en D. D'où il ſuit qu'elle eſt partout la même. Ce qu'il falloit d'abord démontrer.

Suite.

112. En ſecond lieu, puiſque PBI*b*, & DN*dn* ſont des ſolides ſemblables & homogênes, ſur leſquels les points B, D ſont également placés; leurs gravités, par le n. 91, ſeront comme CB, CD.

Théorème général ſur l'équilibre par des canaux rectilignes.

113. Après avoir établi les principes qui conviennent à la nature de l'ellipſe, j'ajouterai un théorème, qui donne en général l'équilibre dans toutes les courbes. Il eſt conçu en ces termes: *ſi dans une maſſe fluide la gravité de toutes les parties eſt telle, que deux canaux quelconques rectilignes, conduits d'un point quelconque, pris dans l'intérieur de cette maſſe, à la ſuperficie extérieure, ſoient en équilibre; toute la maſſe ſera en équilibre.*

Trois choſes requiſes pour cela.

114. Pour la démonſtration de ce théorème, il faut prouver trois choſes: premierement que toutes ſortes de canaux, même les curvilignes & les mixtilignes ſeront en équilibre; en ſecond lieu, que tout canal qui traverſe la maſſe, & aboutit de part & d'autre à la ſurface, ne peſe point contre ſon extrémité; en troiſieme lieu, que dans la ſuperficie la gravité eſt perpendiculaire à cette ſuperficie. De ces trois propoſitions, la premiere fait voir qu'aucune partie contenue dans la maſſe du fluide, ne peut être ébranlée par aucune force prépondérante dans les autres côtés; la ſeconde qu'aucune partie placée ſur la ſurface, ne peut être élevée plus haut par la preſſion des parties internes; la troiſieme, qu'une partie placée ſur un point de la ſurface, ne peut s'éloigner à droite ou à gauche, ou s'écouler comme ſi elle étoit ſur un plan incliné: autant

d'articles néceſſaires à la démonſtration du théorème.

Conſtruction pour les canaux curvilignes & mixtilignes. Pl. IV. fig. 13.

115. Le premier ſe démontre ainſi. On ſuppoſe que du point C (fig. 13) il ſorte un canal rectiligne CA; que d'un point quelconque E de ce premier canal, il en ſorte un ſecond EM; d'un point F du ſecond, un troiſieme FL; d'un point G du troiſieme, un quatrieme GK; & du point H de celui-ci un autre canal HI; enfin que du point C il parte un autre canal CS, & que tous ces canaux ſoient rectilignes.

Démonſtration de leur équilibre.

116. Puiſque ſelon l'hypotheſe, tous les canaux terminés à un même point ſont en équilibre, HI, HK ſeront en équilibre; c'eſt-à-dire qu'ils péſeront également ſur le point H. Mais parceque les fluides preſſent également en tout ſens, les preſſions de HI & KH agiront avec une force égale ſur le canal HG, ſans que cette flexion puiſſe y apporter aucune différence ou diminution d'activité. Ainſi en ajoutant ou en retranchant l'action de HG, ſuivant qu'elle eſt dirigée au point G ou au point H, la preſſion de tout le canal ſimple KG en G ſera égale à la preſſion du canal compoſé IHG. On prouve de la même maniere que la preſſion du canal ſimple LF eſt égale à celle du compoſé KGF, & par conſéquent à celle de IHGF, qui eſt encore plus compoſé; enfin que la preſſion du canal rectiligne AC, qui doit être égale à celle du canal SC, ſera auſſi égale à la preſſion du canal compoſé MEC, à celle de LFEC, ou KGFEC, ou IHGFEC. La démonſtration eſt générale, quel que ſoit le nombre des flexions E, F, G, H, & quelle que ſoit leur direction, ſoit qu'elles ſe trouvent dans le même plan, ou dans des plans différens. Elle l'eſt encore pour un nombre infini de flexions diminuées à l'infini, ſoit que cela arrive dans toute la longueur du canal, ou ſeulement ſur quelques parties de ſa longueur, priſes où l'on voudra, & en tel nombre qu'on voudra. Or dans le premier cas le canal eſt curviligne, & il a une courbure ſimple ou double: dans le ſecond il eſt compoſé de rectilignes & de curvilignes, de quelque nature, & en quelque nombre qu'on les voudra ſuppoſer. Ainſi tout canal curviligne ou mixtiligne ſera en équilibre avec le canal CS. D'où l'on peut conclure en général que ſi deux canaux quelconques rectilignes, aboutiſſans à un même point, ſont en équilibre;

tous les autres, tant rectilignes que curvilignes terminés à ce même point C, ſeront pareillement en équilibre. C'eſt la premiere propoſition que nous avions à démontrer.

Réduction au point placé à la ſurface.

117. Suppoſons maintenant que CS diminue à l'infini, juſqu'à ce qu'elle devienne nulle, ſa preſſion contre le point C diminuera à l'infini, & s'évanouira enfin totalement. Ainſi la preſſion du canal AC, ou du canal IHGFEC diminuera auſſi peu à peu, & à la fin ſera nulle, ou zéro. D'où il ſuit en général que, le point C tombant en S, la preſſion du canal rectiligne ou curviligne s'évanouit; que par conſéquent le point S, placé en quelque endroit qu'on voudra de la ſuperficie, n'éprouvera de la part d'un canal quelconque rectiligne, curviligne, mixtiligne, aucune preſſion capable de le faire ſortir de cet endroit. C'eſt la ſeconde propoſition, dont la démonſtration a lieu pour un canal placé ſur la ſuperficie extérieure du ſolide, comme SRD, puiſque le canal CEFGHI peut s'en approcher toujours davantage, & ſe confondre enfin avec lui.

Réduction à la perpendiculaire.

118. Imaginons enfin, ſi la choſe eſt poſſible, qu'au point S de la ſuperficie, la direction de la force de la gravité ne ſoit point SN perpendiculaire à cette ſuperficie, mais SO inclinée à SN, & faiſant avec elle un angle quelconque NSO: cette force dans un arc continu SD, pris de l'autre côté de la perpendiculaire SN, devra, par la loi de la continuité géométrique, ſuivre la direction d'une ligne inclinée à la perpendiculaire, & faiſant avec elle un angle du même côté; & la différence de cet angle à l'angle NSO, dans un point infiniment proche du point S, ſera infiniment petite. Soit la direction RP pour un point quelconque R de cet arc. Soit la force même exprimée par la portion RQ. Ayant mené QT perpendiculaire à la tangente en R, la force QT preſſera le canal de côté, la force RT preſſera le fluide du canal DRS du côté de S. On aura donc en S la ſomme de toutes les preſſions provenantes de ces forces, contre ce qui a été démontré dans l'article précédent. L'on peut donc conclure généralement que ſi deux canaux rectilignes, conduits d'un point quelconque de la maſſe du fluide à ſa ſurface extérieure, ſont en équilibre; la gravité dans chaque point de la ſuperficie doit

doit être perpendiculaire à cette ſuperficie. C'eſt la troiſieme propoſition.

Avantage de ce théorème ſur pluſieurs autres.

119. Ainſi l'on a une démonſtration fort exacte du théorème propoſé, qui, dans ces ſortes de recherches, épargne beaucoup de travail, & donne le moyen de parvenir à des concluſions très exactes. MM. *Huygens* & *Newton* ſe ſont contentés de canaux terminés à un ſeul point, je veux dire au centre. M. *Mac-Laurin* a employé des canaux rectilignes terminés généralement à un point quelconque, pris dans l'intérieur de la maſſe. Il a ajouté cette ſorte d'équilibre à la direction de la gravité perpendiculaire à la ſuperficie ; & il a démontré ſéparément que l'un & l'autre ſe trouvoient dans ſon ellipſe. Aux canaux rectilignes, M. *Clairaut* a ajouté les curvilignes de toute eſpece. Ce théorème une fois établi, il ſuffira, pour avoir un équibre parfait, de démontrer que des canaux quelconques, terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la maſſe, ſont en équilibre. De cette vérité ſuivent naturellement les trois propoſitions que nous avons démontrées ; & il ſera même aiſé d'en conclure ce que M. *Clairaut* demande encore pour l'équilibre, ſavoir qu'un canal curviligne, qui ſe replie ſur lui-même dans l'intérieur de la maſſe, n'a aucune action de part ni d'autre.

Théorème principal ſur la figure de la Terre.

120. Ceci poſé, nous allons propoſer le principal théorème qui détermine la figure de la Terre dans l'hypotheſe newtonienne de la gravité. J'y ajouterai avec M. *Mac-Laurin* deux déterminations qui rendent le théorème beaucoup plus général, & qui ſont d'uſage lorſqu'il eſt queſtion du flux & du reflux de la mer. Je pourrois, ſuivant l'article précédent, conclure toute eſpece d'équilibre du ſeul équilibre des canaux rectilignes terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la maſſe : mais comme on peut démontrer immédiatement, & d'une maniere également ſimple, que la gravité dans la ſuperficie eſt perpendiculaire à cette ſuperficie ; je joindrai encore ici cette démonſtration, pour faire voir de plus en plus la force de la Géométrie, qui, par une méthode fort exacte & nullement embarraſſée, peut, ſeule, & ſans autre ſecours, nous faire parvenir à la connoiſſance de toutes ces vérités.

Même sujet. Pl. IV. fig. 14.

121. Soit (fig. 14) un sphéroïde elliptique ABa*b*, dont l'axe est B*b*, composé d'un fluide homogêne, dont les parties égales pesent les unes sur les autres, en raison inverse des quarrés des distances ; & outre cela soient poussées par trois autres forces, dont la premiere se dirige au centre C du sphéroïde, & soit proportionnelle à la distance CP du centre ; la seconde soit perpendiculaire à l'axe B*b* du sphéroïde, & proportionnelle aux distances PK de cet axe ; la troisieme parallele à cet axe même, & proportionnelle aux distances d'un plan conduit par l'équateur & le centre perpendiculairement à l'axe. Si les demi-axes CB, CA de l'ellipse sont en raison inverse des forces totales, agissantes sur les parties égales, situées aux extrémités A & B des axes, le fluide sera en équilibre.

Sa division en deux parties.

122. Je ferai voir en premier lieu, suivant ce qui a été dit (n. 120), que la gravité composée de toutes les forces agissantes sur une particule de matiere située à la superficie du solide, a une direction perpendiculaire à cette superficie ; en second lieu, que toute particule, prise dans l'intérieur du solide, est de tout côté également pressée par tous les canaux rectilignes, tirés de ce point à des points quelconques de la surface.

Réduction des forces.

123. Soit donc une particule quelconque P, placée ou à la surface, comme il est représenté dans la figure, ou dans l'intérieur du sphéroïde. Si l'on décompose les forces qui la poussent contre toutes les autres particules, en trois, la premiere qui agisse suivant la direction PD, parallele à l'axe B*b*, la seconde suivant la direction PK, perpendiculaire à cet axe, la troisieme suivant une direction perpendiculaire au plan KPD ; toutes les forces qui agiront suivant cette troisieme direction se détruiront mutuellement, puisque le plan KPD coupe le sphéroïde en deux parties parfaitement égales & semblables ; la seconde sera à la force en *a*, comme CD est à CA ; & la premiere à la force en B, comme CK à CB, par le n. 110. De même la premiere des trois forces restantes, suivant la supposition du n. 121, savoir celle qui est dirigée au centre C, est proportionnelle à PC, & peut se réduire à deux autres qui lui sont proportionnelles, savoir PD & PK. Ainsi toutes les forces qui agissent sur la particule P, se réduisent

à deux forces composées, agissantes suivant les directions PD, PK, dont la premiere est à la force en B, comme PD à CB, la seconde à la force en *a*, comme PK à C*a*.

124. Donc la premiere sera à la seconde en raison composée de la raison simple des distances PD, PK aux axes A*a*, B*b*, & de la raison doublée de ces axes ou demi-axes (1). Car la force qui agit en P, suivant la direction de PD, est à la force en B, comme PD à BC; & celle-ci est à la force en *a*, comme C*a* à CB, par la supposition. De plus, la force en *a*, est à celle qui agit en P, suivant la direction de PK, comme C*a* à KP. Donc la premiere est à la seconde en raison composée de celle de PD à PK, & de celle du quarré de C*a* au quarré de CB.

Demonstration de la premiere partie.

125. Supposons maintenant le point P, d'abord sur la surface, comme il est représenté dans la figure. Soit PL perpendiculaire à la surface, elle le sera à l'ellipse B*ab*A, & elle rencontrera son axe B*b* en un point L, de sorte que, par une propriété fort connue de l'ellipse, & dont j'ai parlé au tome 3 de mes Elémens (n. 462), on aura KL : KC :: Ca^2 : CB^2. Ainsi la force qui pousse la particule P, suivant la direction de PD, est à celle qui la pousse suivant la direction PK, en raison composée de celle de PD, ou CK à PK, & de celle de KL à CK; c'est-à-dire comme KL à PK. Donc KL & PK pourront exprimer les forces qui agissent suivant leur direction; & la force composée de ces deux forces partielles, sera

---

(1) Pour en rendre la preuve plus sensible, soit la force suivant la direction PD $=d$, celle qui suit la direction PK $=k$, la force en $a=a$, la force en B $=b$; on aura par le n°. précédent $d : b ::$ CK ou PD : CB, & $k : a ::$ CD : CA :: PK : C*a*. D'où l'on tire $d=\frac{b\times PD}{CB}$ & $k=\frac{a\times PK}{Ca}$. Donc $d : k :: \frac{b\times PD}{CB} : \frac{a\times PK}{Ca}$. Or par la supposition $b : a ::$ C*a* : CB. Donc $b=\frac{a\times Ca}{CB}$; & substituant cette valeur de b, on aura $d : k :: \frac{a\times Ca\times PD}{CB^2} : \frac{a\times PK}{Ca}$; & divisant par a, & multipliant par C*a* & CB^2, on aura $d : k ::$ C$a^2\times$PD : C$B^2\times$PK. C. Q. F. D.

dirigée par la perpendiculaire PL. Ce qu'il falloit d'abord démontrer.

Ce qu'il faut démontrer pour la seconde. Il y a deux cas. Pl. IV. fig. 15. 16.

126. Supposons en second lieu que le point P (fig. 15 & 16) soit pris dans l'intérieur du sphéroïde Ayant fait passer par l'axe de ce sphéroïde un plan BA*ba*, soit menée du point P à la superficie une ligne PQ, laquelle se trouve, ou dans le plan, comme on le voit en la figure 15, ou hors du plan, comme en la figure 16. Il faut prouver que le total des forces de toutes les parties du fluide, renfermées dans le canal rectiligne QP, quelque soit la direction de ce canal, pese toujours également sur le point P.

Construction pour le premier cas.

127. Par le point P (fig. 15) menez dans la section BA*ba*, qui sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice, les cordes G*g*, R*r*, paralleles aux axes B*b*, A*a*. Soit PQ divisée en une infinité de petites parties telles que E*e*. Par les points E, *e* menez les cordes DT, *dt* paralleles à l'axe B*b*, lesquelles rencontreront l'axe A*a* en N & *n*. Par les points E, D, tirez des paralles à l'axe A*a*, qui rencontreront la corde *dt* en V & I, l'axe B*b* en F & L, & la surface en H & S. Enfin du point d'intersection M des lignes G*g*, ES, abaissez sur PQ la perpendiculaire M*m*.

Démonstration.

128. Les parties du fluide en E*e* sont poussées par deux forces, dont l'une agit suivant la direction B*b* ou MP, l'autre suivant la direction A*a* ou EM; & par le n. 110, la premiere de ces forces est égale à celle par laquelle toutes les parties en V*e* sont poussées suivant la premiere direction, & la seconde est égale à celle par laquelle les parties EV ou DI sont poussées suivant la seconde direction, à cause qu'elles sont également éloignées des axes. Réduisons chacune de ces forces en deux parties, dont l'une soit perpendiculaire à QP, laquelle n'agira pas sur le point P, mais sur le côté du canal perpendiculairement; l'autre suive la direction de QP, & pese directement sur P. Le total de la premiere force sera à sa seconde partie, comme PM à P*m*, ou à cause des triangles semblables M*m*P, EV*e*, qui, outre un angle droit, ont les angles en P & en *e* formés par des paralleles, comme E*e* à *e*V, ou comme le nombre des parties en E*e* qui ont cette portion de la premiere force, au nombre des parties en *e*V

qui en ont le total. Donc le total de toutes les portions de la premiere force, par lesquelles les parties E*e* pesent sur P, est égal au total des forces en V*e*, agissantes suivant la direction V*e* ou GP. Par la même raison, les triangles EV*e*, E*m*M étant semblables, la somme de toutes les portions de la seconde force, par laquelle les parties en E*e* pesent sur le point P, est égale à la somme des forces en EV, agissantes suivant la direction EL, & par conséquent à la somme des forces en DI, suivant la direction DF.

129. Or la somme des forces avec lesquelles les parties en DI suivent la direction de DF, est égale à la somme des forces par lesquelles les parties en *d*I suivent la direction de *de*. Car puisque selon une propriété assez connue des sections coniques, expliquée au tome 3 de mes Elémens (n. 299), on a DI×IH : *d*I×I*t* :: AC×C*a*, ou AC^2 : BC×C*b*, ou BC^2; DI sera à *d*I, c'est-à-dire le nombre des parties en DI au nombre des parties en *d*I, comme le quarré de AC divisé par IH au quarré de BC divisé par I*t*; ou ce qui revient au même, en raison composée de celle de I*t* à IH, & de celle de AC^2 à BC^2; ou en prenant équivalemment les moitiés des termes de la premiere raison, en raison composée de celle de *dn* à DF, & de celle de AC^2 à BC^2; ou bien enfin, suivant ce qui a été démontré (n. 124), comme la force des parties en *d*I agissante suivant la direction *dn*, à la force des parties en DI suivant la direction de DF. D'où il suit que le total des premieres est égal à celui des dernieres. Ainsi le total des forces en E*e*, agissantes contre le point P, est égal au total des forces avec lesquelles les parties en V*e* & *d*I agissent suivant la direction *de* perpendiculaire à l'axe A*a*. Suite.

130. Mais puisque les forces des parties en DE & IV, agissantes suivant une direction perpendiculaire à l'axe A*a*, sont aussi égales, à cause qu'elles sont également distantes de cet axe, la pression des parties de *ed* sur *e* excédera autant la pression des parties de ED sur E, que la pression des parties de *e*Q sur *e* excede la pression des parties de EQ sur E. Et puisque la même chose arrive dans tous les points, & qu'en Q l'une & l'autre pression est nulle; il sera toujours vrai que le point *e* éprouvera de la part des parties de *ed* & de celles Suite.

de eQ des preſſions égales. D'où il ſuit que le point e tombant en P, les parties de PG & celles de PQ peſent également ſur le point P. Ainſi puiſque la même démonſtration a lieu, quelque part qu'on prenne le point Q, pourvu que les droites & les forces qui ſe trouveroient avoir des directions oppoſées, ſoient traitées comme des quantités négatives; le point P ſera également chargé par tous les canaux rectilignes qui y aboutiront, quelque ſoit leur direction, dès qu'ils ſe trouveront dans le plan qui paſſe par l'axe, comme il eſt repréſenté en la figure 15.

Conſtruction pour le ſecond cas.

131. Mais ſi PQ eſt hors de ce plan, comme dans la figure 16, ayant mené, comme ci-devant, la ligne GPg parallele à l'axe Bb du ſphéroïde, qui rencontrera en D le diametre de ſon équateur ANan; ſoit coupé le ſphéroïde par un plan QPG, dont la commune ſection avec le plan ANan de l'équateur ſera Nn, & qui ſera perpendiculaire à ce plan; la ſection du ſphéroïde ſera une ellipſe ſemblable à l'ellipſe génératrice, par le n. 94, & Nn ſera l'un de ſes axes; l'autre axe Ff ſera déterminé par le plan paſſant par Bb perpendiculairement à cette ſection, & qui la rencontrera en Ff parallele à Bb. Cet axe paſſera par le point H, l'interſection CH de ce plan avec celui de l'équateur, laquelle eſt perpendiculaire à la ſection du ſphéroïde, coupe la corde Nn de l'équateur à angles droits, & par conſéquent en deux parties égales.

Démonſtration.

132. Soit maintenant placé le point P en quelque endroit qu'on voudra de la ſection. Ayant pris ſur CB, FH les ſegmens CK, HE égaux à DP, & mené les lignes PK, KE, EP; ces lignes ſeront paralleles à DC, CH, HD. Donc KE ſera perpendiculaire au plan de la ſection, & l'angle KEP ſera droit. Or des deux forces qui pouſſent la particule P ſuivant les directions de PD & PK, on voit ici, comme dans la figure 14, que la premiere a une direction PD, parallele à l'axe Bb de l'ellipſe génératrice, que ſon action eſt renfermée dans le plan de la ſection, qu'elle conſerve la même grandeur, & qu'elle eſt parallele à l'axe Ff de la ſection: mais la ſeconde direction PK ſe réſoud en deux autres, ſavoir PE, EK dont la derniere agira ſur le plan de la ſection, auquel elle eſt perpendiculaire; & la premiere PE, qui agit

dans le plan même, sera toujours parallele à l'autre axe N*n* de la section, & sera à la force PK, comme PE est à PK. D'où il suit que cette derniere force qui agit sur le point P placé à différentes distances de l'axe B*b*, étant en raison de cette distance, la premiere sera aussi en raison de la distance du point P à l'axe F*f*. Mais comme d'ailleurs la force qui suit la direction PK est à celle qui suit la direction PD, en raison composée de celle de PK à PD, & de celle de CB^2 à Ca^2, ou à cause que l'ellipse F*nf*N est semblable à l'ellipse génératrice B*ab*A, de celle de HF^2 à Hn^2; la force qui agit suivant la direction PE, est à celle qui agit suivant la direction PD, en raison composée de celle de PE à PD, & de celle de HF^2 à HN^2. Ainsi puisqu'on a déja conclu de ce rapport que le point P (fig. 15) est également chargé par des canaux rectilignes PQ, PG, placés dans le plan de l'ellipse B*ab*A, suivant une direction quelconque; on en devra pareillement conclure que les canaux rectilignes PQ, PG (fig. 16) placés dans le plan de l'ellipse G*nf*N, pesent avec des forces égales sur le point P.

133. Donc le point P est chargé de tous côtés d'un poids égal, par toutes les parties qui sont dans des canaux quelconques rectilignes, aboutissans à ce point, quelque soit leur direction. D'où il suit, par le n. 113, que tout le fluide est en équilibre. C. Q. F. D. Conclusion.

134. On tire de là le théorème suivant: toute la force qui pousse un corps placé à la superficie de ce sphéroïde, est en raison directe de la perpendiculaire à la courbe en ce point, ou de la normale terminée par l'axe; ou en raison inverse de la perpendiculaire tirée du centre sur la ligne qui touche en ce point l'ellipse génératrice. Rapport de la force dans la surface.

135. En effet, par la premiere partie de la démonstration, toute la force du corps P (fig. 14) est en raison de PL perpendiculaire à la courbe. Mais le rectangle sous PL, & la perpendiculaire tirée du point C à la tangente en P, est égal au quarré du demi-axe CA, par le n. 459 du tome 3 de mes Elémens. Donc PL est en raison inverse de cette perpendiculaire. Démonstration. Pl. IV. fig. 14.

136. De là même on aura encore ce théorème: toute la

Déterminer la pression sur un point quelconque & sur le centre. F. 16.

force qui pousse un point quelconque P, pris dans l'intérieur du sphéroïde (fig. 16), suivant une direction quelconque, est à la force ou au poids dont le centre est chargé, comme le rectangle $GP \times Pg$ à CB^2; & le poids que soutient le centre, est la moitié de celui qu'auroit la colonne CB, si toutes ses parties pesoient par-tout autant qu'au point B.

Démonstration.

137. Car si on divise les lignes CB, DG, DP en un nombre égal de parties, les parties seront proportionnelles à leurs touts, aussi bien que les distances des parties semblablement placées aux points C & D. Ainsi & le nombre des parties du fluide contenues dans ces parties de lignes, & leurs forces respectives, suivant la direction de ces lignes, seront en raison des lignes. Donc les sommes des forces avec lesquelles toutes les parties en CB, DG, DP pesent sur les points C, D, sont comme les quarrés de ces lignes. C'est pourquoi le point D étant chargé par GD de tout le poids dont P est chargé par GP & dont le même point D est encore chargé par PD; le poids dont P est chargé par GP, est à celui dont C est chargé par BC, comme la différence des quarrés de DG & DP, égale au rectangle $GP \times Pg$, est au quarré de CB. Donc puisqu'un point quelconque soutient de tous côtés un poids égal, le théorème est démontré quant à la premiere partie.

Suite.

138. Si l'on imagine ensuite deux lignes tirées de chaque point K, de la ligne CB, paralleles à Ca, & dont l'une soit égale à CB, l'autre à CK; elles exprimeront toujours, l'une, la force en B, l'autre, la force en K. Ainsi tout le poids dont le centre C est chargé par toutes les parties du fluide K, est à celui dont il seroit chargé par toute la colonne, supposé qu'elle eût par-tout une gravité égale à la gravité en B, comme l'aire produite par la seconde ligne, à l'aire produite par la premiere. Or la seconde ligne produiroit un triangle, & la premiere un quarré double de ce triangle; ce qui prouve la seconde partie du théorème.

Application à un cas particulier.

139. Tout ce que nous avons dit subsiste en son entier, dans le cas même où, parmi le quatre forces énoncées dans la proposition, il y en auroit une ou plusieurs qui s'évanouissent ou qui eussent une direction opposée, & devinssent négatives; pourvu que le total de celles qui dans chaque

partie

partie ſont perpendiculaires à l'axe du ſphéroïde, auſſi bien que de celles qui lui ſont paralleles, ſoit une quantité poſitive.

Démonſtration.

140. Car toutes les démonſtrations précédentes ſont appuyées ſur ce principe unique, ſavoir que dans chaque partie les ſommes des forces agiſſantes ſuivant les directions perpendiculaires aux axes de l'ellipſe génératrice, ſont comme leurs diſtances à ces axes; & que les forces totales aux extrémités des axes, ſont réciproquement comme les axes. Or tout cela ſe vérifie également dans le dernier cas propoſé.

De l'ellipſe de M. *Herman.*

141. De là il eſt aiſé de s'appercevoir premierement que l'ellipſe de M. *Herman* eſt un cas particulier de cette ſolution de M. *Mac-Laurin*. Car ſi la gravitation mutuelle des parties & la force parallele à l'axe deviennent nulles, que la gravité qui tend au centre ſoit en raiſon directe de la diſtance, & que la force perpendiculaire à l'axe ſoit négative, on aura l'hypotheſe de gravité de M. *Herman* avec la force centrifuge occaſionnée par le mouvement diurne, laquelle déterminera une ellipſe qu'on pourra aiſément démontrer être l'ellipſe même de M. *Herman*.

Application à la théorie de *Newton.*

142. De là il eſt aiſé de conclure en ſecond lieu qu'une maſſe fluide qui tourneroit autour de l'axe B*b*, dans l'hypotheſe newtonienne de la gravité, du moment qu'on lui donneroit la figure d'un ſphéroïde elliptique, avec un certain dégré d'applatiſſement, ſeroit en équilibre. Car outre que ſes parties péſeroient toutes les unes vers les autres en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, elles auroient encore une force centrifuge ſuivant la direction KP, proportionnelle à cette ligne, comme nous le verrons bientôt. Or l'applatiſſement ſeroit tel, qu'il y auroit même raiſon de CB à C*a*, que de la gravité en *a* diminuée de la force centrifuge, à la gravité entiere en B. Si les gravités en *a* & en B étoient égales, ce rapport pourroit ſe connoître aiſément, par le n. 71, où nous avons déterminé le rapport de la gravité à la force centrifuge, priſes l'une & l'autre ſous l'équateur; & l'applatiſſement ſeroit double de celui que donne l'hypotheſe d'une gravité tendante à un centre donné, de telle ſorte que VFKQ (fig. 1) puiſſe être pris pour un rectangle. Or nous avons trouvé pour

cette derniere hypotheſe, que le demi-diametre de l'équateur eſt à ſa différence au demi-axe, comme ſous l'équateur la gravité eſt à la moitié ſeulement de la force centrifuge, non à cette force entiere.

Rapport de la gravité primitive ſous l'équateur & le pôle.

143. Mais cette gravité primitive n'eſt point la même ſous l'équateur & au pôle. Car les parties n'y ſont ni à mêmes diſtances, ni dans les mêmes poſitions par rapport aux autres parties. Ainſi on eſt obligé de déterminer par l'eſpece de l'ellipſe génératrice le rapport de ces gravités, pour pouvoir enſuite de ce rapport remonter à l'eſpece de l'ellipſe génératrice. *Newton* a donné une méthode pour trouver par la quadrature des courbes, le dégré de gravité en un point quelconque de l'axe d'un ſolide engendré par la circonvolution d'une courbe d'équation donnée autour de ſon axe, nommément dans l'ellipſoïde par la quadrature du cercle & de l'hyperbole. Mais pour un point placé ſous l'équateur, il ne donne aucune méthode, & il ſe contente d'une ſorte d'eſtime pour un ellipſoïde donné, & peu différent d'une ſphere. M. *Mac-Laurin* a donné de ce problême une ſolution très heureuſe & très élégante, pour un point placé tant à l'équateur qu'au pôle; & il ſe ſert de cette détermination de gravité pour déterminer enſuite, d'une maniere également ingénieuſe & préciſe, l'ellipſe génératrice.

Méthode plus ſimple.

144. Mais cette détermination même demande bien du travail, & l'on peut difficilement s'y paſſer du calcul. Je crois cependant avoir trouvé une méthode beaucoup plus ſimple, qui s'accorde en partie avec celle de M. *Bernouilli*, & qui à l'aide de la ſeule Géométrie, pour un ſphéroïde fort approchant d'une ſphere, réſoud le problême avec une extrême facilité. Je la propoſerai quand j'aurai déterminé la gravité primitive, premierement d'un point placé au pôle de ce ſphéroïde, en ſecond lieu, d'un point pris ſous l'équateur. Pour abréger, je me ſervirai quelquefois du ſigne algébrique d'égalité, de celui de la multiplication pour des raiſons compoſées de raiſons directes, & de celui de la diviſion pour des raiſons compoſées de raiſons directes & inverſes, ſelon l'uſage. Avec la Géométrie pure, & au moyen de ces ſignes, nous parviendrons à la détermination de la gravité primitive ſous l'équateur & ſous les pôles.

145. Supposons donc (fig. 17) que la demi-ellipse BA*b* engendre un sphéroïde, & le demi-cercle BE*b* une sphere en tournant autour de leur axe commun B*b*, & qu'on cherche la différence de la force qui attire le point B sur le sphéroïde, d'avec celle qui l'attire sur la sphere, dans l'hypothese que ce point pese vers chacune de leurs parties en raison directe des masses, & en raison inverse des quarrés des distances. Pour un point placé au pôle. Pl. IV. fig. 17.

146. Soit CA le demi-diametre de l'équateur du sphéroïde, CE celui de la sphere, & une ordonnée quelconque perpendiculaire à l'axe, qui rencontre l'axe en K, l'ellipse en P, & le cercle en D. Il faut trouver l'attraction du point B sur toutes les couronnes que décrivent dans leur mouvement des lignes telles que DP. Soit exprimée la force, avec laquelle le point B est attiré sur chaque partie, par cette partie même divisée par le quarré de la distance; & imaginons PD si petite, que la ligne BD puisse être prise pour la distance de toutes les parties qu'elle contient. Préparation.

147. La force absolue par laquelle le point B est attiré par la couronne DP, sera donc en raison directe de cette couronne, & en raison inverse du quarré de BD. Or par une propriété fort connue de l'ellipse, comme on peut le voir au tome 3 de mes Elémens (n. 365), KP est à KD dans le rapport constant de CA à CE. Donc KP sera constamment en raison de KD. Par conséquent & le cercle décrit par KD, & celui qui est décrit par KP & la couronne, ou la différence de ces cercles décrite par DP, seront en raison de KD^2, les cercles étant entre eux comme les quarrés de leurs rayons. Force d'une couronne.

Ainsi la force absolue sera en raison de $\frac{KD^2}{BD^2}$. Or cette force absolue agissant suivant la direction DB, peut se décomposer en deux autres, savoir DK, BK, dont la premiere est détruite par des actions opposées, & la seconde attire le point B vers le centre C; & la force absolue est à la force relative dont on doit tenir compte, comme BD à BK. Celle-ci sera donc en raison de $\frac{KD^2 \times BK}{BD^3}$, ou de $\frac{KD^2 \times BK \times BD}{BD^4}$. De plus, par la nature du cercle BD^2 est en raison de BK, & $KD^2 =$

$bK \times BK$. Donc la force relative ſera en raiſon de $\frac{bK \times BK^2 \times BD}{BK^2}$, ou de $bK \times BD$.

Son expreſſion, & celle de la ſomme des forces des couronnes.

148. Pour déterminer une ligne droite qui exprime cette force, ſoit BMN une parabole du premier genre, ayant Bb pour axe & pour parametre. Comme par la nature de cette courbe $KM^2 = BK \times Bb$, on aura $KM = BD$ (1), & par la même raiſon $bN = bB$. Soit maintenant une autre courbe BLN, telle que l'on ait $Bb : BK :: KM : KL$, qui ſera auſſi du genre des paraboles. Car on aura KM en raiſon de $BK^{\frac{1}{2}}$, & KL en raiſon de $KM \times BK$, & par conſéquent de $BK^{\frac{3}{2}}$. Or l'on aura en renverſant les rapports $Bb : bK ::$ KM ou BD : ML; & parceque Bb eſt conſtant, ML ſera en raiſon de $bK \times BD$, c'eſt-à-dire en raiſon de cette force relative, dont nous avons dit qu'il falloit tenir compte. Donc ML exprime cette force relative, & l'aire BLNMB exprime la force totale dont toutes les couronnes comme DP attirent le point B.

Valeur abſolue de cette ſomme.

149. Il eſt queſtion à préſent d'évaluer cette force. Suppoſons que les points P, D, K, L, M tombent ſur les points A, E, C, F, G; on aura $GF = \frac{1}{2}CG$, puiſque $GF : CG :: bC : bB$. De plus, $CG = BE$, & $BE^2 = 2BC^2$. La couronne EA ſera égale au produit de EA par la circonférence du cercle décrite du point E, laquelle, en ſuppoſant que $\frac{1}{c}$ exprime le rapport du rayon à la circonférence, ſera $= c \times CE = c \times CB$. Ainſi la couronne ſera $c \times BC \times EA$. Donc la force abſolue de la couronne EA ſera $\frac{c \times BC \times EA}{BE^2} = \frac{c \times BC \times EA}{2BC^2} = \frac{c \times EA}{2BC}$; & l'on aura la force relative en multipliant par BC, & en diviſant par BE. Donc la force relative eſt $\frac{c \times EA}{2BE} = \frac{c \times EA \times BE}{2BE^2}$. Et ſubſtituant à la place de BE & BE^2, leurs valeurs CG,

(1) En effet, ſoit $Bb = a$, $BK = x$, $KD = y$; on aura $KM^2 = ax$; $BD^2 = x^2 + y^2$; dans laquelle ſubſtituant la valeur de y^2 priſe de l'équation au cercle, on aura $BD^2 = x^2 + ax - x^2 = ax$. Donc $KM^2 = BD^2$, & $KM = BD$.

ou 2 GF & 2 BC^2, cette force deviendra $\frac{2c \times EA \times FG}{4BC^2} = \frac{c \times EA \times FG}{2BC^2}$. Donc puiſque la force de la couronne EA eſt à celle de la couronne DP, comme FG eſt à LM, celle de la couronne DP ſera $\frac{c \times EA \times LM}{2BC^2}$. Donc la force attractive de toutes les couronnes ſera le produit de l'aire BFNGB, compoſée de toutes les lignes LM, par la quantité donnée $\frac{c \times EA}{2BC^2}$.

Suite.

150. Il nous reſte à calculer l'aire BFNGB. En général dans toute parabole, dont les ordonnées ſont en raiſon des abſciſſes élevées à la puiſſance de m, l'aire eſt au rectangle ſous l'abſciſſe & l'ordonnée, comme 1 à $m+1$, ainſi qu'il a été dit plus haut (n. 36). C'eſt-à-dire par exemple, que ſi KL eſt en raiſon de BK^m, l'aire BKL ſera $\frac{1}{m+1} \times BK \times KL$. Ainſi KM étant en raiſon de $BK^{\frac{1}{2}}$, on a l'aire $B\flat NGB = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \times B\flat \times \flat N = \frac{2}{3} B\flat^2 = \frac{8}{3} BC^2$. Mais puiſque KL eſt en raiſon de $BK^{\frac{3}{2}}$, l'aire $B\flat NFB = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} \times \flat B \times \flat N = \frac{2}{5} B\flat^2 = \frac{8}{5} BC^2$. On aura donc l'aire $BFNGB = \frac{8}{3} BC^2 - \frac{8}{5} BC^2 = \frac{16}{15} BC^2$.

Expreſſion très ſimple de cette ſomme.

151. Donc enfin multipliant cette valeur par $\frac{c \times EA}{2BC^2}$, on aura toute la gravité primitive au pôle B, exprimée par $\frac{8}{15} \times c \times EA$; c'eſt-à-dire par $\frac{8}{15}$ de la circonférence du petit cercle décrit du rayon EA, puiſque $c \times EA$ eſt la circonférence de ce petit cercle; expreſſion la plus ſimple & la plus facile, je penſe, qu'on puiſſe donner de cette gravité.

Problême pour un point placé à l'équateur. Pl. IV. fig. 18, 19.

152. Soit maintenant (fig. 18) un petit corpuſcule en A ſur l'équateur du ſphéroïde engendré par une circonvolution autour de l'axe $B\flat$. Imaginons deux autres ſolides, ſavoir le ſphéroïde qui ſeroit produit par une circonvolution autour de l'axe Aa & la ſphere $AEae$, ayant le même diametre Aa. Si ces ſolides ſont coupés par un plan $PGgp$ perpendiculaire à Aa; la ſection du ſphéroïde décrit avec l'axe Aa, ſera

un cercle, dont le diametre eſt Gg; la ſection de la ſphere un cercle dont le diametre eſt Pp; & la ſection du ſphéroïde décrit ſur l'axe Bb, ſera une ellipſe ſemblable à l'ellipſe génératrice, dont l'un des axes ſera Gg, & l'autre une ligne égale à Pp. On ſe convaincra de ce dernier point (car les autres ſont aſſez évidens par eux-mêmes, & par ce que nous en avons dit), en faiſant attention que l'axe Gg de l'ellipſe de la ſection doit être à ſon autre axe, comme Bb à Aa ou Ee, c'eſt-à-dire comme Gg à Pp. Soient repréſentées ces ſections par la figure 19, l'ellipſe ſera $GRgr$,, à laquelle les cercles $PRpr$, $GIgi$ ſeront l'un circonſcrit, l'autre inſcrit. A l'égard de la couronne GP, elle ſera la différence de la ſphere dont le diametre eſt Aa (fig. 18), & du ſphéroïde décrit ſur ce diametre. Quant aux deux ménisques $RPrG$, $Rprg$, ils feront enſemble la différence du ſphéroïde décrit autour de l'axe Bb (fig. 18), & de cette même ſphere.

Solution & démonſtration.

153. De plus, par une propriété de l'ellipſe, aſſez connue, & qu'on peut voir dans le tome 3 de mes Elémens (n. 385), le cercle circonſcrit eſt à l'ellipſe, comme l'ellipſe au cercle inſcrit. Ainſi l'ellipſe ne différant pas de beaucoup du cercle inſcrit, les deux premiers ménisques différeront peu des deux derniers. D'où il ſuit que les ménisques $RPrG$, $Rprg$ pris enſemble ſont la moitié de la couronne, & que puiſque dans la figure 18 toutes les parties tant de la couronne que du ménisque ſont à peu près à la même diſtance & dans la même poſition par rapport au point A, ce point ſera moins attiré de moitié par ce double ménisque qu'il ne le ſeroit par la couronne. Or comme la même choſe arrive par-tout, la gravité de ce point placé en A, provenante de la différence du ſphéroïde dont l'axe eſt Bb, ſera la moitié de celle qui provient de la différence du ſphéroïde dont l'axe eſt Aa, & de la ſphere qui a cet axe pour diametre.

Moyen de trouver le rapport des gravités.

154. Moyennant ces démonſtrations, on pourra aiſément exprimer par la même ligne EB le rapport de la gravité primitive ſous le pôle à la gravité ſous l'équateur, ſoit que le ſphéroïde ſoit oblong ou applati. Mais pour déterminer cette gravité, on a beſoin d'un théorème fort connu, qui eſt une ſuite de ce qui a été démontré par *Newton*, ſavoir que tout

ſolide ſphérique attire un point placé à quelque diſtance, ou à ſa ſuperficie, de la même maniere que ſi toute la maſſe étoit compénétrée au centre. Soit r le rayon de la ſphere, le diametre ſera $2r$, ſon grand cercle $\frac{1}{2}crr$ (1), ſa ſurface $2crr$, & ſa ſolidité $\frac{2}{3}cr^3$. Donc la gravité d'un point placé ſur la ſurface de la ſphere, exprimée par cette ſphere même, ou par le nombre de ſes parties, en raiſon directe de la maſſe, & en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, ſera $\frac{2}{3}cr$.

Ce rapport dans un ſphéroïde applati: Pl. IV. fig. 17.

155. Soit (fig. 17) un ſphéroïde applati, comme cela doit arriver à cauſe de la force centrifuge ſous l'équateur, laquelle éleve en cet endroit la maſſe du fluide. La gravité du point B ſur une ſphere du diametre Bb ſera $\frac{2}{3}\times c\times CB=\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{2}{3}\times c\times EA$. A quoi ajoutant $\frac{8}{15}\times c\times EA$, on aura pour la gravité de ce point ſur le ſphéroïde applati $\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{10}{15}\times c\times EA+\frac{8}{15}\times c\times EA=\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{2}{15}\times c\times EA$. La gravité du point A ſur la ſphere, dont le rayon eſt CA, ſera $\frac{2}{3}\times c\times CA$; d'où ôtant $\frac{4}{15}\times c\times EA$, on aura pour la gravité du point A ſur le ſphéroïde $\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{4}{15}\times c\times EA$. Ainſi la gravité ſur le ſphéroïde au pôle B, ſera à la gravité ſous ſon équateur en A, comme $\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{2}{15}\times c\times EA$ à $\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{4}{15}\times c\times EA$; ou bien, à cauſe que EA eſt très petit par rapport à CA, comme $\frac{2}{3}\times c\times CA$ à $\frac{2}{3}\times c\times CA-\frac{2}{15}\times c\times EA$; c'eſt-à-dire comme CA à $CA-\frac{1}{5}\times EA$.

Dans un ſphéroïde allongé.

156. Si le ſphéroïde étoit allongé, la ligne EA de poſitive deviendroit négative, & le rapport de ces gravités ſeroit celui de CA à $CA+\frac{1}{5}EA$.

De l'applatiſſement, & à quelles forces on doit avoir égard.

157. Au moyen de ce rapport, on peut aiſément déterminer l'applatiſſement occaſionné par le mouvement diurne, ſuivant ce qui a été dit (n. 142). Pour lors des trois forces ſuppoſées dans le théorème (n. 121), outre la gravitation mutuelle en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, une ſeule a lieu dans le cas préſent; c'eſt celle qui provient de la force centrifuge, & qui agit ſuivant la direction de CA perpendiculairement à l'axe Bb. Les deux autres entrent dans les cauſes du flux & du reflux de la mer, dans lequel, à cauſe que la Terre ne peſe pas également, ni dans la même direction ſur

(1) On ſuppoſe ici, comme ci-devant, que le rayon eſt à la circonférence comme 1 eſt à c.

le soleil & sur la lune, on est obligé d'admettre encore deux forces, l'une dirigée au centre de la Terre, l'autre suivant une direction à peu près perpendiculaire au plan mené par ce centre perpendiculairement à la ligne qui joint la Terre au Soleil ou à la Lune, & proportionnelle à la distance de ce plan.

Détermination de l'applatissement

158. Laissant donc à part ces deux dernieres gravitations, qui n'ont aucun rapport à la question présente; soit la gravité primitive sous l'équateur $= m$, la force centrifuge $= n$; la gravité absolue sous l'équateur sera $= m - n$. Si l'on fait le demi-diametre de l'équateur $= r$, & sa différence au demi-axe $= x$; on aura cette analogie: comme $r - \frac{1}{5}x$ est à r, ou bien à cause que x est très petit par rapport à r, comme r est à $r + \frac{1}{5}x$, ainsi la gravité primitive sous l'équateur (m) est à la gravité primitive sous le pôle, qui sera $m + \frac{mx}{5r}$. Donc la gravité absolue sous l'équateur est à la gravité sous le pôle, comme $m - n$ est à $m + \frac{mx}{5r}$, ou à peu près comme m à $m + \frac{mx}{5r} + n$. Or ces gravités doivent être en raison inverse des distances au centre, par le n. 121, elles seront donc dans la raison de r à $r + x$, & l'on aura encore cette proportion, en prenant les différences: m est à $\frac{mx}{5r} + n$, ou bien 1 est à $\frac{x}{5r} + \frac{n}{m}$, comme r est à x, ou comme 1 est à $\frac{x}{r}$. Donc $\frac{x}{5r} + \frac{n}{m} = \frac{x}{r}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{4x}{5r}$, ou $\frac{x}{r} = \frac{5n}{4m}$. D'où l'on tire cette analogie, $m : \frac{5}{4}n :: r : x$. On aura donc ce théorème: comme la gravité sous l'équateur est à $\frac{5}{4}$ de la force centrifuge sous l'équateur, ainsi le demi-diametre de l'équateur est à sa différence au demi-axe.

