La nascita della teoria del caos in astronomia. Poincaré ha davvero scoperto il caos?

A. Drago e C. Saccone

Gruppo di Storia della Fisica, Dip. Scienze Fisiche, Università di Napoli

Abstract. After two centuries of studies on the three-body problem, in order to state the stability of Solar system, H. Poincaré suggested a dramatic change in attitude for supporting rather the view of the impossibility of solving such a problem, owing to the discovery of an essential complex structure of the set of solutions of the corresponding differential equation. His main contributions to chaos theory are shortly remembered. Then some recent objections to the attribution to Poincaré of the merit of discovering chaos as we presently define it, are taken in account. However, we observe that chaos theory is not a well-defined subject, even in the mathematical definition of chaos. Moreover we underline that by taking in account constructive mathematics a new view on chaos theory is obtained, that show as indecidable a great number of basic problems put by such a theory. Then we remark that with respect to the decidable part of chaos theory, Poincaré's contributions result to be of a substantial nature. All that leads us to conclude that Poincaré really did discovered chaos in his analysis of the three-body problem.

1. Il lavoro di Poincaré.

È comunemente accettato che il concetto di caos in matematica ed in dinamica fu introdotto nel momento in cui il noto matematico francese, J. H. Poincaré (1854-1912) cercò di dare una soluzione al problema dei tre corpi, problema che si inserisce nell'ambito degli studi della meccanica del sistema solare.

Poiché già allora appariva chiaro che le equazioni del moto dei tre corpi non potevano essere risolte esplicitamente in termini di funzioni note, Poincaré intuì che ci si trovava davanti ad un problema indecidibile. Per cui egli cercò dei metodi che consentissero di dare una risposta al problema esaminando piuttosto la sorgente di tutte le soluzioni, cioé l'equazione differenziale secondo una nuova teoria, di tipo qualitativo (Gray, Chabert e Dalmedico). Tale studio gli consentì di dare una risposta alle domande: "Il punto mobile descrive una curva chiusa? Rimane sempre all'interno di una certa porzione del piano? In altre parole, con il linguaggio dell'astronomia-dice Poincaré-abbiamo indagato se l'orbita è stabile o instabile".(Kline, p. 855)

Una delle idee più importanti di Poincaré fu di riguardare le soluzioni come curve e non come funzioni, dando quindi la priorità alla geometria piuttosto che all'analisi, inaugurando così la "teoria qualitativa". Questa ancor oggi è molto usata nello studio dei sistemi dinamici caotici ed ha la particolarità di essere molto semplice ed operativa. Poincaré fece attenzione agli attrattori, particolari luoghi nello spazio delle fasi, contraddistinti da una marcata stabilitá, con la caratteristica che tutti gli stati compresi in un loro opportuno intorno (detto bacino di attrazione) convergono, seguendo le soluzioni, asintoticamente sull'attrattore. Tra gli attrattori ricordiamo i punti fissi, i cicli limite, gli attrattori strani o caotici.

Da tale lavoro Poincaré trasse molte altre considerazioni circa le soluzioni periodiche e quasi periodiche del sistema. Fra di esse vi è la scoperta notevole di una nuova classe di soluzioni non conosciute in precedenza, che egli chiamò soluzioni asintotiche. Ve ne sono di due tipi. Nel primo tipo la soluzione tende asintoticamente alla soluzione periodica quando t tende a $-\infty$, o a $+\infty$. Il secondo tipo è costituito dalle soluzioni doppiamente asintotiche, cioè dalle soluzioni che tendono ad una soluzione periodica per t che tende sia a $-\infty$ che a $+\infty$. Tali soluzioni doppiamente asintotiche sono in numero infinito. L'esistenza delle soluzioni asintotiche nelle equazioni del sistema a tre corpi implica che almeno alcuni punti P, rappresentativi di condizioni iniziali del sistema, non hanno orbite stabili, perché queste non sono limitate.