Bien plus grand que selon M. *Herman*.

159. Si l'on veut prendre en nombres le rapport approché de la gravité à la force centrifuge sous l'équateur, qui suivant le n. 71, est celui de 289 à 1; le demi-diametre de l'équateur sera à sa différence au demi-axe, comme 289 à $\frac{5}{4}$, ou comme 1156 à 5, à peu près comme 231 à 1, rapport fort approchant de celui de 230 à 1 qu'a trouvé *Newton* au Livre 3 des principes (prop. 19), où il suppose que le demi-

diametre

diametre de l'équateur eſt au demi-axe, comme 231 à 230. Cet applatiſſement eſt double de celui que M. *Herman* a déterminé pour ſon ellipſe. Car nous avons vu (n. 72) que celui-ci doit répondre non à cinq quarts, mais à la moitié de la force centrifuge; ce qui ne fait point $\frac{1}{231}$, mais ſeulemcnt $\frac{1}{578}$ du tout.

160. M. *Herman*, perſuadé que ſon ellipſe étoit celle que devoit donner la théorie de la gravité newtonienne, a taxé d'erreur *Gregory* & *Newton* lui-même, pour ne s'en être pas apperçus, & pour avoir aſſigné à la Terre un applatiſſement, qui dans leurs principes devroit être moindre de plus de moitié. Mais c'eſt préciſément en quoi il eſt tombé lui-même dans une erreur conſidérable. Car ſon hypotheſe de gravité, dirigée à un point unique, & en raiſon directe de la diſtance à ce point, eſt bien différente de l'hypotheſe de *Newton*, d'une gravité compoſée d'un nombre infini de gravitations particulieres ſur chaque partie, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

Erreur de M. *Herman* dans la cenſure qu'il fait de *Newton* & de *Gregory*.

161. Dans la théorie de *Newton*, toutes les parties d'un canal quelconque terminé au centre, peſent ſur ce centre même, en raiſon de leur diſtance au centre, & la gravité abſolue à la ſurface eſt en raiſon inverſe de la diſtance à ce centre. *Newton* s'eſt lui-même apperçu que cela devoit ſuivre de ſa théorie, ſuppoſé qu'il lui fallût une figure elliptique pour conſerver l'équilibre. Il n'a pu démontrer ce dernier point; mais a été du moins aſſez heureux pour le deviner.

Théorie de *Newton*.

162. En effet, *Newton* a démontré qu'un corpuſcule placé dans l'intérieur d'une couche elliptique, formée par la révolution de deux ellipſes concentriques ſemblables & ſemblablement poſées, eſt dans un équilibre parfait; & qu'un point ſitué dans des points homologues de ſolides ſemblables, eſt attiré dans ſa théorie en raiſon ſimple des côtés homologues; deux articles que nous avons expoſés (n. 93 & 92). Or il ne lui a pas été difficile d'en tirer cette conſéquence ſi naturelle, & qui ſuit pour ainſi dire d'elle-même, ſavoir qu'à meſure qu'on approche du centre dans une ſphere ou dans un ſphéroïde elliptique, la gravité décroît en raiſon ſimple directe des diſtances au centre. Car ſi l'on imagine une ſurface

Démonſtration pour la gravité primitive;

ſphérique ou elliptique, ſemblable à la ſuperficie extérieure, & paſſant par ce point qui ſe rapproche du centre, tout l'orbe extérieur renfermé entre ces deux ſurfaces n'aura aucune action, & il ne reſtera que l'action de la ſphere ou du ſphéroïde renfermé dans la nouvelle ſurface. Cette action devra être proportionnelle à la diſtance au centre; & cette diſtance eſt, comme l'on ſait, un des côtés homologues.

Pour la force centrifuge.

163. C'eſt ainſi que *Newton* a trouvé que la gravité primitive dans l'intérieur d'une ſphere ou d'un ſphéroïde elliptique, étoit en raiſon directe de la diſtance au centre. A l'égard de la force centrifuge, elle eſt en raiſon de la diſtance à l'axe, ſuivant le n. 17. D'où il eſt aiſé de conclure, ſoit qu'on prenne cette force abſolue, ſoit que l'ayant décompoſée, on n'ait égard qu'à celle de ſes parties qui eſt oppoſée à la gravité dirigée au centre, qu'elle eſt auſſi proportionnelle à la diſtance au centre. Or il ſuit de là que la gravité même abſolue pour un point quelconque pris dans l'intérieur de la ſphere ou du ſphéroïde, ſi l'on tient compte de celle qui eſt dirigée au centre dans tout canal terminé à ce centre même, ſera en raiſon directe de la diſtance au centre.

Pour la gravité à la ſuperficie.

164. *Newton* a démontré en ſecond lieu qu'à chaque point de la ſuperficie extérieur, la gravité eſt en raiſon inverſe de la diſtance au centre, & il l'a démontré ſans peine de la maniere qui ſuit. Imaginons deux canaux quelconques partans du centre, & terminés à la ſuperficie; ils ſeront en équilibre. Diviſons-les en un nombre égal de parties proportionnelles; toutes les petites portions de matiere renfermées dans ces parties, péſeront ſur le centre en raiſon de leur diſtance au centre. Or le rapport de la diſtance dans les parties homologues des canaux, eſt le même que celui des canaux. D'où il ſuit qu'ayant pris deux parties homologues, une dans chaque canal, la gravité de chaque portion de matiere, renfermée dans la premiere partie, ſera à la gravité de chaque portion de la ſeconde dans le rapport conſtant des canaux entiers. Donc les ſommes de ces gravités ſeront dans la même raiſon; c'eſt-à-dire que les poids des parties homologues ſont entre eux comme les poids des canaux. Donc ils ſont égaux. Mais puiſque le poids d'une partie priſe dans l'un des canaux, eſt égal au

poids de la partie homologue de l'autre canal ; il suit que la gravité de chaque portion de matiere, renfermée dans la partie du premier canal, est à la gravité de chaque portion de la partie homologue en raison inverse du nombre de ces portions de matiere, renfermées dans ces parties ; c'est-à-dire en raison inverse de ces parties mêmes ; que par conséquent elles sont réciproques aux canaux & aux distances des parties homologues au centre. Ainsi toutes les portions de matiere, prises en quelque endroit qu'on voudra, tant de la surface que de l'intérieur du sphéroïde, sur des lignes droites tirées du centre à la surface, & à des distances au centre proportionnelles à ces lignes, pésent en raison inverse de ces distances.

Ellipse de M. *Herman.*

165. Sur cela M. *Herman* cherchoit la figure que prendroit un fluide qui tourne sur son axe, & dont la gravité seroit dirigée au centre en raison directe des distances ; & dans cette hypothese de gravité, il trouvoit une ellipse dans laquelle le demi-diametre de l'équateur étoit au demi-axe en raison sous-doublée de la gravité primitive à la gravité absolue sous l'équateur. D'où il suivoit que ce demi-diametre étoit à sa différence au demi-axe, à peu près comme cette gravité primitive à la moitié de la force centrifuge, ou comme 578 est à 1 ; & que la gravité absolue dans les différens points de la surface étoit en raison inverse des distances, comme nous l'avons nous-mêmes démontré, n. 47 & 49. Ensuite remontant de la conséquence au principe, il cherchoit la figure requise dans la supposition que la force absolue à la superficie fût en raison inverse de la distance au centre, & retrouvoit la même ellipse. De plus, il trouvoit que la gravité primitive dirigée au centre, devoit être en raison directe des distances ; ce qu'il démontroit par une méthode synthétique, qui demande autant de patience que de travail. J'ai démontré la même chose par un calcul aisé, dans ma Dissertation sur la figure de la Terre.

Conclusion de M. *Herman.*

166. De ces résultats, M. *Herman* concluoit la liaison & la dépendance mutuelle & nécessaire de ces trois choses : que la gravité primitive est en raison directe de la distance ; que la gravité absolue à la superficie est en raison inverse de la

distance ; & que la figure eſt une ellipſe dans laquelle le demi-diametre de l'équateur eſt à ſa différence au demi-axe, comme la gravité eſt à la moitié de la force centrifuge ſous l'équateur. Il prétendoit que de chacun de ces trois points pris ſéparément, ſuivent néceſſairement les deux autres. Et comme il trouvoit la même choſe tant par la méthode des canaux que par celle de la direction perpendiculaire à la ſuperficie, il ſe croyoit ſuffiſamment autoriſé à cenſurer *Gregory* & *Newton*.

Qu'il en impoſa à l'Auteur ; & en quoi.

167. Ce raiſonnement ſpécieux m'en impoſa à moi-même, lorſque je faiſois la premiere édition de ma Diſſertation en 1739, non pas néanmoins juſqu'à me faire adopter l'opinion d'*Herman*, & à me faire croire que dans le ſentiment de *Newton* l'applatiſſement dût être $\frac{1}{578}$ partie du tout. Car je voyois clairement, ainſi que je l'ai marqué au même endroit, qu'il étoit démontré dans *Newton*, & fort exactement démontré qu'un fluide elliptique qui tourne ſur ſon axe, & dont les parties peſent les unes ſur les autres en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, a un applatiſſement égal à $\frac{1}{230}$ du tout ; ce qu'il a déterminé par une méthode à la vérité indirecte & de fauſſe poſition, mais qui en pareille matiere eſt aſſez exacte & aſſez ſûre ; & que la gravité doit être dans l'intérieur d'un canal quelconque en raiſon directe, & dans les divers points de la ſuperficie en raiſon inverſe de la diſtance au centre. Mais comme cette raiſon directe & inverſe, en donnant une ellipſe, ne l'applatiſſoit que de $\frac{1}{578}$ partie du tout, je ſoupçonnai d'erreur ce que *Newton* dit quelque part ſans le démontrer, ſavoir que dans ſa théorie le fluide doit être de figure elliptique ; & ce point ſuppoſé faux, les deux autres tomboient d'eux-mêmes.

La ſolution de M *Mac-Laurin* fit découvrir l'erreur.

168. L'année ſuivante parut la belle Diſſertation de M. *Mac-Laurin ſur le flux & le reflux de la mer*, où il démontre que la figure elliptique eſt celle que doit prendre un fluide dans la théorie de *Newton*, & où il trouve le même applatiſſement que *Newton* avoit tiré de la ſuppoſition de cette figure. Pour lors j'examinai avec plus d'attention le paſſage de M. *Herman*, & je recherchai les cauſes qui avoient pu l'induire en erreur. Je vais en propoſer deux, l'une deſquelles fut

inſérée, peu de tems après, dans une nouvelle édition de ma Diſſertation imprimée à *Luques*, avec un recueil de divers opuſcules: mais il y a tant de fautes d'impreſſion, & les figures en particulier y ſont tellement défigurées, qu'il eſt preſque impoſſible d'y rien comprendre.

Cauſes de l'erreur de M. *Herman*. Pl. IV. fig. 7. 14.

169. La premiere ſource d'erreur, c'eſt que quand on cherche la figure par la direction perpendiculaire à la ſuperficie dans l'hypotheſe de M. *Herman*, la gravité eſt compoſée de deux forces, dont la premiere, à ſavoir la gravité primitive, eſt dirigée au centre, comme dans la figure 7. LN ſuit la direction de LC; la ſeconde eſt la force centrifuge LO, dirigée du côté oppoſé à l'axe: au lieu que dans la théorie de *Newton*, cette gravité primitive n'eſt point dirigée au centre, mais elle ſuit la direction d'une ligne tellement inclinée à PC (fig. 14), qu'après qu'on l'a combinée avec la force centrifuge, la gravité abſolue a une direction qui, dans l'hypotheſe de *Newton*, s'éloigne plus de la ligne du centre, & demande un applatiſſement plus fort que dans l'hypotheſe de M. *Herman*.

Même ſujet.

170. La ſeconde ſource d'erreur eſt que dans l'hypotheſe de M. *Herman*, la gravité primitive doit être plus grande ſous l'équateur que ſous le pôle, à raiſon d'une plus grande diſtance; tandis que dans le ſentiment de *Newton*, elle doit être moindre. Si dans l'hypotheſe de M. *Herman* on ſuppoſe, comme nous l'avons fait, le demi-diametre de l'équateur $= r$, ſa différence au demi-axe $= x$; la gravité primitive ſous l'équateur doit être à celle du pôle, comme $r + x$ eſt à r, & dans le ſentiment de *Newton*, comme $r - \frac{1}{5}x$ eſt à r. De là le rapport de la gravité abſolue ſous l'équateur à la gravité ſous le pôle, eſt plus petit dans le ſentiment de *Newton* que dans l'hypotheſe de M. *Herman*. D'où il ſuit que pour conſerver l'équilibre des canaux, l'inégalité des gravités abſolues doit être compenſée par une différence de hauteur dans les canaux, plus grande dans le ſentiment de *Newton* que dans l'hypotheſe de M. *Herman*.

Différence de la théorie de *Newton* à celle de M. *Herman*.

171. Tout cela met l'erreur de M. *Herman* dans tout ſon jour, & fait aſſez voir ce qui doit arriver dans la théorie de *Newton* à un fluide homogêne qui tourne ſur ſon axe. On

voit encore qu'il eſt bien plus difficile de déterminer la figure dans cette théorie, que dans l'hypotheſe d'une gravité dirigée au centre, & en raiſon de la diſtance au centre & d'une gravité abſolue à la ſuperficie en raiſon inverſe de cette diſtance; & qu'on ne doit pas s'imaginer que pour avoir trouvé ce qui doit arriver dans cette hypotheſe, lorſqu'il s'agit ou de la figure provenante du mouvement de révolution diurne, ou de celle du flux & du reflux de la mer, produit par l'inégalité d'action du ſoleil ou de la lune ſur les différentes parties de la Terre, on ait déterminé par là même, & à ſi peu de frais, tout l'effet qui doit réſulter de la théorie de *Newton*.

Obſervation concernant les hypotheſes.

172. Il eſt de plus à obſerver que *Newton* n'a point employé deux hypotheſes, dont l'une regardât les parties placées au dedans de la ſurface, & l'autre, les parties placées à cette ſurface même; mais que l'une & l'autre eſt une ſuite de l'action générale & mutuelle de toutes les parties les unes ſur les autres en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & qu'il n'eſt nullement permis de raſſembler dans l'explication de quelque phénomene particulier des hypotheſes inventées à plaiſir, qui loin d'avoir entre elles aucune liaiſon, ſe détruiſent d'ordinaire les unes les autres; enfin qu'il n'eſt pas même permis d'établir pour chaque phénomene une hypotheſe particuliere, quand même ces diverſes hypotheſes ne renfermeroient ni contradictions ni abſurdités, & que ce n'eſt point ainſi que s'y eſt pris *Newton*, lui qui a déduit d'un ſi grand nombre de phénomenes la gravitation univerſelle, qui l'a employée ſi heureuſement à l'explication de tant d'autres effets naturels, ſans qu'on ait trouvé juſqu'ici aucun phénomene qu'on ne pût accorder avec elle, au lieu qu'on en a trouvé pluſieurs qui en ſont une ſuite naturelle, & qui prouvent de concert la vérité du principe d'où ils ſont déduits. Mais en voilà aſſez ſur ce point.

Rapport de de la diminution de la diſtance & de l'accroiſſement de la gravité. Pl. IV. fig. 20.

173. Il nous reſte à déterminer dans l'ellipſe de *Newton* le rapport de la diminution de la diſtance & de l'accroiſſement de la gravité depuis l'équateur juſqu'au pôle. C'eſt ce qu'on peut faire aiſément par la méthode que j'ai déja employée dans ma Diſſertation ſur la figure de la Terre. Soit (fig. 20) EC*e* le diametre de l'équateur, BC*b* l'axe de l'ellipſe peu

différente du cercle. Par un point quelconque P de cette ellipſe, menez la ligne CP qui, étant prolongée de part & d'autre, rencontrera le cercle circonſcrit en D & *d*, & la corde F*f* perpendiculaire au diametre E*e*, laquelle rencontrera encore l'ellipſe en *p* & le cercle en F, *f*. DP ſera la diminution de la diſtance; & l'augmentation de la gravité abſolue ſera preſque dans la même raiſon, puiſque la gravité en P eſt à la gravité en E, comme CE, ou CD à CP. Donc DP eſt à CP, qui eſt à peu près une quantité conſtante, comme l'augmentation de la gravité eſt à la gravité conſtante CE.

174. Ceci poſé, on a encore par la propriété du cercle DP × P*d* = FP × P*f*. D'où il ſuit que P*d* étant preſque conſtant, DP eſt à peu près comme le produit de FP par P*f*. Mais comme par la propriété de l'ellipſe, ainſi qu'on le peut voir au tome 3 de mes Elémens (n. 365), GF eſt à GP, ou G*p* dans le rapport conſtant de CE à CB; il s'enſuit que GP & G*f*, & par conſéquent leur différence PF & leur ſomme P*f*, ſont chacune en raiſon de GF. Donc cette raiſon compoſée dont nous venons de parler, eſt égale à la raiſon doublée de GF, ou du ſinus de l'arc EF, qui eſt à peu près la meſure de la diſtance du lieu à l'équateur ou de la latitude du lieu. On aura donc ici, comme au n. 44 & 48, le théorème ſuivant: *la diminution de la diſtance, de même que l'augmentation de la gravité, depuis l'équateur juſqu'au pôle, eſt en raiſon doublée du ſinus de la latitude, ou en raiſon du ſinus verſe d'une latitude double.* Suite.

175. Nous verrons au chapitre ſuivant, que dans l'ellipſe les dégrés du méridien augmentent dans la même raiſon, depuis l'équateur juſqu'au pôle. Mais en attendant, voyons quelle doit être la figure de la Terre, dans la ſuppoſition qu'elle n'ait point par-tout la même denſité, premierement pour le cas où cette denſité augmente ou diminue, ſuivant quelque rapport, depuis le centre juſqu'à la ſurface, enſuite pour le cas d'une conformation irréguliere. Figure de la Terre dans l'hypotheſe d'une denſité diverſe.

176. Conſidérons donc d'abord un globe ſolide, environné d'un fluide; c'eſt le cas où ſe trouve la Terre. Suppoſons que la denſité de ce ſolide change ſelon une raiſon quelconque Suite.

Qu'on peut supposer un noyau avec des couches sphériques homogénes.

depuis le centre jusqu'à la surface, & que le fluide qui l'entoure soit par-tout de la même densité. La densité, de la maniere que nous l'enviſageons ici, doit être égale à égales distances du centre en tout sens. M. *Daniel Bernouilli* l'a supposé de même pour une masse fluide, dans sa Dissertation sur le flux & le reflux de la mer; & c'est, comme nous le verrons bientôt, ce qui a trompé ce fâmeux Géometre, qui d'ailleurs est au dessus de tous nos éloges. Mais on peut le supposer sans aucun risque, pourvu qu'on le fasse avec les précautions requises, dans une masse dont le noyau est solide, & qui pour la figure differe peu d'une sphere. Car si les couches d'égale densité ont elles-mêmes une figure peu différente de la sphéricité, les couches sphériques peuvent aussi s'écarter si peu de l'homogénéité, qu'en les réduisant à une homogénéité parfaite, on ne changera pas sensiblement la gravité du fluide répandu sur sa surface, & dont l'hypothese de gravité détermine l'équilibre; ce qu'il seroit aisé de démontrer au besoin, & d'une maniere à ne pas souffrir la moindre difficulté; mais je crois que cette vérité se fait assez sentir par elle-même. Or ce cas est le même que celui où ce noyau solide seroit entierement homogêne, étant composé d'une matiere également distribuée dans toutes ses parties. Car toutes les couches sphériques homogênes attirent chacune en particulier, tant dans le premier que dans le second cas, de la même maniere que si toute leur matiere étoit réunie au centre, comme on peut aisément le conclure des démonstrations de *Newton*.

L'excès de densité des couches réuni au centre.

177. Supposons donc un globe solide, dont les couches concentriques soient homogênes, & dont la densité change à diverses distances, suivant une raison quelconque: supposons-le couvert d'un fluide, dont toutes les parties pèsent les unes sur les autres, & sur les parties du solide, en raison inverse des quarrés des distances: supposons enfin que tout le globe tourne sur son axe, & que la figure soit arrivée au point d'équilibre. Si l'on conçoit que tout l'excès de densité de chaque couche sur celle du fluide, est réuni au centre, l'équilibre du fluide n'en sera point troublé, puisque le fluide pésera toujours également sur la masse du noyau.

178. De cette sorte nous aurons un globe solide couvert d'un

d'un fluide homogêne au globe même; & outre la force centrifuge, celle par laquelle les parties s'attiroient en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ſe trouvera changée en deux autres, l'une dirigée au centre en raiſon inverſe des quarrés des diſtances à ce centre, l'autre par laquelle les parties du fluide devenu homogêne, s'attirent également en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances reſpectives. Suppoſons maintenant que ce ſolide ſe liquéfie tout à coup, & cherchons l'équilibre de ce tout fluide; car dès que nous l'aurons trouvé, quand même le globe redeviendroit ſolide comme auparavant, la partie fluide ne changera point pour cela de ſituation, puiſque toutes les parties continueront à s'attirer avec les mêmes forces & dans les mêmes directions.

Cas où le noyau ſe liquéfie.

179. Or pour trouver la figure du fluide dans cette premiere hypotheſe, repréſentons-nous la ſeconde, dans laquelle (toutes les autres forces reſtant dans le même état) celle qui eſt dirigée à la maſſe réunie dans le centre, ſoit de l'intenſité convenable, eu égard à cette maſſe; mais au lieu de croître en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ſuive ſeulement la raiſon ſimple directe de ces diſtances. Mettons dans cette ſeconde hypotheſe le fluide en équilibre, & nous chercherons enſuite la différence des figures qu'il doit prendre dans les deux hypotheſes.

Seconde hypotheſe.

180. On trouvera l'équilibre dans cette ſeconde hypotheſe de la même maniere qu'on l'a trouvé plus haut pour un fluide homogêne, dont toutes les parties s'attirent mutuellement en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & ſont outre cela pouſſées par trois autres forces, dont la premiere eſt dirigée au centre en raiſon des diſtances au centre, & les deux autres ſont dans des directions perpendiculaires, l'une à l'axe, l'autre à l'équateur, & en raiſon de leurs diſtances à l'équateur ou à l'axe. Car on aura abſolument les mêmes conditions.

Réduite à la ſolution générale de M. *Mac-Laurin.*

181. Suppoſons maintenant (fig. 21) que BA*ba* repréſente la figure elliptique que doit prendre le fluide dans cette ſeconde hypotheſe, & que BE*be* ſoit un globe, ayant pour diametre l'axe B*b*, & qui rencontre en E*e* le diametre A*a* de l'équateur. Ayant élevé EG perpendiculaire à A*a*, & d'une grandeur arbitraire, qui repréſente la force avec laquelle

Figure pour la ſeconde hypotheſe. Pl. IV. fig. 21.

doit peſer un corps à la diſtance de EC ou CB ſur la maſſe réunie en C; menez CG qui rencontrera en I la ligne AI parallele à EG, & faites paſſer par G une hyperbole cubique LG, ayant *b*C, CA pour aſymptotes, laquelle rencontrera AI en L, & dont les ordonnées EG, AL ſoient en raiſon inverſe des quarrés des abſciſſes EC, AC.

Différence de la ſeconde hypotheſe à la premiere.

182. Si la ſeconde hypotheſe eſt changée en la premiere, la différence de gravité ſera abſolument la même ſur les rayon BC, CE; mais dans l'intervalle AE il ſe perdra une partie de cette gravité. Car un corps placé en A a une gravité qui dans la ſeconde hypotheſe ſeroit exprimée par AI, & qui dans la premiere eſt exprimée par AL. Ainſi le poids de la colonne AE, qui dans la ſeconde hypotheſe ſeroit repréſenté par l'aire AIGE, le ſera dans la premiere par ALGE, LGI exprimant la diminution du poids. Si donc l'on verſe en AM une nouvelle doſe de fluide homogêne capable de compenſer cette diminution de poids dans la colonne AE, & que la même choſe ſe faſſe pour toutes les colonnes placées en tout ſens autour du centre, on rétablira l'équilibre, & le fluide ſe trouvera, même en la premiere hypotheſe, dans un équilibre parfait.

Conſtruction pour compenſer cette différence.

183. Or pour trouver cette hauteur AM, prolongeons GE juſqu'en F, de ſorte que EF ſoit à FG, comme la denſité du fluide eſt à la denſité moyenne du noyau, afin que par-là même EF ſoit à EG en même raiſon que la denſité du fluide à la denſité de la matiere excédente réunie au centre. Ce dernier rapport ſera auſſi celui de la gravitation du point E ſur le globe, devenu homogêne au fluide, à ſa gravitation ſur la matiere réunie au centre, puiſqu'il peſe ſur le globe de la même maniere que ſi ce globe étoit lui-même compénétré au centre. Soit encore repréſentée par ED la gravité ſur tout le ſphéroïde devenu fluide, laquelle ſera la même que celle qui agiroit ſur un ſeul ſphéroïde paſſant par le point E, & ſemblable au ſphéroïde AB*ab*, & qui ſera par conſéquent un peu moindre que celle qui agit ſur le globle EB*eb*. Ayant mené par C, D une ligne qui rencontre ILA en N, AN exprimera la gravité ſur tout le ſphéroïde fluide & homogême B*Aba* de la ſeconde hypotheſe, puiſque dans le canal CA cette gravité

eſt en raiſon de la diſtance au centre; IN la gravité ſur toute la maſſe compoſée du ſphéroïde homogêne, & de la maſſe réunie au centre, laquelle attire en raiſon directe des diſtances; & NL la gravité ſur l'un & ſur l'autre, dans la premiere hypotheſe, où la maſſe du centre attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

Suite.

184. Prenez du côté de A la ligne NO qui ſoit à NL, comme la force centrifuge à la gravité entiere en A. Ayant mené CO qui rencontrera GE en K, il eſt clair que DK exprimera la force centrifuge en E, puiſque cette force centrifuge eſt elle-même proportionnelle à la diſtance au centre. Donc OKGI exprime tout le poids du canal AE dans la ſeconde hypotheſe où la maſſe attire du centre en raiſon des diſtances; OKGL le poids du même canal dans la premiere hypotheſe où la maſſe attire du centre en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; LGI la différence des poids qui doit être compenſée par la partie AM. Il ſuffira donc de mener la ligne RMQP parallele à LAON, de ſorte que l'aire QOLR, qui dans la premiere hypotheſe exprime tout le poids de la partie AM, ſoit égale à l'aire LGI qui exprime la quantité du poids qu'on a perdu en revenant de la ſeconde hypotheſe à la premiere.

Quadrature de l'hyperbole cubique.

185. Or on trouve l'aire de cette hyperbole cubique RLG par le moyen de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées. Car ſon aire terminée d'une part par une ordonnée quelconque EG, & prolongée de l'autre à l'infini, eſt égale au rectangle ſous l'abſciſſe CE & l'ordonnée EG. D'où il ſuit que l'aire LAEG eſt égale à la différence des rectangles CE×EG, CA×AL. De plus, les ordonnées ſont déterminées par les abſciſſes, auſſi bien que les aires terminées par les lignes CO, CI. Il ſeroit donc aiſé de trouver par la Géométrie ou par l'analyſe, le point M, tel que l'aire RQOL fût égale au triangle mixtiligne LGI. Mais comme la ligne AE eſt très petite, & AM beaucoup moindre encore, on aura bien plutôt fait en prenant l'arc GLR pour une ligne droite.

Moyen plus facile.

186. Ayant donc mené GH parallele à EA, le triangle LGI ſera au rectangle AEGH, comme LI au double de AH ou de EG. Or EG : HI :: CE : GH ou AE; & puiſque

$EG : AL :: AC^2 : CE^2$, & en ſouſtrayant $EG : HL :: AC^2 : AE \times Ea$ (1); ou parceque Ea eſt à près double de CE, & CA preſque égale à CE; $EG : HL :: CE : 2AE$; LH ſera à peu près double de HI, & EG ſera à toute la ligne LI, comme CE au triple de AE.

Détermination de cette compenſation.

187. Or ſi l'on prend le trapeze QOLR pour un parallélograme, dont la hauteur ſoit AM & la baſe OL, ou KG qui eſt à peu près de la même longueur que OL; & le mixtiligne LGI pour un triangle rectiligne, dont la baſe ſoit LI & la hauteur HG; on aura $LI : AM :: LO$ ou $KG : \frac{1}{2} GH$, ou $\frac{1}{2} AE$. Donc par compoſition de raiſons $EG : AM :: CE \times KG : \frac{3}{2} AE^2$. D'où l'on tire $AM = \frac{3EG \times AE^2}{2KG \times CE}$, qui donne cette analogie, $KG : \frac{3}{2} EG :: \frac{AE^2}{CE} :: AM$; c'eſt-à-dire que le total de la gravité ſous l'équateur eſt à $\frac{3}{2}$ de la gravité ſur la maſſe réunie au centre, comme la troiſieme proportionnelle au demi-axe, & à ſa différence au demi-diametre de l'équateur, eſt à la hauteur que l'on cherche.

Denſité du noyau plus grande que celle du fluide;

188. Or il y a trois cas, ſuivant que la denſité du noyau eſt plus grande ou égale, ou plus petite que celle du fluide. Dans le premier cas la ligne EG, & tout le triangle mixtiligne LGI doivent être de l'autre côté de EC par rapport à EF, afin que la force totale des parties EA ſoit compoſée du total de leurs gravitations ſur le ſphéroïde & ſur le centre. Pour lors LGI exprime la perte du poids dans la premiere hypotheſe dans laquelle la maſſe du centre attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, au lieu que dans la ſeconde elle attire en raiſon directe & ſimple des diſtances; d'où il ſuit qu'on doit compenſer cette perte en ajoutant AM. Or dans ce cas même AM ſera toujours très petite. Car alors

---

(1) Puiſque $EG : AL :: AC^2 : CE^2$, on aura en ſouſtrayant $EG : EG - AL :: AC^2 : AC^2 - CE^2$, & parceque $EG - AL = HL$, & $AC^2 - CE^2 = AE^2 + 2CE \times AE$; on aura $EG : HL :: AC^2 : AE^2 + 2CE \times AE$. Mais $AE^2 + 2CE \times AE = AE \times (AE + 2CE)$, & $AE + 2CE = Ae = Ea$. Donc $AE^2 + 2CE \times AE = AE \times Ea$, & $EG : HL :: AC^2 : AE \times Ea$.

DG ſera conſtamment plus grande que GE; & puiſque DK qui exprime la force centrifuge doit être très petite en comparaiſon de DG qui repréſente la gravité primitive; KG ſera plus grande que GE, ou elle lui ſera égale, (ce qui arrive lorſque la denſité FE du fluide eſt très petite, enſorte que DE ſoit elle-même de peu de valeur, auſſi bien que DK qui eſt alors ou moindre ou égale à DE), ou enfin KG ſera moindre, mais de ſi peu choſe, qu'on pourra l'égaler à GE. D'où il ſuit que AM ſera au contraire ou plus petite que la troiſieme proportionnelle à CE & EA, ou qu'elle lui ſera égale, ou qu'enfin elle la ſurpaſſera de ſi peu de choſe, qu'on pourra les égaler.

189. Dans le ſecond cas il n'y a point de matiere réunie au centre, le triangle LGI s'évanouit, ſes côtés LG, GI tombant ſur AE, EA, & le cas ſe réduit à la détermination de M. *Mac-Laurin* pour un fluide homogêne. Il n'y a rien pour lors à ajouter à l'ellipſe. Denſité égale.

190. Dans le troiſieme cas EG & ſon triangle LGI tournent du côté oppoſé, & ſe confondent avec EG′ & L′G′I′. Pour lors on n'imagine pas dans le centre un excédent, mais plutôt dans le noyau un ſupplément de matiere pour compenſer le dégré de denſité qui lui manque, & le réduire à l'homogénéité. Pour cela même on doit encore imaginer dans le centre une égale quantité d'autre matiere douée d'une vertu répulſive, agiſſante en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, afin de détruire tout l'effort de la matiere ſurajoutée. En ce cas le triangle L′G′I′ augmente le poids OKG′I′, bien loin de le diminuer, puiſqu'on en ôte plus qu'on ne pourroit en ôter ſi la force répulſive n'augmentoit pas en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, mais en raiſon ſimple & directe des diſtances. Il n'eſt donc plus queſtion ici d'ajouter AM, mais de la retrancher, puiſque de poſitive qu'elle étoit, elle ſe change en AM′, quantité négative; de même que EG ſe change en EG′. Denſité moindre.

191. Alors ſi EG′ n'approche pas trop du point K, on ne devra point craindre d'erreur ſenſible. Or elle n'en approchera pas trop, à moins que la denſité FG′ du noyau ne fût trop petite par rapport à la denſité FE du fluide. Car la force Obſervation pour ce dernier cas.

centrifuge DK ſera toujours très petite par rapport à la gravité DG', & FD eſt toujours petite en comparaiſon de EF. En effet, par la ſuppoſition EF eſt à ED, comme la gravité du point E ſur le globe BE*be*, à ſa gravité ſur le ſphéroïde BA*ba*, ou ce qui eſt le même, ſur un ſphéroïde ſemblable, paſſant par le point E. Donc par le n. 155, EF : ED :: $\frac{2}{3}$ CA : $\frac{2}{3}$ CA — $\frac{4}{15}$ AE, ou EF : ED :: CA : CA — $\frac{2}{5}$ AE. Donc ce qu'il faut retrancher en ce cas, eſt à peu près égal à cette troiſieme proportionnelle, ou ne la ſurpaſſe pas de beaucoup, & ſera toujours petit ; ce qui ne peut jamais manquer d'arriver dès-là que la denſité du noyau n'eſt point trop petite, comparée à celle du fluide.

De la compenſation de la différence des forces.

192. Si l'on fait la même choſe ſur toutes les lignes droites tirées du centre, comme CVT, en ajoutant ou retranchant T*t*, laquelle ſoit à une troiſieme proportionnelle à CT, VT, à peu près dans la même raiſon que $\frac{3}{2}$ de la denſité du noyau à la ſomme, ou à la différence des denſités ; tout le fluide ſera en équilibre. Car cet équilibre ne pourroit être troublé que par l'effet de cette attraction mutuelle qui agit en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & qui dépend de l'attraction terminée à ce ſurcroît AM*t*T de fluide. Or elle eſt abſolument inſenſible pour ſa petiteſſe, & à raiſon de la diſtance. Si l'on devoit en tenir compte, il faudroit, pour compenſer la différence des forces, ajouter ou retrancher un autre ménifque qui, en comparaiſon du premier, ne ſeroit jamais d'une grandeur tant ſoit peu ſenſible. Il arrive ici la même choſe que dans les ſeries qui ſont fort convergentes, ſavoir que pour trouver la quantité inconnue, il ſuffit de connoître les deux premiers termes.

Cas d'une très petite denſité du noyau.

193. Dans le cas où EG' approcheroit fort de EK, ou la ſurpaſſeroit même, on pourroit aiſément déterminer par la Géométrie, ou par le calcul ordinaire d'algebre, la quantité AM' qu'il faudroit retrancher de AE. Mais dans ce cas particulier, la ſolution du problême n'eſt plus d'aucun uſage, comme nous le verrons dans la ſuite.

Que la nouvelle courbe differe peu de l'ellipſe.

194. Or la figure BM*tb* s'écarte un peu de l'ellipſe. Car ſi c'étoit une ellipſe comme BA*b*, V*t* ſeroit, auſſi bien que VT, à peu près en raiſon doublée du ſinus de l'angle ACT,

comme il eſt aiſé de le conclure du n. 174. D'où il ſuit que Vt ſeroit en raiſon de VT, & par-là même auſſi Tt en raiſon de VT. Or par la conſtruction Tt eſt en raiſon de VT^2, puiſqu'elle eſt en raiſon de la troiſieme proportionnelle à CV conſtant, & à cette même ligne VT. D'où il arrive que de l'équateur au pôle elle décroît beaucoup moins que ſi le point t étoit à l'ellipſe. Mais puiſque la ligne entiere Tt eſt par-tout très petite, non ſeulement par rapport à CV, mais encore par rapport à VT, toute cette figure différera peu de l'ellipſe, & ſa courbure ſera par-tout ſenſiblement la même que celle de l'ellipſe. Mais dans le cas où le noyau a moins de denſité que le fluide, elle approchera plus de la figure circulaire.

Du flux & du reflux de la mer.

195. Cette différence eſt encore plus petite, & devient tout à fait inſenſible, lorſqu'il eſt queſtion du flux & du reflux de la mer, auquel on peut fort aiſément appliquer toute cette théorie. Car alors toute l'élévation AE eſt à peine de deux pas romains, ou de dix pieds. Par conſéquent la troiſieme proportionnelle à CE de 4300000 pas, & AE de 2, ſavoir $\frac{1}{1057000}$ pas, n'eſt pas la dix-millieme partie d'un pouce. Ainſi quelle que fût la denſité du fluide par rapport à celle du noyau, l'élévation dans le cas d'homogénéité ne différeroit pas ſenſiblement de la figure elliptique.

De l'ellipticité dans la ſeconde hypotheſe.

196. Il faut maintenant déterminer l'ellipticité AE dans cette derniere hypotheſe, dans laquelle ſe trouvent trois forces, celle de la maſſe du fluide homogêne, qui attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; celle de la maſſe réunie au centre, qui attire en raiſon directe des diſtances; & la force centrifuge. Soit donc la denſité du fluide $= t$, la denſité moyenne du noyau conſidéré dans ſon premier état, $= p$. Si l'on rend le noyau homogêne au fluide, la denſité de la maſſe réunie au centre ſera $p - t$. Soit $p - t = q$, le demi-axe CB, ou $CE = r$, la différence $AE = x$, & le rapport de la force centrifuge au total de la gravité ſous l'équateur $= \frac{n}{m}$. Ces valeurs nous ſerviront à déterminer la gravité au pôle B, & ſa différence à la gravité ſous l'équateur en A. Et comme par le n. 121, la gravité en B eſt à la gravité en A,

comme CA à CB; CA, ou ce qui eſt à peu près la même choſe, CE eſt à EA, comme la gravité en B à la différence des gravités; ce qui déterminera la ligne AE.

Force totale à la ſurface.

197. D'abord il ſuit de ce qui a été dit (n. 154), que la gravité totale du point B ſur le globe BE*be*, dont le rayon CB eſt r, & la denſité t, eſt $\frac{2}{3}ctr$; ſur la matiere réunie au centre $\frac{2}{3}cqr$; ſur l'un & l'autre enſemble $\frac{2}{3}cpr$. Cette derniere gravité ſera à peu près la gravité totale du point E ſur tout le ſphéroïde, y compris le noyau, laquelle, du moment qu'il s'agit de gravité totale & non de différence, peut être priſe pour la gravité d'un point quelconque de la ſurface du ſphéroïde.

Différence de la gravité.

198. Or cette gravité en B differe par trois endroits de la gravité en A. Car en premier lieu, la force avec laquelle le point B ſe porte ſur tout le ſphéroïde fluide homogêne, ſurpaſſe la gravitation du point A ſur ce même fluide; & par le n. 155, CA, ou ce qui eſt à peu près le même, CE eſt à $\frac{1}{5}$ AE, ou r à $\frac{1}{5}x$, comme la gravité en B ſur le ſphéroïde, ſavoir $\frac{2}{3}ctr$, à ſon excès ſur la gravité en A, qui ſera $\frac{2}{15}ctx$. En ſecond lieu, CE ou CB (r) eſt à EA (x), comme la gravitation du point B ſur la maſſe du centre ($\frac{3}{2}cqr$) eſt à ſa différence par défaut à la gravitation du point A plus éloigné de cette maſſe. Donc cette différence ſera $\frac{2}{3}cqx$. Enfin m eſt à n, comme la gravité primitive $\frac{2}{3}cpr$, commune à toute la ſuperficie de la Terre, eſt à la force centrifuge en A $= \frac{2cpnr}{3m}$, au lieu qu'en B cette force eſt nulle.

Formule pour l'ellipticité.

199. Ainſi la différence totale des gravités en B & en A ſera $\frac{2}{15}ctx - \frac{2}{3}cqx + \frac{2pcnr}{3m}$, & le rapport de la gravité en B à cette différence ſera celui de $\frac{2}{3}cpr$ à $\frac{2}{15}ctx - \frac{2}{3}cqx + \frac{2pcnr}{3m}$, ou en diviſant par $\frac{2}{3}cp$, celui de r à $\frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$. Et comme ce rapport doit être celui de CB à EA, ou de r à x, on aura $x = \frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$, ou bien $\left(1 \frac{-t}{5p} + \frac{q}{p}\right)x = \frac{nr}{m}$. Or comme $p - t = q$ par la ſuppoſition, on aura $\frac{-t}{5p} + \frac{q}{p} = -\frac{t}{5p}$

+

$+\frac{p}{p}-\frac{t}{p}=1-\frac{6t}{5p}$. Donc $\left(2-\frac{6t}{5p}\right)x=\frac{nr}{m}$. Donc $x=\frac{nr}{2m\left(1-\frac{3t}{5p}\right)}$.

200. Cette formule s'accorde parfaitement avec celle qu'a proposée M. d'*Alembert* dans sa Dissertation sur la cause des vents, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin en 1747, & avec une autre beaucoup plus générale, proposée par M. *Clairaut* dans son ouvrage sur la figure de la Terre; mais nullement avec celle que donne M. *Daniel Bernouilli* dans une Dissertation imprimée parmi les pieces couronnées par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, & qu'on y trouve à l'année 1740. J'avoue que de cette formule suivent plusieurs corrollaires qui semblent d'abord autant de paradoxes également contraires aux regles du calcul & de la Géométrie; mais si on y regarde de plus près, on en reconnoîtra l'exacte vérité.

Formules de MM. d'*Alembert*, *Clairaut* & *Bernouilli*.

201. Pour commencer par M. *D. Bernouilli*, cet Auteur a donné pour ce même cas d'un noyau solide couvert d'un fluide, & tournant avec lui sur son axe, une formule qui exprime la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur, telle que cette différence se trouve en raison inverse de la densité du fluide. D'où il conclut que le flux & le reflux de l'air éleve l'atmosphere à deux milles, & que si cette élévation ne se fait point sentir dans le barometre, c'est que l'atmosphere acquiert d'abord par son élasticité un certain équilibre, d'où il arrive que chaque point de la surface de la Terre porte le poids moyen de l'atmosphere.

Ce qui suit de la formule de M. *Bernouilli*,

202. Or cela est contraire à notre formule dans laquelle, lorsque le noyau est fort dense en comparaison du fluide qui le couvre, p devient extrêmement grand par rapport à t; d'où il suit que la fraction $\frac{3t}{5p}$ est très petite, que toute la formule se réduit presqu'à $\frac{nr}{2m}$, & qu'à mesure que le fluide perd de sa densité, cette formule, loin d'augmenter à l'infini, diminue & se rapproche infiniment de $\frac{nr}{2m}$.

Contraire à celle de l'Auteur.

Cauſe de l'erreur de M. *Bernouilli.*

203. Mais c'eſt la formule de M. *Bernouilli* qui manque de juſteſſe & non la nôtre. M. d'*Alembert* l'a déja remarqué dans l'ouvrage que je viens de citer. Je l'ai moi-même démontré dans la Diſſertation ſur le flux & le reflux de la mer, imprimée la même année, & j'ai attribué cette erreur à la même cauſe que lui a aſſigné dans le même tems M. d'*Alembert*, ſavoir que dans la méthode des canaux employée par M. *Bernoulli*, on ne doit point ſuppoſer des couches ſphériques concentriques de même denſité. Car ſi toute la maſſe étoit fluide, les couches, fuſſent-elles de denſité inégale, deviendroient elles-mêmes elliptiques; & ſi l'on a égard à cela, il faut beaucoup moins d'élévation ſous l'équateur pour compenſer la perte que cauſe à la gravité la force centrifuge, que ſi toute cette perte devoit être compenſée par le ſeul fluide qui couvre le noyau; auquel cas il faudroit véritablement que la hauteur de ce fluide fût en raiſon inverſe de ſa denſité pour compenſer une perte déterminée. C'eſt pour cela que voulant me ſervir de la méthode des canaux, j'ai commencé par réduire la maſſe ſolide à l'homogénéité, en renvoyant tout le ſurplus de la matiere au centre, & qu'enſuite de ſolide qu'elle étoit je l'ai rendue fluide. D'ailleurs il eſt évident que s'il arrivoit un changement ſi conſidérable dans la hauteur de l'air, le barometre devroit abſolument l'indiquer, ſans pouvoir en être diſpenſé par l'équilibre prétendu, comme l'a encore remarqué M. d'*Alembert*. Car pour qu'il y ait équilibre, il faut que chaque partie ſoit pouſſée en tout ſens par des forces égales, & non pas que des parties placées l'une en un endroit, l'autre à l'autre, ſoient pouſſées par les mêmes forces. En effet, dans cette atmoſphere même un atôme placé au ſommet d'une montagne, eſt moins chargé qu'un autre qui ſe trouve au fond de la vallée, quoique l'un & l'autre ſoient en équilibre.

Formule de M. d'*Alembert.*

204. M. d'*Alembert* donne ſa formule à l'article 28, *propoſition 6*. Il ſuppoſe le demi-diametre du noyau $= \rho$, le demi-diametre du fluide $= r$, le rapport du demi-diametre à la circonférence $= \frac{1}{n}$, la denſité du fluide $= \delta$, celle du noyau $= \Delta$, la gravité en un point quelconque de la ſurface du

fluide $= p$, la force centrifuge ſous l'équateur $= \varphi$; & ſa formule pour la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur eſt $\frac{\varphi r}{2p} : \left(1 - \frac{3n\delta r}{5(n\delta r - n\delta\rho + n\Delta\rho)}\right)$. Et ſuppoſant $\rho = r$, à cauſe que la hauteur du fluide n'eſt pas ſenſible, comparée à la groſſeur du noyau, la formule ſe change en $\frac{\varphi r}{2p\left(1 - \frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$.

Or les valeurs $\frac{n}{m}$, c, $\frac{t}{p}$ ſont dans ma démonſtration les mêmes que $\frac{\varphi}{p}$, $2n$, $\frac{\delta}{\Delta}$ dans celle-ci; & par la ſubſtitution, la formule de M. d'*Alembert* revient à la mienne, ſavoir à $\frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$.

Rapports de la denſité du noyau à celle du fluide.

205. Conſidérons maintenant les divers rapports des denſités t, p. Si la denſité du fluide n'eſt pas ſenſible par rapport à celle du noyau, la fraction $\frac{3t}{5p}$ s'évanouit, & la formule ſe réduit à $\frac{nr}{2m}$: & cette formule, à meſure que p diminue par rapport à t, augmente toujours tandis que $\frac{3t}{5p}$ eſt au-deſſous de l'unité, puiſque le diviſeur de la formule va toujours en diminuant. Enfin lorſque $p = t$, la formule ſe change en $\frac{nr}{2m\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5nr}{4m}$, comme nous l'avons vu plus haut; d'où il ſuit que la valeur de x, dans le cas où la denſité du noyau ſurpaſſe infiniment celle du fluide, eſt à ſa valeur pour le cas d'homogénéité, comme $\frac{1}{2}$ eſt à $\frac{5}{4}$, ou comme 2 eſt à 5. Tous ces cas intermédiaires regardent un fluide homogêne, dont les parties s'attirent en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, avec la maſſe du centre qui attire en raiſon ſimple directe des diſtances; & ils ſe réduiſent à celui d'une maſſe réunie au centre, laquelle attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & par conſéquent à un noyau ſolide également denſe à égales diſtances du centre, mais dont la moyenne denſité ſurpaſſe celle du fluide, & qui, moyennant l'addition de AM, Tt,

a une force d'attraction mutuelle, égale à celle du fluide. Or dans tous ces cas on peut appliquer sans risque la solution du problême, pourvu que la force centrifuge soit très petite en comparaison de la gravité, puisqu'alors la valeur exprimée par la formule est très petite par rapport à r, c'est-à-dire que l'élévation est petite, comme on l'a supposé dans la déduction de cette formule, en calculant sur cette supposition la différence d'attraction sous l'équateur & sous le pôle.

Cas où ce rapport approche de celui de 3 à 5.

206. Si le noyau est moins dense que le fluide, en ce cas, outre le sphéroïde du fluide homogêne, on imagine au centre une masse répulsive, égale à la quantité de matiere qu'il faut ajouter au noyau pour le réduire à l'homogénéité. Mais alors même la valeur de la formule est positive, tant que le rapport de p à t, c'est-à-dire de la densité du solide à celle du fluide, surpasse celui de 3 à 5, & elle va toujours en augmentant; & lorsque ces rapports different encore au point que $1 - \frac{3t}{5p}$, ou $\frac{5p-3t}{5p}$ est une fraction beaucoup moindre que $\frac{n}{2m}$, l'ellipticité est petite, & l'on peut se servir de la formule. Mais du moment qu'ils se rapprochent de trop près, la valeur de la formule augmente à l'infini, & devient ensuite négative. Pour lors il seroit inutile de chercher de l'exactitude dans la formule, puisque ce n'est que dans la supposition d'une petite excentricité qu'on a déterminé la différence tant des attractions sous l'équateur & le pôle, que de la force répulsive de la masse réunie au centre.

Cas d'une ellipticité excessive.

207. Si dans un ellipsoïde, ou applati, ou allongé à volonté, on exprimoit généralement le rapport précis de la gravité sous le pôle à celle de l'équateur, par les demi-axes de l'ellipse génératrice, comme l'a fait M. *Mac-Laurin*, & que cette force répulsive proportionnelle à la distance, & son rapport à la force centrifuge sous l'équateur, qui est constant, fussent également exprimés par ces mêmes lignes, & avec la même précision, l'on pourroit aussi employer les demi-axes à former une expression exacte du rapport de la force totale sous l'équateur à celle du pôle; & si l'on mettoit les demi-axes en raison inverse de ces forces, on auroit une équation d'où l'on pourroit tirer la valeur précise des demi-

axes, & une construction générale du problême dans toute l'exactitude géométrique, pour le cas même où les demi-axes seroient d'une inégalité extrême. La figure ainsi trouvée, on y feroit les corrections nécessaires par la méthode exposée (n. 183 & suiv.), en ajoutant ou retranchant AM ou AM′, qui répond au triangle LGI ou L′G′I′. Mais cette addition même AM, T*t* deviendra alors assez considérable pour demander une nouvelle correction. Or tous ces cas n'ont aucun rapport au sujet que nous traitons, puisque nous savons que l'ellipticité de la Terre est si petite, qu'elle approche beaucoup de la figure d'une sphere.

Cas où le rapport est moindre que celui de 3 à 5.

208. Si le rapport de *p* à *t* est moindre que celui de 3 à 5, la valeur de la formule devient négative ; ce qui fait voir qu'on ne peut alors trouver l'équilibre dans un sphéroïde applati, mais seulement dans un sphéroïde allongé. Et si ce rapport n'est pas de beaucoup moindre, la formule donnera une petite valeur qu'on pourra prendre sans risque. Car si par exemple *p* est à *t*, comme 3 est à 6, on aura $\frac{3t}{5p} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$, & la formule se réduira à $-\frac{5nr}{2m}$, valeur assez petite. Cette valeur diminue ensuite continuellement à mesure que le noyau devient moins dense, jusqu'à ce que cette densité étant nulle, & le noyau entierement vuide, la valeur $1 - \frac{3t}{5p}$ devient infinie, & celle de la formule se réduit à zéro.

Conséquences qui s'en suivent.

209. Ceci nous mene à des conséquences fort ressemblantes à des paradoxes. Car il s'ensuit en premier lieu qu'avec une force centrifuge des plus petites, qui deviendroit même absolument insensible, & une rotation des plus lentes, qui s'acheveroit à peine en mille ans, on pourroit avoir un applatissement très sensible. Car quelque petit que soit le rapport de *n* à *m*, si 3*t* est une quantité assez approchante de 5*p*, la formule donnera une valeur assez grande. Le fluide sera donc applati par un mouvement si insensible, jusques-là même qu'en certains cas cet applatissement augmentera à l'infini. Car quoique la formule déterminée dans l'hypothese d'un petit applatissement, puisse être fausse dans le cas d'un grand applatissement, ensorte que le passage par l'infini ne se fasse pas à l'en-

droit même indiqué par la formule; toujours eſt-il vrai qu'une valeur ne peut en croiſſant devenir négative, ſans paſſer quelque part par l'infini. Or il n'y aura aucun point de paſſage au-delà duquel on ne puiſſe, avec un mouvement & une force centrifuge preſque inſenſible, trouver un applatiſſement énorme. D'un autre côté il paroît évident, & évident par ſoi-même, qu'une force centrifuge ſi petite ne doit pas détourner ſenſiblement la direction de la gravité; & par conſéquent elle ne doit pas ſenſiblement troubler l'équilibre de la figure ſphérique. Elle le trouble pourtant, & du moment qu'elle l'a obligé de s'écarter tant ſoit peu de ſa ſphericité dans le cas d'une valeur négative, la différence ſous le pôle & ſous l'équateur, allant toujours en augmentant, la force répulſive de la matiere réunie au centre devenant toujours plus grande ſous l'équateur, on aura une nouvelle cauſe d'une élévation ultérieure, & cette élévation va toujours en croiſſant juſqu'à ce que la valeur de la formule devenant poſitive, on ait l'équilibre. Mais dès que cette valeur redevient négative, le fluide s'écarte à l'infini, ſans jamais trouver l'équilibre, & fuit ſans retour & pour jamais.

Allongement de la figure joint au mouvement de rotation.

210. Autre paradoxe: ſi la denſité du fluide ſurpaſſe de beaucoup celle du noyau, le mouvement de rotation doit ſe rencontrer avec l'allongement de la figure. Or il ſemble que quelque ſoit le rapport des denſités dans un ſphéroïde allongé, ni les canaux ne peuvent y être en équilibre, ni la direction de la gravité perpendiculaire à la ſuperficie. Cependant tout cela s'y trouve parfaitement: car il y aura un dégré d'allongement & d'élévation vers les pôles, qui ſe rencontrera avec l'équilibre. La raiſon eſt que dans un ſphéroïde allongé la gravité eſt moindre ſous le pôle que ſous l'équateur, ſuivant ce qui a été dit (n. 156). De plus, cette maſſe placée au centre, & qui repouſſe en raiſon ſimple & directe des diſtances, agiſſant également ſur des canaux d'égale longueur, repouſſera plus fortement le fluide d'un canal aboutiſſant au pôle, comme plus long que celui d'un canal terminé à l'équateur; & l'excès de la force répondra à celui de cette longueur. De là il peut bien arriver que la force centrifuge qui répond à un canal terminé à l'équateur, compenſe exactement la double diminution de gravité dans un canal terminé au pôle; & c'eſt préciſément ce

qui arrive dans le cas où la valeur de la formule devient négative, comme il ſeroit aiſé de le démontrer immédiatement, en appliquant la démonſtration à ce cas particulier.

Que ſi on dérange l'équilibre de ce ſphéroïde, il s'en écarte toujours plus.

211. Mais alors même il eſt à obſerver que ſi on donne au fluide une figure ſphérique, ſans aucune force centrifuge, il ſera encore dans un équilibre parfait. Si on le fait tourner ſur ſon axe, le poids diminue dans le canal qui aboutit à l'équateur, & la figure s'applatit. Mais plus il arrivera de changement dans la figure, plus il y aura d'inégalité dans les poids des canaux, l'inégalité de peſanteur dans chaque partie étant trop grande pour pouvoir être compenſée par aucune inégalité de longueur dans les canaux. Le fluide ne pourra donc jamais parvenir à la figure requiſe pour l'équilibre, je veux dire à une figure allongée. Bien loin de là, il s'en écartera de plus en plus juſqu'au point de ſe diſſiper. La force répulſive du centre, & la force centrifuge produite par le mouvement de rotation, l'emportant toujours ſur la force d'attraction qui agit ſur le ſphéroïde, elles repouſſeront le fluide, & lui feront parcourir un eſpace infini.

Moyen de trouver l'équilibre: qu'il ſe perd par le plus léger mouvement.

212. Il s'enſuit que pour avoir l'équilibre en ce cas, il faut commencer par recourir à cette figure allongée qui s'accorde avec l'équilibre. Dès que le fluide aura pris cette figure, il la conſervera toujours. S'il venoit à la perdre, & qu'il arrivât quelque diminution, quelque petite qu'elle fût, dans ſon élévation ſous les pôles, il ne reviendroit point à cette figure; au contraire, il s'en écarteroit toujours plus à l'infini. Car à meſure qu'il approche de la figure ſphérique, le canal aboutiſſant au pôle perd moins de ſon poids que celui qui aboutit à l'équateur; d'où il ſuit que la hauteur du fluide doit augmenter continuellement dans ce dernier canal; ce qui augmentant de plus en plus l'inégalité des poids, le fluide toujours moins allongé s'applatira enfin, & s'applatira à l'infini. Pour finir ſur cet article, ajoutons que s'il arrivoit par haſard que le fluide s'élevât ſous les pôles plus qu'il ne convient à l'équilibre, je penſe que l'inégalité des poids devroit augmenter pareillement, & que le fluide s'éloigneroit toujours plus de l'équilibre.

213. On verroit arriver pour lors la même choſe que dans

Qu'on trouve ici la même chose qu'au passage de *non-cohésion.*

ma théorie de physique générale sur les points indivisibles qui, à certaines distances se repoussent, à d'autres distances s'attirent mutuellement, suivant une certaine loi. Dans la supposition que les distances aillent toujours en augmentant, les points peuvent passer de la force répulsive à l'attractive, ou de l'attractive à la répulsive. J'appelle le premier passage *de cohésion*, & le second *de non-cohésion.* Quant au passage de la premiere espece, du moment qu'il s'y trouve deux points réunis, il les conserve si bien, que si on les en chasse de force, ils s'y rétablissent d'eux-mêmes. Pour celui de la seconde espece, il conservera ses points, tandis qu'on les laissera à leur place; mais pour peu qu'on les en fasse sortir, ils s'en écarteront d'eux-mêmes de plus en plus. Il en est de même ici : le fluide conserve l'équilibre que lui a donné la valeur positive de la formule; & si on l'en écarte, il y revient de lui-même. Quant à l'équilibre exprimé par une valeur négative, il se perd par le plus léger mouvement; dès qu'il est perdu il ne peut être recouvré par le fluide, il s'en éloigne même à l'infini. Concluons que cette derniere sorte d'équilibre ne paroît nullement propre à déterminer la figure de la Terre, dans l'hypothese de son mouvement diurne, ou dans celle du flux & du reflux de la mer.

Théorie de M. *Clairaut* sur le noyau elliptique.

214. C'est pourquoi si la Terre en tournant sur son axe, étoit un sphéroïde allongé, il vaudroit mieux se servir de la théorie de M. *Clairaut*, dans laquelle on suppose un noyau allongé & recouvert d'un fluide qui s'allonge lui-même ensuite, mais moins que le noyau; quoique M. d'*Alembert* paroisse avoir eu en vue cet endroit de M. *Clairaut*, lorsqu'après avoir déterminé l'allongement du fluide mis en équilibre sur un noyau sphérique de moindre densité, il conclut qu'on peut par ce moyen trouver cet allongement, même hors de l'hypothese d'un noyau solide allongé : car M. *Clairaut* avoit donné une formule générale pour la figure d'un fluide qui couvre un noyau elliptique; formule qui dans le cas d'un noyau sphérique & d'une petite hauteur du fluide, se réduit à celle de M. d'*Alembert* & à la mienne, laquelle, dans la supposition que le rapport de la densité du noyau à celle du fluide soit moindre que celui de 3 à 5, donne une valeur négative,

négative, d'où l'on conclut l'allongement de la figure (1).

215. M. *Clairaut*, dans son Livre *sur la figure de la Terre*, imprimé en 1743, propose au paragraphe 31 de la seconde partie, une formule générale pour l'ellipticité d'un fluide

Formule de M. *Clairaut*,

(1) M. d'*Alembert* faisant allusion à ce passage dans le premier volume de ses opuscules, page 246, opuscule VIII, n°. 1, s'exprime ainsi : » J'ai dit dans mes recherches sur la cause générale des vents, article 31, » page 42, que si la Terre eût été un sphéroïde allongé, il n'eût pas été » nécessaire d'avoir recours, pour expliquer ce phénomene, comme l'ont » fait quelques Auteurs, à un noyau allongé, & qu'il auroit pu se faire » qu'avec un noyau intérieur applati, la Terre eût été allongée vers les » pôles. Cette vérité est une suite nécessaire & immédiate des formules » que j'ai données au même endroit que je viens de citer. Cependant un » Géometre Italien, qui a du nom dans les mathématiques, l'a attaqué » par cette considération, que si le noyau intérieur étoit applati, & qu'on » dérangeât le fluide extérieur de son état d'équilibre, il n'y reviendroit » jamais, au lieu qu'il y reviendroit de lui-même si le noyau intérieur » étoit allongé; d'où il conclut que cette derniere hypothese est la seule » propre à rendre raison de l'équilibre.

» Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on » a faites jusqu'ici sur *la figure de la Terre*, il n'a jamais été question que » de l'état d'équilibre, & que jusqu'à ce Géometre on n'avoit encore pensé » à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état se rétablît » de lui-même : ainsi en partant de la maniere ordinaire d'envisager cette » question, je ne devois point, ou du moins je n'étois pas obligé à faire » entrer cette considération nouvelle dans mon calcul. Cependant à l'e- » xemple du Géometre dont je viens de parler, je vais y avoir égard, & » je prouverai qu'il n'est pas nécessaire dans cette hypothese même que le » sphéroïde intérieur soit allongé pour que la Terre le soit.

Pour remplir cet engagement, M. d'*Alembert* démontre que quelque puisse être la figure du noyau, la figure requise pour l'équilibre se rétablira ou ne se rétablira pas, suivant que le rapport de la densité du noyau à la densité du fluide qui le couvre sera plus grande ou moindre que $\frac{3}{5}$. Et après l'avoir démontré, il ajoute : » Ce n'est donc point la figure du » noyau intérieur, comme le Mathématicien dont nous avons parlé, » semble l'avoir cru, qui empêche que l'équilibre troublé ne se rétablisse, » ou qui contribue à le rétablir : c'est le rapport de la densité du fluide » extérieur à la densité du noyau.

Nous observerons ici en premier lieu que notre Auteur est Dalmate & de Raguse, non Italien : & c'est pour cela que M. *Mazucheli*, dans un ouvrage récent sur les Auteurs Italiens, n'en fait aucune mention. Cependant

qui couvre un noyau ſolide elliptique, & dont la denſité eſt homogêne, mais différente de celle du noyau. Il ſuppoſe le demi-diametre de la figure du fluide = 1, celui de la figure du noyau = a, l'ellipticité du noyau, ou l'excès du demi-diametre de l'équateur ſur le demi-axe diviſé par le demi-

---

vu le long ſéjour qu'il a fait en Italie depuis ſa premiere jeuneſſe, on peut en quelque ſorte le dire Italien. M. d'*Alembert* ſe contente ici de dire *qu'il a du nom dans les mathématiques* : dans un autre opuſcule poſtérieur, il parle du P. *Boſcovich* avec éloge, en diſant qu'il mérite la réputation dont il jouit ; mais pour ajouter qu'il a été tellement perſécuté par les Supérieurs de ſon Ordre, que toute l'autorité du Souverain Pontife a à peine ſuffi pour le délivrer de leurs pourſuites. Cependant on ſait très bien que le R. P. *Boſcovich* a toujours été conſidéré & reſpecté dans ſa Compagnie comme un de ſes plus dignes membres, & comme un homme du premier mérite à tous égards. Mais venons au point dont il eſt préſentement queſtion.

M. d'*Alembert* impute ici au P. *Boſcovich* de combattre une vérité qui ſuit néceſſairement de formules démontrées, & de croire une fauſſeté touchant la condition d'où dépend le rétabliſſement de la figure. De plus, il affirme pour la ſeconde fois que pour donner à la Terre une figure allongée, il n'eſt point néceſſaire de recourir à l'allongement du noyau. Afin que le lecteur puiſſe porter ſon jugement ſur tous ces points, nous expoſerons en peu de mots le point de la difficulté.

M. d'*Alembert* avoit déduit de la formule concernant la figure de la Terre un théorème qui a d'abord l'air d'un paradoxe, ſavoir qu'il pourroit y avoir équilibre dans le cas d'un fluide qui couvriroit un noyau de diverſe denſité tournant ſur ſon axe, non ſeulement de figure ſphérique, mais même applati, la figure du fluide étant cependant allongée ; à ſavoir dans le cas où le rapport de la denſité du noyau à celle du fluide ſeroit moindre que celui de 3 à 5. Or de là il avoit conclu que ſi la Terre étoit allongée vers les pôles, il ne ſeroit pas néceſſaire pour en rendre raiſon de recourir à un noyau allongé. Notre Auteur avoit auſſi trouvé, comme on le voit ici, par ſa méthode géométrique le même théorème pour le cas d'un noyau ſphérique, & il avoit fait voir que la formule de M. d'*Alembert* & la ſienne s'accordoient avec celle que M. *Clairaut* avoit trouvée avant l'un & l'autre. Or ayant examiné attentivement comment il pouvoit ſe faire que quoique la force centrifuge fût plus grande proche l'équateur que vers les pôles, ce qui ſemble ne pouvoir ſe concilier qu'avec l'applatiſſement de la figure, on eût néanmoins dans ce rapport de denſités l'équilibre avec une figure allongée, il en donne la raiſon dans cet ouvrage où il débrouille parfaitement toute cette énigme : mais en même tems il remarque qu'en ce

diametre de l'équateur $= a$, la denſité du fluide $= 1$, celle du noyau $= 1 + f$, le rapport de la force centrifuge à la gravité ſous l'équateur $= \phi$; & ſa formule générale pour l'ellipticité eſt $\frac{6a^5 f a + 5a^3 f\phi + 5\phi}{10a^3 f + 4}$.

---

cas on auroit à la vérité l'équilibre, mais un équilibre tel qu'étant dérangé par un petit changement dans la figure, la figure même ne ſeroit point rétablie, mais que le fluide s'en écarteroit de lui-même toujours de plus en plus, au point de la changer totalement. De là il a conclu que cette ſorte d'équilibre n'étoit point propre à expliquer la figure allongée de la Terre, ſuppoſé que la Terre fût en effet allongée : & il l'a conclu avec beaucoup de raiſon, car la Terre doit être ſtable au point que ſi une cauſe extérieure y occaſionne quelque léger changement, ſa figure ſe rétabliſſe d'elle-même ; ſans quoi le moindre vent ſuffiroit pour la détruire.

Voilà pour ce qui concerne le premier chef. Il s'enſuit à la vérité de la formule de M. d'*Alembert*, que dans le cas en queſtion il y a équilibre ; & notre Auteur, loin d'en diſconvenir, le confirme poſitivement au moyen d'une formule toute ſemblable qu'il a trouvée par une méthode très différente & beaucoup plus ſimple : mais ce dont il ne peut convenir avec M. d'*Alembert ;* ce qui ne ſuit nullement de cette formule, & ce qui n'eſt rien moins qu'une vérité, comme le prouve manifeſtement la raiſon que le P. *Boſcovich* en apporte, c'eſt que cet équilibre ſoit propre à expliquer la figure de la Terre, ce que M. d'*Alembert* avoit affirmé. Ainſi notre Auteur ne combat point ce qui ſuit néceſſairement d'une formule démontrée : il ne conclut point ce que M. d'*Alembert* lui impute, que l'hypotheſe d'un noyau allongé ſoit la ſeule propre à donner un équilibre quelconque, mais ſeulement l'équilibre requis pour la figure de la Terre.

Quant à ce que M. d'*Alembert* ajoute, que de tous ceux qui ont traité de la figure de la Terre, il ne s'en eſt trouvé aucun avant notre Auteur qui ait penſé à ajouter une pareille condition ; on peut répondre en premier lieu que c'eſt une choſe qui fait honneur au P. *Boſcovich* d'avoir été le premier à imaginer une condition qui eſt abſolument néceſſaire dans la matiere préſente. Tous auroient du l'ajouter comme lui pour réſoudre le problême en queſtion. Car pour déterminer la figure de la Terre, il faut lui ſuppoſer une figure ſtable & permanente, & non une figure qui puiſſe être détruite par le moindre ſouffle d'air. En ſecond lieu, on pourroit dire que ſi les Auteurs qui ont écrit avant le P. *Boſcovich* n'ont pas eu la penſée de tenir compte de cette condition, & que s'ils ſe ſont contentés de celles qui faiſoient naître l'équilibre, c'eſt que nous n'avons ſous les yeux d'autre eſpece d'équilibre que celui qui étant dérangé par

Réduite à celle de M. d'*Alembert* & à celle de l'Auteur.

216. Si le noyau eſt ſphérique, on a $\alpha = 0$, & le premier terme du numérateur s'évanouit. Si le fluide a peu de hauteur, on ſuppoſe $a = 1$, & la formule devient $\frac{5f\varphi + 5\varphi}{10f + 4}$. Subſtituez dans cette formule les valeurs correſpondantes dans la formule de M. d'*Alembert*, ſavoir $\frac{\varphi}{p}$ pour φ, $\frac{\Delta}{\delta}$ pour $\frac{1+f}{1}$, ou $\frac{\Delta}{\delta} - 1$ pour f, & r pour 1; le numérateur deviendra $\frac{\varphi r}{p}\left(\frac{5\Delta}{\delta} - 5 + 5\right) = \frac{\varphi r}{p} \times \frac{5\Delta}{\delta}$, & le dénominateur $\frac{10\Delta}{\delta} - 6$. On aura donc la formule $\frac{\varphi r}{p} \times \frac{5\Delta}{10\Delta - 6\delta} = \frac{\varphi r}{p} \times \frac{1}{2 - \frac{6\delta}{5\Delta}}$

---

quelque cauſe extérieure, ſe rétablit de lui-même, comme on le voit dans une balance; & que cette autre ſorte d'équilibre, où la figure ne ſe rétablit point, ne ſe préſente pas ſi aiſément à l'eſprit. Notre Auteur l'avoit trouvé en traitant de ſa théorie des forces. On voit dans cette théorie que les diſtances allant toujours en augmentant, ſi l'on paſſe de la force répulſive à l'attractive, on a l'équilibre du premier genre, & que ſi on paſſe au contraire de l'attractive à la répulſive, on a celui du ſecond. C'eſt à dire que ſi deux points qui ſe trouvent dans l'équilibre du premier genre, en ſont écartés par quelque force extérieure, ils y reviennent d'eux-mêmes; au lieu que dans le ſecond genre d'équilibre, s'ils viennent à perdre leur poſition, ils s'en écartent d'eux mêmes de plus en plus. Voilà probablement (& l'Auteur ſemble lui-même le faire entendre au n°. précédent) ce qui a ſuggéré au P. *Boſcovich* l'idée d'ajouter cette condition à l'équilibre ſimplement dit, afin de le rendre par-là même un équilibre du premier genre, qui étant troublé ſe rétablit, loin de ſe déranger de plus en plus. Mais de ce que le P. *Boſcovich* a été le premier à imaginer une pareille condition; il ne s'enſuit nullement que cette condition ne ſoit pas néceſſaire, ni qu'on puiſſe ſans elle trouver ce qui eſt requis par la figure de la Terre.

Enfin quant à ce que M. d'*Alembert* ajoute, que le rétabliſſement de la figure dépend de ce rapport des forces & non de la figure allongée du noyau; il eſt vrai que la figure ſe rétablit ſi ce rapport de denſité eſt plus grand que $\frac{3}{5}$; au lieu que s'il eſt plus petit, elle ne ſe rétablit point, quelque ſoit la figure du noyau; mais il eſt également conſtant par cette formule même, que le rapport de l'axe au diametre de l'équateur eſt dans le premier cas moindre dans le fluide que dans le noyau,

$= \frac{\varphi r}{2p\left(1 - \frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$, qui eſt entierement conforme à celle de M. d'*Alembert* & la mienne.

217. L'hypotheſe d'un noyau elliptique ſert à concilier la rotation, non ſeulement avec l'allongement de la figure, mais encore avec un applatiſſement quelconque, & une différence abſolue quelconque de gravité pour des latitudes différentes. C'eſt ce qu'il faudroit développer maintenant, & de la maniere que je me ſuis propoſée d'abord, c'eſt-à-dire en n'y employant que la ſimple Géométrie. Mais comme un noyau ſphérique peut auſſi ſe concilier avec l'allongement du pendule, ainſi que nous le verrons bientôt, & qu'on connoît par la comparaiſon des dégrés que le globe terreſtre n'eſt point elliptique, ni d'une figure entierement réguliere : je n'entrerai point ici dans cette diſcuſſion, & je me bornerai à traiter de

On ſe borne ici à traiter de la gravité, & pourquoi. Pl. IV. fig. 21.

& que dans le ſecond cas il ſera plus grand : d'où il s'enſuit que ſi le noyau eſt ſphérique, & à plus forte raiſon s'il eſt applati, on ne peut, avec un mouvement de rotation joint à l'allongement du fluide, trouver l'équibre, à moins que ce rapport ne ſoit moindre que $\frac{3}{5}$. Ainſi par-là même que dans ce rapport on a l'équilibre, non du premier, mais du ſecond genre, on ne peut avoir un équilibre qui ſe concilie avec le rétabliſſement de la figure, à moins que le noyau ne ſoit allongé. Notre Auteur ne dit nulle part que le rétabliſſement de la figure dépende immédiatement de la figure de ce noyau, non de ce rapport. Il dit que ce rétabliſſement, dans le cas dont il s'agit, eſt auſſi lié avec l'allongement du noyau ; ce qui eſt conſtant : car ſans l'allongement du noyau, le fluide allongé ne ſera point en équilibre, à moins que le rapport des denſités ne ſoit moindre que $\frac{3}{5}$: or ce rapport ne donne qu'un équilibre, ou la figure ne ſe rétablit point. Donc ſans l'allongement du noyau on ne peut avoir cet équilibre qui eſt joint au rétabliſſement de la figure. Le rétabliſſement de la figure dépend à la vérité de ce rapport ; mais ce rapport eſt lié avec l'allongement du noyau dans le cas où la figure du fluide doit être allongée. Ainſi notre Auteur n'affirme ni ne ſuppoſe rien ici que de très vrai ; & tout ce que M. d'*Alembert* a trouvé après la recherche qu'il a dit vouloir faire à ſon exemple, ne prouve point ce qu'il s'étoit engagé de prouver, à ſavoir qu'*il n'eſt pas néceſſaire dans cette hypotheſe même que le ſphéroïde intérieur ſoit allongé pour que la Terre le ſoit.*

la gravité ſuivant les hypotheſes expliquées ci-deſſus. Si le fluide eſt homogêne au noyau, l'augmentation de la gravité depuis l'équateur juſqu'au pôle, ſera par le n. 174 en raiſon doublée du ſinus de la latitude, & la même choſe arrivera dans le cas d'hétérogénéité. Car il eſt démontré en général que ſi une grandeur quelconque D augmente ou diminue d'une petite quantité; celle dont augmentera ou diminuera la puiſſance D^m ſera exprimée par la puiſſance $m D^{m-1}$ multipliée par cette petite quantité. D'où il ſuit que D étant à peu près conſtant, le changement de cette puiſſance ſera dans la même raiſon que celui de la quantité ſimple. Or dans la ſeconde hypotheſe qui demande une ellipſe parfaite, le total de la gravité à la ſuperficie, par le n. 134, eſt en raiſon de la normale, ou de la perpendiculaire à la ſurface terminée par l'axe, ou en raiſon inverſe de la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur la tangente, c'eſt-à-dire à peu près en raiſon inverſe de la diſtance. De plus, il n'y a que la peſanteur ſur la maſſe placée au centre, qui dans cette hypotheſe ſoit en raiſon directe de la diſtance: celle qui prend ſa place, lorſqu'on paſſe de la ſeconde hypotheſe à la premiere, eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. Ainſi la différence de ces forces eſt dans la même raiſon que la différence des diſtances, c'eſt-à-dire en raiſon doublée du ſinus de la latitude. On a donc ce rapport dans la premiere hypotheſe auſſi bien que dans la ſeconde. A l'égard des petites quantités ſurajoutées AM, Tt, elles ne peuvent apporter ici aucune différence ſenſible, & on peut les négliger.

Formule pour la différence de gravité.

218. La différence des deux cas d'homogénéité & d'hétérogénéité, conſiſte dans la différence abſolue de la gravité ſous l'équateur à la gravité ſous les pôles. La gravité primitive ſous l'équateur, ſuivant le n. 155, eſt à ſa différence par défaut à la gravité ſous le pôle d'un ſphéroïde applati & homogêne, comme CA, ou ce qui en approche beaucoup, comme CE eſt à $\frac{1}{5}$ AE. Soit donc CE $= r$, AE $= x$, la gravité abſolue ſous l'équateur $= m$, la force centrifuge $= n$; la différence des gravités ſous l'équateur, & le pôle ſera $\frac{mx}{5r} + n$. Or par le n. 158, $x = \frac{5nr}{4m}$. Donc cette différence

est $\frac{1}{4}n + n = \frac{5}{4}n$. Soit encore le sinus de la latitude $= s$, & le rayon $= 1$; l'excès de la gravité sur celle de l'équateur sera par-tout en raison du quarré de ce sinus. Donc dans cette hypothese d'homogénéité, la différence de la gravité à celle de l'équateur sera par-rout $\frac{5}{4}n s^2$.

Pour la seconde hypothese.

219. Si les couches sont hétérogênes entre elles, & que la masse du centre agisse dans la seconde hypothese en raison directe des distances; soit la densité de la masse du centre à celle du reste de la masse en raison de q à t, & $t + q = p$, comme ci-dessus (1); on aura par le n. 199 l'analogie suivante: r est à $\frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$, ou substituant pour q sa valeur $p - t$, r est à $\frac{tx}{5p} - x + \frac{tx}{p} + \frac{nr}{m}$, comme la gravité m est à la différence de la gravité, qui sera $\frac{6mtx}{5pr} - \frac{mx}{r} + n$. Or par le n. 199, $x = \frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$. Donc par la substitution de cette valeur de x, la différence de la gravité sera $\frac{3tn}{5p\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)} - \frac{n}{2\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)} + n$, ou bien $\frac{6tn}{10p - 6t} - \frac{5pn}{10p - 6t} + \frac{10pn - 6tn}{10p - 6t} = \frac{5np}{10p - 6t} = \frac{n}{2\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$, dans laquelle le rapport de t à p est celui de la densité de nos mers à la moyenne densité de la Terre.

Pour la premiere hypothese. Pl. IV. fig. 21.

220. Mais dans la premiere hypothese, où la masse du centre agit en raison inverse des quarrés des distances, la différence des gravités sera plus considérable. Car des trois différences de forces que nous venons de prendre du n. 199 pour former la premiere analogie, la premiere différence $\frac{tx}{5p}$, qui agit sur le sphéroïde homogêne, & la troisieme, qui est celle de la force centrifuge, demeurent absolument les mêmes lorsqu'on

(1) N°. 196.

passe de la seconde hypothese à la premiere; mais la seconde, savoir $\frac{-qx}{p}$, qui a rapport à la masse du centre, & qui est exprimée dans la figure 21 par la petite ligne HI, se change en $\frac{2qx}{p}$ exprimée dans la même figure par la petite ligne HL double de HI, & prise de l'autre côté du point H. Donc pour avoir une formule de différence de gravité pour la premiere hypothese, il n'y aura d'autre changement à faire à la formule précédente $\frac{5pn}{10p-6t}$, que d'en retrancher $-\frac{mqx}{rp}$, & d'y ajouter $\frac{2mqx}{rp}$, ou ce qui est le même, d'y ajouter $\frac{3mqx}{rp}$. Or $\frac{5np}{10p-6t} = \frac{5n}{2} \times \frac{p}{5p-3t}$, & parceque $x = \frac{nr}{2m\left(1-\frac{3t}{5p}\right)} = \frac{5pnr}{2m(5p-3t)}$, on aura $\frac{3mqx}{rp} = \frac{3q}{p} \times \frac{5pn}{2(5p-3t)} = \frac{5n}{2} \times \frac{3q}{5p-3t} = \frac{5n}{2} \times \frac{3p-3t}{5p-3t}$. Cette formule sera donc $\frac{5n}{2} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$.

Théorèmes remarquables tirés de cette formule.

221. Ceci nous conduit à un très beau théorème que M. *Clairaut* a trouvé par une méthode fort différente de la nôtre, & qui fait voir l'admirable liaison de mes deux hypotheses, lesquelles se ressemblent pour la figure qu'elles donnent, mais qui pour la différence absolue de la gravité sont elles-mêmes fort différentes. Prenez le rapport de la différence trouvée à la gravité totale m, lequel sera $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$; ajoutez-y l'ellipticité $\frac{x}{r}$, ou bien $\frac{5pn}{2m(5p-3t)} = \frac{5n}{2m} \times \frac{p}{5p-3t}$, pour avoir $\frac{5n}{2m} \times \frac{5p-3t}{5p-3t} = \frac{5n}{2m}$. Nous avons vu que l'ellipticité pour le cas d'homogénéité est $\frac{5n}{4m}$. Donc le double de l'ellipticité dans le cas d'homogénéité est égal à une fraction qui exprime le rapport de la différence des gravités sous l'équateur & le pôle à la gravité totale, plus l'ellipticité qu'auroit la Terre si elle étoit homogêne à égales distances du centre; & l'on aura cette derniere ellipticité en ôtant ce rapport du double de l'ellipticité

l'ellipticité pour le cas d'homogénéité, c'eſt à-dire de $\frac{1}{115}$. Car cette ellipticité, comme nous l'avons vu (n. 159), eſt $\frac{1}{230}$ du demi-axe; & le double de $\frac{1}{230}$ eſt $\frac{1}{115}$.

Autre Théorème qu'on en déduit.

222. Or dans ma premiere hypotheſe, l'ellipticité n'eſt autre choſe que cette différence même des gravités, diviſée par la gravité totale, puiſque par le n. 121, les forces totales aux extrémités des demi-axes, ſont en raiſon inverſe des demi-axes, quoique les denſités nous fourniſſent une autre expreſſion de cette différence de gravité. D'où il ſuit que ſi on appelle ellipticité de la ſeconde hypotheſe, celle qu'on tire de la différence des gravités déterminée par les obſervations; & ellipticité de la premiere hypotheſe, cette premiere ellipticité qui répond à un noyau également denſe à égales diſtances du centre; on aura ce beau théorème: *l'ellipticité, dans le cas d'homogénéité, eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les ellipticités de ces deux hypotheſes.*

Uſage des obſervations du pendule.

223. On ſait de plus que les obſervations du pendule, faites en divers lieux, peuvent ſervir à déterminer la figure de la Terre, & à connoître la nature de la gravité primitive, ſuppoſé que la Terre ſoit homogêne à égales diſtances du centre. Car c'eſt un principe reconnu, que la longueur des pendules iſochrones eſt en raiſon de la gravité. Donc ſi les allongemens du pendule depuis l'équateur juſqu'au pôle, ne ſont pas dans la même raiſon que les quarrés des ſinus de la latitude; ou l'hypotheſe de gravité établie par *Newton* manque de juſteſſe, ou la Terre n'eſt pas homogêne, & dans ce cas les couches concentriques ne ſont point homogênes, la gravité ne ſe dirige point à un centre donné, de telle ſorte qu'elle ſoit conſtante, ou en raiſon de la diſtance au centre; car dans ces hypotheſes, le pendule iſochrone doit s'allonger conſtamment ſuivant ce rapport.

On en tire l'ellipticité.

224. Si la longueur du pendule augmente dans cette proportion, & que les couches concentriques ſoient homogênes & peſent dans le ſens de *Newton*, on pourra avec deux obſervations du pendule, faites l'une ſous l'équateur, l'autre dans un lieu conſidérablement moins éloigné du pôle, déterminer par la méthode expoſée (n. 220) l'ellipticité de la Terre. Car on a cette analogie: comme le quarré du ſinus de la latitude du

lieu eſt au quarré du rayon, ou bien comme la moitié du ſinus verſe d'une latitude double eſt au rayon, ainſi la différence de la longueur du pendule au lieu donné, & de ſa longueur ſous l'équateur, eſt à un quatrieme terme qui ſera la différence de la longueur du pendule ſous le pôle; puiſque le rayon eſt le ſinus de la latitude de 90°, & le diametre le ſinus verſe d'une latitude double. Diviſez cette différence par toute la longueur du pendule, pour avoir l'ellipticité dans la ſeconde hypotheſe. Retranchez cette ellipticité de $\frac{1}{115}$, & vous aurez l'ellipticité cherchée pour le cas d'une Terre homogêne à égales diſtances du centre, & aſſujettie à la gravité newtonienne.

Formule pour le rapport de la denſité.

225. On peut encore, par les obſervations de la longueur du pendule, déterminer le rapport des denſités en ſe ſervant de la formule $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, qui exprime la différence de la gravité ſous l'équateur & le pôle. Soit h la différence trouvée dans la longueur du pendule pour les deux lieux en queſtion, & l toute la longueur du pendule; on aura $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{h}{l}$. Donc $\frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{2mh}{5nl}$, ou $20npl - 15ntl = 10mph - 6mth$, ou $20npl - 10mph = 15ntl - 6mth$. D'où l'on tire la formule $\frac{t}{p} = \frac{20nl-10mh}{15nl-6mh}$, qui ſe réduit à l'unité, & fait voir que la denſité du fluide eſt égale à celle du noyau, lorſqu'on a $20nl - 10mh = 15nl - 6mh$, ou $5nl = 4mh$, ou $\frac{h}{l} = \frac{5n}{4m}$, qui dans ce cas repréſente l'ellipticité & le rapport de la différence des gravités à la gravité.

Comparaiſon de la gravité à l'ellipticité.

226. Il ne ſera pas plus difficile d'en conclure, pour le cas d'un léger applatiſſement, que ſi les gravités au pôle & à l'équateur different plus que de $\frac{1}{230}$ (différence requiſe pour l'homogénéité), la denſité ſera plus grande vers le centre dans la premiere hypotheſe, & l'ellipticité plus petite. Car dans la formule $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, le terme $5p$ ſurpaſſera de beaucoup

$3t$; d'où il suit que $4p - 3t$ sera une quantité positive. A mesure que p augmentera, le numérateur & le dénominateur iront toujours en croissant; mais parcequ'on retranche toujours de l'un & de l'autre la même quantité $3t$, le rapport du premier au second augmentera toujours, & par conséquent aussi le rapport de la différence de la gravité à la gravité totale, exprimé par cette formule, laquelle étant soustraite de $\frac{1}{115}$, l'ellipticité ira en diminuant.

Hypothese pour un allongement irrégulier du pendule. Pl. IV. fig. 2.

227. Si l'allongement du pendule depuis l'équateur jusqu'au pôle ne suit pas la raison doublée des sinus de la latitude, mais un autre rapport quelconque, on pourra trouver une hypothese de gravité dirigée au centre, qui s'accorde avec cette nouvelle proportion; & on la trouvera fort aisément dans la figure 2, si la force centrifuge est assez peu considérable par rapport à la gravité sous l'équateur, dans le sens que je l'ai expliqué (n. 73). Car ayant formé un angle quelconque FRB & coupé FK de telle grandeur qu'on ait FK : FC :: $\frac{1}{2}$ Fr : FV: ensuite ayant mené Ks parallele à FV, qui rencontrera Cr au point s, il suffira de prendre sQ telle qu'elle ait à RV le même rapport que la longueur du pendule, ou la gravité sous l'équateur à la longueur du pendule, ou à la gravité dans une latitude mesurée par un angle très approchant de celui de FRB. Car la courbe qui passera par tous les points Q déterminera l'hypothese de gravité qui répond à la nouvelle proportion. On trouvera encore ici que l'applatissement est au demi-diametre de l'équateur, comme la moitié de la force centrifuge sous l'équateur est à la gravité; & la diminution de la distance sera à très peu près en raison doublée du sinus de la latitude.

Pour la différence de la gravité dans la même latitude.

228. Or dans tous ces cas, & la gravité primitive & la gravité absolue devront être les mêmes dans des latitudes égales, quelque différence qu'il y ait dans les longitudes. Car la figure du fluide doit être un sphéroïde engendré par la révolution d'une courbe autour de son axe; tous les cercles décrits par chaque point de cette courbe seront exactement paralleles entre eux; & la gravité dans chaque parallele constamment la même. Mais s'il arrive qu'à différentes longitudes, quoique dans la même latitude, la gravité soit différente, pour lors

il ne pourra abſolument ſe faire que la gravité primitive ſoit dirigée à un centre unique; mais il y aura ſouvent moyen de concilier cette inégalité avec l'équilibre dans l'hypotheſe de la gravitation générale, pourvu que la différence de denſité ſuive celle de la gravité; c'eſt-à-dire ſi la denſité change, même à égales diſtances du centre, dans un rapport conſtant ou totalement irrégulier, ſelon que la gravité changera dans un rapport conſtant ou totalement irrégulier, à différentes longitudes ou latitudes.

On ſe borne à traiter quelques articles.

229. Si l'on fait varier conſidérablement la denſité, quoiqu'à égales diſtances du centre, & qu'on lui faſſe ſuivre certain rapport, ou qu'on donne certaine figure au noyau, on aura autant de différentes figures de la Terre, autant de variations différentes de la gravité; mais le détail en ſeroit trop long, & d'ailleurs ces hypotheſes arbitraires n'auroient aucune application. Je ne m'arrêterai donc point à tout cela, & je me contenterai d'ajouter ici quelques articles qui ont rapport à des inégalités de denſité & à des irrégularités de figure, qui très probablement exiſtent dans la nature; articles qui ſerviront à éclaircir ce qui nous reſte à dire dans ce chapitre, & dont nous ferons encore uſage dans le chapitre ſuivant.

Action d'un globe ſur le fil à plomb, & différence de gravité. Pl. IV. fig. 22.