Infine, ricordiamo alcune invenzioni molto importanti per descrivere queste novità. Per prima, la mappa di Poincaré; tale metodo considera tutti i punti nei quali le traiettorie tagliano un certo piano; se il moto è caotico, avremo una macchia non strutturata, altrimenti avremo figure regolari. Altro metodo semplice ed efficace dato da Poincaré e che fornì risultati del tutto inaspettati, fu la nozione di arco trasverso, che è un arco di curva non tangente in nessun punto ad una curva integrale; per cui una curva integrale, se incontra un arco trasverso, deve attraversarlo per forza (considerando una successione di punti di intersezione $P_0, P_1, P_2, \ldots$ di una curva integrale con un arco trasverso, Poincaré riporta allora lo studio di una curva nel piano, allo studio di una successione di punti su una linea). I cicli limite e gli archi trasversi permettono così di suddividere il piano o la sfera in regioni; e, dal comportamento nell'intorno di un punto singolare, egli seppe ricavare una descrizione qualitativo preciso e globale delle curve integrali.

È evidente che il metodo qualitativo si basava su concezioni molto innovative rispetto alle idee matematiche che circolavano a quel tempo. Si può ben dire che Poincaré fu lo studioso che portò la matematica pura ad occuparsi globalmente della teoria dinamica, il che ha allargato la classe di fenomeni trattabili matematicamente.

In questo modo, per la prima volta, il caos è stato trattato in dinamica; nessuno prima di lui aveva avuto l'idea di quanto complicato potesse essere il comportamento qualitativo di equazioni differenziali apparentemente semplici.

2. Definizione di stabilità in Poincaré e l'obiezione alla sua scoperta.

Alla precisa domanda se Poincaré abbia davvero scoperto il caos, oggi non si dà una risposta universalmente condivisa. Ad esempio, è di diverso parere M. W. Parker, che partendo dalla recensione di un libro (Diacu e Holmes), passa in rassegna i lavori di Poincaré sul tema. Lo riporteremo sinteticamente.

Poincaré nell'introduzione di "*Les méthodes nouvelles*" (1892), scrive che lo scopo della meccanica celeste è "risolvere il grande problema di determinare se la legge di Newton da sola spiega tutti i fenomeni astronomici". Nel terzo volume prende in considerazione il problema della stabilità, distinguendo tre criteri di stabilità: nessuno dei tre corpi può retrocedere indefinitamente; due corpi non possono scontrarsi con ogni altro, e la distanza di questi due corpi non può diminuire sotto un determinato limite; il sistema ritorna per un infinito numero di volte vicino alla configurazione iniziale voluta (p. 848).

Poincaré chiama l'insieme di questi tre criteri "stabilità completa" e ne attribuisce l'idea a Lagrange. Nessuno dei tre criteri contraddice chiaramente la dipendenza sensibile che definiremo, fra poco. Poincaré dà ancora un'altra definizione di stabilità che in effetti è in contrasto con la dipendenza sensibile (ma non sembra che abbia notato ciò). La definizione coinvolge gli esponenti caratteristici di una soluzione periodica di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Se tutti questi esponenti hanno i quadrati reali e negativi, Poincaré chiama la soluzione stabile, altrimenti instabile. Questi esponenti sono collegati strettamente agli esponenti di Lyapunov, indicatori standard del caos; Goroff (l'editore inglese di Poincaré) offrì una definizione più dettagliata: se almeno uno degli esponenti caratteristici ha una parte reale positiva, "ciò suggerisce che esistono traiettorie vicino alla nostra soluzione periodica, ma che divergono da questa con velocità esponenziale" (Poincaré 1993, p. 152). Tuttavia, Poincaré non ha notato ciò quando ha dato la sua definizione.

Inoltre (Parker, p. 584), Poincaré sottolinea (sia nel 1890 che nel 1896) che in alcuni casi una funzione approssimata linearmente di una soluzione molto vicina a quella di partenza contiene un termine che tende all'infinito nel tempo; ed al contrario in altri casi tali approssimazioni lineari rimangono limitate; se quel termine diventa arbitrariamente grande, la soluzione effettivamente "retrocede indefinitamente", cosicché la limitatezza delle soluzioni caratterizza ancora meglio il tipo di stabilità che interessa a Poincaré.