230. Soit (fig. 22) une Terre BAD de figure ſphérique & homogêne à égales diſtances du centre. Repréſentons-nous à ſa ſuperficie un globe E, dont le demi-diametre ſoit de mille pas géographiques, ou la ſoixantieme partie d'un dégré moyen d'un grand cercle. Le poids ſuſpendu en F ſeroit dirigé par FG au centre C de la Terre, s'il n'étoit attiré par ce globe. Mais la force attractive du globe détournera ſa direction en FI, de telle ſorte qu'ayant abaiſſé ſur FC la perpendiculaire IG, IG ſoit à FG comme la gravitation du poids ſur le globe à ſa gravitation ſur la Terre. Or ſuivant ce qui a été démontré par *Newton*, ce rapport eſt le même que celui du demi diametre du globe au demi-diametre de la Terre. On peut donc de ceci déduire deux choſes, premierement l'angle IFG de la déviation du pendule, en ſecond lieu, l'augmentation de la gravité FI ſur FG.

231. A l'égard du premier article, on aura cette proportion: comme le demi-diametre de la Terre, qui eſt à peu

près de 3438 milles géographiques, est au demi-diametre du globe E, qui est de 1 mille, ainsi FG est à GI; ou bien, ainsi le rayon 100000 est à la tangente de l'angle cherché GFI, qu'on trouvera égale au nombre 29, lequel répond à la tangente d'une minute. Ainsi le pendule sera détourné par cette masse, & l'angle de sa déviation sera d'une minute. Mais un globe plus grand ou plus petit, plus ou moins dense, pourvu toutefois qu'il soit toujours très petit en comparaison de la masse de la Terre, afin que la déviation soit elle-même très petite & proportionnelle à sa tangente; ce globe, dis-je, détournera plus ou moins le pendule, suivant le rapport de l'augmentation ou de la diminution de son diametre ou de sa densité, & moins à une plus grande distance du petit globe, en raison inverse du quarré de la distance à son centre.

Calcul pour la déviation du fil à plomb.

232. Pour ce qui est de l'augmentation de la gravité, elle est à la gravité totale, comme la différence de FG & FI est à FG. Cette différence, suivant ce qui a été démontré dans le quatrieme Livre (n. 349), est à peu près la troisieme proportionnelle au double de FG & à GI. Elle sera donc $\frac{29 \times 29}{200000} = \frac{841}{200000}$, moindre que $\frac{1}{200}$. Donc le rapport de la gravité totale à l'accroissement de la gravité sera plus grand que celui de 100000 à $\frac{1}{200}$, ou de 20000000 à 1; par où l'on voit que cet accroissement est insensible.

L'augmentation de la gravité n'est pas sensible.

233. Mais si ce globe étoit sous le point G & sur la ligne FC, ensorte que se trouvant placé au-dessous de la superficie, il augmentât d'autant plus la densité dans l'espace qu'il occuperoit, en ce cas la déviation du pendule seroit nulle, & l'augmentation de la gravité seroit à la gravité totale, comme 1 à 3438. Cette augmentation dans un pendule à secondes n'est point à négliger. Car suivant le n. 68, la longueur du pendule sous l'équateur, où elle est moindre qu'en aucun autre endroit, est presque de 440 lignes. D'où il suit que le pendule se trouveroit trop court de plus de $\frac{1}{8}$ de ligne, & que s'il y avoit au-dessous de la surface une masse huit fois plus dense, ou d'un demi-diametre huit fois plus grand, le pendule seroit trop court d'une ligne entiere.

Cas où le globe est au-dessous du fil à plomb.

Autres positions & distances diverses du globe.

234. Si le globe parcourt un quart-de-cercle de A en E, la déviation ira toujours en augmentant, & le raccourciſſement du pendule en diminuant; & il produira ces deux effets à une petite diſtance du pendule. Car ſi ce pendule n'étoit éloigné du globe que de dix milles, il devroit encore en éprouver un effet cent fois moindre. Il eſt de plus évident que ſi ce globe eſt placé au-deſſous & fort près de la ſurface, & que le pendule ne ſoit point directement au-deſſus de lui, mais à côté, la gravité augmentera à peine de quelque choſe, mais que la déviation du pendule ſera encore fort conſidérable; & que le même effet ſera produit par une cavité qui ſe trouvera proche la ſurface de la Terre, & du côté oppoſé, puiſque la matiere manquera de ce côté-là, & que de ce même côté la gravité ſera moindre qu'elle ne ſeroit ſans cette cavité. Si le globe eſt enfoncé beaucoup plus avant dans la Terre, il attirera beaucoup moins de côté le poids placé en F; par conſéquent il augmentera plus la gravité qu'il n'en détournera la direction. Mais pour produire le même effet, il lui faudra un diametre, ou une denſité plus grande en raiſon doublée de la nouvelle diſtance du centre, puiſque la peſanteur de chaque partie décroît en raiſon inverſe du quarré de la diſtance.

Accroiſſement de la gravité comparé à la déviation du pendule.

235. On voit encore que l'accroiſſement de la gravité, lequel augmente la longueur du pendule à ſecondes, devra, dans la ſituation qui lui eſt la plus favorable, cauſer beaucoup moins de dérangement dans la ſuite des longueurs du pendule, que n'en cauſe dans la ſuite des dégrés la déviation d'un pendule immobile, dans la ſituation la plus favorable à la déviation. Car cette maſſe qui, comme nous venons de le voir, augmenteroit la longueur du pendule de $\frac{1}{8}$ de ligne, ce qui ne revient pas à $\frac{1}{3500}$ du tout, le pendule ayant près de 439 lignes, cette maſſe, dis-je, produit une déviation d'une minute, qui fait la ſoixantieme partie d'un dégré; d'où il ſuit que ſi on ne meſure qu'un dégré à la fois, l'erreur eſt de $\frac{1}{60}$ de dégré, c'eſt-à-dire de près de 950 toiſes; erreur qui ſurpaſſe de beaucoup la différence qu'on a trouvée entre les dégrés du méridien ſous l'équateur & le cercle polaire. Que ſi l'on en meſure trois à la fois, l'erreur eſt encore de $\frac{1}{180}$ de dégré,

ou de plus de 310 toises, erreur encore excessive.

Effet de la différence de densité.

236. Il est visible (& ceci mérite aussi d'être bien remarqué) que tous ces inconvéniens sont beaucoup moindres, si la Terre est beaucoup plus dense vers le centre que proche la superficie; mais qu'ils sont aussi beaucoup plus grands si elle l'est moins, & plus encore si son noyau est vuide. Si les endroits voisins de la surface sont plus denses vers le pôle que sous l'équateur, il suit de ce que nous venons de démontrer, que cela doit encore diminuer la gravité sous l'équateur; & une densité deux fois plus grande sous les pôles, & de 8 milles de profondeur, produiroit seule dans la longueur du pendule à secondes une différence d'une ligne.

Densité au pôle & à l'équateur;

237. *Newton* a cru que la densité devoit plutôt prévaloir sous l'équateur, à cause que la Terre y est desséchée par les ardeurs du soleil. Je pense au contraire que le froid & la chaleur doivent produire dans la Terre le même effet qu'ils produisent dans tant d'autres corps que la chaleur dilate & que le froid condense; & que par cette raison même la densité doit plutôt être moindre sous l'équateur que vers les pôles. Mais la chaleur & le froid extérieurs ne pénetrent pas assez avant dans la Terre pour pouvoir produire de part ni d'autre un effet sensible.

Dans l'intérieur de la Terre.

238. Une observation qui semble marquer un excès de densité dans les parties internes de la Terre, c'est celle de MM. *de la Condamine* & *Bouguer*, par laquelle ils ont trouvé de 7 secondes l'effet de l'attraction d'une grande montagne d'Amérique sur le fil à plomb; déviation peu considérable, & qui dans un quart-de-cercle aussi petit que le leur, étoit à peine sensible; mais qui auroit du être bien plus grande, eu égard à la grosseur de la montagne, si la densité de sa masse eût égalé la moyenne densité de la Terre. Mais les montagnes se forment, je pense, pour la plupart par l'effet d'une chaleur interne qui souleve les couches de la Terre les plus proches de la surface; & s'il en est ainsi, cette élévation n'ajoute aucune nouvelle matiere, & le vuide renfermé dans l'intérieur de la montagne compense la masse qui le couvre.

239. Je croirois volontiers que la déviation du pendule pourroit être beaucoup plus considérable sur un terrein qui

Effet d'une couche de terre d'une certaine grandeur.

va toujours en s'élevant dans une grande étendue de pays, (tel que l'Italie qui s'éleve continuellement d'une mer à l'autre, de la mer de Toscane à la mer Adriatique), qu'auprès d'une montagne qui s'éleve en forme de cône. Il arrivera même dans le premier cas qu'une hauteur beaucoup moindre sera plus que suffisante pour produire un grand effet. Dans une Dissertation que je publiai en 1742 sur les observations astronomiques, je propose au n. 21 un problême où il est question de trouver l'attraction qu'éprouve un corpuscule placé au centre d'une sphere, d'une couche de cette sphere, terminée par sa surface & par trois plans, dont les deux premiers, l'un vertical, l'autre horizontal, passent par le centre, & le troisieme est parallele au plan horizontal, & placé à une distance donnée de ce plan. Supposé que la gravité de chaque partie soit exprimée par sa masse divisée par le quarré de la distance, ensorte que le rapport du rayon à la circonférence étant $\frac{1}{c}$, l'attraction d'un corpuscule placé à la surface d'une sphere, dont le rayon est r, soit $\frac{2}{3}cr$, suivant le n. 154; si l'on fait le rayon de la couche sphérique proposée $= m$, la distance des deux plans horizontaux $= 1$, laquelle doit être assez petite par rapport à m, pour pouvoir négliger les termes divisés par m^2, m^4, &c. je trouve l'attraction $= 2$ log. de $m + 2.96$. Or je trouve de là pour une hauteur de 50 pieds ou de dix pas, dont le demi-diametre de la terre en contienne 4000000, qui est à peu près le nombre de pieds (mesure de *Paris*) contenu dans le demi-diametre de la Terre, de sorte qu'il contienne 400000 dixaines de pas, & pour une distance m de 100 milles, ensorte que l'on ait $m = 10000$ dixaines de pas, je trouve, dis-je, que la gravité $\frac{2}{3}cr$ est à l'attraction sur cette couche, comme 10000000 à 128, qui est le rapport du rayon à la tangente de $2'', 38'''$; & telle seroit l'aberration du pendule qui seroit placé auprès de cette couche, si sa densité étoit égale à la moyenne densité de la Terre.

Que cet effet est à peu près en raison de l'épaisseur de la couche.

240. Il est encore à observer que quoiqu'on augmente ou qu'on diminue notablement le rayon de la sphere, d'où est prise cette couche, on changera à peine le logarithme de l'attraction, si m exprime un grand nombre, puisque les logarithmes

rithmes des grands nombres changent peu, d'où il suit que la valeur de la formule sera presque la même ; mais que si l'on augmente ou diminue l'épaisseur de la couche, cette valeur change presque dans la même raison ; & que si l'on change enfin la densité moyenne de la Terre, sans toucher à celle de la couche, la valeur changera en raison inverse de la densité changée.

Effet d'une couche de terre qui va en s'élevant.

241. Or il suit de là qu'un terrein qui va toujours en s'élevant dans un espace de 100 milles, & à la hauteur de 100 pas, comme il arrive en plusieurs endroits, produit une déviation de 20″, 280‴ = 24″, 40‴ ; & s'il s'élevoit à la hauteur de 1000 pas la déviation seroit de plus de 4 minutes.

Déterminer la moyenne densité de la Terre.

242. J'ai déduit de là au même endroit de ma Dissertation une méthode pour connoître le rapport de la moyenne densité de la Terre à la densité de l'eau. Si dans quelqu'endroit de la Manche, où la marée s'éleve quelquefois à 50 pieds de hauteur, il y avoit au bord de la mer une tour où l'on eût placé un long pendule ; dès qu'à marée haute une couche d'eau de 50 pieds d'épaisseur & de plusieurs milles d'étendue, auroit pris la place de la couche d'air, elle devroit un peu attirer à soi le pendule, & le microscope rendroit ce mouvement très sensible. Si la déviation étoit d'environ deux secondes, on en concluroit que la moyenne densité de la Terre est égale à la densité de l'eau, & que l'excès de densité des marbres & des métaux est compensée par les concavités de la Terre : si elle étoit plus grande ou plus petite, le rapport de densité seroit plus petit ou plus grand. Je ne connois point de méthode plus propre à donner une estimation de la quantité de matiere qui compose le globe terrestre ; je doute même qu'on en ait jamais proposé d'autre qui valût celle-ci.

Irrégularité de tissure proche la superficie.

243. Mais laissons ce point, & revenons à notre sujet. Il est clair qu'on trouve par-tout plusieurs inégalités proche la superficie de la Terre, des sols plus élevés les uns que les autres, des cavernes ouvertes ou fermées, des montagnes, des mines ou autres choses semblables, dont il paroît que l'action peut égaler celle d'un globe de mille pas de rayon. Ainsi l'on ne doit point compter que l'allongement du pendule de l'équateur au pôle, suive une progression si réguliere,

qu'il ne s'écarte de quelques centiemes de ligne de l'augmentation proportionnelle au ſinus verſe d'une latitude double; & l'on ne doit point ſe flatter non plus de pouvoir éviter toutes les déviations du pendule qui répandent encore bien plus de confuſion dans la meſure des dégrés.

Même ſujet.

244. Ceci peut encore ſervir de démonſtration pour pluſieurs points propoſés dans le premier Livre (n. 46 & ſuiv.), & fournit une méthode pour connoître la figure & la denſité de la Terre par les obſervations du pendule à ſecondes, dont la longueur, ainſi que nous l'avons déja remarqué, eſt proportionnelle à la gravité.

Choix des obſervations ſur la longueur du pendule.

245. On trouve dans pluſieurs Auteurs des obſervations de la longueur du pendule à ſecondes; M. *de Bremond* en a recueilli une aſſez longue ſuite dans les notes qu'il a ajoutées à ſa traduction des *Tranſactions philoſophiques*. Mais pluſieurs de ces obſervations ont été faites avec très peu d'exactitude. La plupart n'ont été faites ni avec les ſoins néceſſaires, ni avec des inſtrumens auſſi parfaits que ceux dont on ſe ſert aujourd'hui. De ce grand nombre d'obſervations, je n'en choiſirai que cinq, dont les quatre premieres ſe trouvent dans le Livre de M. *Bouguer* ſur la figure de la Terre (p. 342) avec les corrections qu'y a faites l'Auteur pour le retardement de l'air, en les réduiſant à des obſervations faites dans le vuide, & pour l'inégalité de la chaleur. Je tire la cinquieme des précédentes, & de la différence de $59''$ que M. *de Maupertuis* a trouvée ſur 24 heures, dans un pendule de *Graham*, à *Pello* dans la Laponie, & à *Paris*; d'où l'on conclut que le rapport des gravités pour ces lieux, eſt celui de 100137 à 100000; ce qui donne cette proportion: comme 100000 eſt à 137; ainſi la longueur du pendule à *Paris* dans le vuide, qui, ſelon M. *Bouguer*, eſt de 440.67 lignes à un quatrieme terme qu'on trouvera de 0.60, qui, ajouté à la longueur du pendule de *Paris*, donne pour ſa longueur à *Pello* 441.27.

Obſervations du pendule à *Rome*.

246. Nous fîmes enſemble le mois dernier, M. *de la Condamine* & moi, pluſieurs obſervations ſur la longueur du pendule au college romain, avec le même pendule qui lui a ſervi en Amérique, puis à M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Eſpérance. Mais M. *de la Condamine* n'ayant pas apporté

avec lui son Mémoire, & n'ayant point encore publié le nombre précis d'oscillations qu'il a trouvé dans ce pendule tant à *Paris* qu'en Amérique, & qu'il publiera dans la suite avec bon nombre d'autres observations de sa façon ; je ne puis comparer pour le présent ces gravités avec celles de *Paris*, & de la ligne équinoxiale, ni déterminer exactement pour ces lieux la longueur du pendule. Je n'entrerai donc point ici dans le détail de ces observations que je donnerai quelque jour, ou plutôt que M. *de la Condamine* donnera lui-même au public. En attendant je me bornerai aux cinq observations mentionnées dans l'article précédent, & qu'on trouvera dans la table suivante.

Autres observations du pendule.

247. La premiere colonne marque le lieu de l'observation ; la seconde, la latitude de ce lieu ; la troisieme, la moitié du sinus verse d'une latitude double pour un rayon = 10000 ; la quatrieme, la longueur du pendule exprimée en lignes de pieds (mesure de *Paris*) ; la cinquieme, la différence de cette longueur à la premiere, ou à celle qu'on trouve sous l'équateur.

Lieu de l'Observation.	Latitude.		$\frac{1}{2}$ du sinus verse.	Longueur du pendule.	Différence.
Sous l'Equateur . . .	0°	0′	0	439.21	0
A Portobelle . . .	9	34	271	439.30	09
Au Petit Goave . . .	18	27	1002	439.47	26
A Paris	48	50	5667	440.67	1.46
A Pello	66	48	8450	441.27	2.06

Accord des différences calculées avec les observées.

248. Il est maintenant aisé de voir de combien la longueur du pendule s'écarte du rapport du sinus verse du double de la latitude, par cette analogie : comme la différence de la premiere moitié de sinus verse à la derniere, ou comme 8450 est au rayon 10000 ; ainsi la différence du premier & du dernier pendule, savoir 2.06, est à la différence du premier & de celui qu'on auroit sous le pôle ; cette différence se trouve de 2.44. Ensuite il faut faire cette autre analogie : comme le rayon est à une autre moitié quelconque de sinus verse, ainsi

ce nombre 2.44 eſt à un quatrieme terme; ce ſera la différence qu'on devroit avoir dans le rapport exact des ſinus verſes du double de la latitude. De cette ſorte on trouvera ces différences du premier pendule aux ſuivantes, 0, 7, 24, 138, 206, leſquelles s'accordent, à quelques centiemes de ligne près, avec celles de la table: la ſeconde ne s'en éloigne que de 2 centiemes, la troiſieme d'autant, la quatrieme de 8, ce qui ne forme que des différences peu ſenſibles.

Comparaiſon des longueurs du pendule priſes deux à deux.

249. Ces cinq longueurs différentes du pendule peuvent ſe combiner deux à deux de dix manieres différentes; & ſi l'on fait pour chacune cette proportion, comme la différence des moitiés des ſinus verſes de latitude, eſt au rayon, de même la différence des pendules répondans à ces ſinus verſes, eſt à un quatrieme terme, cette quatrieme proportionnelle ſera la différence de la longueur du pendule ſous le pôle. Mais parceque les trois premieres longueurs different peu entre elles, on pourra les omettre & ſe contenter de ſept combinaiſons, deux à deux. Elles ne s'éloignent pas beaucoup les unes des autres, dans la détermination de cette différence totale, & la différence trouvée dans chaque combinaiſon repréſente, ſuivant le n. 225, l'ellipticité pour la ſeconde hypotheſe du n. 222, ſi on la diviſe par la longueur du pendule ſous l'équateur; & pour la premiere hypotheſe, ſi on retranche cette ellipticité de la fraction $\frac{1}{115}$.

Table pour cette comparaiſon.

250. Nous donnerons ces allongemens du pendule & ces ellipticités dans la table ſuivante. La premiere colonne repréſente les longueurs qu'on compare, exprimées par des chiffres qui marquent le rang qu'elles occupent dans la table du n. 247; la ſeconde, la différence totale trouvée; la troiſieme, l'ellipticité qui en provient pour la ſeconde hypotheſe, & la quatrieme, l'ellipticité pour la premiere hypotheſe.

1 & 5	2.44	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{319}$	1 & 4	2.58	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{355}$
2 5	2.41	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	2 4	2.54	$\frac{1}{173}$	$\frac{1}{343}$
3 5	2.42	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	3 4	2.57	$\frac{1}{171}$	$\frac{1}{351}$
4 5	2.16	$\frac{1}{203}$	$\frac{1}{265}$				

Accord des résultats.

251. On voit par cette table, que ces déterminations ne different pas beaucoup entre elles ; car si on en excepte la quatrieme qui, étant faite sur des observations peu distantes l'une de l'autre, est un peu plus différente, elles se rapprochent assez, surtout pour la premiere hypothese. Prenant donc un milieu entre ces déterminations, sans avoir égard à la quatrieme, on aura pour différence moyenne 2.49 ; ce qui donne pour l'ellipticité de la seconde hypothese $\frac{1}{176}$, & pour celle de la premiere $\frac{1}{335}$.

Densité de la Terre comparée à celle des mers.

252. Mais dans le cas d'homogénéité, la différence totale, suivant le n. 218, devroit être $\frac{5}{4}n$, c'est-à-dire $\frac{1}{230}$ du tout ; d'où il suit que les observations sont contraires à cette hypothese : & comme les observations donnent une plus grande différence de gravité, il est aisé de conclure que si la Terre est composée de couches sphériques homogênes, sa densité, suivant le n. 226, doit surpasser celle de nos mers.

Suite.

253. Or on pourra déterminer la densité moyenne par la formule du n. 225, connoissant la longueur du pendule sous l'équateur, & sa différence à un pendule placé dans un lieu quelconque plus voisin du pôle. Mais il sera mieux de se servir de la différence moyenne qu'on a trouvée de 2.49 lignes, ou plutôt du rapport de cette différence à la gravité totale, lequel est $\frac{1}{176}$. Alors il suffira de substituer cette valeur dans la formule du n. 225, dans laquelle $\frac{t}{p} = \frac{20nl - 10mh}{15nl - 6mh}$, ou $\frac{20 - 10 \times \frac{mh}{nl}}{15 - 6 \times \frac{mh}{nl}}$. Car $\frac{n}{m} = \frac{1}{289}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{176}$. Donc $\frac{mh}{nl} = \frac{289}{176}$, & l'on aura par la substitution $\frac{2520 - 2890}{2640 - 1734} = \frac{630}{906} = \frac{105}{151}$, qui fait environ $\frac{2}{3}$. C'est-à-dire que la densité de la mer est à la moyenne densité de la Terre, comme 105 est à 151, ou comme 2 à 3.

Rapport des densités dans la seconde hypothese.

254. Dans ma seconde hypothese, la mer seroit au contraire plus dense que la Terre : car alors la différence de la gravité, divisée par la gravité, suivant les n. 219 & 222, est $\frac{n}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$, qui étant supposé égal à $\frac{h}{l}$, donne $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}$

$-\frac{5nl}{6mh} = \frac{5}{3} - \frac{880}{1734} = \frac{1005}{867}$, qui fait à peu près $\frac{7}{6}$. Mais nous aurons encore lieu de parler de ceci à la fin du chapitre suivant.

CHAPITRE II.

De la figure de la Terre, déterminée par la mesure des dégrés.

Du dégré: en particulier de celui de la sphere.

255. ON appelle dégré terrestre l'intervalle de deux points de la surface de la Terre, tel qu'ayant mené par ces points des perpendiculaires à la surface, elles forment entre elles un angle d'un dégré. Si la Terre est sphérique, toutes les perpendiculaires à la surface se rencontrent au centre; d'où il suit que si on la coupe par un plan quelconque, les normales qui sont dans ce plan, lesquelles ne sont point paralleles entre elles, se rencontreront quelque part; & si les points de la section d'où elles partent sont à une distance suffisante, elles formeront un angle d'un dégré. Ainsi une sphere a des dégrés en tous sens, & tous les dégrés des sections qui passent par le centre, ou des grands cercles, sont égaux.

Dégré du méridien dans d'autres solides.

256. Si le solide n'est pas sphérique, les perpendiculaires à la surface ne se rencontreront pas toujours. S'il est engendré par la circonvolution d'une courbe autour de son axe, & qu'on le coupe par un plan qui passe par l'axe, cette section, qui dans le globe terrestre s'appelle méridien, sera toujours égale à la courbe génératrice, & toutes les perpendiculaires à la superficie, tirées des points d'une pareille section, seront dans le plan de la section; d'où il suit que si elles ne sont point paralleles, elles se rencontreront quelque part, & formeront un angle au point de rencontre; & si cet angle est d'un dégré, l'arc de la section intercepté par les perpendiculaires est appellé dégré du méridien.

Dégré du parallele. Comparaison des dégrés.

257. Si ce solide est coupé par des plans perpendiculaires à l'axe, il est clair que toutes les sections sont des cercles paralleles entre eux: aussi les appelle-t-on *cercles paralleles*, ou simplement *paralleles*. Si des lignes tirées des extrémités

de l'arc d'un parallele forment, au point de l'axe où elles se rencontrent, un angle d'un dégré, cet arc est appellé dégré du parallele. On voit que dans la supposition tous les dégrés d'un parallele quelconque sont égaux, & que les dégrés de différens paralleles sont comme leurs rayons, ou comme les ordonnées de la courbe génératrice perpendiculaires à l'axe, qui sont les rayons de ces cercles paralleles. On voit encore que les dégrés de tous les méridiens, pris au même parallele, sont égaux entre eux, puisque la même courbe par sa circonvolution se confond successivement avec tous les méridiens.

Du cercle osculateur.

258. Mais les dégrés du même méridien ne sont point égaux. Si on vouloit avoir leur rapport exact, dans les courbes même les plus connues, le problême ne seroit pas d'une petite difficulté. Mais un arc de méridien qui ne passe pas deux dégrés, peut être pris pour un arc de cercle; & on regarde un degré du méridien comme le dégré d'un cercle d'une courbure égale à la courbure moyenne de cet arc du méridien, laquelle se trouve vers le milieu de cet arc. En général la courbure d'une ligne dans un de ces points quelconques, est celle du cercle qui la touche en ce point sans la couper. Or on appelle cercle osculateur d'une courbe non celui dont l'arc se confondroit exactement avec l'arc de la courbe; ce qui n'arrive jamais, quelque petit qu'on suppose cet arc, mais celui qui en approche plus qu'aucun autre cercle, de sorte qu'on ne puisse pas faire passer un autre cercle dans l'angle formé par la courbe & le cercle osculateur au point de contact, comme *Euclide* a démontré qu'entre le cercle & sa tangente on ne peut tirer par le point de contact aucune autre ligne droite.

Propriétés des arcs des courbes par rapport au rayon de courbure.

259. Or on peut démontrer fort exactement par la Géométrie, comme je me propose de le faire au quatrieme tome de mes Elémens, qu'il n'y a aucun arc continu, de quelque courbe que ce soit, dans lequel on ne puisse trouver une infinité de points qui ont chacun leur cercle osculateur; & quoique dans les courbes d'ordre supérieur il se trouve quelquefois de ces points que j'appelle irréguliers (*puncta anomala*), lesquels n'ont point de cercle osculateur, la courbure y étant plus grande ou moindre que toute courbure circulaire, ces points ne peuvent occuper toute la longueur d'un

arc continu, quelque petit qu'il ſoit, mais ils doivent laiſſer entre eux quelque intervalle, de ſorte que chaque point de l'intervalle ait un cercle oſculateur; & ſi l'on imagine dans cet arc un point quelconque, qui s'approche par un mouvement continu de l'un des points irréguliers, le rayon du cercle oſculateur, qu'on appelle auſſi rayon oſculateur, change continuellement, & le point mobile tombant ſur le point irrégulier, le rayon devient nul ou infini.

Du centre du cercle oſculateur.

260. C'eſt encore une vérité connue, que dans toute courbe le centre du cercle oſculateur eſt dans la ligne perpendiculaire à la courbe & menée par le point de contact; de plus, que tous les centres des cercles oſculateurs d'une courbe quelconque ſe trouvent dans ſa développée, c'eſt-à-dire dans une courbe telle, que l'ayant d'abord entourée ou enveloppée d'un fil d'une juſte longueur, on puiſſe enſuite en la développant continuellement, décrire par l'extrémité du fil la premiere courbe; & qu'au contraire ſi une courbe eſt décrite par le développement d'une autre courbe quelconque, toutes les tangentes de la développée ſeront perpendiculaires à la courbe décrite, & que la partie de la tangente interceptée par la courbe décrite & la développée, ſera toujours le rayon du cercle qui touche en ce point la courbe décrite, & dont le centre eſt le point où ce rayon touche la développée.

De quelques propriétés de ce cercle.

261. Or ſi deux lignes perpendiculaires à une courbe quelconque paſſent par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre, & qu'elles ſe rencontrent quelque part, il eſt démontré que leur point de concours eſt le centre du cercle oſculateur. Il peut encore ſe faire qu'un arc d'un dégré differe notablement d'un dégré du cercle oſculateur de cet arc; ce qui peut arriver lorſque d'une extrémité de l'arc à l'autre la courbure va d'abord en augmentant, puis en diminuant, ou au contraire; mais lorſque la courbure augmente ou diminue dans toute la longueur de l'arc, un dégré de la courbe, dans le ſens que nous avons dit, ſera toujours égal à celui d'un cercle qui le touche dans un point intermédiaire, quoiqu'il puiſſe être fort différent du dégré du cercle qui touche la courbe au milieu de cet arc.

262. Tout ceci peut ſe démontrer exactement par la ſimple Géométrie,

Géométrie, & ſans le ſecours d'aucune autre méthode; mais lorſque la courbure eſt à peu près la même, le dégré de la courbe ne differe pas ſenſiblement de celui du cercle qui la touche vers le milieu de l'arc; d'où il ſuit qu'ayant la meſure du dégré, on aura par-là même le rayon du cercle qui touche la courbe vers le milieu du dégré, que l'on trouvera aiſément en multipliant le dégré par 180, & en formant cette proportion : comme 355 eſt à 113, ainſi ce produit eſt au rayon.

En quel cas on peut prendre un dégré de la courbe pour celui du cercle.

263. Il ſuit de là que dans un pareil ſolide, connoiſſant un dégré d'un parallele, on a l'ordonnée à la courbe génératrice, qu'on trouve par la même méthode; & qu'étant donné un dégré du méridien, on a le rayon du cercle qui touche la courbe vers le milieu de cet arc; de même que connoiſſant l'ordonnée, on connoîtra le dégré du parallele, & qu'ayant le rayon du cercle oſculateur, on aura le dégré du méridien pris de part & d'autre du point touchant. On les trouvera, dis-je, par cette analogie: comme 113 eſt à 355; ainſi cette ordonnée, ou ce rayon, eſt à un quatrieme terme qui, étant diviſé par 180, donnera le dégré que l'on cherche.

Rapports de l'ordonnée & du rayon de courbure aux dégrés.

264. De plus, ſi le ſolide eſt un ſphéroïde, dont la courbe génératrice ſoit de figure ovale, par exemple une ellipſe, le parallele dont le plan paſſe par le centre, eſt appellé équateur de ce ſolide. Et ſi d'un autre point quelconque de la ſurface on tire une perpendiculaire qui, étant dans le plan du méridien de ce point, doit rencontrer quelque part l'axe du ſolide & le diametre de l'équateur, l'angle droit, ou moindre qu'un droit formé par cette ligne & le rayon de l'équateur, s'appelle la latitude de ce point du méridien; d'où il arrive que l'angle que fait cette ligne avec l'axe, eſt le complément de la latitude. Il n'eſt cependant pas néceſſaire de connoître la figure du méridien pour déterminer les latitudes terreſtres; il n'eſt beſoin pour cela que des obſervations aſtronomiques. On peut encore déterminer, pour une latitude donnée, un dégré du méridien par la méthode que j'ai indiquée dans le premier Livre, & que j'ai expliquée au long dans le quatrieme. Enfin il y a une autre méthode pour connoître le dégré d'un parallele; mais elle n'a aucun rapport à la matiere préſente.

Ce que c'eſt que diametre, latitude dans un ſphéroïde.

Connoître la figure par les dégrés ;

265. Or pour connoître un cercle, il ſuffit d'en connoître un dégré. De même étant donné un dégré de la ſphere, ſoit que ce ſoit un dégré du méridien ou d'un parallele quelconque, dont on connoît la latitude, on aura le rayon de la ſphere, & la ſphere même. Dans l'ellipſe d'*Apollonius*, ſi l'on a la meſure de deux dégrés, dont ont connoiſſe les latitudes, on aura par-là même les deux rayons oſculateurs, au moyen deſquels on décrira l'ellipſe; & dans le ſphéroïde engendré par la circonvolution de cette ellipſe autour de l'un de ſes axes, connoiſſant deux dégrés de deux paralleles, ou deux dégrés d'un même méridien, ou un dégré du méridien & un dégré d'un parallele, pour des latitudes données, ſoit que dans ce dernier cas le dégré du parallele & celui du méridien ſoient dans la même latitude, ou en des latitudes différentes, on peut trouver l'ellipſe génératrice & le ſphéroïde même. Quant aux courbes des dégrés plus élevés, on a beſoin pour les déterminer de connoître un plus grand nombre de cercles oſculateurs, par la même raiſon que deux points ſuffiſent pour déterminer une ligne droite, qu'il en faut trois qui ne ſoient point dans la même direction pour déterminer un cercle, cinq pour une ſection conique, & ainſi de ſuite.

Par les rayons de courbure.

266. En général, de même qu'étant donné un certain nombre de points, on peut trouver une infinité de courbes d'eſpeces fort différentes qui paſſent par ces points, & que ce n'eſt qu'une ſuite continue de points qui détermine une courbe; ainſi étant donné un nombre quelconque de rayons de courbure pour des latitudes données, on peut trouver une infinité de courbes qui leur conviennent. Il faudroit donc l'expreſſion générale du rayon oſculateur par la latitude pour déterminer la courbe. Il pourroit ſe faire auſſi que le ſphéroïde étant applati, le rayon oſculateur fût néanmoins plus court au pôle qu'à l'équateur, la courbure étant plus petite à l'équateur qu'au pôle, ſi la courbe génératrice n'eſt pas une ellipſe, mais une autre eſpece d'ovale.

Des irrégularités de la Terre.

267. Comme la théorie de la gravité univerſelle donne une ellipſe du premier genre pour la courbe génératrice, ſoit dans l'hypotheſe qui fait la terre entierement homogêne, & d'une denſité égale à celle de la mer, ſoit dans celle où l'on ſe

contente de la faire homogêne à égales distances du centre; on a d'abord cru qu'étant donnés deux dégrés, pourvu qu'ils fussent à une distance suffisante l'un de l'autre, on pouvoit connoître la figure de la Terre. Mais comme après en avoir mesuré plus de deux, on a trouvé qu'il en résultoit des figures différentes, on a commencé à soupçonner de l'irrégularité dans la figure ou dans la densité du noyau; & ce soupçon reçoit un nouveau dégré de vraisemblance de la comparaison de notre mesure avec celle du dégré le plus méridional de France.

Sujet de ce chapitre.

268. Voilà donc à quoi se réduit tout le sujet de ce dernier chapitre. On y trouve plusieurs problêmes qui ont rapport à la matiere présente, avec leurs solutions purement géométriques; j'en donnai quelques-unes, il y a plusieurs années, dans ma premiere Dissertation sur la figure de la Terre; mais je les propose toutes ici par ordre & avec plus d'étendue.

Théorème sur les cercles osculateurs dans l'ellipse.

269. Premierement pour ce qui regarde les cercles osculateurs dans les sections coniques, j'en ai traité fort au long dans le troisieme tome de mes Elémens, sans employer d'autre méthode que celle de la Géométrie ordinaire; & j'ai démontré dans les corollaires de la neuvieme proposition plusieurs théorèmes qui y ont rapport, & dont nous ferons usage. De ce nombre est celui du n. 520: *les rayons des cercles osculateurs sont en raison inverse des cubes des perpendiculaires tirées du centre sur les tangentes, & en raison directe des cubes des normales terminées à l'un des axes;* d'où l'on tire celui-ci du n. 523: *le rayon du cercle osculateur est le quatrieme terme d'une proportion continue, dont le premier est la moitié du parametre du grand axe, & le second, la normale tirée du point touchant sur cet axe.* On auroit pu également en tirer ce théorème encore plus général, que *le rayon du cercle osculateur est le quatrieme terme d'une proportion continue dont le premier est la moitié du parametre de l'un des axes indifféremment, & le second, la normale à la courbe, terminée par cet axe.*

Propriétés de l'ellipse. Pl. IV. fig. 23.

270. De plus, étant donnée la latitude du lieu, on a le rapport qui se trouve entre l'ordonnée à l'axe & la normale, ou la sous-normale, qui est celui du co-sinus de la latitude au rayon ou au sinus, ou celui du rayon à la sécante de la

latitude, ou à sa tangente. Car si l'on suppose (fig. 23) que CB soit le demi-diametre de l'équateur, Ee l'axe, HI l'ordonnée perpendiculaire à l'axe, IF la normale, HF la sous-normale; la latitude du lieu I sera mesurée par l'angle HIF, puisqu'à mesure que l'ordonnée HI, parallele à CB, devient plus grande, elle se rapproche de l'équateur, & la normale FI du zénith. Or en prenant la normale FI pour le rayon, HI est le co-sinus, HF le sinus de l'angle HIF; & si l'on prend pour rayon la perpendiculaire HI, IF devient la sécante, & HF la tangente de cet angle.

Autres propriétés.

271. Or il y a deux propriétés de l'ellipse qui nous seront ici d'un très grand usage. La premiere connue de tout le monde, que si sur le diametre Ee on décrit un demi-cercle qui rencontre l'ordonnée HI en A, & le demi-axe CB en D, HI sera à HA dans le rapport constant de CB à CD, ou CE; la seconde, que la sous-normale HF est à l'abscisse HC, dont l'origine est au centre, comme CB^2 à CD^2, ou CE^2, comme il est démontré au troisieme tome de mes Elémens, n°. 462. Cela supposé, nous n'aurons pas de peine à résoudre les problêmes qui se présentent ici. J'en donnerai même des solutions différentes de celles qu'on lit dans ma Dissertation de la figure de la Terre, quoique celles-ci soient aussi très simples, très faciles, & également géométriques.

Problême préparatoire.

272. Je commence par ce problême: *étant connue l'ordonnée dans une latitude donnée, & l'espece de l'ellipse, trouver l'axe & le diametre de l'équateur.* Puisqu'on a la latitude, on connoîtra le rapport de la ligne donnée HI à HF, ou du rayon à la tangente de la latitude. On aura donc HF. Or on connoît aussi le rapport de CB à CE, qui est celui de HI à HA, & par conséquent le rapport de CB^2 à CE^2, qui est celui de HF à HC. Donc on aura HA & HC, qui sont les côtés d'un triangle rectangle, dont on trouvera encore l'hypoténuse CA, & par conséquent CE; & parceque le rapport de CE à CB est connu, on aura aussi CB.

Construction.

273. Soit le rapport du demi-diametre de l'équateur au demi-axe exprimé par la fraction $\frac{m}{n}$; menez l'ordonnée HI qui est donnée, faites l'angle HIF égal à la latitude donnée,

& l'angle IHF de 90°, enſuite vous aurez ces proportions $m : n :: HI : HA$, & $m^2 : n^2 :: HF : HC$; & ayant pris ſur CH prolongée la ligne CE = CA, & tiré CB perpendiculaire à CE de telle grandeur que CE ſoit à CB dans la raiſon de n à m, vous aurez les demi-axes cherchés.

Solution. Autre lemme.

274. Or par le n. 263 étant donné un dégré d'un parallele, on a l'ordonnée HI. Donc connoiſſant ce dégré & l'eſpece de l'ellipſe, on connoîtra les axes. Mais nous aurons encore beſoin du lemme ſuivant : *dans l'ellipſe la différence des quarrés de deux ordonnées quelconques à celui des axes qu'on voudra, eſt à la différence des quarrés des ſous-normales correſpondantes, comme le quarré de ce demi-axe au quarré de la moitié de ſon conjugué.*

Démonſtration.

275. Car puiſqu'on a, par le n. 271, $HI^2 : HA^2 :: CB^2 : CE^2$, & $hi^2 : ha^2 :: CB^2 : CE^2$; on aura $hi^2 - HI^2 : ha^2 - HA^2 :: CB^2 : CE^2$. Or à cauſe que CA = C*a*, la différence des quarrés de *ha* & HA ſera la même que celle de HC^2 à hC^2; & comme par le même n. 271, $HC^2 : HF^2 :: EC^4 : CB^4$, & $hC^2 : hf^2 :: CE^4 : CB^4$; on aura auſſi $HC^2 - hC^2 : HF^2 - hf^2 :: CE^4 :: CB^4$. Donc $hi^2 - HI^2$ eſt à $HF^2 - hf^2$ en raiſon compoſée de celle de CB^2 à CE^2, & de celle de CE^4 à CB^4, ou en raiſon de CE^2 à CB^2. C. Q. F. D.

Trouver l'ellipſe génératrice par deux dégrés de paralleles.

276. De ce lemme coule comme de ſource la ſolution du problême qui ſuit : *étant donnés dans un ſphéroïde elliptique deux dégrés de deux paralleles, dont on connoît les latitudes, trouver l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe génératrice.* Car puiſqu'on a ces deux dégrés, on aura, par le n. 263, les ordonnées HI, *hi*; & puiſqu'on connoît les latitudes, on connoîtra, par le n. 270, les ſous-normales HF & *hf*. On aura donc le rapport de la différence des quarrés des ordonnées, à la différence des quarrés des ſous-normales, rapport qui fera connoître celui du quarré de CE au quarré de CB, & par conſéquent la raiſon ſous-doublée de ce rapport, qui eſt celle de CE à CB, d'où l'on déduira l'eſpece de l'ellipſe. Or, par par le n. 272, connoiſſant l'eſpece de l'ellipſe & l'une de ces ordonnées, on connoîtra la grandeur des demi-axe CE, CB.

Conſtruction pour l'eſpece. Pl. IV. fig. 23. 24.

277. S'il étoit uniquement queſtion de trouver l'eſpece de l'ellipſe, on pourroit exprimer les ordonnées HI, *hi* par les mêmes nombres qui expriment les dégrés; & le problême pourroit ſe conſtruire géométriquement en cette ſorte: ſur l'un des côtés de l'angle droit IHF (fig. 24), ayant pris à diſcrétion le ſegment HI, puis H*i* de telle grandeur qu'elle ſoit à HI dans la même raiſon que le dégré le plus grand au plus petit, je fais les angles HIF, H*if* égaux aux latitudes correſpondantes, & des points I & *f* comme centres, & avec les rayons H*i*, HF, je cherche ſur les côtés de cet angle droit prolongés, les points B, E. Le demi-diametre de l'équateur ſera au demi-axe, comme HB à HE. Car les lignes HI, H*i* de la figure 24 exprimeront les ordonnées de la figure 23; HF H*f* les ſous-normales; & le rapport de HE^2 à HB^2 celui de la différence des quarrés des ordonnées à la différence des quarrés des ſous-normales. Donc, par le n. 274, le rapport de HE à HB ſera celui des demi-axes.

Par deux dégrés, l'un du parallele, l'autre du méridien dans la même latitude. Pl. IV. fig. 23.

278. Si l'on cherche l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe par deux dégrés connus, l'un du parallele, l'autre du méridien, dans la même latitude, la ſolution du problême eſt beaucoup plus ſimple. Mais il faut auparavant démontrer cette propriété des ſections coniques. Si du point F (fig. 23), où l'axe eſt rencontré par la normale, on mene juſqu'à l'ordonnée une ligne FL parallele au rayon CA, elle ſera égale à la moitié du parametre de l'axe E*e*, & les lignes HL, HI, HA ſeront en proportion continue. Car FL eſt à CA ou CE, comme FH à CH, ou bien, par le n. 271, comme le quarré de CB au quarré de CE, ou comme la moitié du parametre de l'axe E*e* à la même ligne CE. Donc FL eſt égale à la moitié du parametre de cet axe. Mais puiſque $HI^2 : HA^2 :: CB^2 : CE^2 ::$ HF : HC :: HL : HA; il eſt clair que HL, HI, HA ſont en proportion continue.

Solution.

279. Or étant donné un dégré du parallele en I, on a, par le n. 263, l'ordonnée IH; & comme on a la latitude HIF, on connoît IF. De plus, connoiſſant un dégré du méridien dans la même latitude, on a le rayon oſculateur de l'ellipſe en I, & par conſéquent le rapport de ce rayon à la normale FI qui eſt connue. Or par le n. 269 ce rapport eſt la raiſon

doublée de FI à la moitié du parametre de l'axe E*e*, puiſque ce rayon eſt le quatrieme terme d'une proportion continue dont les premiers termes ſont la moitié du parametre de l'axe & la normale. On aura donc le parametre de l'axe; & du point F comme centre, & à la diſtance de la moitié de ce parametre, on trouvera le point L. Enſuite ayant pris HA, troiſieme proportionnelle à HL & HI, on aura le point A, d'où ayant mené AC parallele à LF, cette ligne déterminera le centre C, & le demi axe CE égal à AC. L'autre demi-axe CB ſera moyen proportionnel entre CE, & cette moitié du parametre. Ainſi l'on connoîtra l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe.

Dans différentes latitudes. Pl. IV. fig. 23.

280. Mais ſi les dégrés connus du méridien & du parallele ne ſont pas dans la même latitude, le problême eſt d'une toute autre difficulté, & l'on a beſoin pour le réſoudre de recourir à des courbes de genres beaucoup plus élévés (1). Je me contenterai d'indiquer la maniere de le réſoudre par le calcul ordinaire, ſur les mêmes principes que ci-deſſus. Soit la moitié du parametre de l'axe E$e = x$, CE$= y$, le rayon oſculateur en i, qu'on connoîtra par le dégré donné du méridien dans cette latitude, $= a$, l'ordonnée HI$= b$, le ſinus de la latitude en $i = s$, ſon co-ſinus$= c$, pour un rayon$= 1$, la tangente de la latitude en I$= t$. Puiſqu'on a le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les premiers ſont x, & la normale if, on aura $if = \sqrt[3]{ax^2}$. Donc $hi = c\sqrt[3]{ax^2}$, & $hf = s\sqrt[3]{ax^2}$.

On a une équation d'un dégré fort élevé.

281. Or à cauſe que HI$= b$, on a HF$= bt$. De plus, $x : y :: HI^2 : HA^2 :: hi^2 : ha^2 :: HF : HC :: hf : hC$. On aura donc des expreſſions analytiques des quarrés de HA, HC, ha, hC; & comme la ſomme des deux premiers eſt y^2, & que pareillement la ſomme des deux derniers eſt y^2, on a autant d'équation que d'inconnues; mais l'équation qui en

(1) Voyez le n. 331 où l'Auteur donne une ſolution très ſimple de ce problême.

réſulte eſt d'un dégré ſi élevé, que je n'ai pas jugé à propos de donner une ſolution géométrique de ce problême qui, ne pouvant ſe conſtruire qu'au moyen d'une courbe fort compoſée, ne préſenteroit rien moins qu'une ſolution ſimple & facile. Il pourroit ſe faire qu'on en eût donné une ſolution plus aiſée, qui ne fût point parvenue à ma connoiſſance; mais en tout cas elle ne peut être d'un grand uſage, vu le peu de préciſion qu'on peut ſe promettre dans la meſure d'un dégré d'un parallele.

Connoître l'eſpece de l'ellipſe par deux dégrés du méridien. Pl. IV. fig. 23,

282. Un autre problême bien plus utile, c'eſt celui où avec deux dégrés du méridien, à diverſes latitudes, on cherche l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe. Ce problême ſe réſoud avec beaucoup plus de facilité, & il revient à peu près au même que le premier des trois précédens. On le propoſe en ces termes: *connoiſſant deux dégrés du méridien en des latitudes différentes trouver l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe.* Puiſqu'on a ces dégrés, on aura leur rapport & la raiſon ſous-triplée de ce rapport, & par conſéquent, par le n°. 269, le rapport qu'ont entre elles les normales IF, *if*. Donc puiſqu'on a auſſi les latitudes, & par-là même, ſuivant le n°. 270, les rapports de ces normales aux ordonnées HI, *hi*, & aux ſous-normales HF, *hf*; on aura pareillement le rapport de HI & *hi*, à HF & *hf*, & le rapport de la différence des quarrés des premieres lignes, à la différence des quarrés des dernieres, qui, par le n°. 276, déterminera l'eſpece de l'ellipſe.

Lemme pour la grandeur de l'ellipſe.

283. Connoiſſant l'eſpece de l'ellipſe, on en connoîtra aiſément la grandeur par le lemme ſuivant qui eſt tiré du traité des ſections coniques: la tangente de l'angle HAC eſt à la tangente de l'angle HIF, comme CE à CB. Car la premiere tangente eſt à la ſeconde, en raiſon compoſée de la raiſon directe de CH à FH, & de la raiſon inverſe de HA à HI; c'eſt-à-dire en raiſon compoſée de la raiſon directe doublée de CE à CB, & de la raiſon ſimple & directe de CB à CE, ou ſeulement en raiſon ſimple & directe de CE à CB.

Connoître ſa grandeur.

284. Ce lemme ſuppoſé, puiſqu'on connoît l'eſpece de l'ellipſe & la latitude HIF avec ſa tangente, on connoîtra auſſi la tangente de l'angle HAC, & par conſéquent cet angle même. Donc on aura encore le rapport de CA ou CE à FI, puiſqu'il

puiſqu'il eſt compoſé de la raiſon de CA à AH, ou du rayon au co-ſinus de l'angle CAH, de la raiſon de AH à HI, ou de CE à CB, qui eſt donnée à cauſe qu'on connoît l'eſpece de l'ellipſe, enfin de la raiſon de HI à IF, ou du co ſinus de l'angle HIF au rayon, leſquelles, ſans parler du rayon, ſe réduiſent à deux raiſons, ſavoir celle du demi-diametre de l'équateur au demi-axe, & celle du co-ſinus de la latitude au co-ſinus de l'angle, dont la tangente eſt à la tangente de la latitude, comme le demi-axe au demi-diametre de l'équateur. Or on a le rapport de la moitié du parametre de l'axe E*e* à CE, qui eſt doublé de la raiſon de CB à CE. Donc on aura le rapport de la moitié de ce parametre à IF, & la raiſon doublée de ce rapport ſera celle de la normale IF au rayon du cercle oſculateur, ce rayon étant le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les premiers ſont ce demi-parametre, & cette normale, par le n. 269. Donc connoiſſant ce rapport & le rayon oſculateur, on aura IF; d'où l'on pourra remonter à la connoiſſance de CA ou CE, enſuite de CE à CB, qui priſes enſemble détermineront la grandeur de l'ellipſe.

Conſtruction pour l'eſpece. Pl. IV. fig. 24.

285. Nous allons maintenant déterminer par une conſtruction l'eſpece de l'ellipſe. Soient (fig. 24) les angles HIF, HIO placés du même côté, & égaux aux latitudes données, le premier à la plus grande, le ſecond à la plus petite. Prolongez OI juſqu'en *o*, de ſorte que O*o* ſoit à IF en raiſon ſous-triplée de celle du dégré qui répond à la latitude HIO au dégré correſpondant à la latitude HIF. Menez *oi* parallele à HO, qui rencontrera HI en *i*; puis *if* parallele à *o*O; & des points I & *f* comme centres, & avec les rayons H*i*, HF, cherchez, comme ci-deſſus, les points E, B; le rapport de HE à HB ſera celui du demi-axe au demi-diametre de l'équateur. Car IF eſt à *if*, ou *o*O, comme dans la figure 23 IF à *if*. Or les angles HIF & H*if*, ou HIO de la figure 24, ſont égaux aux angles HIF, *hif* de la figure 23. Donc les rapports de FI, *fi* (fig. 24) à HI, H*i*, & HF, H*f* ſont les mêmes que ceux de FI, *fi* (fig. 23) à HI, *hi*, & HF, *hf*. Ainſi comme les différences des quarrés dans la figure 23 ſont entre elles comme CE^2 à CB^2, elles ſeront

dans la figure 24 comme HE^2 à HB^2.

Construction pour la grandeur. Pl. IV, fig. 23.

286. A l'égard de la construction pour la grandeur de l'ellipse, soit décrit (fig. 23) un demi-cercle EDe, dans lequel on prendra un angle ECA dont la tangente soit à la tangente de la latitude, comme dans l'ellipse dont on vient de trouver l'espece, CE est à CB. Menez AH, & faites HI de telle longueur, qu'elle ait à AH le rapport qu'on a trouvé entre CB & CE; ensuite ayant fait l'angle HIF égal à la latitude donnée, vous prendrez une troisieme proportionnelle à CE prise à volonté, & à CB déterminée par l'espece de l'ellipse qu'on suppose connue, puis une quatrieme proportionnelle en proportion continue, dont les deux premiers termes soient celle-ci (1) & IF. Enfin vous ferez cette analogie: comme cette quatrieme proportionnelle est à CE, ainsi le rayon osculateur qu'on trouvera par le dégré, est au demi-axe; & connoissant le demi-axe, vous aurez par l'espece de l'ellipse le demi-diametre de l'équateur.

Formule pour l'espece de l'ellipse.

287. Comme nous ferons souvent usage de ce dernier cas, il ne sera pas hors de propos d'en dresser une formule algébrique. Soit $CE=1$, $CB=x$, le dégré le plus proche de l'équateur $=g$, le plus éloigné $=G$; soit encore $g^{\frac{1}{3}}=a$, $G^{\frac{1}{3}}=A$; on aura les normales if, $IF=g^{\frac{1}{3}}$, $G^{\frac{1}{3}}$ ou a, A. Si l'on suppose le sinus de la premiere latitude $=s$, pour le rayon 1, celui de la seconde latitude $=S$, le co sinus du premier $=c$, celui du second $=C$; on aura $hi=ac$, $HI=AC$, $hf=as$, avec cette analogie $a^2c^2-A^2C^2 : A^2S^2-a^2s^2 :: 1 : xx=\frac{A^2S^2-a^2s^2}{a^2c^2-A^2C^2}$, & parceque $c^2=1-ss$, $C^2=1-SS$, on aura $xx=\frac{A^2S^2-a^2s^2}{a^2-a^2s^2-A^2+A^2S^2}$. Donc $\frac{1}{xx}=\frac{A^2S^2-a^2s^2+a^2-A^2}{A^2S^2-a^2s^2}$ $=1\frac{-A^2+a^2}{A^2S^2-a^2s^2}$.

Pour l'excentricité.

288. Cette équation donne la proportion suivante, $xx : 1 :: 1 : 1-\frac{A^2+a^2}{A^2S^2-a^2s^2}$. Donc $xx : xx-1 :: 1 : \frac{A^2-a^2}{A^2S^2-a^2s^2}$

(2) C'est la moitié du parametre de l'axe, puisqu'elle est troisieme proportionnelle à CE & CD.

$: A^2 S^2 - a^2 s^2 : A^2 - a^2$. Et parceque que $x^2 - 1$ eſt le quarré de la diſtance du foyer au centre, ou de l'excentricité, l'excentricité ſera au demi-axe conjugué en raiſon ſous-doublée de $A^2 - a^2$, à $A^2 S^2 - a^2 s^2$.

Pour le cas d'une petite excentricité.

289. Si l'excentricité eſt petite, il ſera aiſé d'avoir une formule beaucoup plus ſimple pour la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe. Car on aura à très peu près $x = 1$. Donc $xx - 1 = \frac{A^2 - a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$. Or $xx - 1 = CB^2 - CD^2 = DB \times Bd$ (en faiſant $Cd = CD$), ou bien à très peu près $= 2\,CD \times BD$, ou, à cauſe que $CD = CE = 1$, à peu près $= 2\,BD = \frac{A^2 - a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$. Mais parceque $AA = G^{\frac{2}{3}}$, & $aa = g^{\frac{2}{3}}$, & que G eſt peu différent de g, on aura à peu de choſes près $A^2 - a^2 = \frac{2}{3} \times G^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$, ou $\frac{2}{3} \times g^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$. Donc $BD = \frac{1}{3} \times \frac{G - g}{GSS - gss}$, même formule que celle qu'a trouvée M. *de Maupertuis* par une méthode fort différente, & qui ſe voit dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences à l'année 1737, exprimée en ces termes $\frac{E - F}{3(ESS - Fss)}$; car les valeurs E, F, S, s ſont les mêmes dans cette formule que G, g, S, s dans la mienne.

Pour les dégrés au pôle & à l'équateur.

290. Lorſque le point i tombe ſur l'équateur en B, s s'évanouit, & la formule ſe réduit à $\frac{1}{3} \times \frac{G - g}{GSS}$. Si de plus le point I tombe ſur le pôle en E, où l'on a le ſinus $S = 1$, la formule ſe change en $\frac{G - g}{3G}$, d'où l'on tire ce théorème : *le demi-diametre de l'équateur eſt à très peu près à ſa différence au demi-axe, comme le dégré du méridien ſous l'équateur au tiers de la différence des dégrés ſous l'équateur & le pôle.*

Théorème général.

291. On peut tirer du n. 269, pour ce dernier cas qui eſt le plus ſimple, & pour une ellipticité quelconque, quelque grande qu'elle puiſſe être, un théorème beaucoup plus beau, ſavoir : *le demi-diametre de l'équateur eſt au demi-axe en rai-*

ſon ſous-triplée de celle du dégré ſous l'axe au dégré ſous l'équateur. Car les dégrés ſont en raiſon inverſe des cubes des perpendiculaires abaiſſées du centre ſur les tangentes; & dans le cas où le point de contact eſt à l'extrémité des axes, ces perpendiculaires ſont ces demi-axes eux-mêmes terminés au point de contact. Mais parceque dans les quantités qui different peu entre elles, le cube eſt à la différence des cubes à très peu près, comme la quantité ſimple eſt au triple de la différence de ces quantités ſimples; il s'enſuit que ſi l'ellipticité eſt petite, on pourra de ce dernier théorème déduire le précédent.

Augmentation ou diminution des dégrés.

292. De ce que les dégrés ſont en raiſon inverſe des cubes des perpendiculaires abaiſſées du centre ſur la tangente, il eſt encore aiſé de conclure que l'augmentation des dégrés depuis l'équateur juſqu'au pôle, ſera à peu près dans la même raiſon que le quarré du ſinus de la latitude, ou que le ſinus verſe d'une latitude double; même rapport que celui de la diminution de la diſtance à l'augmentation de la gravité de l'équateur au pôle. Car dès que les différences des quarrés, des cubes & des puiſſances quelconques, ſont fort petites, elles ſont en même raiſon que les différences des côtés ou des racines. Ainſi les augmentations des dégrés ſeront en même raiſon que les diminutions des perpendiculaires ſur les tangentes. Or dans une ellipſe peu différente d'un cercle, la diſtance du centre au point de contact peut être priſe pour la perpendiculaire tirée du centre ſur la tangente, même lorſqu'il s'agit de la différence d'une perpendiculaire à une autre; car la perpendiculaire eſt le côté d'un triangle rectangle dont cette diſtance eſt l'hypothénuſe, & ces deux lignes forment un angle qui répond à l'ellipticité; d'où il eſt aiſé de démontrer par une méthode ſemblable à celle dont nous nous ſommes ſervis plus haut (n. 232), que la différence de la perpendiculaire à la baſe, ou l'erreur que l'on pourroit commettre, eſt un infiniment petit du ſecond ordre, & de nulle conſéquence. Donc la diminution de la perpendiculaire, & par conſéquent l'augmentation du dégré, eſt à très peu près comme la diminution de la diſtance, ou dans le même rapport que nous avons dit.

En quel rapport ils diminuent.

293. De là on tire une proportion pour la diminution du dégré, qui a lieu auſſi dans l'augmentation de la diſtance, & la diminution de la gravité depuis le pôle juſqu'à l'équateur, comme nous l'avons démontré (n. 174), ſavoir que toutes ces diminutions & augmentations ſont à très peu près comme le quarré du co-ſinus de la latitude, ou comme le ſinus verſe du double du complément de la latitude. Car les quarrés du ſinus & du co-ſinus ſont enſemble égaux au quarré du rayon, quantité conſtante; de même que la différence par excès d'un dégré quelconque ſur un dégré pris ſous l'équateur, jointe à ſa différence par défaut au dégré du pôle, eſt égale à la différence totale & conſtante de la gravité ſous le pôle & l'équateur. Ainſi le quarré du rayon étant au quarré du ſinus, comme la différence totale eſt à la différence par excès; le même quarré du rayon ſera au quarré du co-ſinus, comme la différence totale à la différence par défaut, qui ſera par conſéquent en raiſon du quarré du co-ſinus. Or ce quarré eſt en raiſon du ſinus verſe d'un arc double, ou du ſinus verſe du double du complément; & c'eſt la même démonſtration pour la diſtance & la gravité.

Déterminer l'eſpece de l'ellipſe par deux dégrés.

294. On peut tirer de ce théorème, ou du théorème précédent d'où celui-ci eſt déduit, une méthode aſſez facile pour déterminer l'eſpece de l'ellipſe par deux dégrés quelconques du méridien, pourvu qu'ils ſoient pris en des latitudes différentes, comme nous l'avons déterminé à la fin du chapitre précédent par deux longueurs du pendule, obſervées en des lieux qui different en latitude. Car on aura d'abord cette proportion: comme la moitié de la différence des ſinus verſes des latitudes doubles eſt au rayon, ainſi la différence des dégrés dont on a la meſure, eſt à un quatrieme terme, qui ſera la différence des dégrés ſous l'équateur & le pôle: puis celle-ci: comme le tiers de cette différence eſt à l'un ou l'autre de ces dégrés indifféremment, pris pour le dégré moyen; ainſi la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe, ou, ce qui revient au même, ainſi l'applatiſſement eſt à un demi-diametre moyen de la Terre. Cette ſeconde analogie eſt une ſuite du n. 291; la premiere ſe démontre ainſi: puiſque les diminutions des dégrés ſont comme

les ſinus verſes des latitudes doubles, la différence des diminutions de ces dégrés comparés au dégré du pôle, qui ſera la même que la différence de ces dégrés entre eux, ſera à la diminution qui convient au quart-de-cercle entier, comme la différence des ſinus verſes des latitudes doubles, correſpondantes à ces dégrés, eſt à la différence des ſinus verſes d'une latitude double, & d'un double quart-de-cercle, dont le premier ſinus = o, le ſecond eſt le diametre ou le double du rayon. Donc la différence de ces ſinus verſes eſt au double du rayon, ou bien la moitié de cette différence eſt au rayon, comme la différence de ces dégrés eſt à la différence de deux autres dégrés du méridien, pris l'un à l'équateur, l'autre au pôle.

Déterminer l'ellipticité.

295. A l'égard de l'ellipticité qui eſt le rapport de la différence des demi-axes de l'ellipſe génératrice, à l'un de ces demi-axes, on la trouvera ſans peine, en diviſant le tiers de la différence qu'on vient de trouver entre les dégrés ſous l'équateur & le pôle par un dégré entier. Dès qu'on aura l'ellipticité qui réſulte de deux dégrés, il ſera aiſé d'avoir celle qui eſt déterminée par deux autres, puiſque cette ellipticité eſt en raiſon directe de la différence des dégrés, & en raiſon inverſe de la différence des ſinus verſes des latitudes doubles.

Gravité newtonienne & denſité de la Terre comparées à la meſure des dégrés.

297. De là on peut aiſément connoître ſi la gravité newtonienne, jointe à une denſité égale à égales diſtances du centre, s'accorde avec la meſure des dégrés, de même que ſur la fin du chapitre premier nous avons examiné ſi elle pouvoit ſe concilier avec les obſervations du pendule à ſecondes. Les dégrés dont nous avons une meſure exacte ſe réduiſent à ceux-ci; celui que M. *de Maupertuis* avec trois autres Académiciens, a meſuré dans la Laponie; ceux qui ont été meſurés en France par MM. *Caſſini* & *de la Caille*, & dont la longueur, après quatre changemens faits au dégré de M. *Picart*, eſt enfin aſſurée; celui que MM. *Bouguer* & *de la Condamine* ont déterminé au Pérou; celui que M. l'Abbé *de la Caille* vient de meſurer au *Cap* de Bonne Eſpérance; auxquels on me permettra d'ajouter celui que nous avons meſuré dans les Etats du Pape. Toutes ces opérations ont été faites avec beaucoup d'exactitude, & avec des meſures priſes toutes

ſur la même toiſe. On y a eu égard à tous les mouvemens des étoiles fixes; on s'y eſt ſervi d'excellens ſecteurs; on y a apporté toutes les précautions néceſſaires pour en aſſurer le ſuccès. Il y a encore des dégrés qui ont été meſurés en d'autres lieux, comme celui de *Norwood* en Angleterre, celui que *Snellius* meſura autrefois en Hollande, & qui a été réformé d'abord par *Muſchembroek*, enſuite par M. *Caſſini*. Mais il n'y a aucun doute qu'on ne doive faire beaucoup moins de fonds ſur ces opérations que ſur les précédentes. Celle de *Norwoode* n'eſt pas à beaucoup près aſſez préciſe, & l'on ne connoît point aſſez exactement la longueur de la meſure dont il s'eſt ſervi; d'ailleurs l'Aſtronomie pratique n'étoit pas encore aſſez parfaite pour qu'on puiſſe comparer ſon dégré avec les nôtres.

Dégré de *Snellius*.

298. A la vérité le dégré de *Snellius*, réformé par M. *Caſſini de Thury*, eſt plus exact. On le trouvera avec les divers changemens qui y ont été faits, dans l'écrit de M. *de Thury*, inſéré dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'année 1747. Ce dégré répond à une latitude de 50°, 4′, 17″. Suivant la méthode de *Snellius*, il ſeroit de 55020 toiſes. *Muſchembroek* a retenu les obſervations aſtronomiques de *Snellius*, & après avoir corrigé les triangles, il l'a trouvé de 57033 toiſes. M. *Caſſini* le fils répéta en 1701 les obſervations aſtronomiques, & le réduiſit à 56496 toiſes. Enfin M. *de Thury*, fils de ce dernier, ayant meſuré une nouvelle baſe, s'eſt ſervi des obſervations aſtronomiques de ſon pere, & a trouvé le dégré de 57145 toiſes. Je crois qu'on peut ſans témérité ſoupçonner des erreurs de quelques ſecondes dans ces opérations aſtronomiques, vu que la pratique de l'Aſtronomie & les inſtrumens qui ſont à ſon uſage, n'étoient pas alors au point de perfection où nous les voyons aujourd'hui.

Autres dégrés.

299. Nous allons donner une liſte des dégrés ſur leſquels on ne peut former aucun doute raiſonnable. Les chiffres de la premiere colonne marquent le rang de chaque dégré en particulier, afin qu'on puiſſe les déſigner chacun par ſon rang; ceux de la ſeconde marquent les latitudes des dégrés correſpondans; & ceux de la troiſieme, la grandeur des dégrés, exprimée en toiſes. Le premier dégré eſt celui qui a été me-

ſuré dans la Laponie. Je l'ai tiré de l'ouvrage que M. *de Mauperтuis* a publié à ce ſujet; mais comme on n'y avoit point eu d'égard à la réfraction, j'en ai retranché 16 toiſes, ſelon qu'il ſe pratique aujourd'hui à l'égard de ce dégré. Les onze dégrés qui ſuivent ſont tirés du Livre de M. *Caſſini de Thury*, intitulé *Méridienne vérifiée;* le treizieme eſt celui que nous avons meſuré; le quatorzieme eſt tiré des ouvrages de M. *Bouguer* & de M. *de la Condamine*, en prenant un milieu; le quinzieme, d'un petit écrit de M. l'Abbé *de la Caille* qui l'a meſuré.

	Latitudes.	Dégrés en toiſes.		Latitudes.	Dégrés en toiſes.
1	66°. 20′	57422	9	45°. 45′	57050
2	49 . 56	57084	10	45 . 43	57040
3	49 . 23	57074	11	44 . 53	57042
4	49 . 3	57069	12	43 . 31	57048
5	47 . 58	57071	13	43 . 1	56979
6	47 . 41	57057	14	0 . 0	56753
7	46 . 51	57055	15	—33 . 18	57037
8	46 . 35	57049			

A ces dégrés du méridien on peut ajouter le dégré du parallele que M. *Caſſini de Thury* & M. l'Abbé *de la Caille* ont trouvé de 41618 toiſes, dans la latitude de 43°, 32′ (1).

(1) On peut aujourd'hui ajouter encore d'autres nombres qui ont rapport à de nouvelles meſures faites les unes en Italie par le P. *Beccaria*, les autres en Allemagne par le P. *Lieſganig*, & qui ſont tirés des manuſcrits envoyés de *Turin* & de *Vienne*. Les meſures du P. *Lieſganig* s'impriment actuellement; celles du P. *Beccaria* paroîtront à la fin de la collection de ſes ouvrages qui ſont également ſous preſſe.

La latitude de *Mondovi* eſt de 44°, 23′, 35″; celle de *Turin* de 45°, 4′, 14″; celle d'*Andrate* de 45°, 31′, 18″.

On a trouvé en toiſes de *Paris*, entre *Mondovi* & *Turin*, 38680; entre *Turin* & *Andrate* 26140. *Andrate* eſt ſitué au pied d'une montagne fort élevée, & qui de ce côté eſt le commencement d'une des plus groſſes & des plus hautes montagnes des Alpes, ſituée vers le nord. De ces meſures & de ces latitudes on tire la table ſuivante,

300. Ceci donneroit déja le moyen de faire quantité de comparaisons, puisque des dégrés quelconques du méridien, pris deux à deux, déterminent l'applatissement de la Terre dans l'hypothese de l'ellipse de *Newton*. Mais on ne doit point comparer ensemble deux dégrés trop proches l'un de l'autre, parceque les différences étant alors trop petites, une erreur fort légere dans les observations en produiroit une fort considérable dans le résultat. Si donc de tous les dégrés de France on ne prend que le troisieme, qui est celui de M. *Picart*, pour une latitude de 49°, 23′, dégré sur lequel on a repassé tant de fois, & avec une exactitude si scrupuleuse; il restera cinq dégrés, savoir le premier qui est celui de la Laponie, le troisieme qui est un dégré de France, & les trois derniers qui sont ceux d'Italie, de la Province de *Quito* & du *Cap* de Bonne Espérance. On peut d'abord examiner, ainsi que nous l'avons fait pour le pendule à la fin du premier chapitre, si les différences du premier dégré du méridien, qui est le plus proche de l'équateur aux quatre autres dégrés, Cinq dégrés choisis.

Entre	Amplitude de l'arc.	Mesure de l'arc en toises de *Paris*.	Valeur du dégré en toises de *Paris*.
Mondovi & Turin . . .	40′41″	38680	57075
Turin & Andrate . . .	27. 4	26140	57990
Mondovi & Andrate .	1°. 7.45	64820	57405

La latitude de *Vienne* en Autriche est de 48°, 12′. La toise de *Vienne* est à celle de *Paris*, comme 100000 à 102764. De ce rapport, & des mesures, & des arcs interceptés, on tire la table suivante.

Entre	Amplitude de l'arc.	Mesure de l'arc en toises de *Vienne*	Valeur du dégré en toises de *Paris*.
Vienne & Sobieschiz . .	1°. 2′ . 29″.0	61092.5	57081.3
Vienne & Brunn	0 . 58 . 53.5	57585.0	57090.8
Vienne & Gratz	1 . 8 . 24.8	66682.9	56909.6
Gratz & Varadin . . .	0 . 45 . 49.9	45019.3	57351.3
Vienne & Varadin . . .	1 . 54 . 16.5	111702.2	57717.7
Sobieschiz & Varadin .	2 . 56 . 45.5	172794.7	57076.9

répondent aux ſinus verſes des latitudes doubles, ou de combien elles s'en écartent. Je l'ai fait, & j'ai cherché enſuite la différence que donne la comparaiſon des dégrés pris deux à deux, dans cette hypotheſe de proportionnalité avec les ſinus verſes: différence qui ſeroit par-tout la même, ſi les différences des dégrés ſuivoient toujours cette proportion. Or le tiers de cette différence, diviſé par le dégré le plus proche de l'équateur, détermine l'ellipticité, & je réduis cette fraction, ſans en changer la valeur, à une fraction dont le numérateur eſt l'unité.

Explication des deux tables ſuivantes.

301. Je propoſerai donc deux tables: la premiere a ſept colonnes, dont la premiere contient par ordre les noms des dégrés; la ſeconde, leur latitude; la troiſieme, la moitié du ſinus verſe d'une latitude double; la quatrieme, le nombre

---

On voit de part & d'autre l'action des montagnes ſur le fil à plomb du ſecteur (nous en avons déja fait mention dans la note du n°. 65, Liv. I). Si l'on compare les deux premiers dégrés du P. *Beccaria*, qui ſe touchent, le différence eſt de 915 toiſes; différence qui ſurpaſſe celle des dégrés meſurés ſous l'équateur & le cercle polaire, au lieu qu'elle ne devroit être que d'un très petit nombre de toiſes. Le fil à plomb, attiré vers le nord par les montagnes des Alpes, a changé de direction, & renvoyé du côté oppoſé le zénith qu'il indiquoit, en le rapprochant de celui de *Turin*: d'où il eſt arrivé que l'arc intercepté par les deux zéniths, s'eſt trouvé trop petit & le dégré trop grand. Pour évaluer l'action de ces montagnes, nous ſuppoſerons en ce lieu un dégré qui répond à peu près à cette latitude, déduit du précédent, & d'autres dégrés meſurés ailleurs, ſavoir de 57095 toiſes: c'eſt le plus qu'on puiſſe lui donner, & il devroit plutôt être moindre. On en déduit l'arc par cette analogie: 57095 eſt à 57990, comme l'arc qu'on a trouvé de 27′ 4″, = 1624″, eſt à 1649″ qu'on auroit du avoir. La différence eſt 25″, & c'eſt auſſi la différence par excès de l'attraction des montagnes vers le nord à *Andrate*, ſur leur attraction à *Turin*. Elle eſt plus grande que celle de la montagne de *Chimboraço* en Amérique; mais c'eſt encore peu de choſe, eu égard à la grandeur de ces montagnes: ce qui prouve, ou qu'il y a dans ces montagnes mêmes de grandes cavernes, ou que la Terre eſt beaucoup plus denſe vers le centre que vers la ſurface.

Des montagnes plus petites ont une action moindre à la vérité, mais qui ne laiſſe pourtant pas d'être aſſez conſidérable. C'eſt ce qui ſe voit dans deux dégrés du P. *Lieſganig*, l'un entre *Gratz* & *Vienne*, l'autre entre *Gratz* & *Varadin*. Ces dégrés, quoique contigus, different de 442 toiſes.

de toiſes de chaque dégré ; la cinquieme, leur excès ſur le premier dégré dont la latitude = o ; la ſixieme, ce même excès calculé dans l'hypotheſe de la proportionalité avec les ſinus verſes ; la ſeptieme, l'erreur ou la différence de l'excès calculé à l'excès obſervé. Cette premiere table nous donnera le moyen de conſtruire la ſeconde, qui n'a que trois colonnes ; dont la premiere contient les rangs des dégrés combinés ; la ſeconde, l'excès qu'on en conclut pour un dégré ſous le pôle ſur un dégré proche l'équateur ; la troiſieme, la fraction que donne le tiers de cet excès diviſé par le premier dégré, c'eſt-à-dire l'ellipticité. L'excès du dégré de M. l'Abbé *de la Caille* ſur le nôtre, prouve l'allongement de la figure. C'eſt pour cela que dans la ſeconde table j'ai marqué du ſigne négatif ſa différence & ſon ellipticité comparée à celle de notre

---

Il nous eſt encore venu depuis peu un autre dégré, meſuré dans l'Amérique ſeptentrionale par MM. *Maſſon* & *Dixon*, dans la latitude de 39°, 12′, & qui s'eſt trouvé de 56888 toiſes de *Paris*. On le voit dans les Tranſactions philoſophiques, *année* 1768, *tome* 58, *page* 327. Il y a en cet endroit une table de pluſieurs dégrés, du nombre deſquels ſont le premier dégré du P. *Beccaria*, & un dégré moyen du P. *Lieſganig*, tels qu'ils les ont eux-mêmes envoyés à la Société royale, avec une réduction d'un petit nombre de toiſes. On y voit auſſi deux dégrés choiſis ſur tous ceux qui ont été meſurés en France. Les deux dernieres colonnes font connoître les Auteurs de la meſure, & l'année où elle a été faite. Nous propoſons ici cette table dont nous ferons uſage dans les notes ſuivantes.

Dégrés en toises.	Latitude moyenne.	Année de la meſure.	Auteurs de la meſure.
57422	66°. 20′ ſept.	1736 & 1737	M. *de Maupertuis*.
57074	49 . 23	1739 & 1740	MM. *de Maupertuis* & *Caſſini*.
57091	47 . 40	1768	Le P. *Lieſganig*.
57028	45 . 0	1739 & 1740	M. *Caſſini*.
57069	44°. 44	1768	Le P. *Beccaria*.
56979	43 . 0	1752	Les PP. *Boſcovich* & *Maire*.
56888	39 . 12	1764 & 1768	MM. *Maſſon* & *Dixon*.
56750	00 . 00	1736 & 1743	MM. *de la Condamine* & *Bouguer*.
57037	33 . 18 mérid.	1752	M. l'Abbé *de la Caille*.

dégré, & que j'ai donné le même ſigne à ſon erreur dans la premiere table que voici.

Dégré.	Latitude.	½ ſin. verſ. pour un ray. de 10000.	Nombre de toiſes.	Différence au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
De Quito . . .	0°. 0′	0	56751	0	0	0
Du Cap de B. E.	33 . 18	2987	57037	286	240	—46
De Rome . . .	42 . 59	4648	56979	228	372	144
De Paris . . .	49 . 23	5762	57074	323	461	138
De Lapponie .	66 . 19	8386	57422	671	671	0 (1)

Irrégularité de la premiere.

302. Dans la derniere colonne de cette table on voit de combien les dégrés intermédiaires s'écartent de la raiſon doublée des ſinus des latitudes, ou de la raiſon des ſinus verſes des latitudes doubles, ſuppoſé que le premier & le dernier

(1) A cette table nous en ſubſtituerons une plus grande, tirée des 9 dégrés de la note précédente, n°. 299, & nous mettrons ici le dégré de M. *de la Caille* dans le rang que requiert ſa latitude, comme ſi cette latitude étoit ſeptentrionale. L'ordre des dégrés eſt indiqué par les nombres naturels, en commençant par le dégré de l'équateur. Nous ferons uſage de cette table dans la note ſur le n°. 303.

Ordre des dégrés.	Valeur des dégrés.	Latitude.	½ du ſinus verſe d'une latit. double pour le ray. 10000.	Différence obſervée au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
1	56750	00°. 00′	0000	000	000	00
2	57037	33 . 18	3015	287	242	—45
3	56888	39 . 12	3995	138	320	192
4	56979	43 . 0	4651	219	373	144
5	57069	44 . 44	4954	319	397	78
6	57028	45 . 0	5000	278	401	123
7	57091	47 . 40	5465	341	438	97
8	57074	49 . 23	5762	324	462	138
9	57422	66 . 20	8389	672	672	0

ſoient juſtes. La différence calculée du troiſieme & du quatrieme dégré étant poſitive, celle du ſecond eſt négative. Quand même il arriveroit quelque léger changement dans le premier & le dernier dégré, le ſecond ne s'éloigneroit pas ſenſiblement de ce rapport. Il n'en eſt pas ainſi du troiſieme & du quatrieme : la différence eſt déja trop ſenſible pour qu'on puiſſe les concilier avec la raiſon doublée. Voyons maintenant dans la ſeconde table l'excès du dernier dégré ſur le premier provenant de la comparaiſon des dégrés pris deux à deux, & l'ellipticité qui en réſulte.

Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle ſur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.	Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle ſur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.
1 . 5	800	$\frac{1}{213}$	2 . 4	133	$\frac{1}{128}$
2 . 5	713	$\frac{1}{239}$	3 . 4	853	$\frac{1}{200}$
3 . 5	1185	$\frac{1}{144}$	1 . 3	491	$\frac{1}{347}$
4 . 5	1327	$\frac{1}{128}$	2 . 3	—350	$-\frac{1}{486}$
1 . 4	542	$\frac{1}{314}$	1 . 2	957	$\frac{1}{78}$

303. On pourroit auſſi comparer le dégré du parallele meſuré par MM. *Caſſini de Thury* & *de la Caille* avec ceux qu'on voudroit de ces dégrés, par le problême du n. 280. Mais un dégré du parallele ne peut ſe meſurer avec une préciſion ſuffiſante. Or on voit par cette table quelle eſt l'irrégularité des

Irrégularité de la ſeconde.

Cette ſuite, comme on voit, n'eſt point réguliere ; ce qui vient de l'irrégularité de tiſſure des parties internes de la Terre, & des inégalités de ſa ſurface. Les erreurs ci deſſus ne ſont aſſurément point légeres, quoi qu'en diſent quelques Auteurs qui les attribuent à des obſervations dont ils ne connoiſſent pas le dégré de certitude, n'en ayant jamais fait de ſemblables. Il eſt aiſé de ſe convaincre par la lecture de ce Livre, que pour peu qu'un Obſervateur ſoit attentif, les erreurs commiſes dans ſes obſervations ne produiront pas dans le dégré une différence de 20 toiſes. Nous pourrions ajouter auſſi à la table du n°. ſuivant un ſupplément pour en tirer une ellipticité moyenne ; mais ce ſupplément même ſe trouvera beaucoup mieux placé dans la note ſur le n°. 303.

dégrés, puiſqu'ils donnent des combinaiſons ſi différentes. Si l'on prend un milieu entre ces dix combinaiſons, le tiers de l'excès moyen ſera 222, qui donne pour l'ellipticité $\frac{1}{155}$. Mais ſi l'on rejette la ſixieme & la neuvieme qui ſont ſi différentes des autres, & dont les dégrés ſont peu éloignés entre eux, le milieu ſera 286, & l'ellipticité $\frac{1}{198}$. Mais ce milieu même differe encore beaucoup de pluſieurs d'entre ces huit déterminations (1).

Que ces dégrés ne ſont point ceux d'une ellipſe.

304. Ainſi il eſt évident que les déterminations de ces dégrés ne peuvent ſe concilier avec l'ellipſe de *Newton*, ni avec aucune ellipſe plus ou moins applatie. Car cinq dégrés pris à volonté devroient toujours donner la même ellipſe; or l'on voit par le peu d'accord qu'ils ont entre eux, que les différences obſervées ne ſont point proportionnelles aux ſinus verſes des latitudes doubles. Si elles l'étoient, chaque combinaiſon de dégré, ainſi que nous l'avons dit, donneroit la même ellipticité.

M. *Euler* tâche de les concilier.

305. Il y en a qui pour concilier toutes choſes font violence aux obſervations; comme a fait récemment le célebre M. *Euler* dans un Mémoire dont M. *de la Condamine*, actuellement à *Rome*, m'a fait l'honneur de me communiquer le précis. L'Auteur retranche 19 toiſes à chacun des dégrés de Lapponie, d'Afrique & de *Quito*; & moyennant cette diminution, il les concilie avec l'ellipſe newtonienne. Mais il ne lui faut pas moins qu'une correction de 169 toiſes pour le dégré de M. *Picart*, qu'il dit pour cela même lui être fort ſuſpect, de ſorte qu'il deſire qu'on faſſe de nouvelles opérations en France. Mais il n'eſt pas vraiſemblable qu'il puiſſe ſe trouver une ſi grande erreur dans des opérations faites avec tant de ſoins, & par de ſi habiles Aſtronomes. On a déterminé en France tant de dégrés par le moyen de pluſieurs baſes ſi ſouvent vérifiées, & de tant d'obſervations réitérées, qui s'écartent unanimement de la meſure que deman-

(1) La note relative à ce n°. eſt trop longue pour pouvoir être inſérée ici: on a jugé plus à propos de la mettre à la fin de ce Livre en forme d'appendix.

deroit M. *Euler*, qu'il ne paroît pas qu'on puiſſe faire avec fondement un changement ſi conſidérable au dégré de France. D'ailleurs la différence qui ſe trouve entre ces dégrés comparés entre eux, & à celui de M. *Picart*, eſt trop inférieure à celle qu'il faudroit ſuppoſer pour cette erreur prétendue. Enfin notre dégré d'Italie s'accorde trop bien avec celui de M. *Picart* (puiſqu'il en differe de 95 toiſes pour une différence de 6°, 23′ en latitude; ce qui revient à 15 toiſes, ou environ, pour chaque dégré, comme cela doit être) pour que le ſentiment de M. *Euler* ait de la vraiſemblance. Ceci paroîtra encore plus évident, ſi l'on ſe rappelle ce que j'ai expoſé dans le quatrieme Livre touchant les limites où doivent être renfermées les erreurs que l'on pourroit craindre aujourd'hui dans de pareilles opérations (1).

306. Il y en a qui ont recours à d'autres hypotheſes: telle eſt celle de M. *Bouguer*, ſuivant laquelle les augmentations des dégrés ſont, non plus comme les quarrés, mais comme les quarrés de quarrés des ſinus de la latitude. Mais cette hypotheſe, qui d'ailleurs s'accorde aſſez bien avec les dégrés de Lapponie, de France, du Pérou & d'Italie, eſt détruite par celui que M. l'Abbé *de la Caille* a meſuré au *Cap* de Bonne Eſpérance (2). Ajoutez qu'il n'y a aucune cauſe phyſique ſur laquelle on puiſſe appuyer cette proportion plutôt qu'une autre. Au reſte M. *Bouguer* réſoud généralement par le calcul infinitéſimal, le problême dans lequel étant donnée la ſuite des dégrés, on cherche la courbe; & de cette ſolution générale il déduit quelques cas particuliers, nommément celui dont nous venons de parler, & dont l'hypotheſe lui réuſſit pour lors, mais qui ne peut plus abſolument ſubſiſter, comme

Hypotheſe de M. *Bouguer*. Déterminer la courbe par les dégrés.

(1) Depuis l'impreſſion de cet ouvrage on a vérifié encore ce dégré, & l'on n'y a trouvé aucune différence.

(2) M. *de la Condamine* l'avoit prédit. *N'y a-t-il pas lieu de craindre*, dit-il, *que la meſure d'un nouveau dégré, que j'oſe prévoir que nous aurons bientôt & de bonne main, ne nous oblige à chercher un nouveau rapport qui ne conviendroit peut-être pas mieux aux différences obſervées entre les longueurs du pendule à différentes latitudes?* Meſ. des trois prem. dég. du mérid. art. 30.

je l'ai dit, depuis les opérations de M. l'Abbé *de la Caille*. Comme ce problême eſt curieux, j'en vais donner une conſtruction, ſans autre ſecours que celui de la Géométrie pure dont je me ſuis juſqu'ici contenté; & après que j'aurai comparé quelques dégrés, je propoſerai mon ſentiment dont j'ai déja inſinué quelque choſe dans le premier Livre ſur la figure de la Terre.

Par le développement d'une courbe. Pl. IV. fig. 25.

307. Pour trouver le méridien par les dégrés, conſidérez dans la figure 25 le quart FHG de la circonférence d'une courbe qui par ſon développement produit le quart ADB d'un méridien. Soit une tangente quelconque HD de cette développée, qui rencontre le demi-diametre AC de l'équateur au point M, & le méridien en D, & qui doit être égale au rayon du cercle oſculateur de la courbe en D, & à l'arc HF ajouté au premier rayon FA. Soit une partie de cet arc infiniment petit H*h*, qu'on pourra prendre pour une partie de la tangente continuée; menez HL, *hl*, DE perpendiculaires à AC, & *h*I parallele à la même ligne AC.

Trouver la développée.

308. L'angle EMD exprime la latitude du lieu, puiſque MA prolongée aboutit à l'équateur, & MD au zénith. Ainſi l'angle H*h*I, qui eſt égal à l'angle interne & oppoſé *h*M*l*, & par conſéquent à l'angle EMD, ſera égal à la latitude du lieu. Donc H*h* eſt à HI, comme le rayon au ſinus de la latitude; & H*h* eſt à *h*I ou *l*L, comme le rayon au co-ſinus de cette latitude. Or H*h* eſt l'augmentation de l'arc FH, & par conſéquent du rayon du cercle oſculateur, qui eſt donné par-là même qu'on connoît le dégré pour une latitude quelconque. On aura donc un moyen très facile de conſtruire le problême par la quadrature des courbes. Car de l'analogie précédente, il ſuit que le rectangle ſous H*h*, & le ſinus de la latitude, eſt égal au rectangle ſous le rayon, & l'augmentation HI de l'ordonnée LH; & que le rectangle ſous H*h*, & le co-ſinus de la latitude, eſt égal au rectangle ſous le rayon, & *h*I ou L*l*, qui eſt l'augmentation de l'abſciſſe FL. D'où il ſuit que l'ordonnée entiere LH eſt égale à la ſomme des premiers rectangles, diviſée par le rayon, & que l'abſciſſe entiere FL eſt égale à la ſomme des derniers, diviſée de même par le rayon; c'eſt-à-dire que l'une & l'autre eſt égale

à

à une aire donnée, (puiſqu'on connoît tous les rayons des cercles oſculateurs qui répondent à toutes les latitudes), diviſée par une ligne donnée.

309. Soit par exemple (fig. 26) ADA′ un quart-de-cercle, dont le rayon FA ſoit égal au rayon FA de la figure 25, qui eſt le rayon du cercle oſculateur en A ſous l'équateur, & déterminé par le premier dégré pris ſous l'équateur même. Ayant coupé ſur AF, A′F prolongées un rayon oſculateur AH, A′H′, pour une latitude quelconque exprimée dans la figure 26 par l'arc AD; menez DI, HI paralleles à AF, F′A′, & qui ſe rencontreront en I, & DI′, H′I′ paralleles à A′F, FA, & qui ſe rencontreront en I′. Si par tous les points I, I′ on trace les courbes FIL, AI′M′, ces courbes ſeront données, puiſqu'on aura par les latitudes tous les rayons de courbure. Prenons maintenant dans la figure 25 une abſciſſe FL égale à l'aire AFH′I′ de la figure 26, diviſée par FA; & dans la même figure 25 une ordonnée LH égale à l'aire FHI (fig. 26), pareillement diviſée par FA; le point H (fig. 25) ſera à la courbe FHG, qui eſt la développée de la courbe cherchée ADB, de ſorte que ſi on l'entoure en GHF d'un fil augmenté de la longueur FA égale à FA de la figure 26, on pourra décrire par ſon développement cette courbe cherchée. Conſtruction. Pl. IV. fig. 25. 26.

310. Car H*h* & H′*h*′ (fig. 26) doivent être égales à H*h* de la figure 25; de plus ſi les lignes DI, *di*, DI′, *di*′ rencontrent les rayons FA, FA′ en E, *e*, E′, *e*′, les ſinus & co-ſinus de la latitude ſeront DE & DE′, ou HI & H′I′; & par conſéquent les petites aires I′H′*h*′*i*′, IH*hi* doivent être égales aux produits du rayon FA par les petites lignes HI, *h*I (fig. 25). D'où il ſuit que les aires entieres AFH′I′, FHI (fig. 26) ſont égales aux produits de FA par les lignes entieres FL, HL (fig. 25); c'eſt-à-dire que FL, HL doivent être égales à ces aires diviſées par FA. Or on les a pris préciſément de cette longueur. Démonſtration.