"Nello scritto premiato del 1890, Poincaré aggiunge altre osservazioni che sono più indicative della forte dipendenza dalle condizioni iniziali. Egli considera una soluzione periodica particolare $(\varphi_i(t),\psi_i(t))$ per un sistema (Hamiltoniano) ed un'altra soluzione $(\varphi_i(t)+\xi_i,\psi_i(t)+\eta_i)$, la quale parte da una condizione iniziale vicina. Le ξ_i e le η_i qui sono le differenze fra le coordinate della soluzione originale e quelle della soluzione "perturbata"; esse dipendono dal tempo t. Poincaré nota:

"Non sempre è necessario capire questo concetto di stabilità in senso assoluto [...]. Ma possiamo dire che i valori di ξ e di η, se sono originariamente molto piccoli, restano molto piccoli per un tempo molto lungo. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che la soluzione ha, se non una stabilità di lunga-durata [séculaire], almeno una stabilità temporanea (1890, pp. 100-101).

Ciò sembra essere la sua discussione più chiara sulla definizione di stabilità nel contesto del problema dei tre corpi. Tuttavia, il passo precedente è soltanto accidentale; non è un problema reale per Poincaré; la sua proprietà di "stabilità temporanea" non è secondo lui una vera e propria stabilità, ma soltanto uno stato temporaneo che la approssima." (Parker, p. 584-585)

3. Poincaré e la definizione di caos.

Inoltre consideriamo le famose osservazioni di Poincaré in "Le hasard", il saggio del 1907, che è stato riportato in "*La Science et la Méthode*". Anche assumendo il determinismo del sistema di equazioni differenziali in esame, Poincaré osserva che *un certo* tipo di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali può rendere la previsione dell'andamento della soluzione in *un certo* senso impossibile (1929, pp 397-398). Ma Parker, afferma che il tipo di sensibilità in questione non risponde ancora alla definizione moderna. Egli lo ricava anche dagli esempi che Poincaré cita: ricorda l'esempio di Poincaré del cono in equilibrio sul vertice. Il tipo di sensibilità dalle condizioni iniziali indicato da Poincaré qui riguarda un punto nello spazio delle fasi, quello in cui il cono è in equilibrio; mentre invece la definizione moderna riguarda *ogni* punto di quello spazio. L'instabilità in ogni punto è spesso indicata come la differenza cruciale fra il caos propriamente detto e la vecchia concezione [di Hadamard, ad es.] che in *determinati* punti, le piccole variazioni diventano cruciali.

"Il punto principale del capitolo primo del libro di Diacu ed Holmes, è l'affermazione che Poincaré ha realmente scoperto il caos; ma ciò, non ha una forte conferma; [...] e, dalle informazioni che gli autori forniscono, possiamo attribuire a Poincaré la scoperta del caos così come possiamo attribuire agli antichi osservatori dei lampi la scoperta dell'elettricità. Alcune proprietà che Poincaré ha notato nel problema ristretto dei tre corpi sono certamente indicative del caos, ma non appare che Poincaré abbia notato le caratteristiche essenziali che riguardano il caos." (Parker, pp. 577-578).

4. Ambiguità delle definizioni di caos.

Il disaccordo di Parker però dipende da ciò che viene definito come caos. Parker lo ammette e perciò evidenzia alcune imprecisioni che emergono da vari studi sulla teoria del caos. Il criterio che Diacu ed Holmes considerano più importante per definire il caos è la forte dipendenza delle soluzioni dalle condizioni iniziali (detta SDIC) e la enunciano così: "solo per *brevi* intervalli di tempo possiamo garantire che le orbite che cominciano insieme, restano insieme". Perciò persino differenze molto piccole nelle condizioni iniziali possono alla fine dare differenze molto grandi nelle condizioni successive. A causa della SDIC, certi sistemi, pur deterministici e quindi prevedibili, possono essere del tutto intrattabili.

Ma, osserva Parker, generalmente la forte dipendenza dalle condizioni iniziali (SDIC) è attribuita solo ai sistemi dotati di *continuità riguardo alle condizioni iniziali;* ciò significa che piccole differenze sui dati iniziali portano a *piccole* differenze sui dati successivi. Perciò, come possono valere sia la SDIC sia la continuità? Il piccolo paradosso della compatibilità fra continuità e SDIC è dovuto alle espressioni come quella precedente ("piccole differenze negli argomenti corrispondono a piccole differenze nei valori"), le quali non dicono granché; tutto dipende dalla relatività dei concetti di "grande" e "piccolo" e da che cosa si mantiene fisso e che cosa si permette di cambiare; per esempio, la scelta e l'ordine dei quantificatori sulle variabili in gioco.

Diacu ed Holmes affermano che per stabilità s'intende la situazione per cui "soluzioni globalmente definite, con condizioni iniziali vicine, resteranno vicine *per tutto il tempo*" (Parker, p. 581). Ma cosa vuol dire esattamente "vicine"? "Il problema teorico della stabilità del sistema solare, che ha guidato le ricerche di Poincaré, è stato in gran parte concentrato sull'eventualità di fuga dei pianeti; cosicché, per un tale fine, ogni limite sulle orbite, che passano attraverso una regione data dello spazio delle fasi, dovrebbe costituire stabilità. Ma anche se esistesse una striscia o un intorno tubolare all'interno del quale si trovano tutte le orbite, il caos si può sempre realizzare in quella regione (Infatti, Poincaré trovò delle orbite caotiche confinate all'interno di un toro). Sono i confini *arbitrariamente stretti* che escludono la SDIC. In questo caso ci saranno confini più stretti *per ogni* distanza δ, tale che le orbite all'interno di questi confini non possono mai allontanarsi, così come chiede la definizione moderna di SDIC" (Parker, p. 581). Più precisamente possiamo dire che vale la SDIC quando esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X$ e per ogni intorno N di x, esistono un $y \in N$ ed un $n \geq 0$ tali che $\left|f^n(x) - f^n(y)\right| > \delta$.

Parker, quindi sostiene che non dobbiamo attribuire a Poincaré la scoperta del caos, così come non attribuiamo a Keplero la scoperta delle leggi di Newton, benché il primo ne abbia scoperto alcuni aspetti (Parker, p.582).

5. La moderna definizione matematica di caos: un problema.

Analizziamo ora la definizione di caos (Devaney, p.114) della moderna teoria del caos.

Essa è formulata per una funzione continua $f : X \to X$, su qualche spazio metrico X.

Sia V un insieme. Una soluzione continua $f : X \to X$ si dice essere caotica su V se

1. f è *topologicamente transitiva*: per ogni coppia di insiemi aperti e non vuoti $U,V \subset X$ esiste un $k > 0$ tale che $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

2. I *punti periodici* di *f* sono *densi* in *X*.
3. f *dipende sensibilmente dalle condizioni iniziali*: esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in X$ e per ogni intorno N di x, esistono un $y \in N$ ed un $n \geq 0$ tali che $\left|f^n(x) - f^n(y)\right| > \delta$.

Osserviamo che un punto x si definisce k-periodico per una funzione $f(x)$, se $\exists\ k > 0$ per cui $f^k(x) = x$.

Ma recentemente (Banks ed altri, 1992) si è dimostrato che la terza condizione data da Devaney è superflua:

Teorema. Se $f: X \to X$ è una funzione transitiva ed i suoi punti periodici formano un denso allora *f* dipende fortemente dalle condizioni iniziali.

Se poi ci restringiamo a funzioni limitate ad un intervallo si può ottenere un risultato più forte: (Vellekoop e Berglund,1994), perché ci sono ulteriori ridondanze nella definizione di caos formulata da Devaney:

Teorema. Sia I un intervallo, non necessariamente limitato, ed $f: I \to I$ una funzione continua e topologicamente transitiva. Allora 1) i punti periodici di f sono densi in I; e 2) f dipende sensibilmente dalle condizioni iniziali.

Vale a dire addirittura che le tre condizioni di Devaney, in particolari condizioni, possono ridursi ad una sola. Quindi le obiezioni di Parker poggiano su un terreno incerto.