311. Ceci revient à la ſolution générale de M. *Bouguer* qui diſcute avec une très grande ſagacité pluſieurs points qui ſervent à l'éclaircir, & qui examine pluſieurs hypotheſes particulieres. Il s'attache principalement à deux: la premiere eſt celle dans laquelle les accroiſſemens des dégrés, ou des lignes Premiere hypotheſe de M. *Bouguer*.

telles que FH (fig. 26) ſont comme les quarrés des ſinus de la latitude; & la ſeconde celle où ils ſont comme les quarrés-quarrés de ces ſinus. Il avoit trouvé que la premiere hypotheſe, qui eſt la même que celle qui a lieu dans la théorie de *Newton*, ſuppoſé que la Terre ſoit de figure elliptique, s'accordoit avec tous les dégrés qu'on avoit juſqu'alors meſurés, celui de la Lapponie, celui de *Quito*, & même celui de France meſuré par M. *Picart*, & réformé par les obſervations aſtronomiques des Académiciens qui étoient revenus du cercle polaire, & qui lui avoient aſſigné 57183 toiſes. Ce dégré ainſi corrigé s'accordoit aſſez bien avec cette hypotheſe; & ce qui confirmoit le plus M. *Bouguer* dans ſon ſentiment, c'eſt qu'en déterminant par-là la grandeur du ſphéroïde, le dégré même du parallele, meſuré par MM. *de Thury* & *de la Caille*, s'accordoit à 11 toiſes près avec celui que donne le calcul.

Seconde hypotheſe du même Auteur.

312. Mais on découvrit peu après que M. *Picart* ne s'étoit pas ſeulement trompé dans les obſervations aſtronomiques, mais encore dans les meſures géodéſiques qu'on a répétées pour cette raiſon pluſieurs fois, & avec toute l'exactitude poſſible; d'où l'on a connu enfin que les erreurs de M. *Picart* s'étoient, par le plus grand bonheur du monde, compenſées mutuellement, & que le dégré qu'il avoit trouvé de 57060 toiſes, étoit de 57074. Pour lors il fallut abandonner cette hypotheſe & en chercher une nouvelle. Or M. *Bouguer* a trouvé que les différences du dégré de *Quito* à ceux de Lapponie & de France, ſuivoient à peu près le rapport des quarrés-quarrés, ou quatriemes puiſſances des ſinus des latitudes. Il a donc embraſſé cette hypotheſe, & il a donné une ſolution du problême pour ce cas particulier.

Elle eſt détruite par le dégré de M. l'Abbé *de la Caille*.

313. Notre dégré même d'Italie ne s'écarte pas beaucoup de la nouvelle hypotheſe; car dans la ſeconde table de l'Auteur, page 305, on trouve que pour une latitude de 43°, le dégré du méridien eſt de 56961 toiſes; & le nôtre qui eſt ſitué dans la même latitude, eſt de 56979; ce qui ne donne qu'une différence de 18 toiſes. Le dégré du parallele ne s'en écarte pas non plus de beaucoup: ſuivant la table de M. *Bouguer* il devroit être de 41633 toiſes; on l'a trouvé de 41618;

la différence n'eſt que de 15 toiſes. Mais le dernier dégré de MM. *Caſſini* & *de la Caille* s'en éloigne bien plus ; car il eſt de 57048 toiſes pour une latitude de 43°, 31′, tandis que ſuivant la table de M. *Bouguer* il ne devroit être que de 56969, c'eſt-à-dire moindre de 79 toiſes. Néanmoins M. *Bouguer* ne s'en inquiétoit pas beaucoup, puiſqu'il n'a fait aucune mention de cette différence, quoique *la Méridienne de France vérifiée* de M. *Caſſini* eût déja paru cinq ans auparavant. Mais le dégré que vient de meſurer M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Eſpérance contrarie bien davantage la nouvelle hypotheſe : il ne devroit être, ſuivant la table de M. *Bouguer*, que de 56841 toiſes dans une latitude de 33°, 18′ ; M. *de la Caille* l'a trouvé de 57037, ou de près de 200 toiſes plus long ; ce qui renverſe totalement l'hypotheſe dont nous parlons.

Ce dégré s'accorde avec la premiere hypotheſe ; au contraire des autres dégrés.

314. Ce dégré de M. l'Abbé *de la Caille* eſt bien plus conforme à la premiere hypotheſe, dans laquelle les accroiſſemens des dégrés ſont proportionnels aux quarrés des ſinus de la latitude. Car dans la premiere table de M. *Bouguer*, il eſt de 56986 toiſes, & ne differe par conſéquent que de 51 toiſes de la meſure de M. l'Abbé *de la Caille ;* différence qui ſeroit encore bien moindre ſi l'on faiſoit quelque petit changement aux dégrés de *Quito* & de Lapponie ; mais, comme nous l'avons vu, ceux de France & d'Italie y répugnent ſi fort, & s'accordent tellement entre eux, qu'on ne peut abſolument *ſuſpecter* les obſervations. De quelque côté qu'on ſe tourne, on ne voit rien de régulier, rien de fixe ni de conſtant.

Inutilité de pluſieurs autres hypotheſes.

315. A ces hypotheſes défectueuſes on pourroit en ſubſtituer ſucceſſivement pluſieurs autres qui s'accordaſſent avec un plus grand nombre de dégrés, ou déduire de toutes les opérations qui ont été faites juſqu'ici la courbe décrite par la développée de la figure 25, en ne prenant que ceux de ſes points qui ſont déterminés par les dégrés dont nous avons la meſure, leſquels ne ſeroient pas en ſi petit nombre, ſi l'on vouloit faire uſage de tous les dégrés du n. 299 ; enſuite on pourroit trouver les rayons oſculateurs des courbes déterminées par une gravité dirigée à un centre donné. Dans le chapitre

précédent nous avons recherché la nature de ces courbes pour déterminer la loi de gravité qui donne ces sortes de dégrés ; mais l'application de la méthode donneroit ici lieu à plusieurs difficultés ; & il est très probable que la loi de gravité qui donneroit ces dégrés, ne s'accorderoit pas avec l'augmentation de la gravité depuis l'équateur jusqu'au pôle, qui peut seule aujourd'hui déterminer cette loi.

Irrégularité de la figure prouvée par celle des dégrés.

316. La plus grande source d'irrégularité, c'est que les dégrés se trouvent quelquefois moindres à une plus grande distance de l'équateur ; ce qui n'arrive pas seulement dans une petite étendue de pays comme en France, où, suivant le n. 299, le dégré qui est à 45°, 45′ de latitude, est plus grand que celui qui est dans la latitude de 46°, 35′ ; mais à une distance bien plus grande, puisque le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Espérance dans la latitude de 33°, 18′, est plus grand que notre dégré d'Italie qui est par les 43°, 1′ de latitude ; d'où il faut conclure, ou que l'hémisphere austral est bien différent du septentrional, ou que la courbe décrite par la développée de la figure 25 est bien irréguliere, puisque si elle alloit toujours en se courbant vers le centre C, comme il est représenté dans la figure, les dégrés devroient toujours augmenter de l'équateur au pôle.

Hypotheses détruites par le dégré de *Rome*.

317. Indépendamment de tout cela, notre dégré comparé à celui de M. *Cassini* dans la partie méridionale de France, & presque dans la même latitude, détruit toutes ces hypotheses de gravité dirigée à un centre unique. Ces dégrés different entre eux de 69 toises, au lieu qu'ils devroient être à 7 ou 8 toises près de la même longueur, puisqu'en cette hypothese la courbe génératrice doit, comme nous l'avons vu, dans sa révolution autour de l'axe, être toujours égale & semblable à elle-même. Pour se désabuser de toutes ces hypotheses, il suffiroit de faire attention à ce que j'ai indiqué dans le chapitre précédent, savoir qu'on ne doit point faire pour chaque effet naturel autant d'hypotheses différentes, & que tous les phénomenes célestes qui prouvent la gravitation réciproque, sont trop opposés à l'hypothese d'une gravité dirigée à un centre unique.

319. De là il suit que notre dégré prouve l'existence d'une

loi de gravité dépendante de la disposition diverse des parties de la matiere à laquelle cette gravité se dirige, puisqu'on ne voit pas que l'inégalité des dégrés du méridien sous le même parallele puisse être attribuée à d'autre cause qu'au changement occasionné par les différentes dispositions de la matiere dans la direction des graves, & en même tems dans la courbure indiquée par l'équilibre. Notre dégré d'Italie est donc très favorable à la théorie de la gravité newtonienne: de plus, il en exclut toute homogénéité de la matiere, & toute progression réguliere de densité depuis le centre à la superficie, ou plutôt proche la superficie même, depuis l'équateur jusqu'au pôle, & prouve par-là même de l'irrégularité dans le tissu des parties. Si l'on compare entre eux les dégrés de France dont on voit la suite au n. 299, ils prouvent la même chose, puisque dans une si petite différence de latitude, leurs différences sont assez irrégulieres, comme on pourra s'en convaincre au premier coup d'œil, cette irrégularité étant trop grande pour pouvoir être attribuée au défaut de méthode ou d'exactitude dans les observations, dans un tems surtout où l'Astronomie est portée à un si haut point de perfection. On en trouve encore une preuve, ou pour mieux dire une démonstration, dans la comparaison de notre dégré avec celui du *Cap de Bonne Espérance* plus grand que le nôtre, quoiqu'il soit de dix dégrés plus proche de l'équateur; & ce qui acheve de nous convaincre de cette irrégularité, c'est l'exemple que j'ai apporté vers la fin du premier Livre des changemens qui arrivent dans les ouvrages de la nature, aussi simple dans tous ses élémens que variée dans leur assemblage.

Ce dégré prouve la gravité newtonienne.

320. Voici donc ce que je pense en général sur tout ceci. Je suis persuadé en premier lieu que l'entreprise formée de déterminer la grandeur & la figure de la Terre par la mesure des dégrés, loin d'être finie est à peine commencée. M. *de Maupertuis* crut d'abord pouvoir avec deux dégrés, celui de Lapponie & celui de France, terminer toute la question; & sans attendre davantage, il voulut satisfaire l'empressement du public sur un point qui tenoit toute l'Europe en suspens, en publiant sa détermination de la figure de la Terre: mais il a changé depuis de sentiment. Quelque tems après M.

Que la question sur la figure de la Terre n'est point encore résolue.

Bouguer, ſur les mêmes principes, mais avec des dégrés différens, à ſavoir le ſien & celui de Lapponie, crut également d'abord avoir fini la diſpute, vu ſurtout que ſa détermination s'accordoit avec les autres meſures qu'on avoit pour lors: mais il fut obligé enſuite de changer d'avis. Le dégré de M. *Picart* corrigé, M. *Bouguer* imagina une nouvelle hypotheſe, par laquelle il expliquoit tout, quoiqu'on ne pût en rendre aucune raiſon ni phyſique, ni méchanique. Enfin eſt venu le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* qui a renverſé cette hypotheſe de fond en comble. Le nôtre détruit encore plus efficacement quantité de points qu'on avoit regardés juſqu'ici comme indubitables, par exemple que tous les méridiens fuſſent égaux. Juſqu'à préſent plus on a meſuré de dégré, plus la figure de la Terre eſt devenue incertaine.

Avantages de la meſure des dégrés.

321. On a cependant retiré de grands avantages de ces opérations multipliées. Le premier eſt qu'on doit exclure toutes les hypotheſes d'une gravité tendante à un centre donné, dont notre dégré prouve l'inſuffiſance. Le ſecond, que cette irrégularité de courbure dans la courbe déterminée par l'équilibre, & ſur laquelle ſe prend la longueur des dégrés, rend beaucoup plus probable la gravitation réciproque des parties de la matiere: le troiſieme, que des dégrés meſurés juſqu'ici, on peut déja conclure très vraiſemblablement, que la Terre eſt applatie vers ſes pôles, puiſque tous les dégrés intermédiaires, je veux dire notre dégré d'Italie, celui de M. l'Abbé *de la Caille* en Afrique, & tous les dégrés de France, ſont plus petits que celui de la Lapponie, & plus grands que celui de *Quito*.

Ce qu'il y a encore d'incertain.

322. Mais juſqu'à quel point la Terre eſt elle applatie? Quelle eſt la forme de chaque méridien? Quelle eſt la progreſſion de la denſité depuis le centre à la ſuperficie? Autant de queſtions que nous ne pouvons réſoudre par la ſeule meſure des dégrés, non plus que la ſuivante: ſi dans les entrailles de la Terre il y a une grande irrégularité dans le tiſſu des parties de la matiere, ou ſi toutes ces inégalités & irrégularités de dégrés ſont l'effet de ces moindres inégalités que nous voyons à la ſuperficie. Bien plus, puiſque la meſure des dégrés détermine le dégré de courbure de la courbe de l'équilibre,

nous ne ſavons pas même au juſte ſi la courbe de l'équilibre rentre en elle-même, ou ſi elle tourne toujours en ſpirale, ſans jamais ſe rencontrer, comme il pourroit abſolument ſe faire. Car ſi l'on fait paſſer par la direction des graves, dans un lieu pris à volonté, & par le pôle, un plan quelconque, dans lequel on imagine une courbe qui parte de ce point, & qui ſoit dans tous ſes points perpendiculaire aux directions des graves, il eſt évident que dans la théorie de la gravitation univerſelle & réciproque, ſa courbure doit être irréguliere à cauſe des inégalités que forment les montagnes & les vallées, & du tiſſu irrégulier des parties de la Terre qui ſont proches de la ſuperficie; & cette irrégularité pourroit être ſi grande, que la ligne ſe courbât dans un ſens contraire, le cercle oſculateur devenant infini ou nul, ou même négatif, quoique cette courbe ne fût pas fort différente, ou même ne différât pas ſenſiblement d'un cercle ou d'une ellipſe; à moins peut-être que dans la ſuppoſition où la maſſe intérieure de la Terre ſeroit bien moins irréguliere, la peſanteur vers la maſſe totale ne prévalût au point de diminuer l'effet des irrégularités qui ſont proche la ſuperficie. Or l'irrégularité de la courbure eſt prouvée par celle des dégrés, quoique ces dégrés nous donnent auſſi lieu de croire que l'effet de ces inégalités eſt arrêté ſenſiblement par une force prépondérante de la maſſe, puiſque cette irrégularité même des dégrés eſt très peu de choſe, comparée à la grandeur des dégrés. Avec tout cela néanmoins il pourroit ſe faire que la courbe de l'équilibre, par un changement continuel dans ſa courbure, qui pour être petit, ne ſeroit pas tout à fait inſenſible, après avoir fait un tour entier ſur ce plan, ne rentrât point en elle-même, mais que paſſant au-deſſus ou au-deſſous de ce point, elle ſe développât ou ſe repliât à l'infini. Nous ignorons abſolument ſi un pareil effet a lieu dans la nature.

Que les irrégularités de la Terre ſont fort près de ſa ſurface.

323. En général il n'y a rien de certain ſur la figure de la Terre, ſi l'on ne fait attention qu'aux meſures des dégrés; mais ſi on leur ajoute les longueurs des pendules iſochrones, que nous avons déja par des obſervations aſſez exactes, nous pouvons conjecturer fort vraiſemblablement que les irrégularités dans le tiſſu des parties ſont plus grandes à la ſurface,

& près de la surface, que dans les entrailles de la Terre; car celles de la surface, comme nous l'avons vu (n. 243), causent beaucoup plus d'irrégularité dans la grandeur des dégrés que dans l'allongement du pendule, tout au contraire des autres; & nous avons déja vu que les longueurs du pendule s'accordent assez bien avec une figure réguliere & elliptique de la Terre, mais que les longueurs des dégrés sont fort irrégulieres.

D'une gravité égale à égales distances.

324. On peut encore conclure que les observations faites jusqu'ici ne sont pas, comme quelques-uns le croient, contraires à l'hypothese d'un noyau d'une densité égale, à égales distances du centre. M. *Clairaut* a démontré, & on peut le déduire de nos démonstrations du n. 221 & suivans, que si la différence de la gravité sous l'équateur & le pôle, divisée par le total de la gravité, donne une fraction qui surpasse $\frac{1}{230}$ du tout, comme il devroit arriver dans le cas d'homogénéité, & que le noyau soit également dense à égales distances du centre, & dans l'hypothese de la gravité newtonienne; la densité moyenne du noyau surpassera celle des mers, mais que l'ellipticité sera moindre que $\frac{1}{230}$, quantité qui a lieu dans l'hypothese d'homogénéité. Or il a trouvé que cette fraction étoit réellement plus grande, & il assure d'autre part que la mesure des dégrés donne une ellipticité plus petite; d'où il conclut qu'on ne peut concilier ces deux choses qu'en supposant un certain dégré d'ellipticité dans le noyau. Nous avons aussi trouvé cette fraction plus grande (n. 251), à savoir $\frac{1}{176}$; mais en prenant un milieu entre les dix combinaisons du n. 302, nous en avons tiré une ellipticité qui est non pas plus grande que $\frac{1}{230}$, mais plus petite, savoir $\frac{1}{255}$. Il est vrai que suivant le n. 251, la premiere fraction $\frac{1}{176}$ donneroit pour l'ellipticité de la premiere hypothese $\frac{1}{337}$, moindre encore que $\frac{1}{255}$; mais sans recourir à cette hypothese, il est certain premierement que si on prend un milieu entre toutes les combinaisons des cinq dégrés, comme cela doit se faire, on aura une fraction moindre que $\frac{1}{230}$; en second lieu, que si l'on suppose de légeres différences dans la direction des graves, & dans la force de la gravité, occasionnées par les irrégularités qui sont proche la superficie de la Terre, il pourra aisément arriver

arriver qu'en diminuant d'un côté la premiere fraction déterminée par les longueurs du pendule, ce qui augmentera l'ellipticité; & diminuant d'autre part l'ellipticité moyenne provenante des combinaisons des dégrés, on trouve le moyen de concilier le tout, & de ramener les choses à l'égalité.

Moyen de rendre plus exacte la mesure des dégrés.

325. Mais nous n'avons encore que cinq observations exactes sur la longueur du pendule, & autant de dégrés mesurés avec précision; il est à souhaiter qu'on augmente de beaucoup le nombre des uns & des autres; & pour ce qui regarde la mesure des dégrés, il y a moyen de leur sauver l'erreur causée par les irrégularités qui sont proche la superficie; c'est premierement de faire les observations astronomiques au sommet des montagnes plutôt que dans les plaines; car alors tout ce qu'il pourroit y avoir de matiere plus dense, ou de vuides souterreins proche la superficie, agissant plus obliquement sur un poids placé sur une hauteur, causeroit beaucoup moins de déviation dans le fil à plomb des instrumens astronomiques. Si de plus on fait des observations astronomiques dans toutes les stations, du moins dans plusieurs des plus élevées, il arrivera que ces irrégularités agissant en sens contraires, on pourra, en prenant un milieu, déterminer avec beaucoup plus de certitude la longueur précise de chaque dégré. Je n'ignore pas que ceci engage à bien plus de travail & de dépense; car il faudroit bâtir sur ces montagnes autant de petits observatoires de bois; il faudroit y faire de longues stations; mais il n'y a rien dont ne puisse venir à bout la patience des Astronomes & la magnificence des Rois.

Du noyau elliptique: de la gravité newtonienne.

326. Que si après un grand nombre d'observations de cette espece on trouvoit que la fraction moyenne, tirée des longueurs du pendule, & l'ellipticité moyenne des dégrés excédassent $\frac{1}{230}$, ce ne seroit pas encore une preuve qu'on dût nécessairement recourir à l'ellipticité du noyau. Ma seconde hypothese, dans laquelle la masse du centre agit en raison directe des distances, demande une ellipticité qui, suivant le n. 224, est toujours égale à une fraction déterminée par la gravité. D'ailleurs si des dix combinaisons de dégrés on rejette la sixieme & la neuvieme, par les raisons que nous avons dites au n. 303, & qu'on rende par-là l'ellipticité égale à $\frac{1}{195}$;

comme celle qu'on tire des pendules isochrones, est, suivant le n. 251, égale à $\frac{1}{176}$, ces valeurs n'ont pas entre elles beaucoup de différence. Je sais que cette hypothese d'une masse agissante ainsi du centre, est une hypothese arbitraire, & qu'elle n'a aucune liaison avec les autres phénomenes de la nature; mais l'ellipticité du noyau, qui doit tout concilier, n'est pas moins arbitraire, puisqu'on pourroit tirer le même avantage de plusieurs autres figures. D'un autre côté je ne crois pas même qu'il soit fort sûr qu'à une si grande proximité de la surface de la Terre, la loi de la gravité suive d'assez près la raison inverse des quarrés des distances. Dans l'opinion où je suis, que les forces mutuelles de tous les points de la matiere sont toutes exprimées par une courbe que j'ai proposée dans quelques Dissertations, je crois que dans les plus grandes distances, comme celles des planettes au Soleil, ou de la Lune à la Terre, elle suit à très peu près ce rapport, & qu'elle s'en écarte extrêmement dans les plus petites. Il pourroit se faire que dans ces distances moyennes qui nous séparent des autres parties de la Terre, nous qui sommes placés à sa surface, elle s'en écartât assez pour que le total des forces égalât l'action d'un noyau sphérique homogêne à égales distances du centre, joint à une masse placée au centre, & agissant en raison directe des distances. S'il en étoit ainsi, les choses se concilieroient d'elles-mêmes.

Effet d'une augmentation de densité de l'équateur au pôle.

327. De plus, si la densité augmentoit continuellement, & suivant une progression réguliere de l'équateur au pôle, dans une couche de terre d'une certaine épaisseur, & placée auprès de la surface, elle pourroit augmenter considérablement l'inégalité du pendule, sans changer sensiblement celle des dégrés. Car, comme nous l'avons vu (n. 233), une masse équivalente à une sphere de huit mille de rayon, augmenteroit d'une ligne la longueur du pendule, & une couche continue l'augmenteroit beaucoup plus; mais si cette couche augmente dans une certaine proportion de l'équateur au pôle, à peine causera-t-elle quelque déviation dans le pendule, puisque cette déviation dépend de la seule différence qui se trouve entre la densité de la partie méridionale de la couche, & celle de sa partie septentrionale. Or elle changera encore

incomparablement moins la mesure des dégrés, puisque ce changement n'est occasionné que par la différence qui se trouve entre les déviations du pendule, d'une extrémité de l'arc à l'autre, lesquelles sont déja par elles-mêmes si petites.

328. Or ces deux causes, à savoir dans la gravité le changement de la raison inverse des quarrés des distances, & dans la densité une augmentation proche la superficie de la Terre, suivant une progression réguliere & simple, ou irréguliere, mais compliquée à proportion, ces causes, dis-je, pourront servir à expliquer les phénomenes qu'on pourra découvrir dans la suite par un plus grand nombre d'observations, tant sur les pendules isochrones que sur les dégrés, supposé que les uns & les autres soient tels que leurs différences soient dans la raison des quarrés des sinus de la latitude, mais ne donnent pas les mêmes valeurs pour l'ellipticité de la Terre, ou qu'elles ne soient pas même dans la raison des quarrés de ces sinus.

Deux causes qui serviront à expliquer les phénomenes.

329. Reprenons en peu de mots. Je suis convaincu que suivant les observations faites jusqu'ici, il est très probable que la Terre est applatie vers les pôles; qu'à la distance où nous sommes du centre de la Terre, il est très certain que la courbure de la surface, perpendiculaire à la direction des graves, est irréguliere; & que pour ce qui est de la véritable figure d'une surface réguliere, à laquelle on réduiroit celle de la Terre, en ôtant toutes les inégalités des montagnes & des vallées, elle est encore très incertaine, & qu'on ne sait pas mieux jusqu'à quel point la Terre est applatie vers les pôles.

Conclusion.

330. La connoissance exacte de la vraie ellipticité de la Terre sera un jour le fruit d'un long travail & d'un grand nombre d'observations & de savantes méditations. Pour la déterminer il ne faudra pas se borner à comparer entre eux, comme nous l'avons fait, les pendules isochrones & les mesures des dégrés; il faudra comparer encore les phénomenes du flux & du reflux de la mer, de la précession des équinoxes, & des parallaxes de la Lune, qui dépendent tous de la même cause. Cependant pour ce qui est des parallaxes de la Lune, je n'en espere que très peu, vu que l'augmentation d'un mille

Ce qui a rapport à l'ellipticité de la Terre.

dans l'élévation de la ſurface, ne produiroit dans la parallaxe horizontale de la Lune qu'une différence d'une ſeconde, de ſorte que l'ellipticité entiere, qui, ſuivant *Newton*, ne paſſe pas 17 milles, changeroit à peine de 8 à 10 ſecondes cette parallaxe dans le méridien. Or quand il eſt queſtion d'un phénomene tel que cette parallaxe, qui ne peut preſque jamais s'obſerver immédiatement, mais qui ſe doit déterminer en grande partie par les mouvemens de la Lune, j'ai peine à croire qu'on puiſſe jamais l'évaluer à quelques ſecondes près; mais tout cela demanderoit une trop longue diſcuſſion.

Solution plus ſimple du problême propoſé n. 280.

331. Je finis par une ſolution très facile du problême que j'ai repréſenté au n. 280 comme extrêmement difficile, & dont j'ai indiqué une ſolution analytique dans le même endroit; c'eſt celui où étant donné un dégré d'un parallele dans une latitude, & un dégré du méridien dans une autre, on demande l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe génératrice. S'il s'agit de le réſoudre univerſellement pour une ellipticité quelconque, quelque grande qu'elle ſoit, on ne peut diſconvenir que le problême ne ſoit très compliqué; mais s'il n'eſt queſtion que d'une petite ellipticité, telle qu'il nous la faut ici, on peut en donner une ſolution très ſimple, qui ne s'eſt préſentée à moi qu'après que le reſte de l'ouvrage a été imprimé. Cette ſolution dépend du théorème ſuivant: *ſi l'ellipticité eſt petite, la différence de la moitié du parametre de l'un des axes à la moitié de l'axe conjugué, eſt à la différence de cette moitié de parametre à la perpendiculaire terminée au premier axe, à très peu près dans la raiſon doublée du rayon au co-ſinus de la latitude.*

Démonſtration, Pl. IV. fig. 23.

332. Ce théorème ſe démontre aiſément par ce qui a déja été démontré (n. 278), ſavoir que ſi FI (fig. 23) eſt perpendiculaire à la courbe, la ligne FL parallele à CA ſera égale à la moitié du parametre de l'axe E*e*, & que HA, HI, HL ſeront en progreſſion géométrique. Car ſi ſur CB prolongée on prend C*l* égal à FL moitié du parametre, CD, CB, C*l* ſeront en progreſſion géométrique, & dans la même raiſon. Donc B*l* eſt à IL, comme C*l* ou FL eſt à LH, ou à peu près comme FI eſt à IH, c'eſt-à-dire comme le rayon eſt au co-ſinus de la latitude HIF. De plus, ſi FL rencontre l'ellipſe

en O, comme FI est perpendiculaire à l'arc IO, & que cet arc est très petit, l'angle IOL pourra se prendre aussi pour un angle droit; & comme à cause que LO, IF sont presque paralleles, les angles ILO, HIF peuvent être censés égaux, les triangles rectangles LOI, IHF sont semblables. Donc LI est à LO dans la raison de FI à IH, ou du rayon au co-sinus de la latitude. Ainsi la ligne Bl, ou la différence de la moitié du parametre de l'axe Ee au demi-axe conjugué CB, est à LO (qui, à cause que l'angle FIO est droit, peut être pris pour la différence de la moitié FL du parametre à la normale FI) en raison doublée de FI à IH.

333. Soit maintenant le demi-parametre FL = 1, sa différence avec CB, savoir Bl = x, le co-sinus de la latitude du point I, pour le rayon 1, = C, celui du point i = c; on aura 1 : CC :: x : LO = CCx. Donc la normale FI = 1 — CCx. De là on tire premierement la valeur de IH par cette proportion, 1 : C :: FI (1 — CCx) : HI (C — C^3x); en second lieu, le rayon du cercle osculateur de l'ellipse en I, qui, par le n. 269, étant le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les deux premiers sont FL & FI, différera de FL à peu près du triple de LO, & sera par conséquent = 1 — 3 CCx. Ainsi le rayon osculateur en i sera = 1 — 3 $cc x$. Donc le rayon du parallele en I sera au rayon osculateur en i, comme C — C^3x à 1 — 3 $cc x$. Or ces rayons sont entre eux, comme le dégré du parallele en I, que nous appellerons G, est au dégré du méridien, que nous appellerons g. On aura donc C — C^3x : 1 — 3 $cc x$ :: G : g; d'où l'on tire Cg — C^3gx = G — 3 ccGx, & 3 ccGx — C^3gx = G — Cg, enfin $x = \frac{G - Cg}{3ccG - C^3g}$. Or cette fraction donne le rapport de x à 1, ou de Bl à Cl, ou de BD à CB, c'est-à-dire l'ellipticité.

D'où l'on tire la solution du problême.

334. Si les dégrés sont dans la même latitude, on a C = c, & la formule $x = \frac{G - cg}{cc(3G - cg)}$. On peut encore résoudre par cette méthode le problême où sont donnés deux dégrés de deux paralleles, ou deux dégrés du méridien. Dans le premier cas, si l'on suppose les dégrés en I, & i = G & g, on aura

Application à trois autres cas, & à d'autres problêmes.

$C - C^3x : c - c^3x :: G : g$. Donc $x = \frac{cG - Cg}{c^3G - C^3g}$. Dans le ſecond on a $1 - 3CCx : 1 - 3ccx :: G : g$, & $x = \frac{G-g}{3(ccG - CCg)}$; & parceque G differe peu de g, & que $cc - CC = SS - ss$, cette formule eſt très peu différente de celle que nous avons trouvée (n. 289), ſavoir $\frac{1}{3} \times \frac{G-g}{GSS - gss}$. De là encore étant donnée l'ellipſe, & par conſéquent Cl, lB; ſi l'on ſuppoſe le rapport du dégré au rayon, ou la fraction $\frac{355}{180 \times 113} = n$, le dégré du méridien pour une latitude quelconque, dont le co-ſinus eſt C, $= n(1 - 3CCx)$, & le dégré du parallele $= n(C - C^3x)$; on pourra aiſément conſtruire une table des dégrés de l'une & de l'autre eſpece pour l'ellipſoïde. On verra de plus que la différence des dégrés du méridien à celui du pôle eſt $= 3CCx$, c'eſt-à-dire en raiſon du quarré CC du co-ſinus de la latitude; & que le dégré du méridien ſera égal à celui de l'équateur, lorſque $n(1 - 3CCx) = n(1 - x)$, ou lorſque $3CC = 1$); c'eſt-à-dire lorſque le quarré du co-ſinus de la latitude ſera égal au tiers du quarré du rayon; ce qui arrive dans la latitude de 54° 44′.

Solution du ſecond problême.

335. Or étant donnée l'eſpece de l'ellipſe, & le rayon oſculateur dans une latitude donnée, on trouve la grandeur de l'ellipſe de la même maniere qu'au n. 284. Si donc on ſubſtitue à la place de G la valeur du dégré du parallele de France, qu'on a trouvé, ainſi que nous l'avons dit (n. 299) de 41618 toiſes, dans une latitude de 43° 32′, & à la place de g celle des dégrés du méridien, qu'on trouve au n. 301; la formule du n. 333 donnera pour l'ellipticité les fractions ſuivantes : $\frac{1}{217}$, $\frac{1}{244}$, $\frac{1}{146}$, $\frac{1}{129}$, $\frac{1}{154}$; & prenant un milieu, on aura pour l'ellipticité moyenne $\frac{1}{167}$. Il ſeroit ſeulement à ſouhaiter qu'on eût le moyen de meſurer avec plus de préciſion le dégré d'un parallele, pour diminuer l'incertitude de ces derniers réſultats.

FIN.

NOTE

Pour la fin du N°. 303, Liv. V.

On doit tirer une certaine ellipticité moyenne de tous les dégrés connus par les obſervations, comparés entre eux, en ayant égard au rapport que doivent avoir leurs différences, & aux regles de la probabilité touchant la correction qu'il convient de leur faire pour les réduire à ce rapport. Le P. *Boſcovich* l'a fait dans un autre ouvrage au moyen d'une méthode très curieuſe, & qui peut ſervir en pluſieurs autres cas. Il en a expoſé le réſultat dans un extrait inſéré dans les actes de l'Inſtitut de *Boulogne*. Il la développe dans ſes Supplémens de la Philoſophie en vers latins, compoſée depuis peu par M. Benoit *Stay*, *tome* 2, *page* 420. Nous inſérerons ici cet article en entier. Le P. *Boſcovich* y emploie les nombres pris de la table qui eſt à la fin de la page 407 de ces Supplémens: c'eſt la même que celle qu'il a miſe dans ce Livre V, n°. 301, & à laquelle nous en avons ſubſtitué une plus ample dans la note ſur ce même numéro. Nous appliquerons enſuite ſa méthode à cette nouvelle table. Voici l'endroit en queſtion.

» 385. Mais pour prendre ce milieu, tel qu'il ne ſoit point ſimplement » un milieu arithmétique, mais qu'il ſoit plié par une certaine loi aux » regles des combinaiſons fortuites & du calcul des probabilités; nous » nous ſervirons ici d'un problême que j'ai indiqué vers la fin d'une Diſ- » ſertation inſérée dans les actes de l'inſtitut de *Boulogne*, *tome* 4, & où » je me ſuis contenté de donner le réſultat de ſa ſolution. Voici le pro- » blême : *étant donné un certain nombre de dégrés, trouver la correction* » *qu'il faut faire à chacun d'eux, en obſervant ces trois conditions : la* » *premiere, que leurs différences ſoient proportionnelles aux différences des* » *ſinus verſes d'une latitude double : la ſeconde, que la ſomme des corrections* » *poſitives ſoit égale à la ſomme des négatives : la troiſieme, que la ſomme* » *de toutes les corrections, tant poſitives que négatives, ſoit la moindre* » *poſſible, pour le cas où les deux premieres conditions ſoient remplies.* La » premiere condition eſt requiſe par la loi de l'équilibre, qui demande » une figure elliptique : la ſeconde, par un même dégré de probabilité, » pour les déviations du pendule & les erreurs des Obſervateurs, dans » l'augmentation & la diminution des dégrés : la troiſieme eſt néceſſaire » pour ſe rapprocher autant qu'il ſe pourra des obſervations; vu ſurtout » qu'il eſt très probable que les déviations ſont fort petites, comme nous » l'avons vu plus haut; & que l'exactitude ſcrupuleuſe des Obſervateurs » ne permet pas de ſoupçonner des erreurs tant ſoit peu conſidérables » dans leurs obſervations.

» 386. Ce problême a rapport à la méthode *de maximis & minimis*; » mais on ne peut le réſoudre par la méthode ordinaire de l'analyſe.

» Car l'expreſſion algébrique ne diſtingue point les quantités poſitives des » négatives, mais elle les déſigne par une même valeur générale. On aura » aiſément la valeur des corrections qu'il faut faire pour remplir la pre- » miere condition, en nommant deux quantités quelconques, l'une x, » l'autre y, au moyen deſquelles, & de la valeur des dégrés & des ſinus » verſes, on trouvera un autre dégré quelconque corrigé, dont la diffé- » rence au dégré donné, donnera en x & y, & autres valeurs connues, » la valeur analytique de la correction, & l'équation ſera toujours du » premier dégré. Pour remplir la ſeconde condition, il faut égaler la » ſomme de toutes les valeurs à zéro: c'eſt la ſeule poſition qui puiſſe » rendre la ſomme des poſitives égale à celles des négatives. On tirera » de cette équation en x la valeur de y; & la ſubſtitution donnera en x » la ſomme de toutes les corrections. Mais cette ſomme même, exprimée » par l'analyſe, ſera un mélange de quantités poſitives & négatives, & » ne ſera point variable; ce qui ſeroit néceſſaire pour pouvoir être portée » à un *maximum*; mais elle ſera toujours $= 0$. Ainſi ſuppoſant $dx = 0$, » on n'aura rien: toute la formule s'évanouira avec l'eſpérance du calcu- » lateur. Mais au moyen de la ſimple Géométrie, ſecondée par la mé- » chanique, on en vient aiſément à bout, comme on va le voir.

Pl. I. fig. 7.

» 387. Soit (fig. 7. pl. I.) AF le diametre d'un cercle, & AE, AD, » AC, AB les ſinus verſes des latitudes doubles, relatives aux dégrés » obſervés: menez, des points E, D, C, B, comme ſi chaque dégré avoit » été obſervé ſous l'équateur, comme auſſi du point A, qui eſt en effet » le lieu du dégré ſous l'équateur, les droites indéfinies EE′, DD′, &c. » perpendiculaires à AF, & dont les ſegmens Ee, Dd, Cc, Bb, Aa, » pris du même côté, repréſentent les dégrés, afin qu'on puiſſe remar- » quer leurs extrémités e, d, c, b, a.

» 388. On voit d'abord que ſi l'on tire une droite quelconque, comme » A′H, qui rencontre ces droites en M, L, K, I, A′, elle déterminera » des dégrés où la premiere condition ſera remplie. Car ayant mené A′F′ » parallele à AF, & qui rencontre ces droites en E′, D′, C′, B′, les diffé- » rences par excès des dégrés ſur celui de l'équateur, ſavoir E′M, D′L, » C′K, B′I, zéro, ſeront proportionnelles aux droites A′E′, A′D′, A′C′, » A′B′, zéro, c'eſt-à-dire aux ſinus verſes AE, AD, AC, AB, zéro. » Mais le problème eſt encore indéterminé par deux endroits, puiſque » cette droite peut être tirée à une diſtance quelconque, & qu'on peut » lui donner telle inclinaiſon qu'on voudra. Deux dégrés pourront déja » en quelque ſorte la déterminer; après quoi elle déterminera elle-même, » par ſon interſection avec une des droites paralleles, qui a rapport à une » latitude quelconque donnée, le dégré qui lui répond, ſuivant la mé- » thode propoſée ci-deſſus (n°. 292 de ce Livre V); & cette détermina- » tion donnera en x & y les valeurs indiquées n°. 386.

» 389. La ſeconde condition déterminera un point de cette droite. Les » corrections ſeront eM, dL, cK, bI, aA′, poſitives ou négatives,

» ſelon

» selon que les points *e*, *d*, *e*, *b*, *a* seront en-deçà ou en-delà de A'H » par rapport à AF. Il faudra donc, eu égard à la seconde condition, » que la somme des corrections qui sont en-deçà, soit égale à la somme » de celles qui sont au-delà; & c'est ce qu'on aura, si la droite passe par » le centre commun G de gravité des points *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, puisque » par une propriété fort connue du centre de gravité, la somme des » distances de tous les points placés d'un côté, selon une direction quel- » conque, est égale à la somme de toutes celles qui sont au côté opposé. » Or ces points étant donnés, on a aussi leur centre commun de gravité G. » On a donc un point de la droite cherchée, déterminé par la seconde » condition. Cette détermination équivaut à cette valeur de *y*, qu'on » doit trouver, suivant le n°. 386, par l'équation qui suppose la somme » de toutes les corrections = 0.

» 390. Le problême reste encore indéterminé, puisqu'on peut mener » par ce point une infinité de droites qui satisferont toutes aux deux con- » ditions précédentes. La ligne ne détermine donc encore qu'un dégré; » c'est celui qui sera représenté par GS perpendiculaire à AF, & qui ré- » pondra à une latitude dont le sinus verse sera exprimé par AS. Tout » autre dégré pris à volonté détermineroit cette droite, & par-là même » les autres dégrés. Mais elle doit être déterminée par la troisieme condi- » tion, ensorte que la somme de toutes les corrections (car de part & » d'autre elles sont toujours égales) soit la moindre possible. Pour cela » imaginons une droite A'GH, qui parte de la position SGT, en tour- » nant à droite ou à gauche autour du point G. D'abord, & tant que » l'angle qu'elle formera avec elle sera fort petit, toutes les corrections » *a*A, *b*I, *c*K, *d*L, *e*M seront énormes; ensuite elles iront toujours » en diminuant, jusqu'à ce que la droite atteigne quelqu'un des points » *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: mais dès qu'elle l'aura passé, la correction qui répond à » ce point changera directement de position, & commencera à croître, & » elle ira toujours en croissant, tandis que celles qui ont rapport aux » points non encore atteints par la droite mobile, continueront de dé- » croître. Or la somme de toutes les corrections diminuera jusqu'à ce que » la somme des différences relatives aux corrections croissantes, soit plus » grande que celle des différences des décroissantes; & elle sera la moindre » possible, dès que celle-là cessera d'être moindre que celle-ci. Mais aussi- » tôt que la somme de toutes les corrections sera la moindre possible, la » somme des seules corrections positives sera aussi la moindre possible, de » même que la somme des seules négatives, puisque ces sommes doivent » être chacune la moitié de la somme totale, à cause qu'elles sont toujours » égales entre elles.

» 391. Or les différences ou changemens de chaque correction, ré- » pondant aux divers changemens de position de la droite mobile, seront » proportionnels aux distances AS, BS, CS, DS, ES, soit qu'ils soient » des accroissemens ou des diminutions. Car ces différences ou changemens

» ſeront des baſes de triangles ſemblables, & dont le ſommet ſera en G,
» & ces baſes ſeront compriſes entre deux poſitions des droites GA′,
» GI, GK, GL, GM; par conſéquent elles ſeront en raiſon de ces
» droites; c'eſt-à-dire, par la propriété des paralleles, en raiſon de AS,
» BS, CS, DS, ES. C'eſt pourquoi ſi l'on obſerve en quel ordre la
» droite mobile doit atteindre les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, & qu'on
» ajoute enſemble dans le même ordre celles des droites AS, BS, CS,
» DS, ES qui répondent à ces points; tandis que cette ſomme ſera
» moindre que la moitié de la ſomme de toutes ces droites priſes enſemble,
» ou moindre que la ſomme de celles qui ſont de part ou d'autre du point
» S (car les deux ſommes priſes l'une à droite, l'autre à gauche de ce
» point, ſont égales entre elles); la ſomme des différences relatives aux
» corrections croiſſantes, ſera encore moindre que celle des décroiſſantes;
» la ſomme de toutes les corrections ira encore en diminuant, & cette
» ſomme ſera la moindre poſſible, quand la ſomme de celles des droites
» AS, BS, CS, DS, ES qui ont rapport aux points déja rencontrés
» par la droite mobile, ceſſera d'être moindre que la moitié de la ſomme
» de toutes ces droites, ou que la ſomme de celles qui ſont de part ou
» d'autre du point S.

» 392. Or on trouvera aiſément le centre de gravité G, & l'ordre
» dans lequel la ligne mobile rencontre chaque point, & cela par un
» calcul numérique qui n'eſt rien moins que pénible. Ce calcul conſiſte à
» ajouter enſemble les ſinus verſes AE, AD, AC, AB, zéro, & de
» diviſer le total par le nombre des points pour avoir AS, puiſque la
» diſtance du centre de gravité à un plan quelconque A*a*, eſt égal à la
» ſomme de la diſtance de tous les points, diviſée par leur nombre. De
» même ſi l'on diviſe la ſomme de tous les dégrés E*e*, D*d*, &c. par leur
» nombre, on aura SG. Il ſuffira même de prendre les différences par
» excès des dégrés ſur le premier, d'en faire une ſomme qu'on diviſera de
» même par leur nombre, & d'ajouter le quotient au premier dégré. Car
» ſi *af* eſt parallele à AF, & qu'elle coupe les droites EE′, DD′, CC′,
» SG, BB′, AA′ en R, Q, P, N, O; NG ſera la ſomme des excès R*e*,
» Q*d*, &c. diviſée par le nombre des points.

» 393. Maintenant pour trouver l'ordre dans lequel les points ſont
» rencontrés par la droite mobile, on ménera par le point G une droite
» parallele à AF, qui rencontrera les droites FF′, EE′, DD′, CC′, BB′,
» AA′ en Y, *r*, *q*, *p*, *o*, X; & l'on verra d'abord dans lequel des angles
» SGY, YGT, TGX, XGS ſe trouve chaque point. Car un point quel-
» conque doit être à gauche ou à droite de SGT, ſuivant que ſon ſinus
» verſe eſt moindre ou plus grand que AS; & au deſſous ou au deſſus de
» XGY, ſelon que ſon dégré ſera plus petit ou plus grand que SG. On
» n'aura pas de peine non plus à trouver la tangente de l'angle formé par
» GS ou GT avec la droite mobile paſſant par un point quelconque.
» Qu'elle paſſe par exemple par le point *e*, on aura cette analogie :

» re eſt à Gr, comme le rayon eſt à la tangente de l'angle reG, ou eGT,
» laquelle ſera par conſéquent en raiſon de $\frac{Gr}{re}$: il en eſt ainſi des autres.