6. Matematica costruttiva e caos.

Inoltre tutto quanto affermato finora si riferisce alla matematica classica. Ma si sa bene che la matematica classica idealizza; ad es. pensa a π con tutte le sue infinite cifre. Esiste invece una matematica, quella costruttiva, che si limita a ciò che è calcolato, cioè alle cifre conoscibili di π per mezzo di un algoritmo.

Chiariamo innanzitutto che cos'è questa matematica, sviluppata completamente nel 1967 (Bishop).

Punto fondamentale è la rinuncia all'infinito in atto; la scelta è a favore del solo infinito potenziale, inteso come "illimitato" (=senza limite massimo), non come realtà già ottenuta; e quindi a favore del principio per cui "Esiste solo ciò che è costruibile mediante un algoritmo finito". In questo modo tutta la matematica diventa molto più limitata di quella classica. Si eliminano tutti i numeri reali per i quali non si conosce un algoritmo per costruirli; ma si accettano i soliti numeri reali $\sqrt{2}, e, \pi$, in quanto ne conosciamo l'algoritmo per costruire le espressioni decimali. L'insieme dei numeri reali accettabili comunque risulta essere solo numerabile e non della potenza del continuo. Per cui le differenze fra matematica classica e matematica costruttiva non sono solo di carattere filosofico o epistemologico, ma anche di esistenza o non di particolari oggetti matematici. In più si notano dei numeri ai quali non si è abituati nell'impostazione classica: essi sono "sfuggenti", in quanto non hanno collocazione precisa. Ad esempio, $b = 0,b_1b_2b_3...$, con $b_n = 0$ se $2n$ è esprimibile come somma di due primi, oppure è uguale a 9 se $2n$ non lo è. Tale numero b sarà vicinissimo a zero, ma nessuno conosce la sua collocazione precisa sulla retta dei reali, essendo indecisa la congettura di Goldbach (Ogni numero pari è somma di due primi).

Per cui viene a cambiare un concetto cardine della matematica, quello del continuo; infatti, mentre, in matematica classica i singoli punti si fondono fra loro, ma nello stesso tempo se ne può estrarre con precisione assoluta uno particolare, in matematica costruttiva ogni punto è un intervallo che, seppur riducibile, in generale non è riconducibile ad un solo punto.

Inoltre la matematica costruttiva introduce un concetto molto importante, sia in ambito scientifico che in ambito filosofico ed epistemologico: quello di indecidibilità (un problema è in decidibile se non esiste un algoritmo che lo risolva in tutti i casi). Per avere un idea di un problema indecidibile basti ad esempio considerare la proposizione *a è un numero trascendente*. Poiché l'insieme dei numeri reali, e quindi anche trascendenti, ha potenza maggiore del numerabile, mentre l'insieme di tutte le possibili dimostrazioni ha potenza numerabile (essendo sottoinsieme di tutte le possibili combinazioni di segni), allora non sarà possibile dimostrare l'affermazione di cui sopra per ogni numero trascendente.

In che cosa cambia il caos, se viene letto dal punto di vista della matematica costruttiva, dove ogni numero è, come nella realtà, solo approssimabile?

Ad un primo sguardo la definizione di Devaney appare indecidibile: come trovare il particolare valore di k per cui vale la proprietà? Se questo k fosse un numero così grande da non essere stato calcolato finora, il punto sarebbe periodico o no?

Inoltre notiamo che qui c'è un quantificatore esistenziale: tale quantificatore costruttivamente non ha senso (perché è un'operazione essenzialmente infinitaria), a meno che non possa essere fornito di un adeguato metodo di calcolo costruttivo; e qui non si vede in che modo esso possa essere sostituito equivalentemente da un solo algoritmo finito. Ci accorgiamo allora che tale definizione, posta proprio alla base della caratterizzazione di caos, generalizza semplicemente la definizione di quali punti siano razionali e irrazionali mediante il taglio di Dedekind; anche qui c'è un quantificatore l'$\exists$; e decidere se un numero è razionale o irrazionale è un classico problema indecidibile. Quindi tale definizione non è "costruttiva".

Di solito infatti si affronta lo studio del caos con lo spirito di voler inglobare tutti i casi possibili sotto la definizione più generale; ma allora cadiamo nelle indecidibilità. Con la matematica costruttiva invece dobbiamo concludere che la teoria del caos non può essere universale, ma deve limitarsi a dare definizioni e teoremi solo in casi ristretti (sia pure il più generale possibile). Quindi per la matematica costruttiva è inutile cercare negli scritti di Poincaré una definizione universale di caos, egli poteva darne solo di parziali [e bene ha fatto a limitarsi nel caso dell'instabilità del cono posto in equilibrio sulla punta a studiare la stabilità del solo vertice, in quanto sarebbe stato impossibile verificarlo concretamente per tutti i punti del cono, come sostiene Parker].

7. Costruttivismo nei lavori di Poincaré.

Si sa bene che Poincaré fu un semi-intuizionista, cioè in parte sostenitore della matematica che esclude l'infinito in atto. Allora cerchiamo di analizzare il lavoro di Poincaré mediante la matematica costruttiva, e cerchiamo di capire se questo ci offre strumenti efficienti e concreti di interpretazione. Cioè vediamo con un semplice caso, se secondo la matematica costruttiva, lo studio di Poincaré era sufficiente; così da avere un punto fermo nello studio costruttivo della teoria del caos.

Consideriamo il caso particolare e semplice di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x} = a\dot{x} + b(cx + dy) \Leftrightarrow \ddot{x} - \dot{x}(a+d) + (ad - bc) = 0$$

le cui soluzioni sono ottenute con il calcolo delle soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Poincaré ha classificato i punti singolari e la loro stabilità in base al segno degli autovalori in certe condizioni matematiche; in effetti queste possono essere ripetute in matematica costruttiva pur di escludere un intorno, anche molto piccolo, attorno al valore zero dei parametri. Infatti bisognerà tener presente, che in matematica costruttiva l'uguaglianza precisa a zero è un problema indecidibile. Infatti in matematica costruttiva un punto (come quello del numero sfuggente definito nel paragrafo precedente) è rappresentato da un intervallino, che, seppur piccolo, non è riconducibile in generale ad un singolo punto; per cui le ambiguità nascono per punti di questo tipo, posti nell'intorno dell'origine, punti in corrispondenza dei quali non possiamo affermare né che sono uguali, né che sono maggiori, né che sono minori di zero. Per eliminare tali indecidibilità, basta però aggiungere alle disuguaglianze anche un $\neq 0$, in modo da considerare solo quei numeri distinti dall'origine, per i quali non è presente tale ambiguità. In questo modo abbiamo un metodo operativo, che seppure esclude alcuni casi fors'anche utili, comunque è ben applicabile in tutti gli altri (per i quali occorrerà un supplemento di indagine, caso per caso).

In più c'è un altro importante risultato di Poincaré, che, insieme al precedente, aiuta lo studio del caos in matematica costruttiva. Poincaré stabilì una relazione che lega fra di loro i punti singolari di differente tipo:

$$N - C + F = 2$$

dove N è il numero di nodi, C è il numero di colli e F è il numero di fuochi. Considerandola ovviamente valida anche in matematica costruttiva, tale formula ci permette di stabilire quanti punti singolari dovremo cercare; quindi la precedente incertezza, data dagli intorni dello zero dei parametri può essere ridotta presupponendo che debba valere la relazione suddetta, che afferma una proprietà generalissima.

Così abbiamo un punto fermo con cui guardare al caos.

1. Nodo stabile:

   Matematica classica: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

   Matematica costruttiva: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, se $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 0$

2. Nodo instabile:

   Matematica classica: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

   Matematica costruttiva: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, se $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 0$

3. Sella (instabile) :

   Matematica classica: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

   Matematica costruttiva: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, se $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 0$

4. Fuoco stabile:

   Matematica classica: $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$, con $a < 0$

   Matematica costruttiva: $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$, con $a < 0$, se $|a| \neq 0$

5. Fuoco instabile:

   Matematica classica: $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$, con $a > 0$

   Matematica costruttiva: $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$, con $a > 0$, se $|a| \neq 0$

Diamo un altro esempio; consideriamo un'equazione non lineare della forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

con P e Q analitiche in x e y. La stabilità delle soluzioni è analizzata, come prima, mediante l'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} Q_x(x_0, y_0) - \lambda & P_x(x_0, y_0) \\ Q_y(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dove (x_0, y_0) è un punto singolare. In generale le soluzioni saranno stabili se le parti reali delle radici dell'equazione caratteristica in λ sono, per la matematica classica, < 0 e per la matematica costruttiva < 0 e $\neq 0$.