» Les tangentes des petits angles ſont les plus petites; & les points qui
» répondent à de petits angles ſont plutôt rencontrés par la droite mobile
» dans les angles SGX, YGT; tout au contraire de ce qui arrive dans
» les angles TGX, YGS. Donc puiſque Gr eſt la différence du ſinus
» verſe du point e au ſinus verſe AS, & que re eſt la différence du dé-
» gré Ee au dégré SG; on aura la regle ſuivante: *diviſez pour chaque*
» *point la différence de ſon ſinus verſe au ſinus verſe AS par la différence du*
» *dégré qui y répond, au dégré SG; & que les quotients des points qui ſe*
» *trouvent dans deux angles oppoſés au ſommet, conſidérés enſemble, ſoient*
» *rangés par ordre, en commençant par les plus petits; qu'enſuite on range*
» *auſſi les quotients des autres points, placés dans les deux autres angles,*
» *en commençant par les plus grands. C'eſt dans cet ordre que la droite mo-*
» *bile atteindra tous ces points, ſi elle commence à ſe mouvoir dans les deux*
» *premiers angles; & ce ſeroit le contraire ſi elle commençoit à ſe mouvoir*
» *dans les deux derniers.* Mais ſans qu'il ſoit beſoin de recourir au calcul,
» la conſtruction ſeule, pourvu qu'elle ſoit exacte, ſuffira d'ordinaire
» pour connoître avec beaucoup plus de facilité l'ordre dans lequel les
» points ſont rencontrés par la droite mobile.

» 394. Par ce moyen on a tout ce qui eſt requis pour les corrections
» cherchées, & pour avoir, même ſans leur ſecours, l'ellipticité. Car le
» dégré ſur lequel repoſe la droite mobile reſte ſans correction, comme
» on voit; par conſéquent au moyen de ce dégré & du dégré SG, on
» aura par le n°. 348 (& par le n°. 301 de ce Livre V), tous les autres
» dégrés, & par là même leur différence aux dégrés obſervés, c'eſt-à-dire
» la correction, & la différence totale qui donnera l'ellipticité qu'on cher-
» che.

» 395. Or on voit que la méthode eſt générale pour la correction de
» tous les termes qui doivent ſuivre une raiſon donnée; car en ſubſtituant
» cette raiſon à celle des ſinus verſes, tout revient au même. Mais il faut
» appliquer ici la méthode aux dégrés. Nous nous ſervirons des valeurs
» de la premiere table, n°. 355 (& n. 301 de ce Livre), & pour faciliter
» davantage le calcul, nous prendrons la moitié des ſinus verſes pour les
» ſinus verſes entiers. Les valeurs AB, AC, AD, AE ſont ici les
» mêmes que dans la troiſieme colonne de cette table, & en diviſant leur
» ſomme par 5, on a AS ou $aN = 4356.6$. Ob, Pc, Qd, Re ſont les
» mêmes valeurs que celles de la cinquieme colonne, dont la ſomme di-
» viſée par 5 donne $NG = 301.6$, d'où l'on tire le dégré $SG = 56751$
» $+ 301.6 = 57052.6$, pour une latitude telle, que la moitié du ſinus
» verſe d'une latitude double ſoit 4356.6 pour le rayon 10000, c'eſt-à-
» dire pour la latitude de 41° 15′: mais nous ne ferons ici aucun uſage
» de ce calcul. Les diſtances aN, ON, PN, QN, RN des points

» *a*, *b*, *c*, *d*, *e* à la droite SGT ſeront les différences du premier nombre » 4356.6 = *a*N, aux nombres de la troiſieme colonne ; & par conſé- » quent 4356.6, 1369.6, — 291.4, — 1405.4, — 4029.4, la ſomme » tant des poſitives que des négatives, étant 5726.2 : & les diſtances *a*X, » *bo*, *cp*, *dq*, *er* à la droite XY ſeront les différences du ſecond » 301.6 = NG aux nombres de la cinquieme colonne ; & par conſéquent » 301.6, 15.6, 73.6, — 21.4, — 369.4. Les diſtances qui ont des » ſignes ſemblables, ſe rapportent aux angles SGX, TGY ; & celles » qui ont des ſignes différens appartiennent aux autres angles TGX, » SGY. Ainſi les premieres ſont celles des points *a*, *b*, *d*, *e* ; le point *c* » eſt le ſeul de la ſeconde eſpece. Or ſi l'on diviſe les termes de la pre- » miere ſuite par ceux de la ſeconde, on aura, pour les tangentes des » angles avec la droite SGT, 14, 88, 4, 66, 11. Ainſi les quatre points » qui ſe trouvent dans les premiers angles, ſavoir *a*, *b*, *d*, *e*, ſuivent » en commençant par les moindres angles l'ordre des nombres 11, 14, » 66, 88, c'eſt-à-dire *e*, *a*, *d*, *b* ; auxquels ajoutant le point *c*, la » droite rencontrera les points dans cet ordre *e*, *a*, *d*, *b*, *c*. La premiere » diſtance du premier point *e*, ſavoir 4029.4 eſt moindre que la ſomme » 5726.2 des deux poſitives, ou des trois négatives ; mais ſi on lui ajoute » la diſtance du point ſuivant, *a* = 4356.6, on aura 8386, qui ſurpaſſe » déja cette ſomme. Ainſi on aura le *minimum* qu'on cherche, lorſque la » droite atteindra le point *a*, & la poſition de cette droite *a*GV corrigera » tous les dégrés, à l'exception du ſeul dégré A*a* de l'équateur, qui » reſtera ſans correction.

» 396. Si la droite ſe meut dans un ſens contraire, elle rencontrera les » points dans un ordre contraire *c*, *b*, *d*, *a*, *e*, & l'on voit que pour » avoir une ſomme qui ſurpaſſe 5726.2, il faudra ajouter enſemble les » premieres diſtances des quatre premiers points, à ſavoir 291.4, 1369.6, » 1405.4, 4356.6 ; enſorte que ce mouvement contraire donnera encore » le *minimum* à la rencontre du même point *a*.

» 397. Ayant trouvé la poſition requiſe pour le *minimum* cherché, on » aura d'abord l'ellipticité. Car la poſition de la droite ſera ici *a*GV, le » dégré de l'équateur reſtant le même, ce qui ſe rencontre heureuſement » pour trouver tout d'un coup la différence totale & l'ellipticité. Car on » aura cette analogie : *a*N = 4356.6 eſt à NG = 301.6, comme *af* » = 10000 à la différence totale *f*V = 692 : on diviſera le dégré 56751 » par le tiers de cette différence, & on ajoutera 2 au quotient, ſuivant » le n°. 350 (on en donnera plus bas la démonſtration), pour avoir l'el- » lipticité $\frac{1}{248}$. Le calcul donne pour les cinq dégrés *a*, *b*, *c*, *d*, *e* les » corrections ſuivantes : 0, — 79.2, + 9.8, + 75.9, — 90.5.

Appliquons cette méthode aux nombres de la grande table propoſée dans la précédente note ſur le n°. 301, en retenant A*a* pour le dégré de l'équateur, B*b* pour un dégré quelconque antérieur à SG, D*d* pour un dégré quelconque poſtérieur. On trouvera les valeurs ſuivantes. Diviſez

par 9, c'eſt-à dire par le nombre des dégrés, les ſommes de la quatrieme & cinquieme colonne, vous aurez $AS = aN = 4581.2$, $NG = 287.6$: de là le dégré $SG = SN + NG = Aa + NG = 57037.6$; & puiſque la moitié du ſinus verſe d'une latitude double eſt $AS = 4581.2$, la latitude de ce dégré ſera de 42° 36′.

Si l'on compare le nombre $4581.2 = AS$, avec tous les nombres de la quatrieme colonne qui repréſentent les droites AB, AD, en le ſouſtrayant de ces nombres, on aura la premiere ſuite de toutes les SB négatives, & de toutes les SD poſitives. De même ſi l'on compare le nombre $287.6 = NG$ avec tous les nombres de la cinquieme colonne qui repréſentent les droites Ob, Qd, on aura la ſeconde ſuite de toutes les ob négatives, & de toutes les qd poſitives. Nous nommerons la premiere ſuite A, & la ſeconde B. Si l'on diviſe chaque terme de la ſuite A par celui qui lui répond dans la ſuite B, on aura une nouvelle ſuite C, qui repréſentera les tangentes des angles formés par les droites Gb, Gd, avec GS, GT; & les angles qui répondent à ces tangentes, ſeront aigus ou obtus, ſelon que la valeur de la tangente ſera poſitive ou négative. Du reſte il n'eſt point néceſſaire de déterminer exactement ces valeurs; & à moins que les dégrés ne fuſſent trop voiſins, un à-peu-près ſuffit, puiſqu'il n'eſt queſtion que de leur grandeur relative pour connoître l'ordre où elles doivent être placées.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	—4581.2	—1566.2	—386.2	69.8	372.8	418.8	883.8	1180.8	3807.8
B	—287.6	—0.6	—149.6	—58.6	31.4	—9.6	53.4	36.4	384.4
C	15.9	2610.	3.9	—1.	12.	—4.6	16.6	32.	10.

Les nombres C font connoître l'ordre dans lequel la droite mobile écartée de la poſition SGT, & paſſant par les poſitions A′GH, après une demi révolution autour du point G, arrive aux extrémités b, d des dégrés. On doit commencer par les quantités poſitives, dès les plus petites juſqu'aux plus grandes; & continuer enſuite par les négatives, dès les plus grandes juſqu'aux plus petites; & l'on trouvera l'ordre dans lequel les points ſont rencontrés par la droite mobile, exprimé par les nombres ſuivans: 3, 9, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4.

On prendra dans cet ordre la ſomme des nombres A, ſans avoir égard aux ſignes, juſqu'à ce qu'on parvienne à un nombre égal, ou plus grand que la moitié de la ſomme de tous ces nombres, laquelle moitié eſt égale & à la ſomme des poſitives, & à celle des négatives priſes ſéparément, puiſque par la nature du centre de gravité elles doivent être égales. Or la premiere eſt 6733.8, & la ſeconde 6733.6: elles ne different pas notablement de la moitié de la ſomme, ſavoir 6733.7; & cette différence inſenſible vient de ce qu'on a négligé quelques petites fractions. Si l'on

prend dans la suite A les nombres 3, 9, 5, on ne parvient point encore à cette moitié; mais si on leur ajoute le nombre qui répond à 1, on aura 9348.0 qui la surpasse: par conséquent la somme de toutes les corrections sera la moindre possible, lorsque la droite mobile atteindra l'extrémité du premier dégré, qui par-là même restera sans correction.

Par ce moyen on a déja deux dégrés qui doivent passer pour exacts, savoir 56750 valeur observée pour la latitude = 0, & 57037.6 pour la latitude de 42° 36′. De ces dégrés on peut déja déduire par la formule du n°. 289, Liv. V, l'ellipticité; mais comme on a ici le premier dégré A a, on la trouvera encore, & avec plus de facilité, par cette analogie: AN = 4581.2 : NG = 287.6 :: af = 10000 : fV = 627.8. Ce quatrieme terme sera la différence des dégrés au pôle & à l'équateur; & si on divise celui-ci par le tiers de cette différence, & qu'on ajoute 2 au quotient, on aura 273 pour le dénominateur de l'ellipticité cherchée, qui se trouve $\frac{1}{273}$ suivant le théorème démontré par notre Auteur dans ces mêmes Supplémens, n°. 350, que nous venons de citer dans le passage tiré de ces Supplémens.

Cette ellipticité est encore au-dessous de $\frac{1}{248}$ qui est celle qu'avoient d'abord donnée les cinq dégrés: mais elle approche davantage de $\frac{1}{335}$, ellipticité requise dans l'hypothese d'un noyau sphérique par la fraction $\frac{1}{176}$ (Liv. V. n. 251).

Pour corriger tous les dégrés, il suffira de chercher la différence par excès de chaque dégré au dégré sous l'équateur, requise par cette détermination; & de comparer chacune de ces différences avec celles de la cinquieme colonne, dans la note sur le n°. 301. Puisque af = 10000 doit être à chaque ligne comme aO, exprimée par les nombres de la quatrieme colonne; comme fV = 627.8 à Oi, dont la différence à Ob, exprimée par les nombres de la cinquieme colonne, donne la correction cherchée; il suffira de multiplier les nombres de la quatrieme colonne par 627.8, & de diviser le produit par 10000; enfin de retrancher du quotient les nombres de la cinquieme colonne: par ce moyen on aura les corrections suivantes 0, — 97.7, + 112.8, + 63.0, — 8.0, + 35.9, + 2.1, + 37.7, — 145.3. La somme des positives est 251.5; celle des négatives 251.0, ce qui fait à peu près des sommes égales; & la moitié de la somme totale est environ 251.2. Or la somme de ces corrections, dans l'hypothese qu'on observe les deux premieres conditions, est un *minimum*; ce qui est évident par cette méthode même dont on s'est servi pour les trouver: & l'on pourra encore s'en convaincre, en essayant de faire telle autre substitution qu'on voudra; car elle donnera toujours une somme plus forte: c'est ce qu'on fera aisément, en faisant une correction arbitraire au premier dégré, & en déterminant par ce dégré ainsi corrigé, & par celui qu'on trouvera pour la latitude de 42° 36′, tous les autres dégrés, au moyen des nombres de la quatrieme colonne, puisque les différences par excès de chaque dégré sur le premier, doivent être dans le rapport de ces nombres.

Il ſuffit de jetter les yeux ſur la table de la note ſur le n. 301, pour s'appercevoir que le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* trouble beaucoup l'ordre des dégrés, puiſqu'il ſurpaſſe les deux ſuivans qui ſont dans une plus grande latitude. Mais d'autre part, ce dégré eſt dans l'hémiſphere auſtral, au lieu que les autres dégrés ſont dans notre hémiſphere : ce qui donne lieu de ſoupçonner que les deux hémiſpheres ne ſe reſſemblent pas pour la figure. Ainſi il ſera à propos de n'avoir égard dans le calcul qu'aux 8 autres dégrés de cette table.

Par ce moyen on trouvera les ſommes des nombres de la quatrieme & de la cinquieme colonne, qui, diviſées par 8, donneront $aN = 4777.0$, $NG = 287.6$; d'où l'on tire pour la latitude de 43° 43′ le dégré de $56750 + 287.6 = 57037.6$. Enſuite on aura par la méthode propoſée les nombres A, B, C, & la nouvelle ſuite C fera connoître l'ordre dans lequel la droite mobile atteint les extrémités de ces 8 dégrés, ſavoir 3, 2, 4, 9, 7, 1, 8, 6 : & ſi on prend dans ce même ordre les valeurs de la nouvelle ſuite A, on ne parvient à la moitié de la ſomme totale qu'après l'addition du ſixieme terme, lequel répond au premier dégré, c'eſt-à-dire au dégré ſous l'équateur, qui doit reſter également ici ſans correction. De là on a pour la différence des dégrés ſous l'équateur & le pôle 602.1, & pour l'ellipticité $\frac{1}{285}$, qui approche encore davantage de la fraction $\frac{1}{335}$ requiſe par celle de la gravité dans l'hypotheſe d'un noyau ſphérique. Or pour les corrections à faire à ces 8 dégrés, on trouvera 0, $+102.5$, $+51.0$, -20.7, $+23.0$, -12.0, $+22.9$, -166.9. La ſomme des poſitives eſt 199.4; celle des négatives, 199.6 : elles ſont à peu près égales. La moitié de la ſomme totale eſt 199.5, beaucoup moindre que la précédente, ſavoir 251.2, parcequ'on n'y tient pas compte de la correction du dégré de M. l'Abbé *de la Caille ;* & que les autres corrections different très peu des précédentes : l'avant derniere eſt augmentée de 20 toiſes ; les autres ne changent que de 10 à 13 toiſes.

De ces huit dégrés le ſecond & le ſixieme ont des corrections beaucoup plus fortes que les autres. Si on omet encore ces deux dégrés, & que par la même méthode on prenne un milieu pour les 6 dégrés reſtans, on aura toujours le premier dégré ſans correction ; le dégré 56998.5 pour la latitude de 41° 0′; la différence totale des dégrés ſous l'équateur & le pôle 577.2; l'ellipticité $\frac{1}{297}$, qui approche encore plus de la fraction $\frac{1}{335}$ requiſe par celle de la gravité ; enfin pour les corrections on aura 0, $+40.6$, -23.1, $+10.6$, -25.6, -9.6, corrections moindres que les premieres.

Les quantités qu'on a trouvées ſerviront à faire connoître les valeurs abſolues de l'axe & du diametre de l'équateur : car dans l'ellipſe les demi-axes ſont moyens proportionnels géométriques entre les rayons de courbure pris alternativement à leurs extrémités ; & par conſéquent les dégrés des premiers entre ceux des ſeconds : & lorſque les termes different peu entre eux, on peut ſubſtituer la progreſſion arithmétique à la géomé-

trique. Donc si au dégré sous l'équateur (56750) on ajoute le tiers de sa différence au dégré sous le pôle, ou $\frac{1}{3} \times 577.2 = 192.4$, on aura pour le dégré du demi-axe 56942.4, & si on ajoute encore un autre tiers, on aura pour celui du demi-diametre de l'équateur 57134.6. C'est pour cela qu'après avoir divisé le dégré du méridien sous l'équateur par le tiers de cette différence, on ajoute 2 au quotient pour avoir le dénominateur de l'ellipticité, ou de la différence des demi-axes de l'ellipse divisée par le grand axe. Or ayant les dégrés, on connoîtra aisément les rayons des cercles qui leur répondent: on trouvera le demi-axe $= 3262560$; le demi-diametre de l'équateur $= 3273572$; leur différence $= 11012$, différence très petite.

On se servira de la valeur qu'on vient de trouver du dégré de l'équateur, pour réformer celle qui exprime le rapport de la force centrifuge à la gravité primitive sous l'équateur (n. 71. Liv. V.), savoir $\frac{753}{216741}$, à laquelle on a substitué la fraction $\frac{1}{288}$ qui en approche beaucoup. Mais ces nombres ont été tirés du dégré de l'équateur que M. *Bouguer* avoit déduit de sa théorie, savoir 57264 (n. 69); & dès-là que ce dégré est plus petit, on doit diminuer la force centrifuge en raison doublée de ce dégré. Ainsi ce rapport corrigé sera $= \frac{753}{216741} \times \left(\frac{57134}{57264}\right)^2 = \frac{1}{289}$ à très peu près.

Toutes les combinaisons ci-dessus donnent une ellipticité moindre que celle qui est requise par l'homogénéité du fluide au noyau; d'où il suit que le noyau, supposé qu'il soit sphérique, doit être plus dense que le fluide. Le rapport de leur densité peut se tirer de la formule du n°. 199, Liv. V, dans laquelle $x = \frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$; d'où il suit que $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{nr}{2mx}\right)$. Or $\frac{t}{p}$ est, là-même, le rapport cherché de la densité du fluide à celle du noyau; & $\frac{n}{m}$ le rapport de la force centrifuge à la gravité, que nous venons de trouver $= \frac{1}{289}$; $\frac{x}{r}$ le rapport de la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe; & par conséquent $\frac{r}{x}$ le dénominateur de l'ellipticité, diminué de l'unité, savoir 296. Si l'on aime mieux prendre un milieu entre ce dénominateur 297, & 335 qui est le dénominateur requis par la gravité, savoir 316, on aura $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{315}{578}\right) = \frac{100}{131}$; c'est à-dire que la densité du fluide sera à celle du noyau à peu près dans la raison de 3 à 4.

Comme l'ellipticité qu'on en tire est beaucoup plus petite que celle qu'on suppose communément, il y aura plusieurs calculs à réformer; par exemple

exemple ceux qui ſont fondés ſur le renflement des terres à l'équateur pour déterminer la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe ; ceux qui ont rapport aux parallaxes de la Lune, qui dépendent de l'ellipticité, & aux diſtances géographiques des lieux, leſquelles en dépendent auſſi. Pour avoir tout cela avec encore beaucoup plus d'exactitude, il eſt à ſouhaiter qu'on nous donne beaucoup d'autres meſures de dégrés, afin d'achever de compenſer & effacer totalement l'irrégularité des inégalités fortuites par le nombre des meſures.

Ceci étoit près d'être mis ſous preſſe, lorſqu'on a reçu un extrait de la meſure d'un nouveau dégré, faite en Hongrie par le P. *Lieſganig* qui a achevé au commencement de Février de cette année (1770) d'en déterminer la valeur par le calcul, & qui le fera bientôt imprimer. Cette meſure eſt une confirmation de l'irrégularité des dégrés : & ſi on l'ajoute aux autres pour prendre un milieu, l'on aura une ellipticité preſque entierement conforme à celle que requiert la gravité dans l'hypotheſe d'un noyau ſphérique. L'amplitude de l'arc, déterminée par les obſervations de deux étoiles fixes, s'eſt trouvée de 1°, 1′, 34″.7, avec un ſi grand accord, que l'un des réſultats n'a été plus grand, l'autre plus petit, que de la dixieme partie d'une ſeconde. A l'égard des deux baſes meſurées aux deux extrémités de la méridienne, l'une a été déduite de l'autre & de la chaîne des triangles par le calcul ; & la baſe calculée ne differe que d'une demi-toiſe de la meſure actuelle : d'où il s'enſuit qu'on ne doit pas craindre qu'il ſe ſoit même gliſſé une erreur de 10 toiſes dans la meſure du dégré : & cependant ce dégré s'eſt trouvé de 56882.0 toiſes de *Paris* ; & ſi on le réduit à la ſurface de la mer, on doit encore en ôter une toiſe. Or ſa latitude moyenne eſt de 45°, 57′, & ſa longitude eſt de près de 4 dégrés plus grande que celle de *Gratz*. Il a été meſuré dans une plaine immenſe, qui n'étoit interrompue que par de petites inégalités, telles que des vagues ſur une mer calme : & il s'accorde aſſez avec celui qui a été meſuré entre *Vienne* & *Gratz* (n. 299, note), & qui pour une latitude moyenne un peu plus grande, ſavoir 47° 38′, s'eſt trouvé de 56909.6, ou de 29 toiſes plus grand que celui de Hongrie. Celui-ci s'accorde auſſi à 7 toiſes près avec celui de l'Amérique ſeptentrionale (n. 299 note), qui a été également meſuré avec une très grande exactitude dans une vaſte plaine, quoiqu'il ait près de 6 dégrés de plus en latitude : les trois dégrés moyens dans la premiere table de cette note, ſurpaſſent l'un & l'autre de plus de 100 toiſes. Tout cela ſemble indiquer une irrégularité de tiſſure dans la Terre, même au-deſſous de ſa ſurface, & une figure d'équilibre pour ainſi dire ondoyante, comme notre Auteur s'en étoit déja autrefois douté ; ce qui prouve que deux dégrés ne peuvent ſuffire pour déterminer la figure de la Terre : il faut au contraire un grand nombre de dégrés meſurés en divers pays, avec cette exactitude & ces inſtrumens qui ſont aujourd'hui en uſage : & l'on doit en tirer un certain milieu par une méthode ſûre, & non pas ſur de ſimples préjugés faire aux obſervations des corrections arbitraires, & plus grandes

à plusieurs égards que ne le comportent les méthodes inventées de nos jours.

Pour trouver ce milieu, nous substituerons dans la table précédente, au dégré unique du P. *Liesganig*, c'est-à-dire au dégré moyen de l'arc qui s'étend dans la Moravie, l'Autriche & la Stirie, trois autres dégrés, savoir celui de Hongrie, celui est qui est entre *Vienne* & *Gratz*, & celui qui est entre *Vienne* & *Sobjeschiz* : leurs latitudes moyennes sont 45° 57′, 47° 38′, 49° 13′; leurs valeurs en toises 56881, 56910, 57082: de cette sorte on aura 11 dégrés. La méthode ci-dessus donnera pour l'ellipticité $\frac{1}{511}$; & si l'on omettoit le seul dégré de Lapponie qui differe trop des autres, surtout du dégré de l'Amérique septentrionale & de celui de Boheme, mesurés le premier par les Anglois, le second par le P. *Liesganig*, on auroit $\frac{1}{341}$. Ces deux fractions ne s'éloignent pas beaucoup de $\frac{1}{335}$ que requiert la gravité. Il est démontré dans cet ouvrage même, que les inégalités qui sont proche de la surface troublent beaucoup plus la mesure des dégrés, que la longueur des pendules isochrones. Ainsi puisque ces longueurs suivent presque exactement la loi de proportionalité avec les sinus verses d'une latitude double, & que ce milieu revient au même; on pourra prendre pour l'ellipticité cette même fraction $\frac{1}{335}$, & en tirer le rapport des densités au moyen de la formule $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 \frac{-nr}{2mx}\right) = \frac{5}{3}\left(1 \frac{-334}{578}\right)$ $= \frac{1220}{1734} = \frac{100}{142}$; ce qui fait à peu près $\frac{2}{3}$. Ainsi la densité du fluide sera à celle du noyau à peu près dans la raison de 2 à 3.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIERES.

A

Aberration de la lumiere. Sa nature, ses effets. On en doit la connoiſſance à M. *Bradley*, page 255 & 256.

Acqua Pendente, *Acula*, Ville du territoire d'*Orviete*. Sa ſituation, p. 55.

Agnanie, *Anagnia*, Ville de la Campagne de *Rome*, p. 178.

Albe, Ville de la Campagne de *Rome*, p. 61, 62.

Alembert (M. d'). Ses recherches ſur la préceſſion des équinoxes & ſur la nutation de l'axe : en quoi ſon ſentiment differe de celui de M. *Bradley*. p. 258. Sa Formule pour l'ellipticité du ſphéroïde terreſtre, p. 442, 443. Réponſe à ſon objection ſur l'ellipticité du noyau, p. 449 note. Ses Remarques ſur la Formule de M. *Bernouilli*, p. 442.

Alexandrie, Ville d'Egypte. Avantage qu'Eratoſtène tire de la ſituation de cette Ville par rapport à la Ville de *Syene* pour meſurer un dégré, p. 13.

Amarano, torrent entre *Rimini* & *Peſaro*, p. 85.

Amélie, *Ameria*, Ville entre le *Tibre* & le *Nera*. Sa longitude & ſa latitude, p. 178.

Amplitude de l'arc intercepté par les paralleles de *Rome* & de *Rimini*, p. 260, 261.

Anaximandre. Son opinion ſur la figure de la Terre, p. 2.

Anaximene, *ibid.*

Ancajano (M.) Seigneur Italien. Son éloge, p. 50, 51.

Ancone, *Acon*, Ville capitale de la Marche d'*Ancone*. La fumée du canon de ſa Citadelle ſert à déterminer ſa poſition, p. 110.

Andrate. Sa longitude, ſa latitude, ſa ſituation, Liv. V, n°. 299, note.

San Angelo in vado, Ville du D. d'*Urbin*. Sa longitude & ſa latitude, p. 178.

Angles. Maniere de prendre les angles avec le quart-de-cercle, p. 75, 277, 302. Moyen de les réduire à l'horizon, p. 139 & ſuiv. Moyen de les corriger. *Voyez* triangles. Méthode pour connoître l'angle de poſition, p. 112, 313, 316 & ſuiv. Avantages qu'on peut tirer des angles de poſition; moyen de ſe les procurer, 318 & ſuiv.

Applatiſſement de la Terre. Sentiment d'*Huygens* & de *Newton*, p. 10. *Voyez* ellipticité. Expreſſions de l'applatiſſement pour diverſes hypotheſes, p. 376, 378, 382, 387, 388. Déterminer l'applatiſſement dans l'hypotheſe de la gravité newtonienne, p. 423, 424.

Arabes. Dégré meſuré par les Arabes, p. 13.

Arbre établi pour ſignal, p. 73. Obſervations faites ſur cet arbre, p. 76.

Arc. *Voyez* amplitude.

Archimede. Il déduit des loix de l'équilibre la ſphéricité de la Terre, p. 2.

Aſcoli, *Aſculum*, Ville de la Marche d'*Ancone* ſur le *Tronto*, qu'il faut diſtinguer d'une autre Ville de même nom dans le royaume de *Naples*, p. 178.

Aſſiſe, *Aſſiſium*, Ville au D. de *Spolete*. Danger qu'on a couru dans un voyage d'*Aſſiſe* à *Nocera*. *Voyez* danger.

Auſa, riviere près de *Rimini*, à l'embouchure de laquelle commence la baſe meſurée aux environs de cette Ville, p. 80.

Autriche. Dégrés meſurés dans le cercle d'Autriche, Liv. V, n°. 299, note.

B

Bagnarea, *Balneum regis*, Ville du territoire d'*Orviete*. Sa longitude & ſa latitude, p. 178.

Bandini (M. le Marquis). Il aide au P. *Maire* à faire la carte du pays de *Camerine*, p. 114.

Baſe. Choix d'une baſe ſur la voie appienne, p. 61. Inſtrumens néceſſaires pour la meſure de la baſe; ordre obſervé dans cette meſure, p. 63, 64. *Voyez* toiſe. Deſcription de ces inſtrumens, p. 340 & ſuiv. Signaux placés aux extrémités des baſes, p. 74. Erreurs de la baſe; moyen de les

évaluer, 350 & suiv. Choix d'une base près de *Rimini*, page 80. Mesure de cette base, p. 84. On y prend les angles, p. 94 & suiv. Situation des bases, 134. Méthode observée dans leur mesure, p. 135. Longueur des bases, 136.

Beccaria (le R. P.). Dégrés qu'il a mesurés dans le Piémont, Liv. V, n°. 299, note.

Benoît XIV, Souverain Pontife, donne ses ordres pour faire mesurer deux dégrés du méridien & corriger la carte de l'Etat de l'Eglise, p. 31, 32.

Bernouilli. Sa formule pour l'ellipticité, contraire à celle de l'Auteur, p. 441. Les efforts qu'il fait pour concilier les mesures des dégrés avec l'ellipse de *Newton*, p 484.

Bertinoro, *Bertinorium*, Ville de la Romagne. Sa longitude & sa latitude, p. 178.

Bianchini (M.), p. 120. Il détermine la latitude d'*Urbin*, p. 176. Ce qui rend ses latitudes peu sûres, p. 177.

Bonacorsi. Maison de campagne des *Bonacorsi*, p. 109, 110.

Bonajuti (Mgr.), Evêque de *Montfeltro*, p. 97.

Boscovich (le R. P. Jos. Roger) Jésuite. Il est d'avis qu'on mesure un dégré dans l'Etat de l'église; & pourquoi, p. 30 Il obtient par M. le Cardinal *Valenti*, Ministre de Sa Sainteté, des ordres relatifs à cette mesure, p. 31. Il obtient aussi des ordres de l'Impératrice Reine & du Roi de Sardaigne pour faire mesurer d'autres dégrés, & persuade à la Société royale d'en mesurer un en Amérique, p. 36, 37, note. Il sauve la vie à un Religieux & à un jeune homme de qualité dans une inondation, p. 59. Dangers qu'il a courus lui-même dans son voyage. *Voyez* dangers.

Bouguer (M.). Sa mesure conforme à celle de M. *de la Condamine*, p. 22, 23. Il tâche de concilier les dégrés avec une figure réguliere, p. 44. Hypotheses de M. *Bouguer*, Liv. V, n°. 306 & suiv. Méthode dont il s'est servi avec M. *de la Condamine* pour la vérification des divisions du secteur, p. 217. *Voyez* parallaxe des fils & parallélisme.

Boulogne, capitale du Bolonois. Séjour dans cette Ville, p. 92. Institut de *Boulogne*, ibid.

Boussole. Sa variation, p. 169. Que la boussole des Arpenteurs induit souvent en erreur; moyen d'y suppléer, p. 339.

Bradley (M.); sa théorie sur l'aberration de la lumiere & la nutation de l'axe, p. 256 & suiv. Cette théorie confirmée par la mesure du dégré d'Italie, p. 114, 117, 133, 134.

Brunn. Les Allemands prononcent *Bryn*, *Bruna*, Ville forte de Boheme dans la Moravie, Liv. V, n°. 299, note.

C

Cagli, *Callium*, Ville du Duché d'*Urbin* au pied de l'Appennin, p. 178.

Caille (M. l'Abbé de la), vérifie avec M. *Cassini* le dégré de M. *Picart*, p. 22. Ses opérations avec M. *Cassini de Thury*, ibid. Il mesure un dégré en Afrique, p. 33. Effet de cette mesure, Liv. V, n°. 313.

Canaux, *voyez* équilibre.

Camerine ou *Camerino*, *Camerinum*, Ville forte par sa situation, p. 114.

Camus (M.). Il part avec MM. de *Maupertuis*, *Clairaut* & *le Monier* pour la Lapponie, p. 21.

Carte. Observations pour la carte géographique dans le pays renfermé entre la route de *Rome* à *Florence*, la Méditerranée, le *Tibre* & la frontiere de Toscane, p. 53; dans la Campagne de *Rome*, p. 68 & suiv.; dans la Romagne, le Ferrarois & le Bolonois, p. 91, 92; dans la terre de Sabine, p. 102 & suiv.; dans la Marche d'*Ancone*, p. 106 & suiv. Correction de la carte géographique, p. 118, 119. Ce qui manque encore à sa perfection, p. 120. Erreurs des cartes anciennes, p. 120, 162, 163. Que la mesure du dégré d'Italie étoit une occasion favorable pour corriger la carte; & pourquoi, p. 161. Difficultés qu'on y a éprouvées, p. 163 & suiv. Secours qu'on a tiré de quelques cartes, p. 168. Des positions mois sûres; moyens de les distinguer dans la carte qui est à la tête de ce volume, p. 168, 169. Qu'on peut aujourd'hui se rassurer sur ces positions. *Voyez* la seconde note sur la préface. Des cartes orientées avec la boussole, p. 169. Méthodes pour les observations géographiques, 337 & suiv. *Item*, p. 172. Bases qui peuvent suffire

pour faire une carte, p. 365.
Caſſini (M. Jean Dominique); ſes obſervations ſur la meſure du dégré ſembloient plutôt faire de la Terre un ſphéroïde allongé, p. 11.
Meſure de MM. *Caſſini* pere & fils, 14.
Caſſini (M. Jacques *Caſſini* fils de Dominique). Il vérifie avec M. l'Abbé *de la Caille* les opérations géodéſiques de M. *Picart*, 22.
Caſſini de Thury (M.). Ses opérations avec M. l'Abbé *de la Caille*, p. 22.
Carpegna. Mont ſur lequel on choiſit une ſtation, p. 53. Des troupes toſcanes empêchent qu'on y place un ſignal, p. 79. On fait ceſſer cet obſtacle, p. 82. On fait des obſervations ſur ce mont, p. 98.
Catria. Montagne près de *Cantiano*. On y établit un ſignal, p. 53. Tentative inutile pour y obſerver, p. 83. On y fait des obſervations, p. 99.
Cercle oſculateur, *voyez* rayon de courbure.
Cervia, *Servia*, Ville de la Romagne, p. 91.
Ceſene, *Caſana*, belle & forte Ville de la Romagne. Voyage à *Ceſene*, p. 91.
Chimboraço. Hauteur de cette montagne la plus haute de toutes les montagnes connues, p. 3, note.
Cinnano (M.), Seigneur Italien, p. 91.
Citta della Pieve, *Civitas Plebis*, Ville d'Ombrie.
Citta di Caſtello, *Tifernum*, Ville d'Ombrie ſur le Tibre, Capitale du Comté de même nom.
Civitella. Avantage de ce poſte; ce qui empêche d'en profiter, p. 69, 70.
Civita Vecchia, *Centum Cellæ*, port de mer, p. 55.
} Longitudes & latitudes de ces Villes, p. 178.
Clairaut (M.). Il va en Lapponie, p. 21. Il approfondit la théorie de l'équilibre, p. 24 & 25. Sa théorie ſur le noyau elliptique, p. 448. Sa Formule pour l'ellipticité, p. 449 & ſuiv.
Cléantes. Son opinion ſur la figure de la Terre, p. 2.
Collins, Auteur d'un problême utile dans la Géographie, p. 172.
Colophon, ancien Philoſophe, p. 2.
Comacchio, *Comacula*, Ville du Ferrarois entre des marais appellés *les Vallées de Comacchio*, p. 91.
Compas à verge. Son uſage dans la vérification des diviſions du ſecteur, p. 221.
Compas à verres. Sa deſcription, p. 209 & ſuiv. Moyens de ſuppléer à ſon défaut, p. 213, 214.
Condamine (M. de la). Conformité de ſa meſure avec celle de M. *Bouguer*, p. 22 & 23. Son ſentiment ſur l'irrégularité de tiſſure des parties de la Terre, p. 29. Méthode dont il s'eſt ſervi avec M. *Bouguer* pour la vérification des diviſions du ſecteur, p. 217. Méthode ingénieuſe de M. *de la Condamine* pour connoître l'effet de la chaleur ſur les métaux, p. 349. Il prévoit que la nouvelle hypotheſe de M. *Bouguer* ſur la régularité de la figure pourroit être renverſée par la meſure de M. l'Abbé *de la Caille*, p. 485. *Voyez* paralléliſme de la lunette & parallaxe des fils.
Convergence des méridiens; moyen de la déterminer, p. 314 & ſuiv.
Correction des triangles, *voyez* triangles; du défaut de parallélisme, *voyez* parallélisme; de la diſtance des étoiles au zénith, *voyez* zénith; du dégré d'Italie, *voyez* dégré; des erreurs, *voyez* erreurs; correction pour la diſtance de la perpendiculaire au parallele, p. 321. Correction moyenne de tous les dégrés. *Voyez* la note qui eſt à la fin de ce volume.
Côtes (M.). Son théorème pour évaluer l'erreur produite dans la réduction du polygone à une ſurface réguliere, par l'erreur commiſe dans les obſervations des hauteurs & dépreſſions, p. 325, 326.

D

Dangers que les PP. *Boſcovich* & *Maire* ont courus dans leur voyage, p. 51; dans le voyage d'*Aſſiſe* à *Nocera*, p. 52; dans le débordement du *Tibre*, p. 58; ſur la voie appienne, p. 62; à l'embouchure d'un lac, p. 72; dans la chute d'un plancher conſtruit pour obſerver, p. 74, 75; Dans un tremblement de terre & une chute, p. 78.
Débordement. *Voyez* Tibre.
Dégré. Ce que c'eſt qu'un dégré, p. 12 & 470. Dégrés meſurés par les Anciens, p. 12 & 13, par les Modernes, p. 13 & 14. Différence des dégrés, p. 15 & 16. Dégrés de parallele meſurés en France, p. 30, note. Qu'il eſt à propos de meſurer

un grand nombres de dégrés, p. 34, 36. Des dégrés mesurés en Allemagne, en Hongrie, dans le Piémont & l'Amérique septentrionale, p. 36 & 37, note. *Item* Liv. V, n°. 299, note, & n°. 303, note. Valeur du dégré entre *Rome* & *Rimini*, p 116, & 155. Ce dégré comparé à un dégré de France, *ibid.* Cause de leur différence, p 157. Valeur du dégré suivant les Anciens, p. 122. Valeur du dégré entre *Rome* & *Rimini*, exprimée en toises, p. 359. Ce dégré corrigé, p. 360. Comparaison des dégrés, Liv. V, n. 297 & suiv. Méthode singuliere pour tirer des dégrés une ellipticité moyenne, p. 501. *Voyez* ellipse.

Démocrite. Il fait de la Terre un disque creux, p. 2.

Densité. Figure de la Terre dans l'hypothese d'une densité diverse, p. 431 & suiv.; dans trois différens rapports de la densité du noyau à celle du fluide, p. 336. Rapport de la densité, déduit des observations du pendule, p. 458. Différence de densité; ses causes & ses effets, p. 463 & suiv. Moyenne densité de la Terre, 465. Densité égale à égales distances du centre, Liv. V, n°. 324.

Déviation du fil à plomb. *Voyez* fil à plomb & tissure. Déviation de la lunette, *voyez* lunette.

Diametre moyen de la Terre, p. 362.

Distance. Rapport de la diminution de la distance à l'augmentation de la gravité, depuis l'équateur jusqu'au pôle, p. 430.

Divisions. Examen des divisions, p. 128 & suiv. *Voyez* vérification.

Dixon (M.). Mesure du dégré de MM. *Masson* & *Dixon* dans l'Amérique septentrionale, Liv. V, n. 299, note.

Dôme. Observations au dôme de la Basilique de *Saint Pierre* de *Rome*, p. 76, 114, 115.

Doria (M. le Cardinal), p. 92.

E

Eclipse. On prouve par les éclipses de Lune la courbure de la Terre, p. 4. De l'usage des éclipses pour connoître la différence des longitudes, p. 336. Extrait du poëme des eclipses par le P. *Boscovich*, p. 57 & suiv. note.

Ellipse. Propriétés de l'ellipse, Liv. V, n. 270 & suiv. Trouver l'ellipse génératrice par deux dégrés de paralleles; par deux dégrés, l'un du parallele, l'autre du méridien dans la même latitude; dans différentes latitudes; par deux dégrés du méridien, Liv. V, n. 276 & suiv. *Item* p. 498.

Ellipticité déduite de l'équilibre pour diverses hypotheses de gravité, p. 393. Formules pour l'ellipticité, p. 441 & suiv. Ellipticité déduite des observations du pendule, p. 457; de la mesure des dégrés, p. 483. *Voyez* aussi la note qui est à la fin du Liv. V.

Empedocle, ancien Philosophe, p. 2.

Equilibre. Figure requise pour conserver l'équilibre dans l'hypothese d'une gravité dirigée à un centre unique, p. 370 & suiv.; d'une gravité dirigée à deux centres, p. 395; d'une gravité dirigée suivant des lignes données à un point donné, p. 396; figure requise pour conserver l'équilibre dans l'hypothese de la gravité newtonienne, pour le cas d'homogénéité, p. 398; pour le cas d'une densité variable, p. 431 & suiv. Equilibre des canaux, p. 370, 373, 395, 406. Cas où l'équilibre troublé se dérange lui-même de plus en plus, 447 & suiv.

Eratostênes. Sa mesure des dégrés, p. 12.

Erreurs. *Voyez* vérification. Corriger les erreurs dans la distance de l'étoile au zénith, *voyez* zénith; dans la chaîne des triangles, *voyez* triangles; dans le défaut de parallélisme de la lunette, *voyez* parallélisme; dans les observations faites avec le quart-de-cercle, *voyez* quart-de cercle; dans la position du polygone, *voyez* position; dans la mesure de la base, *voyez* base. Dans le dégré d'Italie, *voyez* dégré.

Espagnols. Mathématiciens Espagnols envoyés par le Roi d'Espagne pour accompagner les Académiciens François, p. 23, note.

Etoiles. Mouvemens des étoiles, p. 256 & suiv. *voyez* Bradley. Choix des étoiles à observer, p. 149. Pourquoi on a choisi dans cette mesure α du cygne, & μ de la grande ourse, p. 259, 260. Diametre apparent des étoiles, 244. Corriger la distance de l'étoile au zénith, *voyez* zénith.

Euler (M.). Efforts qu'il fait pour concilier les dégrés, Liv. V, n. 305.

Examen des divisions, *voyez* division & vérification.

F

Fabriano, *Fabrianum*, Ville de la Marche d'*Ancone*.
Faenza, *Faventia*, Ville de la Romagne.
Fano, *Fanum fortunæ*, Ville ancienne du Duché d'*Urbin*.
Ferentino, *Ferentinum*, Ville de la Campagne de *Rome*.
Fermo, *Firmium*, Ville de la Marche d'*Ancone* proche le golfe de *Veniſe*, p. 109.
} Longitude & latitude de ces Villes, p. 178.

Fernel (M.). Il meſure un dégré en France, p. 14.

Ferrare, *Ferraria*, capitale du Duché de même nom. Séjour à *Ferrare*, p. 92.

Figure de la Terre. Sentimens des Anciens ſur cette figure, p. 2; que les plus hautes montagnes ne changent pas ſenſiblement la figure de la Terre, p. 15, note 2; qu'il eſt difficile de déterminer la figure de la Terre, p. 124. Irrégularité de cette figure prouvée par celle des dégrés, Liv. V, nº. 316. Que la queſtion de la figure de la Terre n'eſt point encore réſolue, Liv. V, nº. 320. Théorème principal pour déterminer la figure de la Terre par l'équilibre, p. 409. Figure de la Terre dans l'hypotheſe d'une denſité diverſe. *Voyez* denſité, équilibre, *voyez* auſſi ellipticité, gravité, dégrés.

Fil à plomb. Cauſes de ſa déviation, p. 25, 26, 156. Réponſe inſuffiſante de M. *de Maupertuis* touchant cette déviation, p. 27: il reconnoît cette inſuffiſance, p. 29. Action d'un globe de mille pas de rayon ſur le fil à plomb, p. 460 & ſuiv. Action des montagnes ſur le fil à plomb, Liv. V, n. 299, note. *Voyez* tiſſure. Moyen de connoître le point du limbe auquel répond le fil à plomb, p. 245, 246.

Fionchi. Montagne proche d'*Ancajano*. On y établit un ſignal, p. 50, 51. On y fait des obſervations, p. 77. On y répete les obſervations, p. 101.

Fogliano, lac. Danger de le paſſer à ſon embouchure, p. 72.

Foligno ou *Foligni*, *Fulginia*, belle Ville dans l'Ombrie.
Forli, *Forum livii*, ancienne Ville dans la Romagne.
Foſſombrone, *Forum ſempronii*, au Duché d'*Urbin*.
} Longitude & latitude de ces Villes, p. 178.

Force centrifuge. Lemme pour les forces centrales, p. 371. Expreſſions en lignes des forces centrifuges & de la loi de gravité, p. 372. Rapport de la force centrifuge à la gravité ſous l'équateur, 391 & ſuiv.