8. Poincaré ha scoperto il caos costruttivo.

Vogliamo ora rispondere alla domanda sollevata da Parker.

Innanzitutto, c'è da chiedersi se le definizioni teoriche e le conoscenze riguardo al caos che abbiamo oggi ci sarebbero mai state senza l'opera rivoluzionaria di Poincaré. Poi occorre notare che l'esempio del cono prima citato è solo un esempio e non una definizione teorica. In più, come Parker ammette più volte, Poincaré ha ben compreso il concetto di forte dipendenza dalle condizioni iniziali, e grazie allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni ed al teorema della ricorrenza (le traiettorie ritornano in un dato intorno di un punto dopo un tempo infinito) il concetto di comportamento caotico fu introdotto per la prima volta in dinamica.

Nel pensare alla mappa di Poincaré, all'arco traverso, ai cicli limite, alla stabilità, alla prima applicazione di ritorno, al teorema della ricorrenza, alle soluzioni doppiamente asintotiche è innegabile che Poincaré avesse in mente gran parte del caos in senso moderno, essendo questi i metodi odierni utili per stabilire se le soluzioni di un'equazione differenziale sono caotiche o meno. Si può solo dire piuttosto che egli non lo ha definito matematicamente del tutto. Ma questa definizione di fatto non è stata tuttora ottenuta dopo quarant'anni di ricerche in grande stile; e per di più dipende dal tipo di matematica che si usa, per cui in matematica costruttiva essa non c'è. Allora è evidente che, anche se egli non ha dato una definizione astratta e generale di caos o di funzione caotica, a lui possiamo attribuire la "scoperta" del caos, perché a lui va il grande merito di averci lasciato in casi concreti dei metodi operativi per la risoluzione dei problemi, molto più utili di tante definizioni teoriche non decidibili.

Bibliografia:

- O. Aberth, 1980, "Computable Analysis", Mc Graw-Hill, New York .

-J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, 1992, "On Devaney's definition of chaos", The American Mathematical Monthly 99, 865.

-J.Barrow-Green, 1997, "Poincaré and the three body problem", American Mathematical Society.

- E. Bishop: 1967, "Foundations of Constructive Mathematics", Mc Graw-Hill, New York.

- J.-L. Chabert e A.D. Dalmedico, "Chaos et Déterminisme", Seuil, Paris, 1992, ch. 10, 274-304.

-R. L. Devaney, 1992, "A first course in chaotic dynamical sistems", Addison-Wesley.

-F. Diacu, P. Holmes, 1996, "Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability", Princeton University Press.

-J. Gray, "Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system", in P.H. Harman e A.E. Shapiro, "The investigation of Difficult Things", Cambridge, 1992, 503-524.

- M. W. Parker, "Did Poincaré really discover chaos?", Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 29 (1998) 575-588.

-H. Poincaré, 1993, "New Methods of Celestial Mechanics", edito da D. L. Goroff (New York: American Institute of Physics).

-H. Poincaré, 1912, " Science et Méthode", Flammarion, Paris.

- H. Poincaré, 1890, "Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique", Acta Mathematica 13, 1-270.

-C. Saccone, "La teoria del caos, da Poincaré alla matematica costruttiva", tesi di laurea in Matematica, Università di Napoli, a.a. 2000-2001

-M. Vellekop, R. Berglund, 1994, "On Intervals, Transitivity=Chaos", The American Mathematical Monthly, 101, 353-355.

-M. Kline, "Il pensiero matematico dall'antichità ai tempi moderni", Einaudi, 1994, 847-861.