Fraſcati, jolie Ville près de l'ancien *Tuſculum*, p. 178.

Frattochie, extrémité de la baſe de *Rome* ſur la voie appienne, à trois milles d'*Albe*, p. 62.

G

Galilée. Sa loi de gravité, p. 9. Conſtruction pour ſa loi de gravité, p. 380.

Garampi (M. le Comte). Son éloge; les ſervices qu'il rend aux Auteurs de la meſure, p. 82. Eloge de M. Garampi ſon frere, *ibid.*

Genarro. Montagne de la Province de Sabine près de *Palombara*. Sa deſcription, p. 45. On y établit un ſignal, *ibid.* On y fait des obſervations, p. 76. On y répete ces obſervations, p. 102. *Voyez* ſtation.

Géographie de l'Etat de l'Egliſe, *voyez* carte. Géographie ancienne; qu'on n'a pas cru devoir s'y attacher, & pourquoi, p. 121.

Godin (M.) part pour l'Amérique, p. 21. Il meſure le dégré avec les mathématiciens Eſpagnols envoyés par le Roi d'Eſpagne pour accompagner les Académiciens François, p. 23.

Graham (M.), célebre artiſte Anglois, p. 19.

Gratz, *Graiacum*, capitale de la Stirie, Liv. V, n. 299, note.

Gravité. Son inégalité reconnue ſur une obſervation faite à Cayenne par M. *Richer*, p. 5, 6. Ce que c'eſt que gravité primitive & gravité abſolue, p. 8, note; gravité newtonienne, p. 9 & 365; que celle-ci eſt la ſeule qui ait lieu dans la nature, p. 397. Gravité qu'avoit en vue *Galilée*, & après lui M. *Huygens*, p. 380; celle de M. *Herman*, ibid. Rapport de la gravité à la force centrifuge ſous l'équateur, p. 391 & ſuiv. Expreſſion très ſimple de la gravité primitive ſous le pôle, p. 421. Formule pour la différence de la gravité, p. 454. Théorèmes remarquables, déduits de cette Formule, p. 456 & 457. Gravité newtonienne & denſité de la Terre

comparée à la mesure des dégrés, Liv. V, n°. 297 & suiv.
Gubbio ou *Eugubio*, *Eugubium*, Ville du Duché d'*Urbin*, p. 99.

H

Hauteurs & dépressions. Maniere de les prendre avec le quart-de-cercle, p. 75, 76 & 303. Hauteurs & abaissemens respectifs des signaux, p. 160 & 327. Moyen de suppléer aux observations d'une partie des hauteurs & dépressions, p. 328.
Heraclite faisoit de la Terre un hémisphere concave, p. 2.
Herman (M.). Construction pour sa loi de gravité, p. 383. Ellipse de M. *Herman*, p. 417; qu'il s'est trompé dans la censure qu'il a faite de *Newton* & *Gregory*, p. 425; causes de cette erreur, p. 429.
Hongrie. Dégré mesuré en Hongrie par le P. *Liesganig*, Liv. V à la fin de la note sur le n°. 303.
Horizon. Réduire les angles à l'horizon, p. 139 & suiv. n°. 306 & suiv.
Huygens. Sa loi de gravité, p. 9. Il prouve que la Terre est applatie vers les pôles, p. 7. Son opinion sur le diametre apparent des étoiles, p. 244. Construction pour sa loi de gravité, p. 380.
Hypotheses. Observations importantes concernant les hypotheses, p. 430. Hypotheses sur l'augmentation des dégrés, p. 487.
Hivers de *Castelluccio*. On y passe l'hiver à la maniere des Lappons, p. 105, 106.

I

Jesi, *Æsium*, petite Ville de la Marche d'*Ancone* proche la riviere de ce nom. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Imola, *Forum Cornelii*, Ville très belle dans la Romagne. Sa longitude & sa latitude, *ibid.*
Inégalités intérieures de la Terre; leur effet, p. 28. Qu'il est fort probable que toute l'inégalité est proche la surface, non dans l'intérieur le plus profond, p. 34, 35, *voyez* tissure.
Inondation du *Tibre*. Danger que nos Auteurs & un grand nombre d'autres personnes y ont couru de périr de faim, p. 58.
Instrumens. Préparation des instrumens pour la mesure du dégré & la correction de la carte géographique, p. 37 & suiv. *voyez* secteur, quart-de-cercle. Instrumens pour la mesure de la base, *voyez* base. Instrument de vérification, *voyez* vérification & vérificateur.

K

Kirker. Cabinet de *Kircker* au college romain. Sa description. On y établit l'observatoire de *Rome*, p. 87, *voyez* observatoire.

L

Lambertini, petit neveu du Pape Benoît XIV, p. 110.
Langlois (M.), fâmeux artiste, p. 40.
Latitude. Ce que c'est que latitude dans un spheroïde, Liv. V, n. 264.
Leucippe. Son opinion sur la figure de la Terre, p. 2.
Saint Léon ou *San Leo*, *Leonis Fanum*, petite, mais forte Ville au Duché d'*Urbin*. Phénomene surprenant qu'on y a apperçu, p. 97.
Liesganig (le R. P.). Dégrés qu'il a mesurés dans le cercle d'Autriche, Liv. V, n°. 299, note. Dans la Hongrie, p. 511.
Limbe du secteur & ses différentes parties, p. 187 & suiv. Sa division, p. 194. Limbe du quart-de-cercle; sa division, p. 268 & 269.
Longitudes & latitudes de toutes les Villes de l'Etat de l'Eglise, p. 178 & suiv.
Louville (M. le Chevalier de). Sa méthode pour la division, p. 297.
Lunette du secteur, p. 195. Excentricité de la boëte qui contient l'objectif; son avantage pour connoître la ligne de foy, p. 196: du micrometre, de la maniere de tendre les fils, de l'oculaire, des tuyaux, & des autres parties de la lunette, p. 199 & suiv. De la maniere de placer les fils & de les éclairer, p. 224 & suiv. Du parallélisme de la lunette au plan de l'instrument, *voyez* parallélisme. De l'inclinaison de la lunette dans le plan du méridien, p. 238. Lunette double du quart de cercle au moyen de deux objectifs, p. 226. Corriger sa déviation, p. 293.

M

Macerata ou *Macereta*, Ville belle & peuplée

peuplée dans la Marche d'*Ancone*; sa longitude & sa latitude, p. 179.
Mac Laurin (M.) résoud un beau problême sur la figure de la Terre, p. 11, 398 & suiv.
Magnalbi (le R. P.) Jésuite: sa carte des environs de *Fabriano*, p. 171.
Mairan (M. de). Il a imaginé une loi de gravité qui peut se concilier avec l'allongement ou l'applatissement de la figure, p. 17. Il envoie une toise au P. *Boscovich* pour servir de mesure fixe, p. 40, 41, 136, 137.
Maire (le R. P. Christophe) Jésuite Anglois. Son éloge, p. 11. Il ouvre un avis important sur la réformation de la carte, *ibid.* Les dangers qu'il a couru dans le voyage avec le P. *Boscovich*, *voyez* danger. Il assiste à une congrégation générale en qualité de Député-Electeur, p. 68.
Manfredy (M.) de l'Académie des Sciences, p. 33.
Manfredy (M. Eustache), p. 120.
Saint Marin ou *San Marino*, *Marinum*, capitale d'une petite République enclavée dans le Duché d'*Urbin*, sur les confins de la Romagne: sa situation, p. 81.
Masson (M.). Il mesure un dégré du méridien en Amérique, Liv. V, n°. 299, note.
Maupertuis (M. de) part pour la Lapponie: il y mesure son dégré, & publie un ouvrage sur la figure de la Terre, p. 21. Il corrige le dégré de M. *Picart*, p. 21, 22. Sa réponse à l'objection sur la déviation du fil à plomb, p. 27. Il en reconnoît lui-même l'insuffisance, p. 29. De son ouvrage sur les parallaxes de la Lune, p. 33.
Maurepas (M. le Comte de), Secrétaire d'Etat, p. 20.
Mer. La courbure des mers prouve celle de la Terre, non sa sphéricité, p. 7. Du flux & du reflux de la mer, p. 439. Densité de la Terre comparée à celle des mers, p. 469. *Voyez* aussi la fin de la note mise à la fin du Liv. V.
Méridienne. Moyen de tracer une méridienne, p. 241, 242.
Mesure des dégrés, *voyez* dégré. Projet de la mesure du dégré dans les Etats du Pape, p. 31, 32. Mesure de la base, *voyez* base. Mesure fixe; précautions à prendre pour avoir une mesure fixe, p. 19 & 20. *Voyez* toise.
Métaux. Moyen inventé par M. *de la Condamine* pour connoître l'effet de la chaleur sur les métaux, p. 349.
Métella. Description du tombeau de *Métella*, p. 62. Danger que nos Auteurs y ont couru de perdre la vie, *ibid.*
Micrometre. *Voyez* vérificateur & vérification. Micrometre de la lunette fixe, p. 265, 266.
Mille. Valeur du mille romain, p. 362.
Mission donnée, p. 77.
Mondovi, Ville du Piémont, Liv. V, n°. 299, note.
Monier (M. le). Il part avec d'autres Académiciens pour aller mesurer un dégré en Lapponie, p. 21.
Montagnes. Comment elles se forment, p. 107. Leur structure, p. 108. Hauteurs des montagnes dans l'Etat de l'Eglise, p. 157 & suiv.
Montalte, *Mons altus*, petite Ville de la Marche d'*Ancone*, p. 109. Il faut la distinguer d'une autre petite Ville de même nom dans le patrimoine de Saint Pierre près la mer, p. 55.
Montefiascone, autrefois *Mont Falisque*, *Falisca*, petite Ville près du lac *Bolsena*, p. 54.
Mont-rond. Tentative inutile sur cette montagne, p. 104.
Moravie. Dégrés mesurés dans la Moravie, Liv. V, n. 299, note.

N

Narni, *Narnia*, Ville fort ancienne dans la Sabine.
Nepi, *Nepeta*, petite Ville dans le patrimoine de Saint Pierre.
} Leur longit. & leur latit. p. 179.
Newton. Sa loi de gravité, p. 9. Il prouve que la Terre est applatie vers les pôles, p. 7 & suiv. Sa théorie de la gravité confirmée, p. 17. Que sa théorie est la seule qui ait lieu dans la nature, p. 397. Accord de son hypothese de gravité avec tous les phénomenes, p. 430.
Nocera, *Nuceria*, Ville du Duché de *Spolete* au pied de l'Apennin. Danger dans le voyage d'*Assisa* à *Nocera*, p. 52.
Norcia ou *Nurcie*, *Nursia*, au Duché de *Spolete*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Norvoode mesure un dégré en Angleterre, p. 14.
Nutation de l'axe. Difficulté de la déterminer:

ſentimens divers ſur cette matiere : effets de cette nutation : qu'il ne peut réſulter aucune erreur dans cette meſure, p. 258 & 259.

O

Obſervation. Qu'il eſt difficile d'obſerver les objets qui ſont dans la même direction que le Soleil, p. 55 Obſervations faites de deſſus un arbre, p. 76. Obſervations aſtronomiques pour la meſure du dégré : qu'elles doivent être des plus exactes, p. 38, 39. Maniere d'obſerver les étoiles voiſines du zénith, p. 89. Des obſervations ſimultanées, p. 254, 255. Obſervations géodéſiques. Erreurs qu'on y peut craindre ; moyen de les corriger, p. 303 & ſuiv. Recueil d'obſervations perdu, p. 99. Cette perte eſt réparée, *ibid.* Obſervations géographiques Méthodes pour les obſervations géographiques, p. 172, 337, 365, *voyez* carte. Obſervations de Phyſique ſur la formation & la ſtructure des montagnes, p. 107, 108 Obſervations pour la poſition du polygone, p. 115, 145 & ſuv Obſervations du pendule, *voyez* pendule.

Obſervatoire établi à *Rimini*, p 81. On y fait les obſervations, p. 90, 94 Obſervatoire établi à *Rome*, p. 87 : obſervations qu'on y a faites, p 89, 114.

Obſtacles aux obſervations des PP. *Maire* & *Boſchavich* de la part des deux Curés, p. 56, 57 ; de la part des ſoldats Toſcans, p. 79 ; de la part des gens de la campagne, p. 48.

Saint Odil (M. le Baron de), *voyez* la ſeconde note ſur la préface.

Olivieri (M. Annibal), p. 96, 97.

Optique. Phénomenes ſinguliers d'optique, p. 94, 95, 96.

Orte ou *Orti*, *Ortanum*, Ville du patrimoine de *Saint Pierre* près du *Tibre*.

Orviete, *Urbiventum*, ancienne Ville dans le patrimoine de *Saint Pierre*.

Oſimo, *Auximum*, Ville de la Marche d'*Ancone*, à 3 lieues de *Loretie*. On détermine à *Oſimo* la poſition d'*Ancone* par la fumée du canon de la Citadelle d'*Ancone*, p. 110.

Oſtie, *Oſtia*, ancienne Ville d'Italie dans la Campagne de *Rome* à l'embouchure du *Tibre*.

} Longitude & latitude de ces Villes, p. 179.

P

Palme romain. Rapport du palme & du pas romain au pied & à la toiſe de *Paris*. *Voyez* la table qui eſt à la fin de l'avertiſſement ; *voyez auſſi* p. 355 & ſuiv.

Palombara, petite Ville de la Province de Sabine, p. 45.

Parallaxes de la Lune : de leur uſage pour déterminer la figure de la Terre, p. 33 & 34 Parallaxe des fils, p. 297.

Paralleles à l'équateur. On prouve par le dégré de *Rome* qu'ils ne ſont point circulaires, p 32.

Paralléliſme de la lunette au plan du ſecteur, p 88. 227 & ſuiv Méthode de MM. *de la Condamine* & *Bouguer* pour trouver ce paralléliſme, p. 231. Méthode de l'Auteur par le retournement du ſecteur, p. 232 & ſuiv. Paralléliſme des axes des lunettes entre eux & au plan du quart de cercle ; moyen de corriger le défaut de ce paralléliſme, p. 278, 298 & ſuiv.

Pas romain, *voyez* palme.

Pendule. Ce que c'eſt que pendule ſimple à ſecondes, p. 5, note 3 : uſage de ſes obſervations, p. 457 : ellipticité qu'on en tire, *ibid.* on en tire auſſi une formule pour le rapport des denſités, p 458. Déviation du pendule comparée à l'accroiſſement de la gravité, p 462. Obſervations du pendule, p. 466 & ſuiv : on en tire le rapport de la denſité de la Terre à la denſité des mers, p. 469.

Pennino ou *Apennino*, très haute montagne près d'*Aſſiſe*. On y choiſit une ſtation, p. 50. On y va faire des obſervations, p 77 & 78.

Perches pour meſurer des baſes. p. 42. Deſcriptions des perches. p 341. Examen de la courbure des perches, p. 85, 346. Effet de l'humidité ſur les perches, p. 86, 343 & ſuiv. Variations bizarres, p. 345.

Perouſe, *Peruſia*, capitale du Perugin.

Peſaro, *Piſaurum*, Ville du Duché d'*Urbin*.

} Leur longit. & leur latit. p. 179.

Phénomenes ſinguliers d'optique, p. 94, 95, 96. Phénomene ſurprenant, p 97.

Philoſophes anciens. Les plus célebres ont reconnu la ſphéricité de la Terre, p. 2 & ſuiv.

Phyſique Obſervations de Phyſique ſur la formation & la ſtructure des montagnes, p. 107, 108.

Picart (M.). Mesure de M. *Picart*, p. 14. Invention heureuse de M. *Picart*, ibid. Correction de son dégré, p. 21, 22.
Piémont. Dégrés mesurés dans le Piémont, Liv. V, n. 299, note.
Pôle. Hauteur du pôle à *Rome*, p. 117, 149; à *Rimini*, p. 150 & suiv. Expression très simple de la gravité primitive sous le pôle, p. 421.
Polygone, ou chaîne de triangles depuis *Rome* jusqu'à *Rimini*, *voyez* position. Réduire le polygone à une surface réguliere de la Terre, p. 309, 310.
Porto, *Portus Romanus*, Ville presque ruinée dans la Campagne de *Rome*, p. 39.
Position. Observations sur la position du polygone, p. 115, 144. Corriger les erreurs de cette position, p. 323 & suiv. Angles de position, p. 145 & suiv. Méthode pour connoître l'angle de position, p. 312, 313, 316 & suiv. Avantages qu'on peut retirer de l'angle de position; moyen de se les procurer, p. 318 & suiv. Connoissant la position de trois lieux vus d'un quatrieme; déterminer celle d'un quatrieme, p. 172, 173.
Possidonius. Sa mesure du dégré, p. 13.
Preneste, aujourd'hui *Palestrina* ou *Palestrine*, ancienne Ville dans la Campagne de *Rome*. Situation de l'ancienne *Preneste*, p. 70.

Q

Quart de-cercle. Description sommaire du grand quart-de-cercle, p. 126, 262, 263. Description détaillée de son pied; de la lunette fixe & double & de ses micrometres; de la maniere de suspendre le fil à plomb; de ses autres pieces, & de leur usage, p. 264 & suiv. Division du limbe en dégrés & minutes, p. 268. Méthode pour décrire les transversales p. 269. Moyen de faciliter les mouvemens du quart-de-cercle, p. 270. Rectification du quart de-cercle, p. 273; sa vérification, p. 277. Méthodes pour connoître le nombre de dégrés, minutes & secondes désignés par le quart-de-cercle, p. 279. De l'usage du quart-de-cercle, p. 296 & suiv. Erreurs à craindre; moyen de les corriger, p. 303 & suiv. Evaluation des erreurs, p. 325 & suiv. *voyez* vérificateur, vérification, parallélisme. Du petit quart-de-cercle & de son usage pour la correction de la carte géographique, p. 337.
Quito, Ville du Pérou sous l'équateur. Son dégré comparé aux autres, Liv. V, n°. 299, note, & n°. 303, note.

R

Ravenne, *Ravenna*, capitale de la Romagne, Ville très célebre; sa situation, p. 91.
Ryaon de courbure. Ce que c'est que rayon de courbure, p. 471, ses propriétés, Liv. V, n. 258.
Recanati, *Ricinetum*, Ville riche dans la Marche d'*Ancone*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Recchi (Mgr.), Evêque de *Ripa Transone*. Son éloge, p. 109.
Réduction des angles à l'horizon, *voyez* horizon ou angles. Réduction du polygone à une surface réguliere de la Terre, *voyez* polygone. Réduction du palme, du pas & du pied romain, & de la toise de *Vienne* à la toise de *Paris*, *voyez* toise.
Réfractions. Qu'il en faut connoître la théorie, p. 19; qu'il faut y avoir égard, p. 123.
Revillas (M. l'Abbé de), sa carte du Diocèse de *Tivoli*, p. 171. Le rapport qu'il a trouvé entre le palme romain & le pied de *Paris*, p. 356, 357.
Richer (M.). Observation de M. *Richer* à *Cayenne*, p. 5.
Ricci (M. le Marquis), p. 110, 111.
Riccioli. Son éloge, p. 2. Il mesure un dégré en Italie, p. 14.
Rieti, *Reate*, ancienne Ville au Duché de *Spolete*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Rimini, *Ariminum*, ancienne & belle Ville dans la Romagne. On y établit un observatoire, p. 81. On mesure une base aux environs de cette Ville, p. 84 & suiv. Observations astronomiques à *Rimini*, p. 90, 146, 147 & suiv. Hauteur du pôle à *Rimini*, p. 150 & suiv.
Ripa Transone, *Cupra Montana*, petite Ville, mais belle & forte dans la Marche d'*Ancone*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Romagnoli (M. le Marquis), Seigneur Italien, p. 91.
Rome, capitale du monde chrétien. On y

établit un observatoire, p. 87. On y fait des observations astronomiques, p. 89, 114. Hauteur du pôle à *Rome*, p. 117, 149. Observations faites au dôme de l'Eglise *Saint Pierre*, *voyez* dôme.
Roubois (M des). Il prouve que les dégrés décroissans vers le pôle faisoient la Terre allongée, p. 15, note.
Ruso (M.), Prêtre de *Verone* & artiste. Son éloge, p. 43, 44.

S

Sarcina ou *Sarsine*, *Sarsina*, ancienne Ville de la Romagne, sur les frontieres de Toscane. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Sartio (le R. P. Maure), Abbé des Camaldules à *Rome*, p. 91.
Secteur. Idée du secteur; description sommaire de ses différentes parties, p. 182 & suiv. Description détaillée de son support, de sa suspension, de son rayon, du limbe & de sa lame mobile, p 185 & suiv. Du micrometre & de son exacte précision, p 165 & suiv. De la lunette & de ses différentes parties, p. 195 & suiv. De la vérification des divisions, p 203 & suiv. De la maniere de placer les fils & de les éclairer, p. 224 & suiv. Du parallélisme de la lunette au plan du secteur, p. 227 & suiv.; de son inclinaison dans le plan du méridien, p. 238. De la maniere de le pointer, p. 240; d'observer, 244; de corriger les erreurs, 247 & suiv. Avantages du secteur qui a servi dans cette mesure, p. 161.
Segni, *Signia*, ancienne Ville de la Campagne de *Rome*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Semproni (M.), Commandant de la Citadelle de *San Leo*, & de qui on apprend un phénomene surprenant, p. 97.
San Severino, petite Ville de la Marche d'*Ancone*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Signal. Maniere de construire les signaux, p. 46, 47, 131. Signaux détruits par un effet de l'avidité des gens de la campagne, p. 48 & 49. Obstacles de la part des soldats Toscans à la position du signal, p. 79. Ordres concernant les signaux, p. 73. Signaux pour les bases, p. 74.
Sinigaglia, *Senogallia*, petite Ville de la Marche d'*Ancone*, p. 179.
Sivieri (le R. P.) Jésuite, p. 92.
Snellius mesure un dégré en Hollande, p. 14.
Sobjeschitz. Dégré entre *Vienne* & *Sobjeschitz*, Liv. V, n. 299, note.
Soriano, petite Ville proche la montagne de ce nom, sur laquelle on établit un signal. Observations sur le mont Soriano, p. 76. Autres observations, p. 101, 102.
Spolete, *Spoletum*, capitale du Duché de ce nom. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Station. Choix des stations, p. 45 & suiv. *Item* p. 53, 132. Avantages de ces postes, p. 133; leur liaison avec les bases, *ibid.*
Stirie. Dégrés mesurés dans la Stirie, Liv. V, n. 299, note.
Stopani (M. le Cardinal), Légat d'*Urbin*. Il fait faire une carte particuliere du Duché d'*Urbin*, p. 120, *voyez* Pesaro.
Sutri, *Sutrium*, petite Ville au patrimoine de *Saint Pierre*, p. 179.
Syene, Ville d'Egypte. Avantage qu'Eratosthene tire de la position pour la mesure du dégré, p. 12, 13.

T

Terni, *Interamnum*, ancienne Ville au Duché de *Spolete*. Sa longitude & sa latitude, p. 179.
Terracine, *Anxur*; Ville également ancienne dans la Campagne de *Rome*, ibid.
Terre. Mouvement de la Terre, p. 368, 369. Diametre moyen de la Terre, *voyez* diametre. Figure de la Terre, *voyez* figure.
Tesio ou *Tetio*, haute montagne sur laquelle on établit un signal, p. 49. On y fait des observations, p. 79 & 99.
Tibre. Débordement du *Tibre*, p. 57 & suiv. On sauve la vie à un Religieux & à un jeune homme de qualité, p. 59. Dommages causés par l'inondation, p. 61. On travaille à les réparer, p. 62, *voyez* danger.
Tissure irréguliere des parties de la Terre, p. 25 & suiv. Soupçon de MM. *de Maupertuis* & *de la Condamine* sur cette irrégularité de tissure, p. 29; qu'elle n'a probablement lieu que proche la surface, p. 34, 35, & n°. 323 du Liv. V. Effet qu'elle produit sur la mesure des dégrés

& sur la gravité, p. 35, 36. Irrégularité de tissure proche la surface de la Terre; ses effets, p. 465.
Tivoli, *Tibur*, ancienne & célebre Ville dans la Campagne de *Rome*. Sa longitude & sa latitude, p. 180.
Todi, *Tudertum*, Ville ancienne au Duché de *Spolete*, ibid.
Toise. Réduction du palme, du pas & du pied romain, au pied & à la toise de *Paris*, *voyez* la table qui est à la fin de l'avertissement. *Voyez* aussi p. 354 & suiv. Rapport de la toise de *Vienne* à celle de *Paris*, p. 479: toise qui devroit servir de mesure fixe, p. 19, 20. On en fait venir une de *Paris* à *Rome*, p 40. Différence de celle-ci à celle qui a servi au Pérou, p. 41, note, & p. 137, note.
Tolentin, petite Ville dans la Marche d'*Ancone*, p. 180.
Tornea, riviere au nord du golfe de Bothnie, p. 21.
Toscanella, autrefois *Tuscania*. Effet que le mauvais air a produit dans cette Ville & ses environs, p. 54.
Tosio (M. Pierre Paul) Il accompagne les PP. *Maire* & *Boscovich* sur le mont *Genarro*, p. 45.
Transversales, *voyez* quart-de-cercle.
Trevi, autrefois *Treba*. Sa situation, 69.
Triangles Correction des triangles, p. 137 & suiv p. 331 & suiv.
Turin, Ville capitale Mesure de son dégré, Liv. V, n°. 299, note.

V

Valenti (M. le Cardinal), Ministre du Pape Benoît XIV. Son éloge, p. 31.
Varadin Dégré entre *Vienne* & *Varadin*, Liv. V, n. 299, note.
Velino, riviere. Cascades de *Velino*, p. 103.
Velletri, *Velitræ*, ancienne & belle Ville de la Campagne de *Rome*, p. 180.
Vérificateur ou instrument de vérification pour le quart-de cercle, p. 271. Description de ce vérificateur; son usage, p. 272 & suiv. p. 286 & suiv. Avantages de cet instrument, p. 289. Instrumens de vérification pour le secteur, p. 203.
Vérification du micrometre du secteur, p. 203; de sa division, p. 206, 211. Méthode de MM. *de la Condamine* & *Bouguer* pour cette vérification, p. 217. Méthode semblable, p. 218. *voyez* compas à verge. Méthode pour abréger la vérification du quart de-cercle, p 280, 281. Diverses méthodes de vérification, p. 282 & suiv. p. 289 & suiv.
Veroli, *Verulæ*, ancienne Ville de la Campagne de *Rome*, p 180.
Vienne en Autriche. Valeur de son dégré, Liv. V, n. 299, note
Visso, Ville sur le *Nera* proche la montagne de la Sibille: son affreuse situation, p. 103.
Viterbe, *Viterbium*, capitale du patrimoine de *Saint Pierre*. Sa longitude & sa latitude, p. 180.
Ulloa (Dom Antoine de), Mathématicien Espagnol, p. 23, note.
Vood (M.), Gentilhomme Anglois. Son éloge, p. 42, 43.
Voyage. Projet d'un voyage à l'équateur & au cercle polaire, p. 203; dans les Etats du Pape, p. 31, 32. Projet des opérations de ce dernier voyage, p. 44; ce qui les a retardées, p. 45. Départ de *Rome* en Octobre 1750, *ibid.* Retour du P. *Boscovich* à *Rome* en Novembre 1752, p. 111. Retour du P. *Maire* en Juin 1753, p. 114.
Urbanie ou *Urbanea*, petite Ville au Duché d'*Urbin*. } Leur longit. & leur latit. p. 180.
Urbin, *Urbinum*, Ville célebre, capitale du Duché de ce nom. } Leur longit. & leur latit. p. 180.

X

Xenophane. Son opinion sur la figure de la Terre, p. 2.

Z

Zénith. Maniere d'observer les étoiles voisines du zénith, p. 89, 254, 255. Correction à faire à la distance de l'étoile au zénith, p. 247 & suiv.

Fin de la Table.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un ouvrage intitulé *Voyage aſtronomique & géographique dans l'Etat de l'Egliſe pour meſurer deux dégrés du méridien & corriger la carte géographique*, par les R. PP. *Maire* & *Boſcovich* de la Compagnie de Jeſus, traduit du latin avec des notes; & il m'a paru que non ſeulement il n'y avoit rien qui pût en empêcher l'impreſſion, mais qu'on devoit ſavoir gré au Traducteur d'avoir mis dans notre langue l'ouvrage de ces deux ſavans Aſtronomes. A Paris le 30 Août 1769. MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans civils, & autres, nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT, notre amé le ſieur Jacques Lacombe Libraire, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au public un ouvrage intitulé *Voyage aſtronomique & géographique pour la meſure des dégrés du méridien & la correction de la carte de l'Etat eccléſiaſtique, traduit du latin avec des corrections & des additions de l'Auteur.* S'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par-tout notre Royaume pendant le tems de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. FAISONS défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance: comme auſſi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil ſept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du préſent Privilege; qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très cher & féal Chevalier, Chancelier Garde des Sceaux de France, le ſieur DE MAUPEOU; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit ſieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Préſentes; du contenu deſquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayant cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit ouvrage, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés &

féaux Conſeillers, Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de haro, charte normande & lettres à ce contraires; car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le mercredi quatrieme jour du mois de Septembre l'an de grace mil ſept cent ſoixante neuf, & de notre regne le cinquante-cinquieme. PAR LE ROI EN SON CONSEIL. LEBEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XVIII de la Chambre royale & ſyndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 775, fol. 21, conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 10 Octobre 1769. BRIASSON Syndic.

Je cede le préſent Privilege à Monſieur Tilliard, ſuivant les conventions faites entre nous. A Paris ce 26 Avril 1770. LACOMBE.

Regiſtré la préſente ceſſion ſur le Regiſtre XVIII de la Chambre royale & ſyndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 219, conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28 Fevrier 1723. A Paris ce 19 Mai 1770. BRIASSON Syndic.

ERRATA.

PAGE VI, *lig.* 22 hiſtoire, *liſez*, hiſtoire
Lig. 28, très utiles *ajoutez* Le quatrieme apprend à meſurer un dégré.
VIII, *derniere ligne*, 14 *liſez* 114.

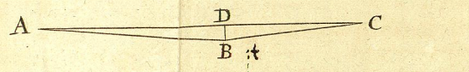
13, *lig.* 20, Maiman *liſez* Maimon
18, *note*, philoſophiques *ajoutez* 1728
23, *note*, Dom .... Lieutenant *liſez* Don .... Lieutenans
35, *lig.* 7, l'obſervation *ajoutez* d'une étoile
36, *note*, *lig. pénult.* plus à raiſon *liſez* plus de raiſon
46, *lig.* 15, & ne préſente *liſez* ſans préſenter
63, *lig.* 2, équarrées *liſez* équarries
66, *lig.* 19, ces *liſez* ſes
Derniere ligne, Genarro *liſez* Gennaro
89, *lig.* 15, ſigne *liſez* cygne
128, *lig. pénult.* ſuffit *liſez* ſuffi
132, *lig.* 23, aux plus *liſez* au plus
173, *lig.* 5, 45′ *liſez* 43′
175, *effacez la note, parcequ'on n'a pas pu avoir la carte du Duché d'Urbin.*
186, *lig.* 16, AA *liſez* AA′
249, *lig.* 19, 45° *liſez* 45°,
255, *lig.* 3, de réitérer *ajoutez* encore
257, *lig.* 33, au bout de trois mois *liſez* dans l'intervalle de trois mois
263, *lig.* 35, T*t*g *liſez* T*t*Q
269, *lig.* 1, de 1 minutes *liſez* de 10 minutes
313, *lig.* 20, à deux droits *liſez* à angles droits
375, *lig.* 1, FV *liſez* FV′
420, *lig.* 10, BK $\frac{1}{2}$ *liſez* BK $\frac{1}{2}$

426, *lig.* 22, extérieur *lisez* extérieure
436, *lig.* 2, à près *lisez* à peu près
439, *lig.* 20, $\frac{1}{1057000}$ *lisez* $\frac{1}{1075000}$
440, *lig.* 21, $\frac{18}{2} cqr$ *lisez* $\frac{2}{3} cqr$
464, *lig.* 25, de pieds *lisez* de toises
469, *lig.* 26, 2520 *lisez* 3520
471, *Ce numéro* 471, *& ceux des neuf pages suivantes, sont répétés ; & c'est pour cela que ces endroits sont désignés par le numéro du texte.*
471, (n°. 258), *lig.* 19, ces points *lisez* ses points
471, (n°. 284), *lig.* 5, sans parler du rayon *lisez* en omettant le rayon
Ligne 8, de l'angle *lisez* d'un angle
472, (n°. 286), *lig.* 26, $hf = as$ *ajoutez* HF = AS
Ligne 29 & 31, $1 - \frac{A^2 + a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$ *lisez* $1 + \frac{-A^2 + a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$
Note, CD *lisez* CB.
478, (n°. 299), *note*, *lig.* 7, 3,″ *lisez* 33″
484, *lig.* 3, $\frac{1}{155}$ *lisez* $\frac{1}{255}$
486, *lig.* 16, petit *lisez* petite
494, *lig.* 31, $\frac{1}{337}$ *lisez* $\frac{1}{335}$
497, *lig.* 3, du pendule *lisez* du fil à plomb
Item. pag. 501, *lig.* 33
507, *lig.* 22, —386.2 *lisez* —586.2
Ligne 24, —4.6 *lisez* —43.6
508, *lig.* 10, AN *lisez a* N
510, *lig.* 4, 57134.6 *lisez* 57134.8

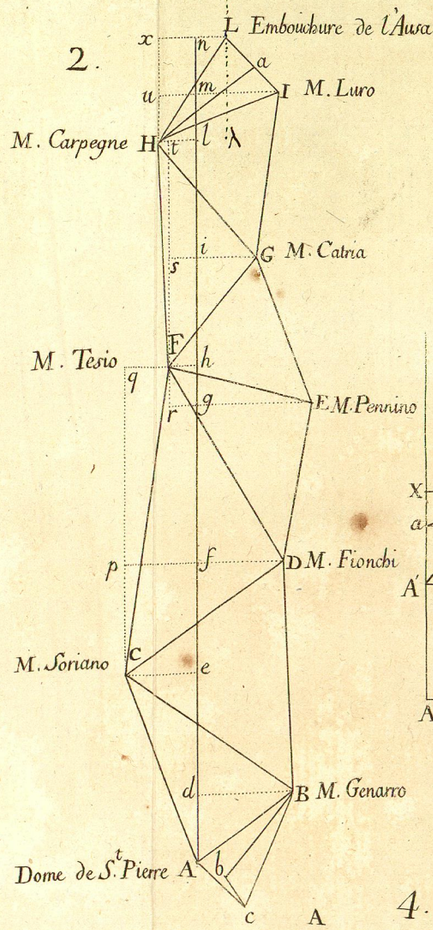
FIN.

Pl. I.

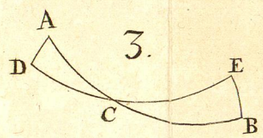
1.



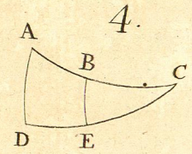
2.



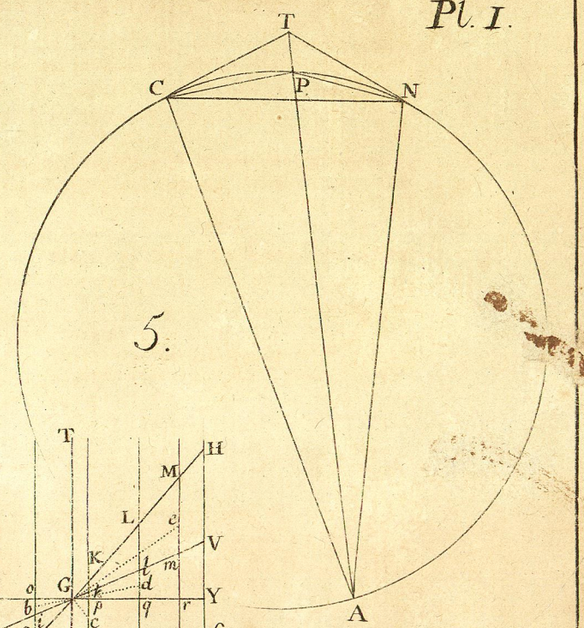
3.



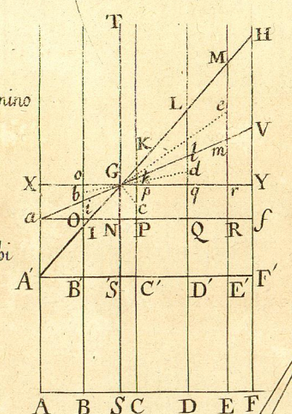
4.



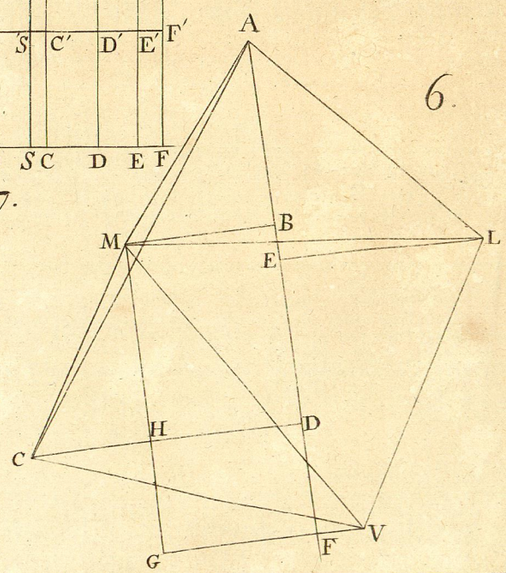
5.



7.



6.



De Bellay Sculp.

Pl. II

1.

8.

3.

7.

18.

13.

14.

15.

9.

6.

10.

2.

19.

4.

5.

11.

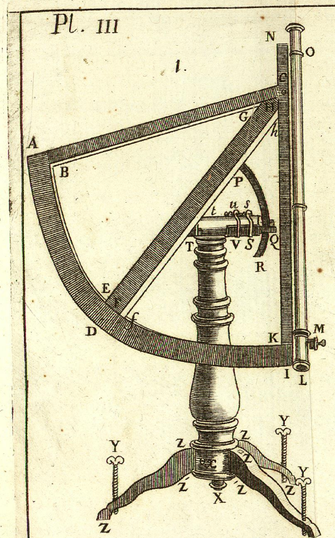
12.

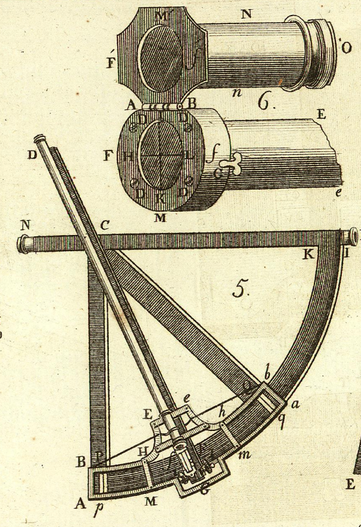
16.

17.

De Bettay Sculp.

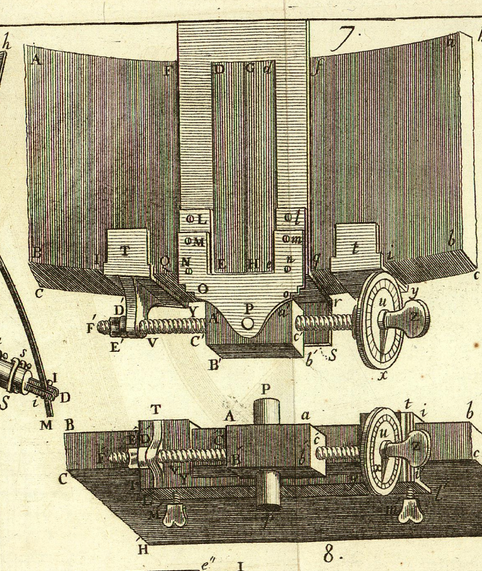
Pl. III


1.

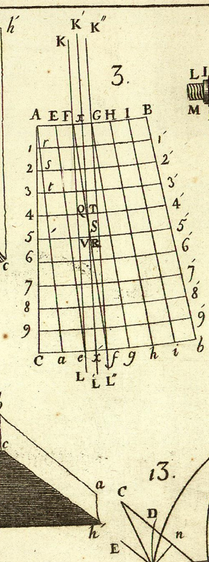

6.

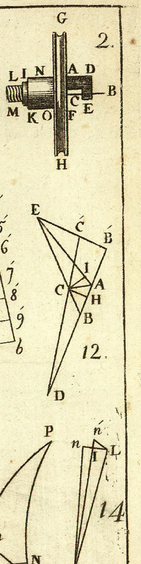
5.

4.

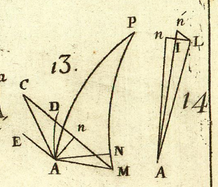

7.

8.

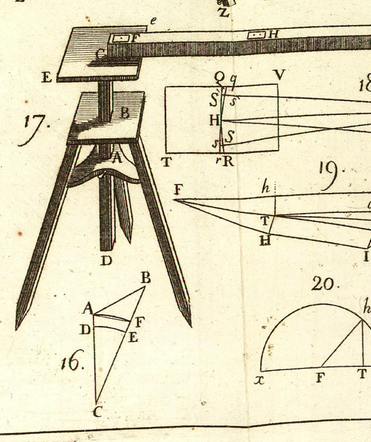

3.


2.

12.


13.

14.


17.

18.

19.

20.

16.

9.

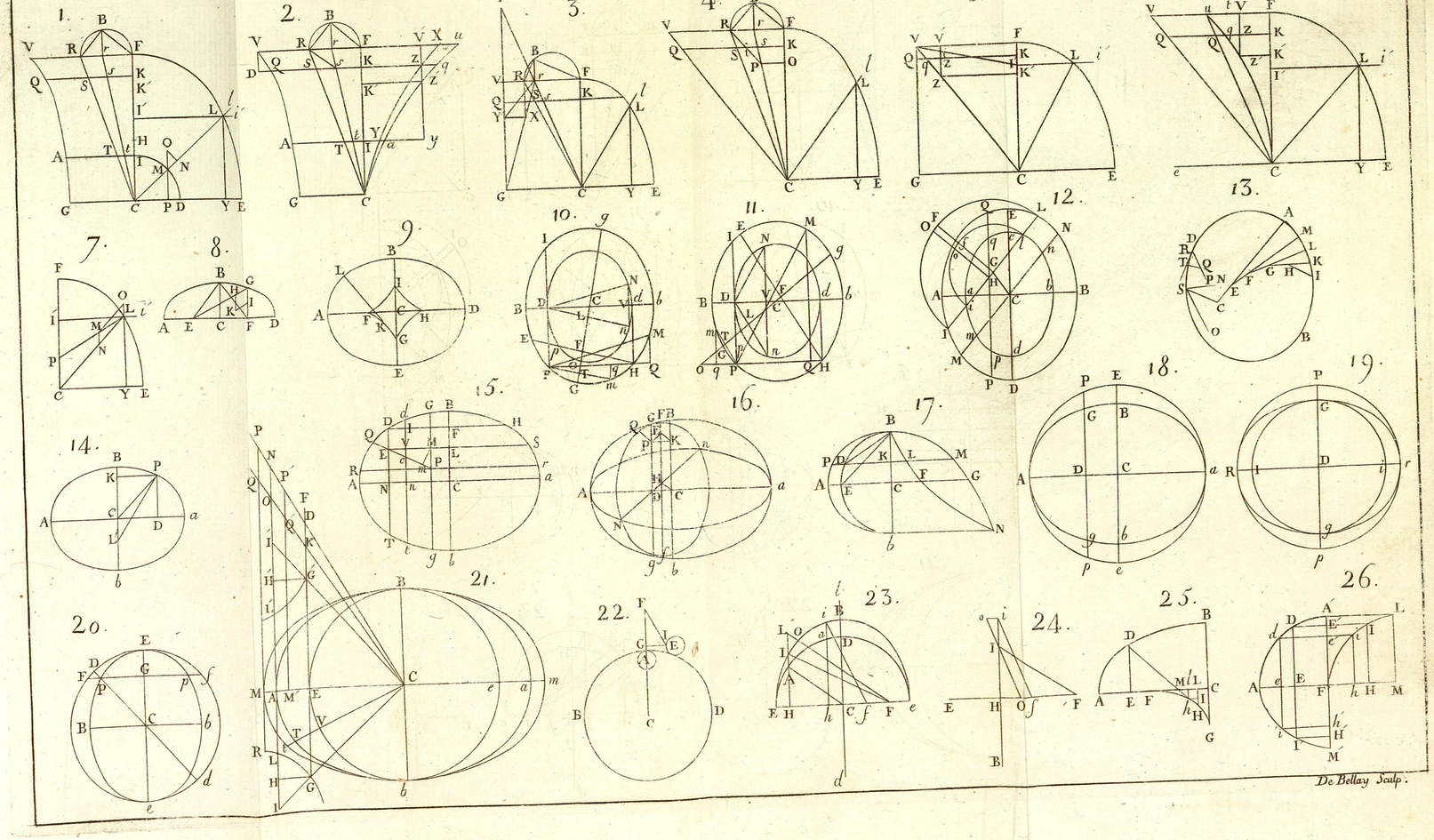
10.

11.

17.

15.

De Bellay Sculp.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
De Bellay Sculp.


R. BIBLIOTHECA MEDIOLANENSIS